Векторная алгебра

Раздел математики, в котором изучаются свойства операций над векторами, называется *векторным исчислением*.

Векторное исчисление подразделяют на *векторную алгебру* и *векторный анализ*. В векторной алгебре изучаются линейные операции над свободными векторами (сложение векторов и умножение вектора на число) и различные произведения векторов (скалярное, псевдоскалярное, векторное, смешанное и двойное векторное). В векторном анализе изучают векторы, являющиеся функциями одного или нескольких скалярных аргументов.

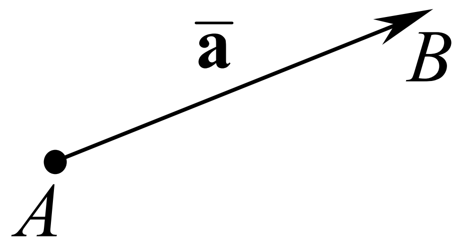
§ 6. Векторы. Линейные операции на множестве векторов

1. Определение вектора. Основные отношения на множестве векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Вектором*** *называется направленный отрезок (т.е. отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая – за конец).*

Обозначают: $\overline{\mathbf{AB}}$ (где A – начало вектора, а B – его конец), $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и т. д.

Изображают:



Расстояние от начала вектора до его конца называется ***длиной*** (или ***модулем***) вектора. Обозначают: $\left|\overline{\mathbf{AB}}\right|$ или $\left|\overline{\mathbf{a}}\right|$.

Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным***.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется ***нулевым***. Обозначают: $\overline{\mathbf{0}}$.

Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются ***коллинеарными*** (***параллельными***).

Записывают: $\overline{\mathbf{a}} \parallel \overline{\mathbf{b}}$ – если векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ коллинеарные, и $\overline{\mathbf{a}} \nparallel \overline{\mathbf{b}}$ – если $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ неколлинеарные.

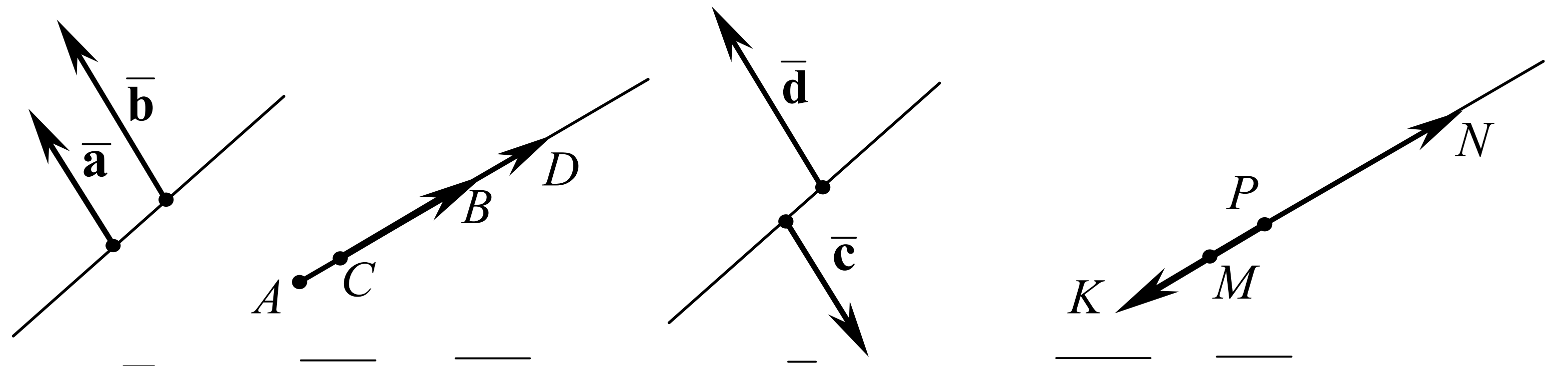
Коллинеарные векторы $\overline{\mathbf{AB}}$ и $\overline{\mathbf{CD}}$ называются ***сонаправленными*** если

- их концы лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их начала (для векторов лежащих на параллельных прямых)
- один из лучей [AB) или [CD) целиком содержит в себе другой (для векторов, лежащих на одной прямой).

В противном случае коллинеарные векторы называются ***противоположно направленными***.

