Решение типового варианта и образец оформления

Индивидуальное задание №1

Вариант 0

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение

Получим нули в четвёртом столбце определителя. Для этого выполним следующие преобразования:

1) из элементов второй строки вычтем соответствующие элементы первой строки;

2) к элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы первой строки;

3) из элементов четвёртой строки вычтем соответствующие элементы первой строки, умноженные на два.

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по четвёртому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & -6 & 5 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & -6 & 5 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix}.$$

В определителе третьего порядка получим нули в первом столбце. Для этого из элементов второй строки вычтем соответствующие элементы первой строки:

$$-\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & -6 & 5 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 7 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix}.$$

Запишем разложение определителя по первому столбцу

$$-\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 7 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix} = -2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -9 & 7 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -2\cdot(-9\cdot(-5)-7\cdot 7) = -2\cdot(-4) = 8.$$

Ответ: 8

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 3 & -5\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Решение

Умножать можно матрицы при условии, что число столбцов в первом множителе равно числу строк во втором множителе. Матрица $\mathbf{A}$ имеет размерность 2×3, матрица $\mathbf{B}$ имеет размерность 3×2. Следовательно, оба произведения $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ имеют смысл. При этом матрица $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ имеет размерность 2×2, а матрица $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ имеет размерность 3×3. Находим

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1\cdot 2+1\cdot 3+1\cdot 1 & (-1)\cdot(-1)+1\cdot 1+1\cdot(-1)\\ -2\cdot 2+3\cdot 3+(-5)\cdot 1 & -2\cdot(-1)+3\cdot 1+(-5)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 10\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -2 & 3 & -5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2) & 2\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 2\cdot 1+(-1)\cdot(-5)\\ 3\cdot(-1)+1\cdot(-2) & 3\cdot 1+1\cdot 3 & 3\cdot 1+1\cdot(-5)\\ 1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2) & 1\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 1\cdot 1+(-1)\cdot(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 7\\ -5 & 6 & -2\\ 1 & -2 & 6\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 10\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 7\\ -5 & 6 & -2\\ 1 & -2 & 6\end{pmatrix}$.

3. Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}+2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -3\\ 5 & -1\end{pmatrix}.$$

Решение

Сначала упростим уравнение

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}=\begin{pmatrix}7 & -3\\ 5 & -1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}=\begin{pmatrix}7 & -3\\ 5 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 2 & 6\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}=\begin{pmatrix}9 & -7\\ 3 & -7\end{pmatrix}.$$

Получили уравнение вида $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}$. Решение находим по формуле $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}9 & -7\\ 3 & -7\end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$.

$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (9-2) = 7 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}$ существует.

Вычислим алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы $\mathbf{A}$ по формуле $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} – дополнительный минор элемента a_{ij}.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3$, $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2$,

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1$, $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3$.

Записываем обратную матрицу по формуле

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Находим решение матричного уравнения

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 9 + (-1) \cdot 3 & 3 \cdot (-7) + (-1) \cdot (-7) \\ -2 \cdot 9 + 3 \cdot 3 & -2 \cdot (-7) + 3 \cdot (-7) \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 24 & -14 \\ -9 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{24}{7} & -2 \\ \dfrac{-9}{7} & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \dfrac{24}{7} & -2 \\ \dfrac{-9}{7} & -1 \end{pmatrix}$.

4. Решите систему уравнений тремя способами: *а*) методом Крамера; *б*) матричным методом; *в*) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -11, \\ 6x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 22. \end{cases}$$

Решение

а) Метод Крамера

Формулы Крамера имеют вид $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = 1; 2; 3$, $\Delta = \det\mathbf{A}$ – основной определитель системы, Δ_i – определитель, полученный из определителя системы Δ заменой столбца из коэффициентов при x_i столбцом из свободных членов.

Сначала находим основной определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -7 & 2 \\ 6 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -18 \\ 6 & 4 & -29 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & -18 \\ 4 & -29 \end{vmatrix} = 87 + 72 = 159 \neq 0 \Rightarrow$$

Система имеет единственное решение (по теореме Крамера).

