

Аналитическая геометрия

Аналитическая геометрия – раздел геометрии, в котором простейшие линии и поверхности (прямые, плоскости, кривые и поверхности второго порядка) исследуются средствами алгебры.

Линией на плоскости называют геометрическое место точек $M(x;y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x,y) = 0, \quad (1)$$

где $F(x,y)$ – многочлен степени n .

Поверхностью называют геометрическое место точек $M(x;y;z)$, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x,y,z) = 0, \quad (2)$$

где $F(x,y,z)$ – многочлен степени n .

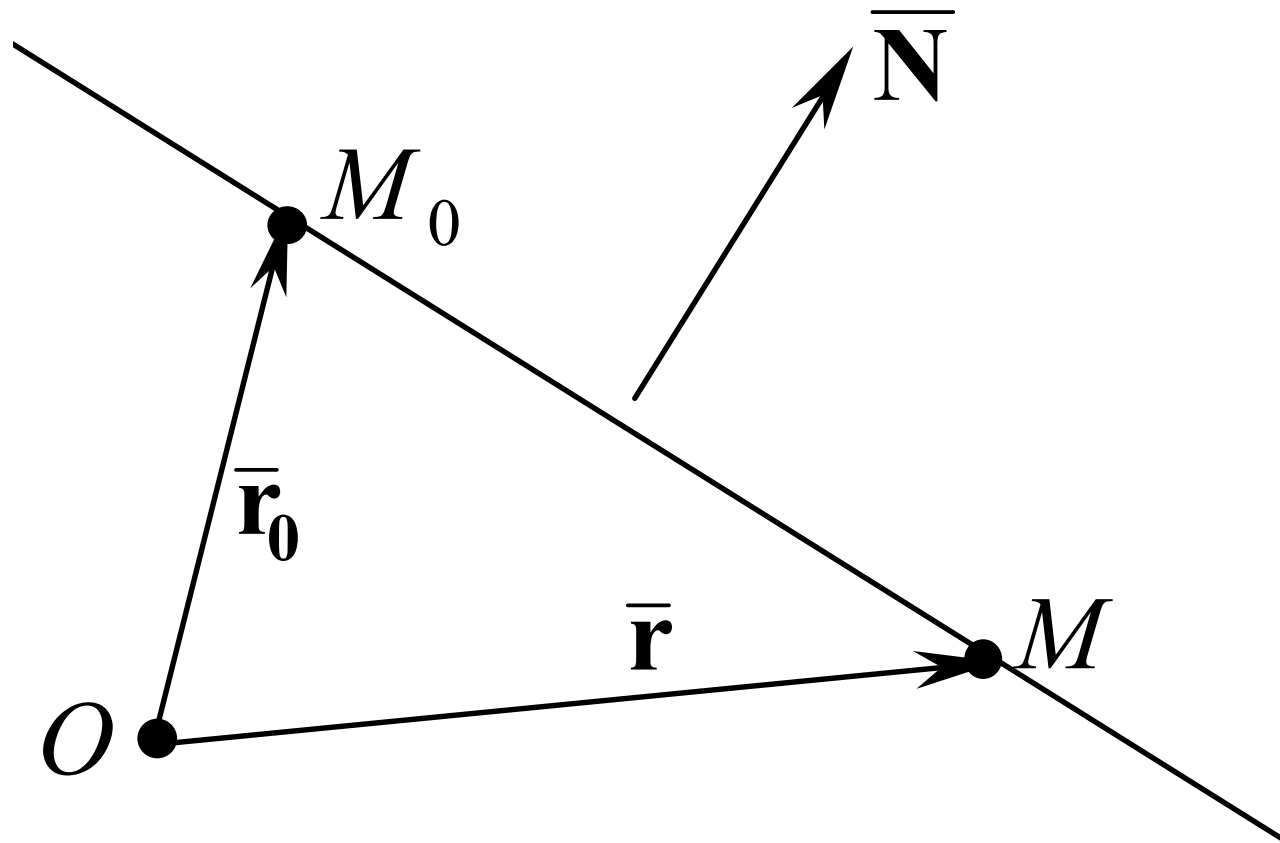
Линией в пространстве называют пересечение двух поверхностей.