Записывают: $\overline{\mathbf{a}}\uparrow\uparrow\overline{\mathbf{b}}$ – если векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ сонаправленные,

и $\overline{\mathbf{a}}\uparrow\downarrow\overline{\mathbf{b}}$ – если $\overline{\mathbf{a}}$,$\overline{\mathbf{b}}$ противоположно направленные.



$\overline{\mathbf{a}}\uparrow\uparrow\overline{\mathbf{b}}$ $\quad$ $\overline{\mathbf{AB}}\uparrow\uparrow\overline{\mathbf{CD}}$ $\quad$ $\overline{\mathbf{c}}\uparrow\downarrow\overline{\mathbf{d}}$ $\quad$ $\overline{\mathbf{MN}}\uparrow\downarrow\overline{\mathbf{PK}}$

Два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называются ***равными***, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину.

Записывают: $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{b}}$.

Все нулевые векторы считаются равными.

Векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$, лежащие на перпендикулярных прямых, называются ***перпендикулярными*** (***ортогональными***).

Записывают: $\bar{\mathbf{a}} \perp \bar{\mathbf{b}}$.

Три вектора, лежащие в одной или в параллельных плоскостях, называются ***компланарными***.

2. Линейные операции на множестве векторов

1) Умножение на число; 2) Сложение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Произведением вектора*** $\bar{\mathbf{a}} \neq \bar{\mathbf{0}}$ ***на число*** $\alpha \neq 0$ *называется вектор, длина которого равна* $|\alpha| \cdot |\bar{\mathbf{a}}|$ *, а направление совпадает с направлением вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *при* $\alpha > 0$ *и противоположно ему при* $\alpha < 0$ *.*

Если $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$ *или* $\alpha = 0$*, то их произведение полагают равным* $\bar{\mathbf{0}}$ *.*

Обозначают: $\alpha \bar{\mathbf{a}}$

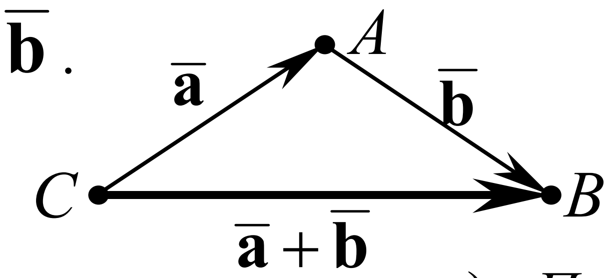
Частный случай: произведение $(-1)\bar{\mathbf{a}}$

Вектор $(-1)\bar{\mathbf{a}}$ называют ***противоположным вектору*** $\bar{\mathbf{a}}$ и обозначают $-\bar{\mathbf{a}}$.

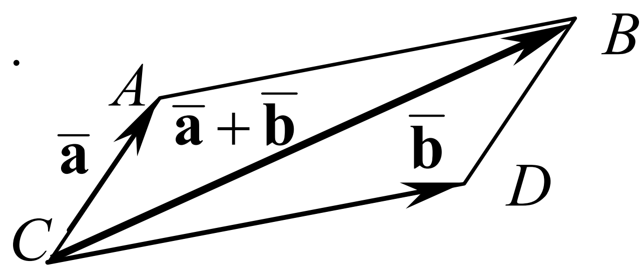
ЛЕММА 1 (критерий коллинеарности векторов).

Два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда* $\bar{\mathbf{a}} = \alpha \cdot \bar{\mathbf{b}}$ *, для некоторого числа* $\alpha \neq 0$ *.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (правило треугольника). *Пусть даны два вектора* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$. *Возьмем произвольную точку* C *и построим последовательно векторы* $\overline{\mathbf{CA}} = \overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{b}}$. *Вектор* $\overline{\mathbf{CB}}$, *соединяющий начало первого и конец второго построенных векторов, называется суммой векторов* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *и обозначается* $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}$.

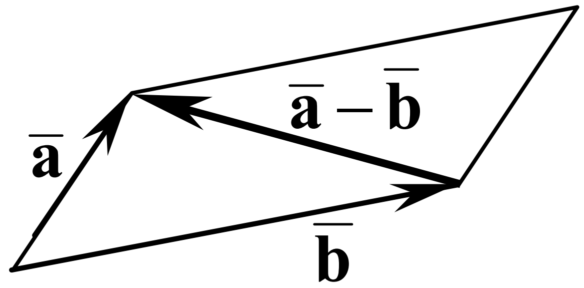


ОПРЕДЕЛЕНИЕ (правило параллелограмма). *Пусть даны два вектора* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$. *Возьмем произвольную точку* C *и построим векторы* $\overline{\mathbf{CA}} = \overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{CD}} = \overline{\mathbf{b}}$. *Суммой векторов* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *будет вектор* $\overline{\mathbf{CB}}$, *имеющий начало в точке* C *и совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на векторах* $\overline{\mathbf{CA}} = \overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{CD}} = \overline{\mathbf{b}}$.



