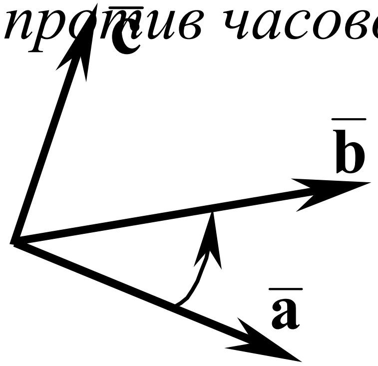
§9. Нелинейные операции на множестве векторов

1. Скалярное произведение векторов
2. Векторное произведение векторов
3. Смешанное произведение векторов

2. Векторное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Тройка векторов* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$ *называется* ***правой***, *если поворот от вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *к вектору* $\bar{\mathbf{b}}$ *на меньший угол ви-
ден из конца вектора* $\bar{\mathbf{c}}$ *против часовой стрелки.*



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Векторным произведением*** *двух ненулевых векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *называется вектор* $\bar{\mathbf{c}}$, *удовлетворяющий следующим условиям:*

1) $|\bar{\mathbf{c}}| = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \sin\varphi$, *где* φ *– угол между векторами* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$;

2) *вектор* $\bar{\mathbf{c}}$ *ортогонален векторам* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$;

3) *тройка векторов* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$ *– правая.*

Если хотя бы один из векторов $\bar{\mathbf{a}}$ *или* $\bar{\mathbf{b}}$ *нулевой, то их векторное произведение полагают равным нулевому вектору.*

Обозначают: $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ или $\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}$.

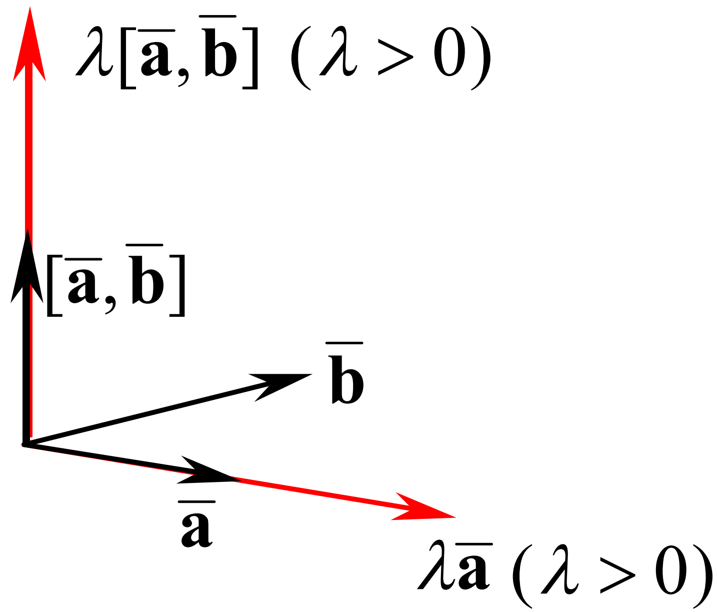
СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

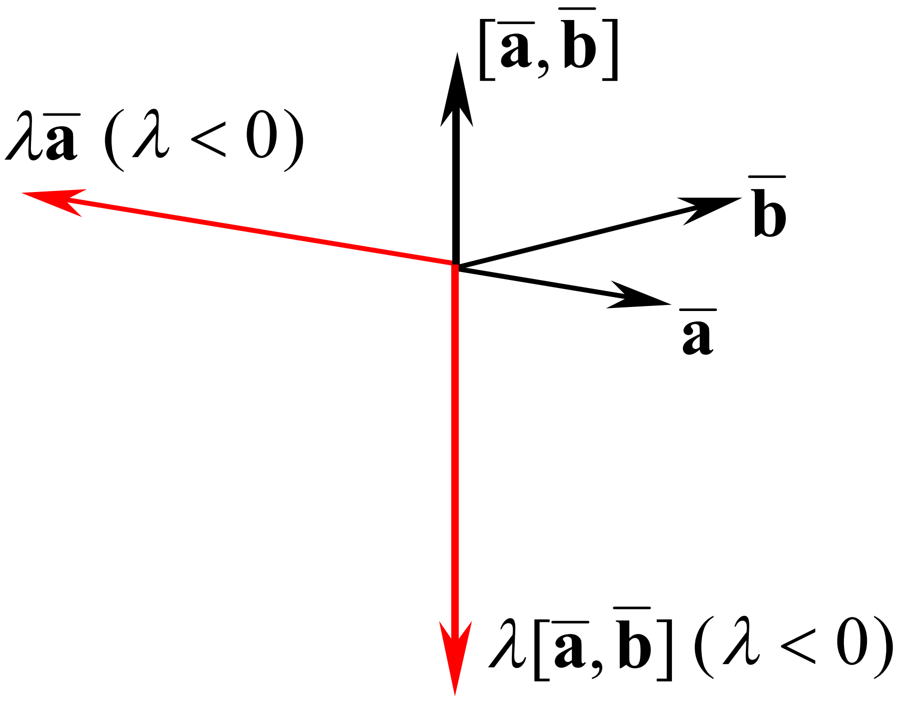
1) *При перестановке векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *их векторное произведение меняет знак*, т.е.