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-11&-7&2\\-1&-2&1\\22&-1&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-9&-3&2\\0&0&1\\27&9&5\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-9&-3\\27&9\end{vmatrix}=-(-81+81)=0,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}4&-11&2\\6&-1&1\\1&22&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-8&-9&2\\0&0&1\\-29&27&5\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-8&-9\\-29&27\end{vmatrix}=-(-216-261)=477,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}4&-7&-11\\6&-2&-1\\1&-1&22\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-3&-99\\6&4&-133\\1&0&0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3&-99\\4&-133\end{vmatrix}=399+396=795.$$

По формулам Крамера находим значения неизвестных системы:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{0}{159}=0,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{477}{159}=3,\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{795}{159}=5.$$

б) матричный метод

Запишем данную систему в матричном виде

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B},$$

где $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4&-7&2\\6&-2&1\\1&-1&5\end{pmatrix}$, $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-11\\-1\\22\end{pmatrix}$.

Матричный способ решения системы линейных уравнений – это решение системы по формуле $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}$.

Найдём обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{\det\mathbf{A}}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$.

Так как $\det\mathbf{A}=159\neq 0$ (см. пункт 4*а*), обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ существует.

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы $\mathbf{A}$ по формуле $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2&1\\-1&5\end{vmatrix}=-10+1=-9,\qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-7&2\\-1&5\end{vmatrix}=-(-35+2)=33,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}6&1\\1&5\end{vmatrix}=-(30-1)=-29,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}4&2\\1&5\end{vmatrix}=20-2=18,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}6&-2\\1&-1\end{vmatrix}=-6+2=-4,\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}4&-7\\1&-1\end{vmatrix}=-(-4+7)=-3,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-7&2\\-2&1\end{vmatrix}=-7+4=-3,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}4&2\\6&1\end{vmatrix}=-(4-12)=8,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}4&-7\\6&-2\end{vmatrix}=-8+42=34.$$

Записываем обратную матрицу

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{159}\cdot\begin{pmatrix}-9&33&-3\\-29&18&8\\-4&-3&34\end{pmatrix}.$$

Находим решение системы

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}=\frac{1}{159}\cdot\begin{pmatrix}-9 & 33 & -3\\ -29 & 18 & 8\\ -4 & -3 & 34\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-11\\ -1\\ 22\end{pmatrix}=\frac{1}{159}\cdot\begin{pmatrix}99-33-66\\ 319-18+176\\ 44+3+748\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{159}\cdot\begin{pmatrix}99-33-66\\ 319-18+176\\ 44+3+748\end{pmatrix}=\frac{1}{159}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 477\\ 795\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 3\\ 5\end{pmatrix}.$$

в) метод Гаусса

Выпишем расширенную матрицу системы

$$\mathbf{A}^{*}=\left(\begin{array}{ccc|c}4 & -7 & 2 & -11\\ 6 & -2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 5 & 22\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 5 & 22\\ 6 & -2 & 1 & -1\\ 4 & -7 & 2 & -11\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 5 & 22\\ 0 & 4 & -29 & -133\\ 0 & -3 & -18 & -99\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 5 & 22\\ 0 & 4 & -29 & -133\\ 0 & -1 & -6 & -33\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 5 & 22\\ 0 & -1 & -6 & -33\\ 0 & 4 & -29 & -133\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 5 & 22\\ 0 & -1 & -6 & -33\\ 0 & 0 & -53 & -265\end{array}\right).$$

Выполнены следующие преобразования:

1) поменяли местами первую и третью строки;
2) к элементам второй строки прибавили соответствующие элементы первой строки, умноженные на (- 6); к элементам третьей строки прибавили соответствующие элементы первой строки, умноженные на (- 4);
3) элементы третьей строки разделили на 3;
4) вторую строку поменяли местами с третьей строкой;
5) к элементам третьей строки прибавили соответствующие элементы второй строки, умноженные на 4.