Частный случай: сумма $\bar{\mathbf{a}} + (-\bar{\mathbf{b}})$

Сумму $\bar{\mathbf{a}} + (-\bar{\mathbf{b}})$ называют ***разностью векторов*** $\bar{\mathbf{a}}$ ***и*** $\bar{\mathbf{b}}$ и обозначают $\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{b}}$.



СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ НАД ВЕКТОРАМИ

1) $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{a}}$ (коммутативность сложения векторов);
2) $(\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}) + \overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathbf{a}} + (\overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{c}})$ (ассоциативность сложения векторов);
3) $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{a}}$;
4) $\overline{\mathbf{a}} + (-\overline{\mathbf{a}}) = \overline{\mathbf{0}}$;
5) $\alpha(\beta\,\overline{\mathbf{a}}) = (\alpha\beta)\overline{\mathbf{a}}$ (ассоциативность относительно умножения чисел);
6) $(\alpha + \beta)\overline{\mathbf{a}} = \alpha\,\overline{\mathbf{a}} + \beta\,\overline{\mathbf{a}}$ (дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения чисел);
7) $\alpha(\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}) = \alpha\,\overline{\mathbf{a}} + \alpha\,\overline{\mathbf{b}}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов);
8) $1\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}}$.

Линейная зависимость и независимость векторов

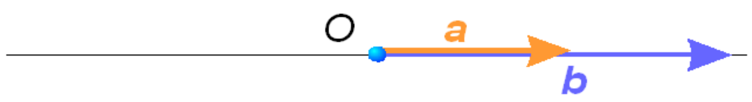
Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не равные нулю одновременно, такие, что верно равенство

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n = \vec{o}$$

Если же равенство $\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n = \vec{o}$ выполняется только при условии, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми*

Если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависимы, то один из них является линейной комбинацией остальных.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ДВУХ ВЕКТОРОВ



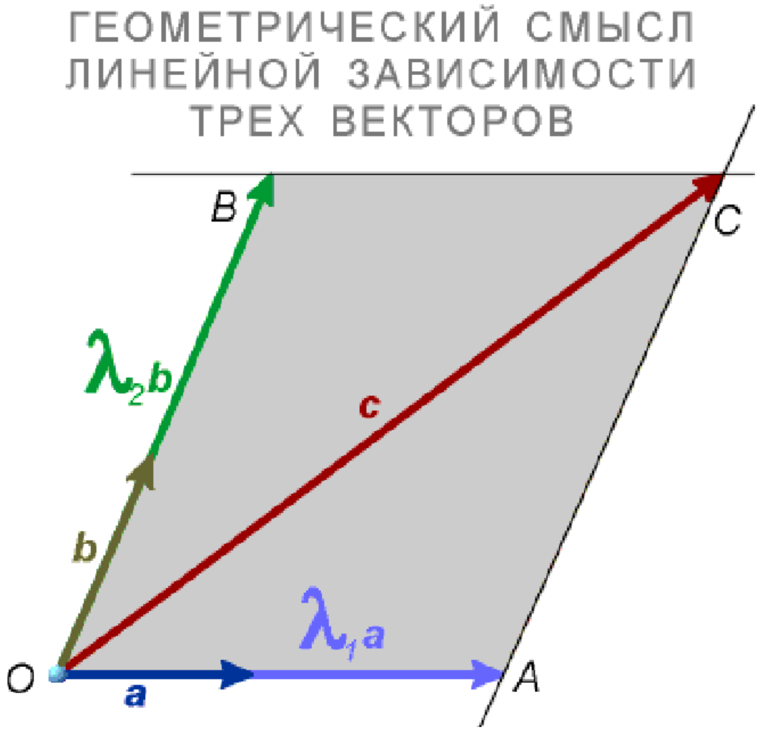
Критерий линейной зависимости двух векторов

Два ненулевых вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Если на плоскости заданы два неколлинеарных вектора **a** и **b**,
то любой вектор *x* этой плоскости можно разложить по векторам **a** и **b**
т.е. представить в виде

$$\mathbf{x}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$$

причём коэффициенты разложения α и β определяются однозначно.