$$[\,\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}\,] = -[\,\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{a}}\,]\,.$$

2) *Числовой множитель любого из двух векторов можно вынести за знак векторного произведения* , т.е.

$$[\,\lambda\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}\,] = [\,\bar{\mathbf{a}},\lambda\bar{\mathbf{b}}\,] = \lambda\,[\,\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}\,]\,.$$





3) *Если один из векторов записан в виде суммы, то векторное произведение тоже можно записать в виде суммы.*

А именно: $[\,\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2 , \bar{\mathbf{b}}\,] = [\,\bar{\mathbf{a}}_1 , \bar{\mathbf{b}}\,] + [\,\bar{\mathbf{a}}_2 , \bar{\mathbf{b}}\,]$.

$$[\,\bar{\mathbf{a}} , \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2\,] = [\,\bar{\mathbf{a}} , \bar{\mathbf{b}}_1\,] + [\,\bar{\mathbf{a}} , \bar{\mathbf{b}}_2\,] .$$

4) Критерий коллинеарности векторов .

Ненулевые векторы $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *коллинеарные* $\Leftrightarrow$ *их векторное произведение равно нулевому вектору .*

5) Геометрический смысл векторного произведения .

Модуль векторного произведения неколлинеарных векторов $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах .*

6) *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *имеют координаты*: $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x\,;\,a_y\,;\,a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x\,;\,b_y\,;\,b_z\}$, *то*

$$[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}]=\left\{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right\}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

7) Механический смысл векторного произведения.

Если вектор $\bar{\mathbf{F}}$ *это сила, приложенная к точке* M , *то векторное произведение*

$$\left[\overline{\mathbf{OM}},\overline{\mathbf{F}}\right]$$

представляет собой момент силы $\bar{\mathbf{F}}$ *относительно точки* O .

3. Смешанное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Смешанным произведением трех векторов* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$ *называется число, равное скалярному произведению вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на векторное произведение векторов* $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$, *т.е.*

$$(\bar{\mathbf{a}}, [\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}]) \ .$$

Обозначают: $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})$ или $\bar{\mathbf{a}}\,\bar{\mathbf{b}}\,\bar{\mathbf{c}}$.

СВОЙСТВА СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

1) *При циклической перестановке векторов* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$ *их смешанное произведение не меняется,* т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{a}}) = (\bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}).$$

2) *При перестановке любых двух векторов их смешанное произведение меняет знак.*

3) *Числовой множитель любого из трех векторов можно вынести за знак смешанного произведения*, т.е.

$$(\lambda\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = (\overline{\mathbf{a}}, \lambda\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \lambda\overline{\mathbf{c}}) = \lambda(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}).$$

4) *Если один из векторов записан в виде суммы, то смешанное произведение тоже можно записать в виде суммы.*

А именно:

$$(\overline{\mathbf{a}}_1 + \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = (\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) + (\overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}),$$

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}_1 + \overline{\mathbf{b}}_2, \overline{\mathbf{c}}) = (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}_1, \overline{\mathbf{c}}) + (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}_2, \overline{\mathbf{c}}),$$

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}_1 + \overline{\mathbf{c}}_2) = (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}_1) + (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}_2).$$

5) Критерий компланарности векторов.

Ненулевые векторы $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$ *компланарны* $\Leftrightarrow$ *их смешанное произведение равно нулю .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