Запишем укороченную систему

$$\begin{cases}x_1-x_2+5x_3=22,\\ \quad -x_2-6x_3=-33,\\ \qquad -53x_3=-265.\end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $x_3=\dfrac{-265}{-53}=5$.

Подставим $x_3=5$ во второе уравнение

$-x_2-6\cdot 5=-33$,

откуда находим $x_2=33-30=3$.

Подставляем $x_3=5$ и $x_2=3$ в первое уравнение

$x_1-3+5\cdot 5=22 \Rightarrow x_1=22-22=0$.

Проверка: $\begin{cases} 4\cdot 0-7\cdot 3+2\cdot 5=-11, \\ \qquad -11=-11 \\ 6\cdot 0-2\cdot 3+5=-1, \\ \qquad -1=-1 \\ 0-3+5\cdot 5=22 \\ \qquad 22=22. \end{cases}$

Ответ: $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=5$.

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-x_4+3x_5=1, \\ 3x_1+3x_2+5x_3+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+8x_3-7x_4+9x_5=3. \end{cases}$$

Решение

Выписываем расширенную матрицу системы и приводим её к ступенчатому виду

$$\mathbf{A}^*=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -7 & 9 & 3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 6 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\left.\begin{array}{l} r(\mathbf{A})=2 \\ r(\mathbf{A}^*)=2 \\ n=5 \end{array}\right\}\Rightarrow$ система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-2\neq 0$;

Базисные неизвестные x_2, x_3.

Свободные неизвестные x_1, x_4, x_5.

Записываем укороченную систему

$$\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+3x_5=1, \\ \qquad -2x_3+3x_4-3x_5=-1 \end{cases}$$

Полагаем $x_1=C_1$, $x_4=C_4$, $x_5=C_5$. Тогда

$$\begin{cases} C_1+x_2+3x_3-2C_4+3C_5=1, \\ \qquad -2x_3+3C_4-3C_5=-1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_2+3x_3=1-C_1+2C_4-3C_5, \\ \quad -2x_3=-1-3C_4+3C_5 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2=1-C_1+2C_4-3C_5-3x_3, \\ x_3=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}C_4-\dfrac{3}{2}C_5 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 - C_1 + 2C_4 - 3C_5 - 3\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}C_4 - \dfrac{3}{2}C_5\right), \\ x_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}C_4 - \dfrac{3}{2}C_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = -\dfrac{1}{2} - C_1 - \dfrac{5}{2}C_4 + \dfrac{3}{2}C_5, \\ x_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}C_4 - \dfrac{3}{2}C_5. \end{cases}$$

Общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} - C_1 - \dfrac{5}{2}C_4 + \dfrac{3}{2}C_5, \\ x_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}C_4 - \dfrac{3}{2}C_5, \\ x_4 = C_4, \\ x_5 = C_5. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} - C_1 - \dfrac{5}{2}C_4 + \dfrac{3}{2}C_5, \\ x_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}C_4 - \dfrac{3}{2}C_5, \\ x_4 = C_4, \\ x_5 = C_5. \end{cases}$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение

Выпишем основную матрицу системы и найдём её ранг

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(\mathbf{A}) = 2.$$

Были выполнены следующие преобразования:

1) к элементам второй строки прибавили соответствующие элементы первой строки, умноженные на (- 4); к элементам третьей строки прибавили соответствующие элементы первой строки, умноженные на (- 3);

2) поменяли местами вторую и третью строки;

3) к элементам третьей строки прибавили соответствующие элементы второй строки, умноженные на (- 3).

Так как $r(\mathbf{A}) = 2 < n = 4$, то система имеет ненулевые решения.

Базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Базисные неизвестные x_1, x_2.

Свободные неизвестные x_3, x_4.