Критерий линейной зависимости трёх векторов

Три ненулевых вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Следствие

Если три вектора не компланарны, то они линейно независимы.

Если заданы три некомпланарных вектора **a, b** и **c**,
то любой вектор *x* можно разложить по векторам **a**, **b** и **c,**
т.е. представить в виде
$\mathbf{x}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$
причём коэффициенты разложения α, β, γ определяются однозначно.

Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы

ПРИМЕР. **В параллелограмме *ABCD* укажите все пары линейно зависимых и линейно независимых векторов.**

- Линейно зависимы:

$\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC}$

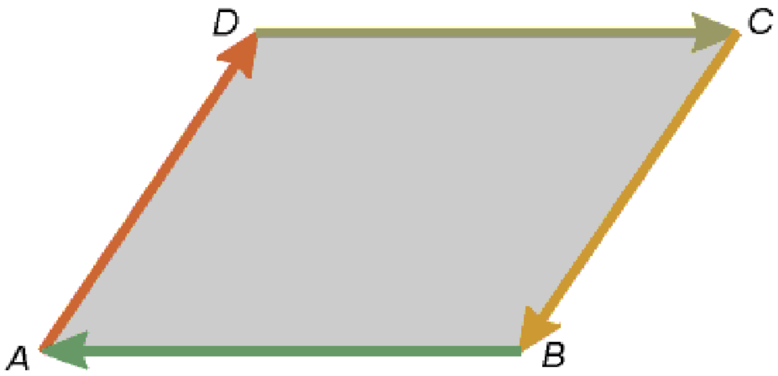
- Линейно независимы:

$\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CB}$

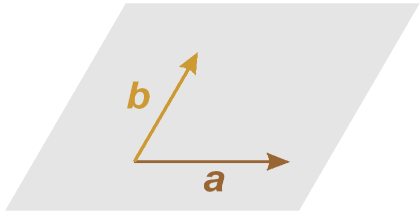
$\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DC}$



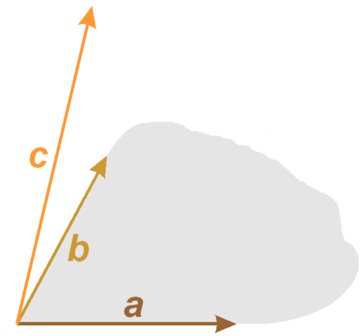
БАЗИС

Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор на этой прямой.

Базисом на плоскости называется любая пара неколлинеарных векторов, взятых в определённом порядке.



Базисом в пространстве называется любая тройка некомпланарных векторов, взятых в определённом порядке.

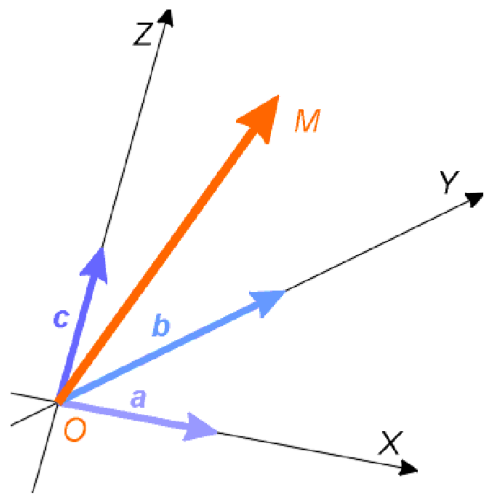


Любой вектор на прямой, на плоскости, в пространстве единственным образом выражается через базисные векторы с помощью линейных операций.

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – базис, $\vec{d}$ – произвольный вектор.

Равенство $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ называется разложением вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Числа x, y, z называются координатами вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$$\vec{d} = \{x, y, z\}$$



$$M(r_x, r_y, r_z)$$

$$\vec{r}_M = \overline{OM} = \{r_x, r_y, r_z\}$$

Теорема (основная теорема векторной алгебры)

При сложении двух векторов их соответствующие координаты складываются.