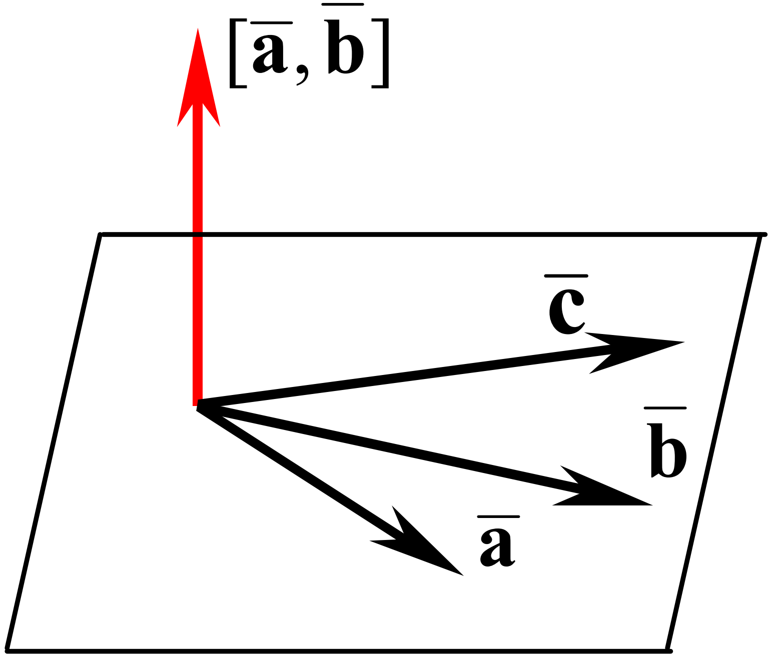


рис. 1

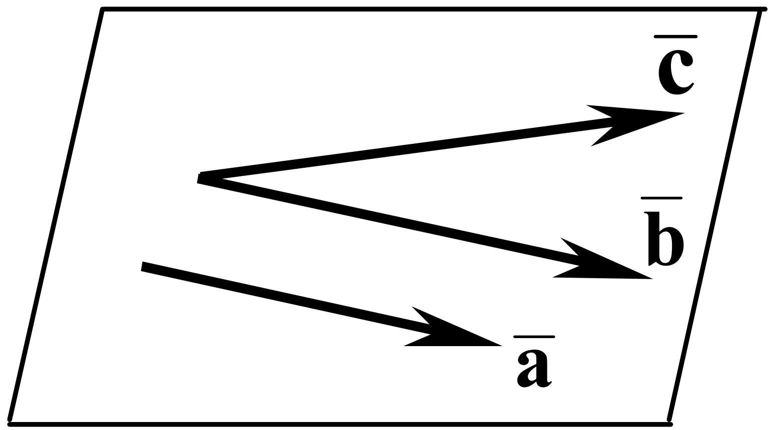


рис. 2

6) *Если* $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) > 0$, *то* $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$ *образуют правую тройку.*

Если $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) < 0$, *то тройка векторов* $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$ *– левая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