Уравнения (1) и (2) называют **общими уравнениями линии на плоскости и поверхности** соответственно. Степень многочлена $F(x,y)$ ($F(x,y,z)$) называют **порядком линии (поверхности)**.

§ 11. Прямая на плоскости

1. Общее уравнение прямой на плоскости и его исследование

ЗАДАЧА 1. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{A; B\}$.



Уравнения $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N}) = 0$ и $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ называются **уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{A; B\}$** (в векторной и координатной форме соответственно).

Уравнения $(\vec{r}, \vec{N}) + C = 0$ и $Ax + By + C = 0$ называются **общим уравнением прямой на плоскости** (в векторной и координатной форме соответственно).

ВЫВОДЫ:

- 1) Прямая на плоскости является линией первого порядка. В общем случае она задается уравнением $Ax + By + C = 0$, где A, B, C – числа.
- 2) Коэффициенты A и B не обращаются в ноль одновременно, так как с геометрической точки зрения это координаты вектора, перпендикулярного прямой.

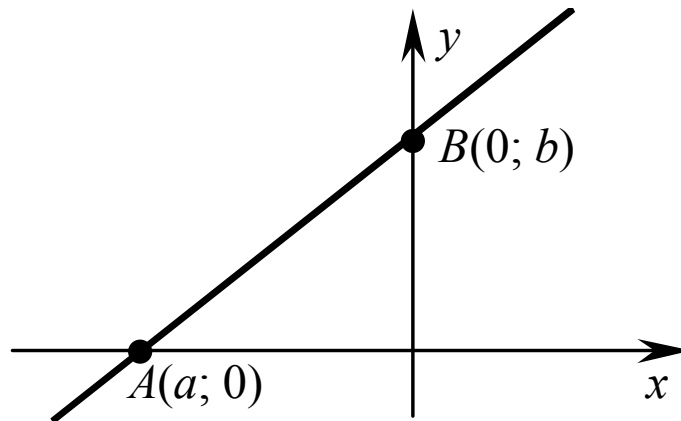
Вектор, перпендикулярный прямой, называют **нормальным**

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ.

Если в уравнении $Ax + By + C = 0$ все коэффициенты A, B и C отличны от нуля, то уравнение называют **полным**; если хотя бы один из коэффициентов равен нулю – уравнение называют **неполным**.

1) Пусть общее уравнение прямой – полное. Тогда его можно записать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (5)$$

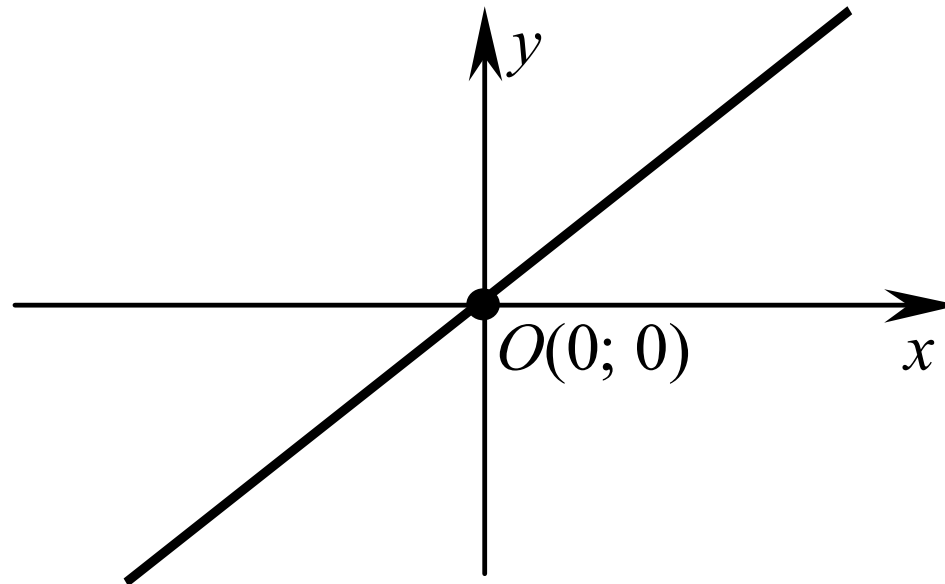


С геометрической точки зрения a и b – отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно. Уравнение (5) называют **уравнением прямой в отрезках**.