При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}, \vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$$

Условие коллинеарности двух векторов в координатной форме

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

Условие компланарности трёх векторов в координатной форме

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = 0$$

ЗАДАЧА. Доказать, что векторы $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$, $\vec{b} = \{-1; 1; -2\}$, $\vec{c} = \{2; 1; -3\}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\vec{x} = \{11; -6; 5\}$ в этом базисе.

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = -7 + 15 = 8 \neq 0$$

Следовательно, векторы линейно независимы (не компланарны)

$$\vec{x} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}$$

$$x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \{3x_1 - x_2 + 2x_3; -2x_1 + x_2 + x_3; x_1 - 2x_2 - 3x_3\}$$

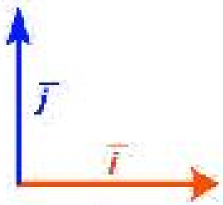
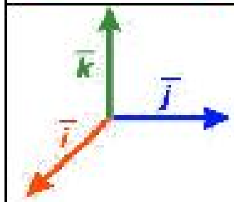
$$\begin{cases} 11 = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -6 = -2x_1 + x_2 + x_3 \\ 5 = x_1 - 2x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1$$

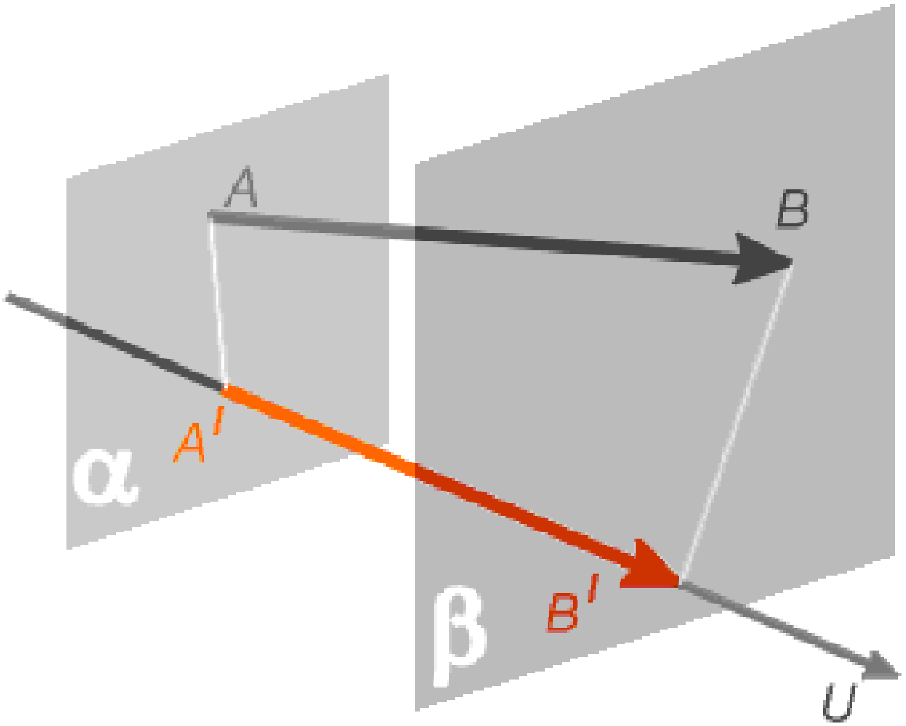
$$\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$$

ДЕКАРТОВ БАЗИС

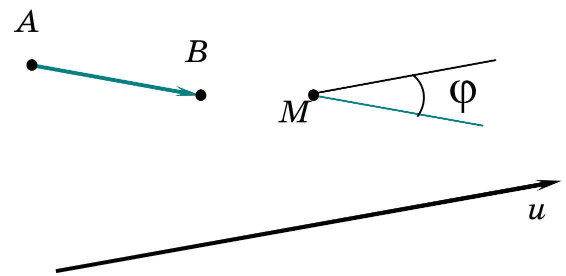
- Базис на плоскости и в пространстве называется *декартовым*, если он состоит из единичных взаимно перпендикулярных векторов.

На прямой	 $|\bar{i}|=1$
На плоскости	 $\bar{i}\perp\bar{j}$ $|\bar{i}|=|\bar{j}|=1$
В пространстве	 $\bar{i}\perp\bar{j}\perp\bar{k}$ $|\bar{i}|=|\bar{j}|=|\bar{k}|=1$

ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ



$$np_u \overrightarrow{AB} = \pm\left|\overrightarrow{A'B'}\right|$$



$$\text{пр}_u\, \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\varphi$$