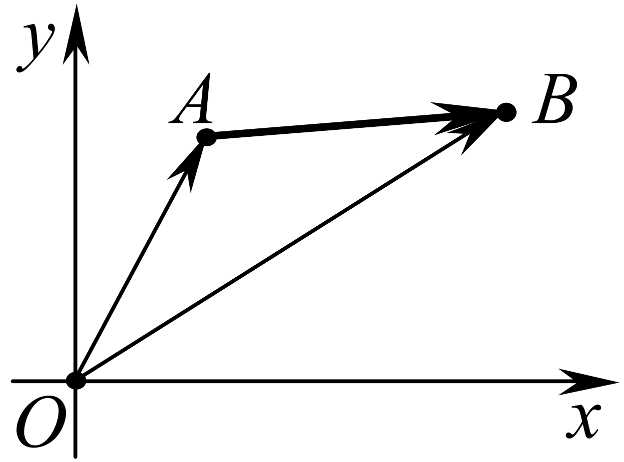
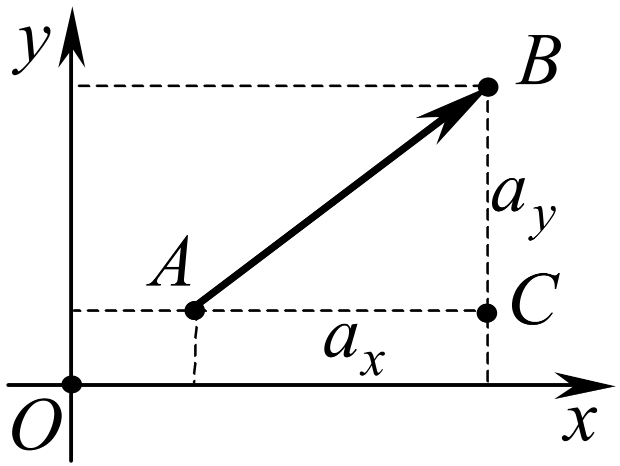
§8. Простейшие задачи векторной алгебры

Пусть на плоскости (в пространстве) задана декартова прямоугольная система координат. Выберем в пространстве $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) декартов прямоугольный базис **i, j, k** (**i, j**).

ЗАДАЧА 1. Найти координаты вектора $\overline{\mathbf{AB}}$, если известны декартовы координаты начала и конца вектора.



ЗАДАЧА 2. Найти длину вектора, если известны его координаты в декартовом прямоугольном базисе.



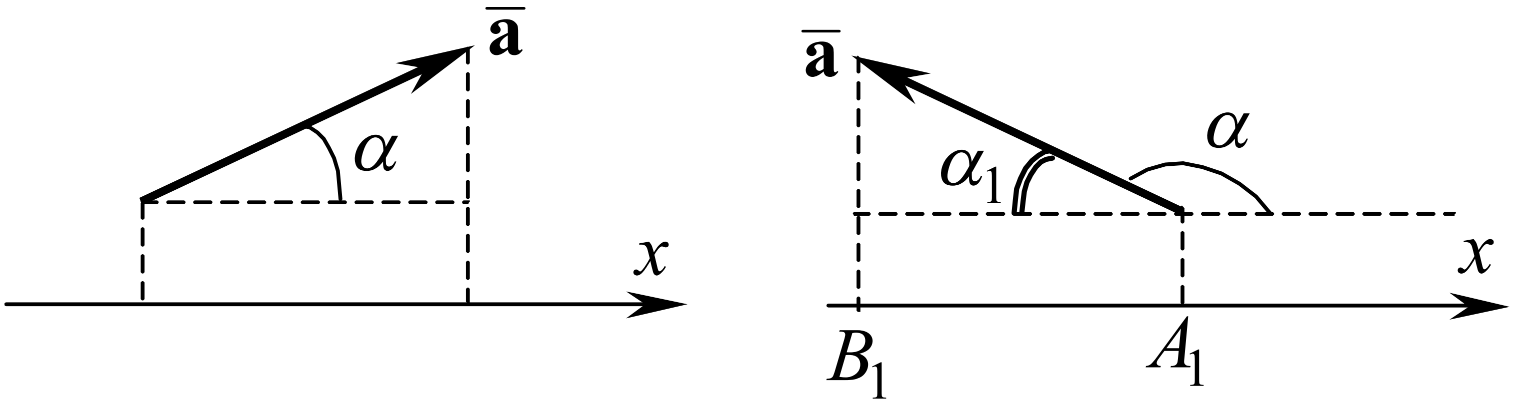
ЗАДАЧА 3. Известны координаты вектора. Найти координаты его орта.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Ортом*** *вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *называется вектор* $\bar{\mathbf{a}}_0$, *сонаправленный с вектором* $\bar{\mathbf{a}}$ *и имеющий единичную длину* .

Геометрический смысл координат орта вектора

Пусть α, β и γ – углы, которые вектор $\bar{\mathbf{a}}$ образует с координатными осями Ox, Oy и Oz соответственно.

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами вектора*** $\bar{\mathbf{a}}$.



К*оординаты орта вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *являются его направляющими косинусами*.

Замечание. Так как $|\bar{\mathbf{a}}_0| = 1$ и $\bar{\mathbf{a}}_0 = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$, то

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 .$$

Это равенство называют *основным тождеством для направляющих косинусов вектора*.