2) Пусть в общем уравнении прямой коэффициенты A и B – ненулевые, а $C = 0$, т.е. уравнение прямой имеет вид

$$Ax + By = 0.$$

Такая прямая проходит через начало координат $O(0;0)$.

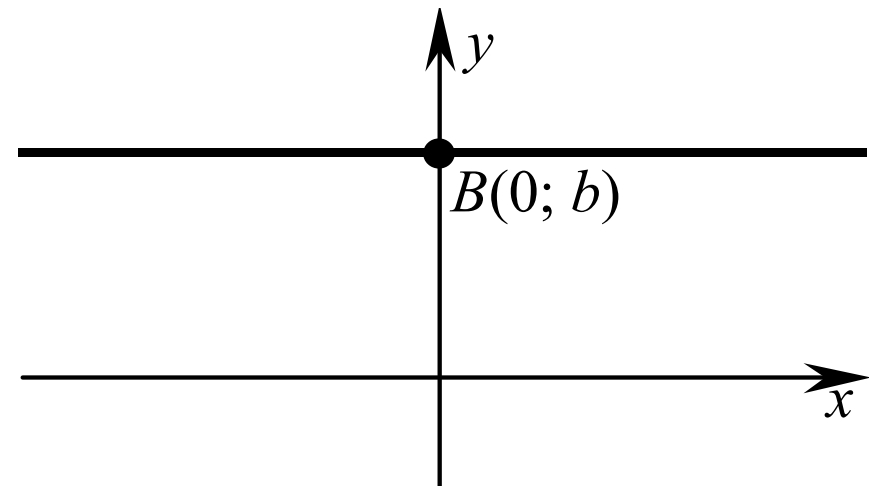
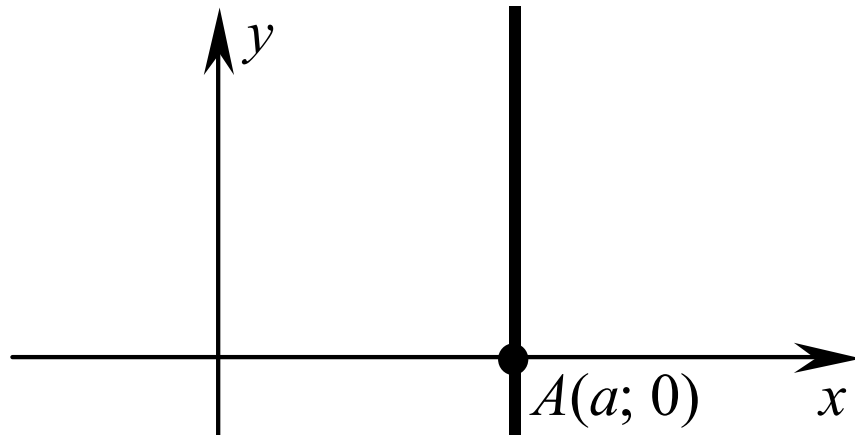


3) Пусть в общем уравнении прямой один из коэффициентов A или B – нулевой, а $C \neq 0$, т.е. уравнение прямой имеет вид

$$Ax + C = 0 \quad \text{или} \quad By + C = 0.$$

Эти уравнения можно записать в виде

$$x = a \quad \text{и} \quad y = b.$$



Таким образом, *прямая в уравнении которой отсутствует одна из координат, параллельна оси отсутствующей координаты*

