

ОБРАЗЦЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа №1

1. Доказать, что система совместна и решить её матричным методом и по формулам Крамера.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

2. Доказать, что система совместна и решить её методом Гаусса. Указать её общее и какое-либо частное решение.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

3. Доказать, что система имеет нетривиальные решения, найти их и какую-либо фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

4. Доказать утверждение «Если ранг матрицы равен m , то m ее базисных строк линейно независимы».

5. Найти матрицу X из уравнения:

$$X \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & -4 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Контрольная работа №2

1. Показать, что векторы $\vec{a} = \{-1; 2; 0\}$, $\vec{b} = \{2; -1; 1\}$, $\vec{c} = \{1; 1; 1\}$ компланарны и найти разложение вектора $2\vec{a} + \vec{b}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, где $|\vec{m}| = 2; |\vec{n}| = 1; (\vec{m}, \vec{n}) = 60^\circ$.
3. Даны вектора $\vec{OA} = \{1; -1; 3\}$, $\vec{OB} = \{-2; 2; 1\}$, $\vec{OC} = \{3; -2; 5\}$. Найти высоту грани OBC тетраэдра $OABC$, опущенную из конца вектора $\vec{OB}$.
4. Даны стороны треугольника $3x + y - 5 = 0; 4x + 3y - 5 = 0; x + 2y - 5 = 0$. Найти уравнения двух (любых) его высот.
5. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ и плоскости $2x - y + z - 3 = 0$.
3. Найти проекцию точки $(2; 5)$ на прямую $2x - y + 4 = 0$.

Контрольная работа №3

1. Вычислить пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 + 2x^3 - x - 4}{x^2 - 5x + 4} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{\sqrt{x + 4} - 2} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{(1 - \cos x)^2}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) \text{ или } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4 + x^2} - x \right) \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5}{x^2 - 2} \right)^{\frac{x^2 + 1}{2}}$$

2. Определить порядок малости бесконечно малой функции

$$\alpha(x) = \sqrt[3]{1 + x^2} - 1 \text{ относительно } x \text{ при } x \rightarrow 0.$$

3. Исследовать на непрерывность и построить схематично график функции:

$$1) y = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ 1 - x, & 0 < x \leq 2, \\ x^2, & x > 2 \end{cases} \quad 2) y = 1 - 3^{\frac{1}{x+2}}, \quad 3) y = \frac{2}{x^2 + 3x}$$

4. Доказать, что функция $y = 2x - 3$ непрерывна при $x \rightarrow 2$.

$$\text{Или доказать, что } \lim_{x \rightarrow 3} (2x + 3) = 9$$

Контрольная работа №4

I. Найти производные функций:

$$1.1. \quad y = \cos^2 x \cdot \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}};$$

$$1.2. \quad y = \ln \frac{5 + \sqrt{25 - x^2}}{x};$$

$$1.3. \quad y = 3^{\arctg^2(x+1)};$$

$$1.4. \quad y = e^{-\cos^4 5x} + 2^{\frac{2}{x}};$$

$$1.5. \quad y = \arcsin^2\left(1 - \frac{1}{x}\right);$$

$$1.6. \quad y = e^x \sqrt{1 - e^{2x}} + \arccos e^x;$$

$$1.7. \quad y = (1 + \sqrt{1+x})^{10};$$

$$1.8. \quad y = \ln^3\left(\arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + \cos^2 4x\right);$$

$$1.9. \quad y = \left(\frac{x}{1-x}\right)^{5x};$$

$$1.10. \quad y = \sqrt[3]{\arcsin \frac{x}{3}};$$

$$1.11. \quad x^2 \sin y - \cos y + \sin 4y = 0;$$

$$1.12. \quad \arctg \frac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$1.13. \quad \begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = e^{t^3} \end{cases};$$

$$1.14. \quad \begin{cases} x = \ln \sqrt{1-t^2}, \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}.$$

II. Пользуясь правилом Лопиталья, найти пределы:

$$1. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \ln(x + e^x);$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos \right)^{\frac{1}{x}}.$$

III. Написать уравнение касательной к кривой $y = 4x - x^2$ в точках пересечения с осью ОХ. Построить кривую и касательную.

IV. Расстояние s , пройденное телом в течение t секунд, определяется по формуле $65S = \frac{1}{8}t^3 + 3t^2 + t$. Найти скорость при $t = 10$

V. Найти экстремумы и промежутки возрастания и убывания функции

$$y = \frac{x-1}{x^2-1}$$

Контрольная работа №5

1. Найти область определения функции $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$.
2. Найти dz , если $z = tg^5 \frac{\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x}}$.
3. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = \frac{y}{x^2}$, $x = e^{t^2}$, $y = \ln(t^3 + 2)$.
4. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \varphi(u, v)$, $u = x^2 + x^y$, $v = y - e^{\frac{y}{x}}$.
5. Найти y'_x функции, заданной неявно уравнением $x^2 \sin^2 y + y^3 \cos^2 x - 2x + 3y - 5xy + 1 = 0$.
6. Найти частные производные первого порядка функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением $z^4 + 3xy^3 + xz^{-1} + y^{-2}z^2 + y - 2x = 0$.
7. Найти: а) производную функции $z = f(x, y)$ в точке $M(1,1)$ в направлении вектора MN ; б) $grad z(M)$, если $z = \sin^2(x^2 + y^2)$, $N(3,5)$.