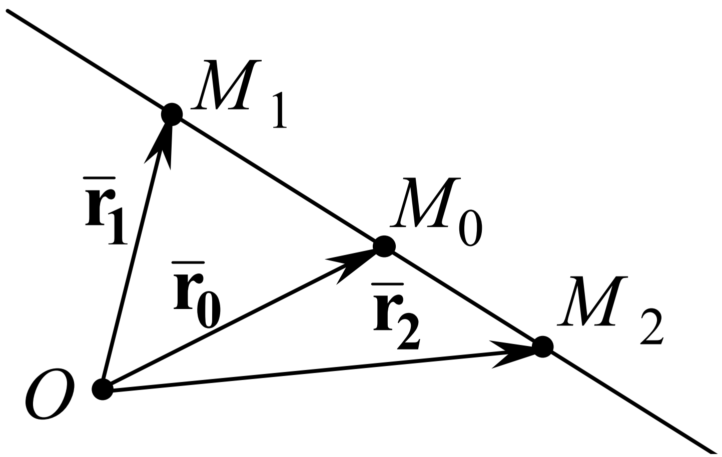
ЗАДАЧА 4. Известны координаты концов отрезка. Найти координаты точки, которая делит отрезок в заданном отношении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Говорят, что точка M_0 делит отрезок M_1M_2 в отношении λ* $(\lambda \neq -1)$ *если*

$$\overline{\mathbf{M_1M_0}} = \lambda \cdot \overline{\mathbf{M_0M_2}}$$

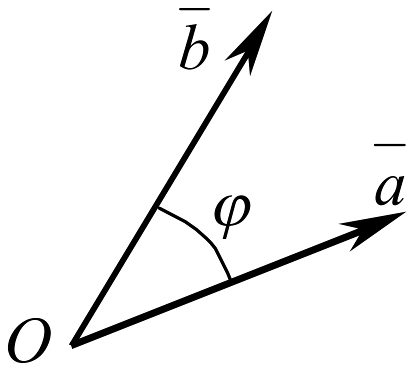
Если $\lambda > 0$, то точка M_0 лежит между точками M_1 и M_2. В этом случае говорят, что *точка M_0 делит отрезок M_1M_2 во внутреннем отношении*.

Если $\lambda < 0$, то точка M_0 лежит на продолжении отрезка M_1M_2. В этом случае говорят, что *точка M_0 делит отрезок M_1M_2 во внешнем отношении*.



§9. Нелинейные операции на множестве векторов

1. Скалярное произведение векторов



ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Скалярным произведением*** *двух ненулевых векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними, т.е. число*

$$|\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \cos\varphi$$

Если $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$ *или* $\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{0}}$, *то скалярное произведе-*

ние векторов $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *полагают равным нулю.*

СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

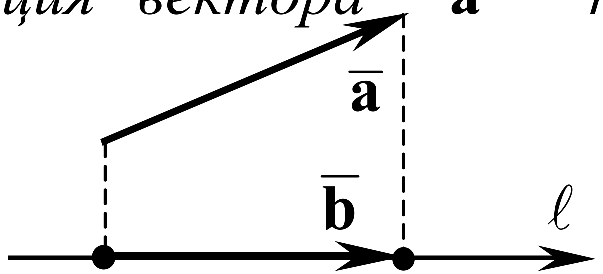
1) *Скалярное произведение векторов коммутативно*, т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}})$$

2) *Скалярное произведение ненулевых векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *равно произведению длины вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на проекцию вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на вектор* $\bar{\mathbf{b}}$ (*длины вектора* $\bar{\mathbf{b}}$ *на проекцию* $\bar{\mathbf{b}}$ *на* $\bar{\mathbf{a}}$). Т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \text{Пр}_{\bar{\mathbf{a}}} \bar{\mathbf{b}} = |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \text{Пр}_{\bar{\mathbf{b}}} \bar{\mathbf{a}}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Проекцией вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на вектор* $\bar{\mathbf{b}}$ *называется проекция вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на ось, определяемую вектором* $\bar{\mathbf{b}}$.



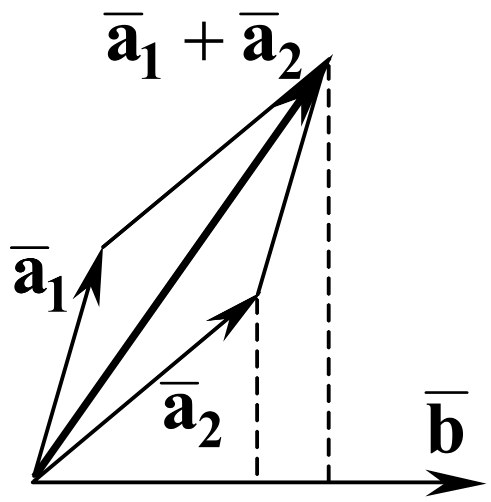
3) *Числовой множитель любого из двух векторов можно вынести за знак скалярного произведения.* Т.е.

$$(\lambda\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \lambda\bar{\mathbf{b}}) = \lambda(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})$$

4) *Если один из векторов записан в виде суммы, то их скалярное произведение тоже можно записать в виде суммы*. Т.е.

$$(\overline{\mathbf{a}}_1 + \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{b}}) = (\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{b}}) + (\overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{b}})$$

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}_1 + \overline{\mathbf{b}}_2) = (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}_1) + (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}_2)$$



5) *Скалярное произведение вектора на себя (скалярный квадрат вектора) равно квадрату его длины*. Т.е.

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}) = |\,\overline{\mathbf{a}}\,|^2$$

6) *Ненулевые векторы* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю* .

(критерий перпендикулярности векторов).

7) *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *имеют координаты:* $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \,. \qquad (1)$$

Формулу (1) называют *выражением скалярного произведения через декартовы координаты векторов*.

8) *Если под действием постоянной силы* $\bar{\mathbf{F}}$ *точка перемещается по прямой из точки* M_1 *в* M_2 , *то работа силы* $\bar{\mathbf{F}}$ *будет равна*

$$A = \left(\overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{M_1 M_2}}\right)$$

(физический смысл скалярного произведения).