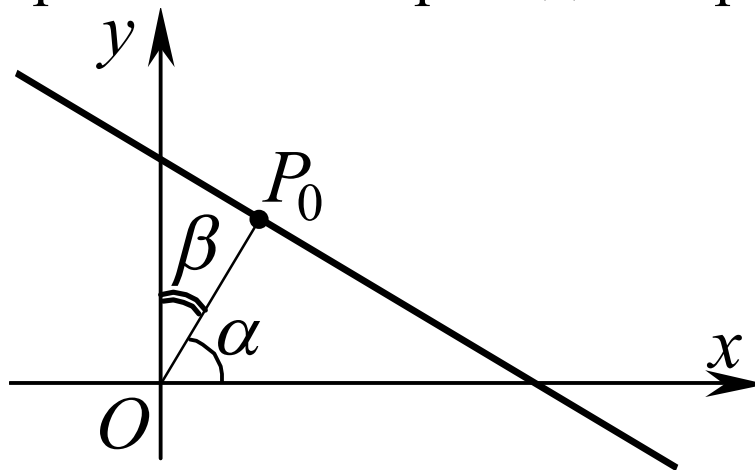
4) Пусть в общем уравнении прямой $C = 0$ и один из коэффициентов A или B тоже нулевой, т.е. уравнение прямой имеет вид $Ax = 0$ или $Bu = 0$.

Эти уравнения можно записать в виде

$$x = 0 \text{ (уравнения координатной оси } Oy)$$

и $y = 0$ (уравнения координатной оси Ox).

Замечание. Пусть прямая ℓ не проходит через $O(0;0)$.



Обозначим:

- 1) $P_0(x_0; y_0)$ – основание перпендикуляра, опущенного на ℓ из начала координат,
- 2) $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$ – орт вектора $\overline{OP_0}$,
- 3) $p = |\overline{OP_0}|$ – расстояние от начала координат до прямой ℓ .

Тогда уравнение ℓ можно записать в виде

$$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + C = 0,$$

где $C = -p$ (доказать самим).

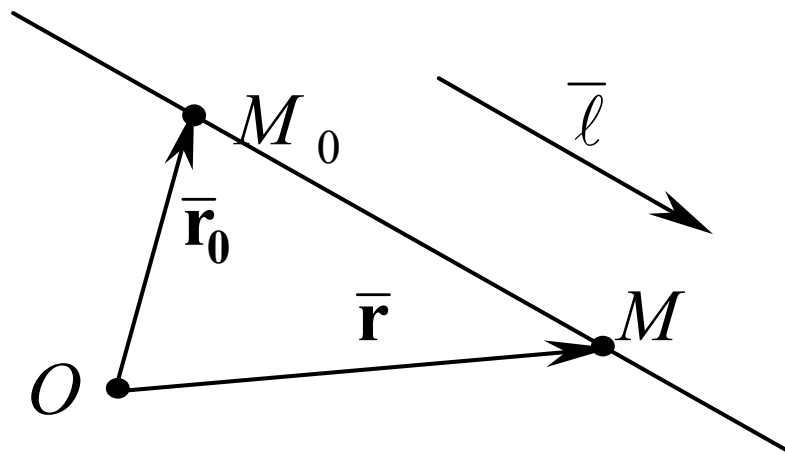
Этот частный случай общего уравнения прямой называется ***нормальным уравнением прямой.***

2. Другие формы записи уравнения прямой на плоскости

1) Параметрические уравнения прямой

ЗАДАЧА 2. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$, параллельно вектору $\vec{\ell} = \{m; n\}$.

Вектор, параллельный прямой, называют **направляющим вектором** этой прямой.



Уравнение $\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{\ell}$ и систему уравнений
$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot m, \\ y = y_0 + t \cdot n. \end{cases}$$

называют **параметрическими уравнениями прямой** (в векторной и координатной форме соответственно).

2) Каноническое уравнение прямой на плоскости

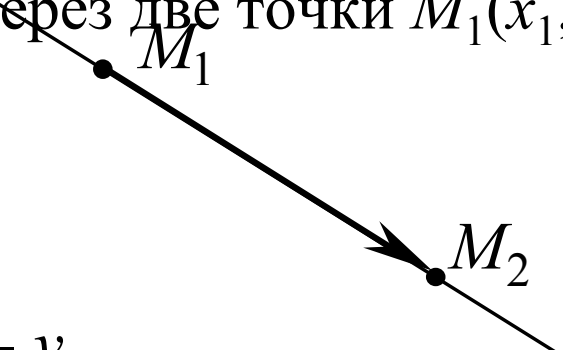
Пусть в задаче 2 вектор $\vec{\ell}$ не параллелен ни одной из координатных осей (т.е. $m \neq 0$ и $n \neq 0$).

