

§ 4. Системы линейных уравнений

1. Основные понятия

Уравнение называется *линейным*, если оно содержит неизвестные только в первой степени и не содержит произведений неизвестных, т.е. если оно имеет вид $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, где a_i, b – числа.

a_i называются *коэффициентами уравнения*, b называется *свободным членом*.

Если $b = 0$, то уравнение называется *однородным*. В противном случае уравнение называется *неоднородным*.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными, т.е. систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

Обозначим через \mathbf{A} и \mathbf{A}^* следующие матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Матрицу \mathbf{A} называют *основной матрицей* системы (1),
матрицу \mathbf{A}^* – *расширенной матрицей* системы (1).

Пусть \mathbf{X} – матрица-столбец неизвестных, \mathbf{B} – матрица-столбец свободных членов, т.е.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Тогда систему (1) можно записать в виде матричного уравнения $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$. Его называют *матричной формой* системы (1).

Упорядоченный набор чисел c_1, c_2, \dots, c_n называется **решением системы** (1), если он обращает в верное равенство каждое уравнение системы.

Если система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то ее называют **совместной**. Система линейных уравнений, не имеющая решений, называется **несовместной**.

Система, имеющая единственное решение, называется **определенной**. Система, имеющая множество решений, называется **неопределенной**.

ТЕОРЕМА 1 (Кронекера – Капелли). Система линейных уравнений (1) совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы, т.е.

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*).$$

ТЕОРЕМА 2 (критерий единственности решения). Система линейных уравнений (1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы и равен числу переменных, т.е.

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = n.$$

§ 5. Метод Гаусса (метод исключения неизвестных)

Две системы называются **эквивалентными (равносильными)** если их решения совпадают. К эквивалентной системе можно перейти с помощью элементарных преобразований системы.

Элементарными преобразованиями системы линейных уравнений называются преобразования следующего вида:

- 1) умножение обеих частей уравнения на число $\alpha \neq 0$;
- 2) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число $\alpha \neq 0$;
- 3) перестановка двух уравнений;
- 4) вычеркивание одного из двух пропорциональных или одинаковых уравнений.

Тогда

$$r(\tilde{\mathbf{A}}) = r(\tilde{\mathbf{A}}^*) = n ,$$

где $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{A}}^*$ – основная и расширенная матрицы системы (5).

Следовательно, система (5) (а значит и исходная система) совместна и имеет единственное решение.

Находим решение:

а) из последнего уравнения системы (5):

$$x_n = \frac{\beta_n}{\alpha_{nn}}$$

б) из предпоследнего уравнения системы (5):

$$x_{n-1} = \frac{1}{\alpha_{n-1,n-1}} (\beta_{n-1} - \alpha_{n-1,n} x_n) = \frac{1}{\alpha_{n-1,n-1}} \left(\beta_{n-1} - \alpha_{n-1,n} \frac{\beta_n}{\alpha_{nn}} \right)$$

И т.д. получим последовательно $x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_1$.

2) Второй возможный вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1r}x_r + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2r}x_r + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \alpha_{rr}x_r + \dots + \alpha_{rn}x_n = \beta_r. \end{array} \right. \quad (6)$$

Тогда $r(\tilde{\mathbf{A}}) = r(\tilde{\mathbf{A}}^*) = r < n$.

где $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{A}}^*$ – основная и расширенная матрицы системы (6). Следовательно, система (6) (а значит и исходная система) совместна и имеет множество решений.

Находим решение:

а) Выберем в матрице $\tilde{\mathbf{A}}$ базисный минор.

Переменные, коэффициенты при которых входят в базисный минор, назовем **зависимыми**. Остальные переменные назовем **независимыми** (или **свободными**).

Пусть, например, x_1, x_2, \dots, x_r – зависимые,
 $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ – свободные.

§6. Системы линейных однородных уравнений

Рассмотрим систему m линейных однородных уравнений с n неизвестными, т.е. систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ называют **нулевым (тривиальным)**.

Если а) $m = n$ и $|\mathbf{A}| = 0$ или б) $m < n$, то $r(\mathbf{A}) < n$.

Следовательно, такая система имеет множество решений (система имеет **нетривиальные** решения)

Пусть c_1, c_2, \dots, c_n и d_1, d_2, \dots, d_n – два решения системы линейных уравнений (1), α, β – числа. **Линейной комбинацией** этих решений с коэффициентами α и β будем называть упорядоченную последовательность n чисел вида

$$\alpha c_1 + \beta d_1, \alpha c_2 + \beta d_2, \dots, \alpha c_n + \beta d_n$$

ТЕОРЕМА 1. *Линейная комбинация конечного числа решений системы линейных однородных уравнений тоже является решением этой системы.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть r – ранг матрицы системы (1). Если система имеет нетривиальные решения, то найдутся $n-r$ решений таких, что любое другое ее решение будет их линейной комбинацией.*

Решения, о которых идет речь в теореме 2, называются ***фундаментальной системой решений***.

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ФСР:

- 1) находим общее решение системы;
- 2) записываем любой отличный от нуля определитель Δ , порядка $n - r$;
- 3) записываем $n - r$ решений системы, беря в качестве значений для свободных неизвестных элементы строк определителя Δ . Полученные таким образом $n-r$ решений будут являться фундаментальной системой решений системы.

Пусть дана некоторая система линейных неоднородных уравнений, имеющая множество решений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (2)$$

Систему линейных однородных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (3)$$

называют *соответствующей* системе (2).

ТЕОРЕМА 3. Пусть c_1, c_2, \dots, c_n – какое-нибудь решение системы (2). Любое другое решение системы (2) может быть записано как сумма решения c_1, c_2, \dots, c_n и некоторого решения системы (3). Иначе говоря, справедливо равенство:

$$X = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_{n-r} C_{n-r} + C, \quad (4)$$

где X – матрица-столбец неизвестных, C_1, C_2, \dots, C_{n-r} – матрицы-столбцы, элементами которых служат решения из фср системы (3), C – матрица-столбец, элементами которой является решение c_1, c_2, \dots, c_n .