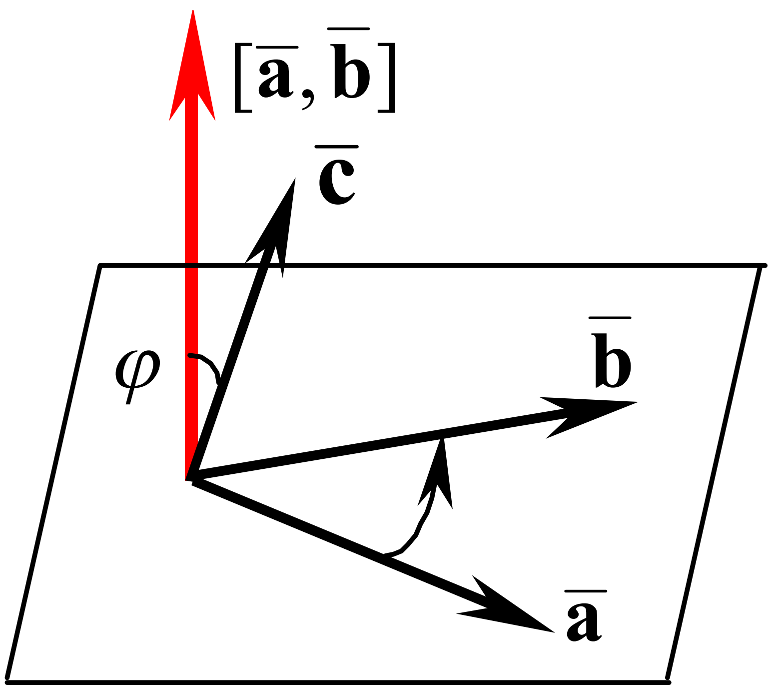


рис. 3

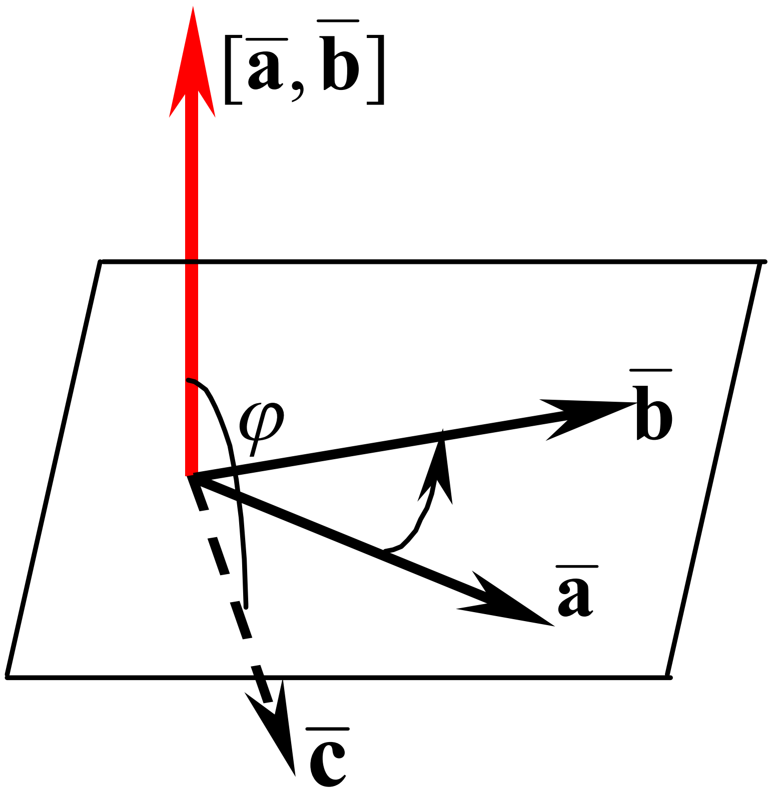


рис.4

7) Геометрический смысл смешанного произведения .

Модуль смешанного произведения некомпланарных векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ *равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

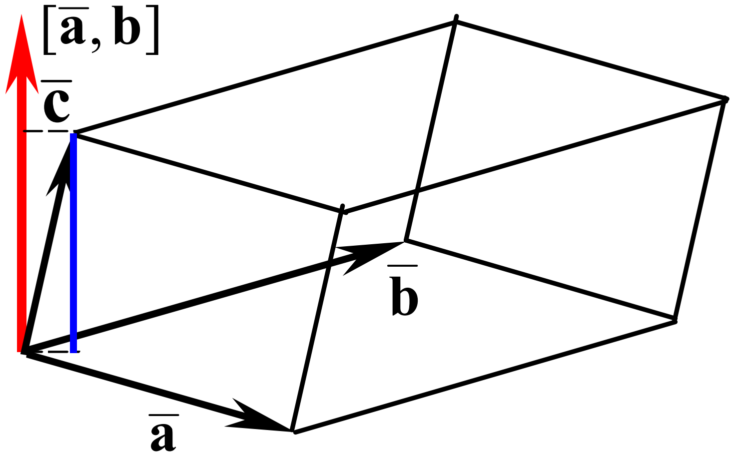


рис. 5

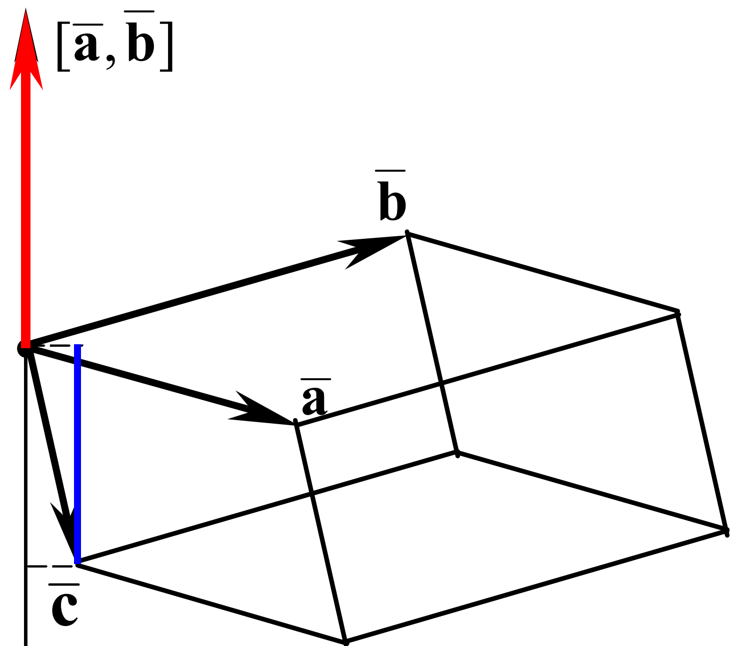


рис. 6

8) Следствие свойства 7.

Объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$, *равен* 1/6 *модуля их смешанного произведения*.

9) *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ *имеют координаты*:

$$\bar{\mathbf{a}} = \{a_x\,;\, a_y\,;\, a_z\},\quad \bar{\mathbf{b}} = \{b_x\,;\, b_y\,;\, b_z\},\quad \bar{\mathbf{c}} = \{c_x\,;\, c_y\,;\, c_z\},$$

то

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$