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

Уравнение $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$ называют **каноническим уравнением прямой на плоскости**.

3) Уравнение прямой, проходящей через две точки – частный случай канонического уравнения прямой.

Пусть прямая проходит через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.



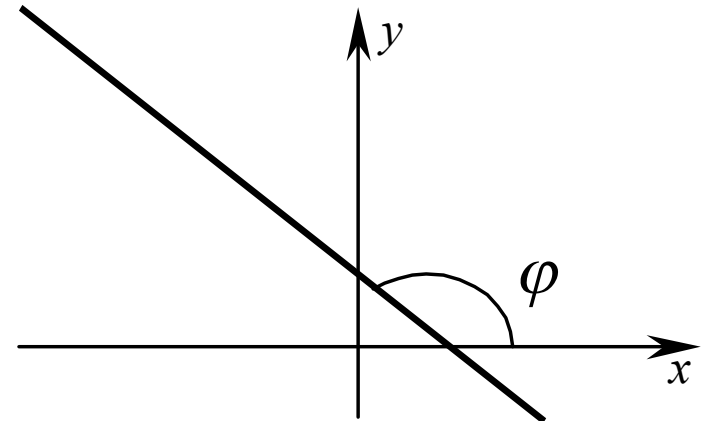
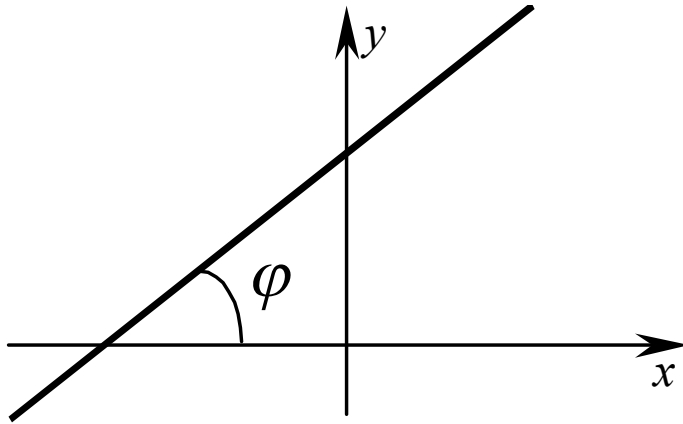
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Уравнение $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ называют **уравнением прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$** .

4) Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть прямая l не параллельна оси Ox . Тогда она пересекается с Ox , образуя при этом две пары вертикальных углов.

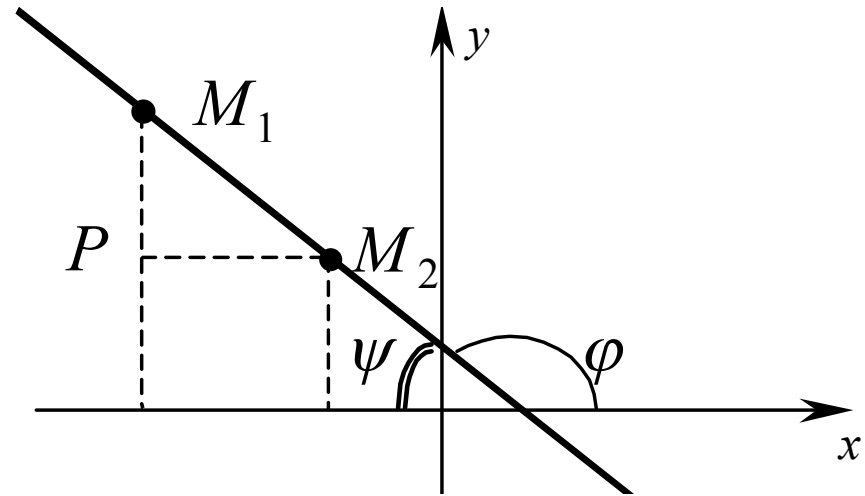
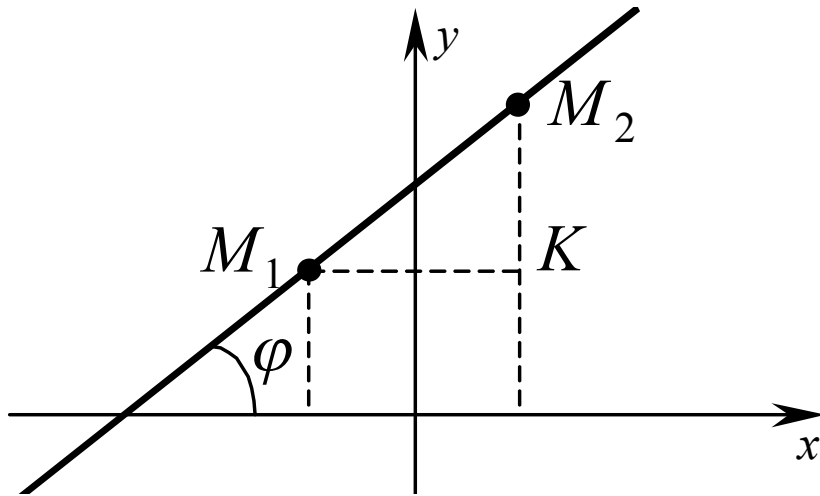
Угол φ , отсчитываемый от оси Ox к прямой l против часовой стрелки, называют **углом наклона прямой l к оси Ox** .



Число $k = \operatorname{tg}\varphi$ (если оно существует, т.е. если прямая l не параллельна оси Oy) называют **угловым коэффициентом прямой**.

Для прямой, параллельной оси Ox , угол наклона прямой к оси Ox считают равным нулю. Следовательно, угловой коэффициент такой прямой $k = \operatorname{tg}0 = 0$.

Пусть прямая ℓ не параллельна оси Ox и Oy и проходит через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (где $x_1 < x_2$). Найдём угловой коэффициент этой прямой.



Получили: $k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Уравнение прямой, проходящей через две точки перепишем в виде:

$$y - y_1 = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_k \cdot (x - x_1)$$

Уравнение $y - y_1 = k \cdot (x - x_1)$ – это **уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей угловой коэффициент k .**

Перепишем это уравнение в виде $y = kx + b$ (где $b = y_1 - kx_1$). Его называют **уравнением прямой с угловым коэффициентом**. С геометрической точки зрения b – отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy .

Замечание.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом было получено в предположении, что прямая не параллельна оси Ox и Oy . Для прямой, параллельной Ox общее уравнение можно рассматривать как уравнение с угловым коэффициентом.

Действительно, уравнение такой прямой

$$y = b \quad \text{или} \quad y = 0 \cdot x + b,$$

где $k = 0$ – угловой коэффициент прямой.

3. Взаимное расположение прямых на плоскости

На плоскости две прямые могут:

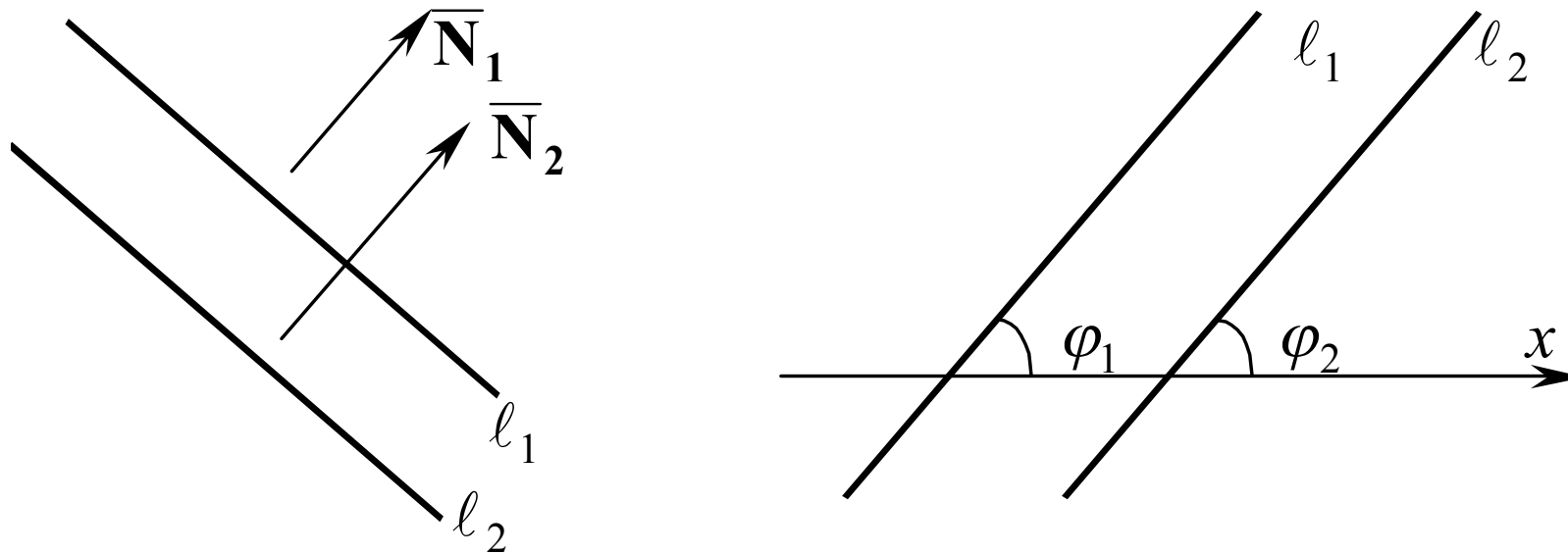
- а) быть параллельны,
- б) пересекаться.

Пусть уравнения прямых l_1 и l_2 имеют вид:

$$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{или} \quad y = k_1x + b_1$$

$$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \text{или} \quad y = k_2x + b_2$$

1) Пусть прямые параллельны:



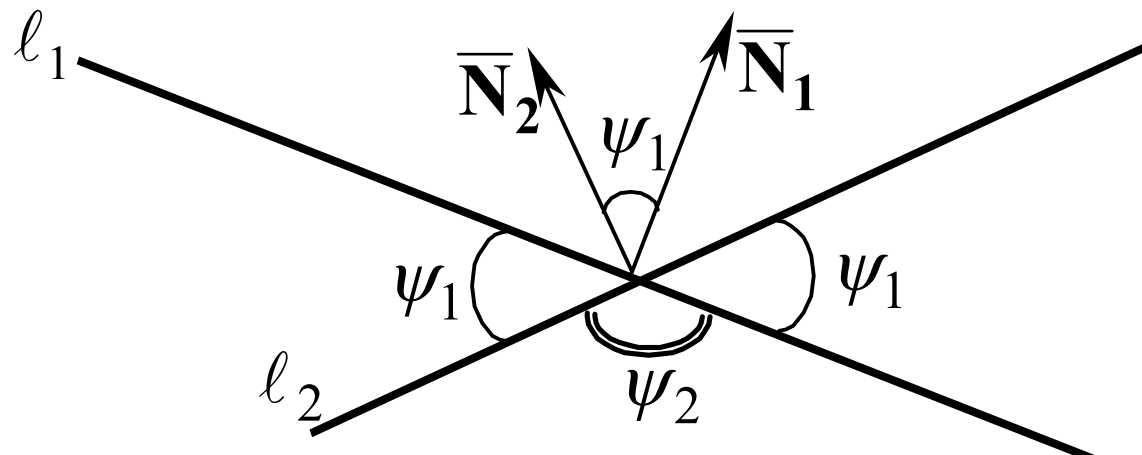
Получаем, что *прямые l_1 и l_2 параллельны тогда и только тогда, когда в их общих уравнениях коэффициенты при соответствующих неизвестных пропорциональны, т.е.*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

или их угловые коэффициенты равны, т.е.

$$k_1 = k_2.$$

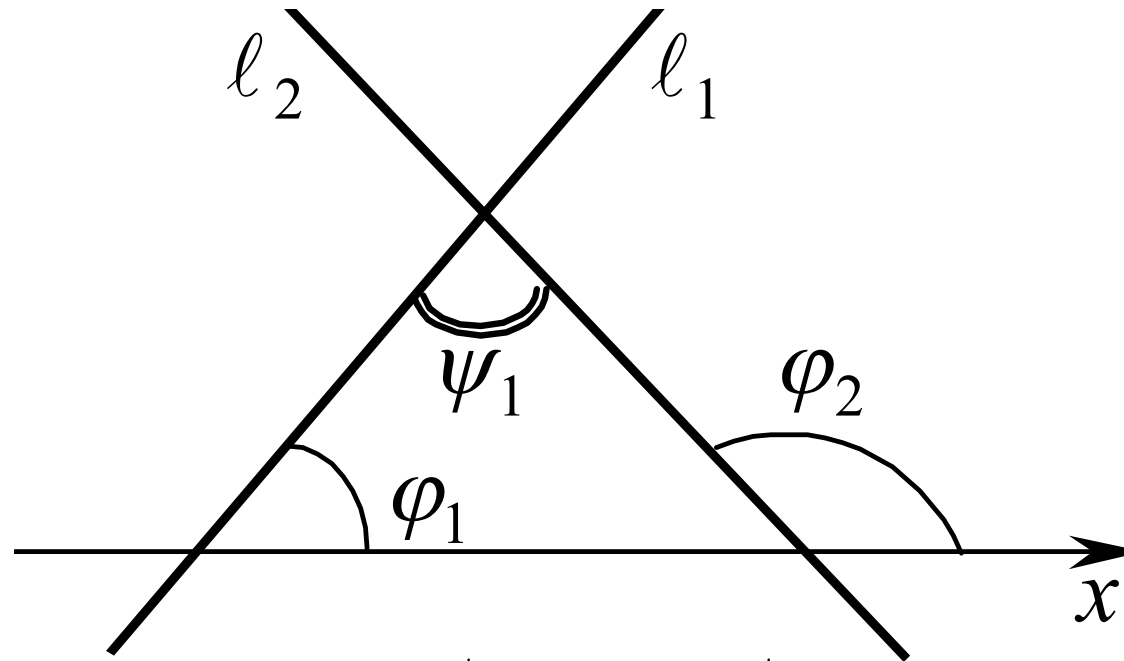
2) Пусть прямые пересекаются



$$\cos \psi_{1,2} = \pm \frac{|(\bar{N}_1, \bar{N}_2)|}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|} = \pm \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}}$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

Критерий перпендикулярности прямых, заданных общими уравнениями: $(\bar{N}_1, \bar{N}_2) = A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$



$$\operatorname{tg} \psi_{1,2} = \pm \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \right|$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

Критерий перпендикулярности прямых, имеющих угловые коэффициенты k_1 и k_2 :

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

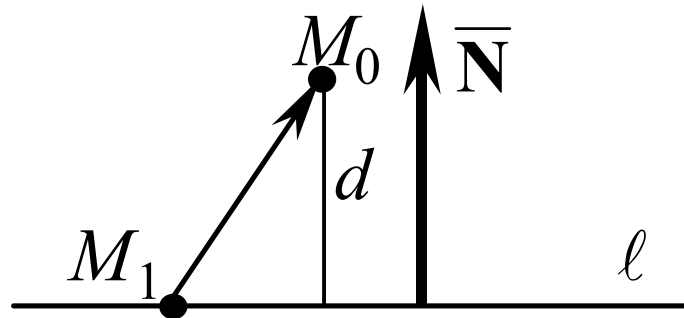
4. Расстояние от точки до прямой

ЗАДАЧА 3. Пусть прямая ℓ задана общим уравнением

$$Ax + By + C = 0,$$

$M_0(x_0; y_0)$ – точка, не принадлежащая прямой ℓ .

Найти расстояние от точки M_0 до прямой ℓ .



$$d = \frac{|(\bar{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{M}_1\mathbf{M}_0})|}{|\bar{\mathbf{N}}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$