Записываем укороченную систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ \quad -x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Полагаем $x_3 = C_3$, $x_4 = C_4$, тогда

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4C_3 + 3C_4, \\ \quad -x_2 = 6C_3 - 5C_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4C_3 + 3C_4 - 2x_2, \\ x_2 = -6C_3 + 5C_4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -4C_3 + 3C_4 - 2(-6C_3 + 5C_4), \\ x_2 = -6C_3 + 5C_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4C_3 - 7C_4, \\ x_2 = -6C_3 + 5C_4. \end{cases}$$

Общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 = 4C_3 - 7C_4, \\ x_2 = -6C_3 + 5C_4, \\ x_3 = C_3, \\ x_4 = C_4. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений $E_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\mathbf{X} = C_1\mathbf{E}_1 + C_2\mathbf{E}_2 = C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение типового варианта и образец оформления

Индивидуальное задание №2

Вариант 0

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{2; -3; 7\}$, $\vec{b} = \{1; 8; -6\}$, $\vec{c} = \{2; -6; 7\}$.

Найдите:

a) вектор $\vec{d} = 3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;

б) скалярное произведение $(\vec{a}+\vec{c}, \vec{b}-\vec{a})$;

в) векторное произведение $[\vec{a}+\vec{c}, \vec{b}-\vec{a}]$;

г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Решение

а) По правилам выполнения линейных операций над векторами получаем:

$$\vec{d} = 3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c} = 3\cdot\{2;-3;7\}+\{1;8;-6\}-2\cdot\{2;-6;7\} =$$
$$=\{6;-9;21\}+\{1;8;-6\}+\{-4;12;-14\}=\{3;11;1\}.$$

Модуль вектора находим по формуле $\left|\vec{d}\right| = \sqrt{(d_x)^2+(d_y)^2+(d_z)^2}$

$$\left|\vec{d}\right| = \sqrt{3^2+11^2+1^2} = \sqrt{9+121+1} = \sqrt{131}.$$

Направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{d_x}{\left|\vec{d}\right|} = \frac{3}{\sqrt{131}};$$

$$\cos\beta = \frac{d_y}{\left|\vec{d}\right|} = \frac{11}{\sqrt{131}};$$

$$\cos\gamma = \frac{d_z}{\left|\vec{d}\right|} = \frac{1}{\sqrt{131}}.$$

Орт вектора $\vec{d}_0 = \left\{\frac{3}{\sqrt{131}}; \frac{11}{\sqrt{131}}; \frac{1}{\sqrt{131}}\right\}$.

б) Сначала найдём координаты векторов $\vec{a}+\vec{c}$ и $\vec{b}-\vec{a}$:

$\vec{a}+\vec{c}=\{2;-3;7\}+\{2;-6;7\}=\{4;-9;14\}$,

$\vec{b}-\vec{a}=\{1;8;-6\}-\{2;-3;7\}=\{-1;11;-13\}$.

В декартовой системе координат скалярное произведение векторов $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ и $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$ находим по формуле $(\vec{a},\vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

$$(\vec{a}+\vec{c}, \vec{b}-\vec{a}) = 4\cdot(-1)+(-9)\cdot 11+14\cdot(-13) = -4-99-182 = -285.$$

в) В декартовой системе координат векторное произведение векторов $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ и $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$ определяется формулой

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

$$[\vec{a}+\vec{c}, \vec{b}-\vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -9 & 14 \\ -1 & 11 & -13 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -9 & 14 \\ 11 & -13 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 4 & 14 \\ -1 & -13 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 4 & -9 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(117-154)-\vec{j}(-52+14)+\vec{k}(44-9) = \{-37;38;35\}.$$

г) Смешанное произведение трёх векторов $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$, $\vec{c}=\{c_x;c_y;c_z\}$ в декартовой системе координат находим по формуле

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 8 & -6 \\ 2 & -6 & 7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 8 & -6 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}=-3\cdot(-1)^5\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}=3(-12-7)=-57.$$

2. Определите координаты точки C на отрезке AB, если $A(-5;3;-1)$, $B(2;4;4)$ и $|AB|:|CB|=3:2$.

Решение

Обозначим координаты неизвесной точки $C(x_C;y_C;z_C)$. Используем формулы деления отрезка AB точкой C в отношении λ

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\ y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda},\ z_C=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Получаем при $\lambda=\dfrac{3}{2}$

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{-5+\frac{3}{2}\cdot 2}{1+\frac{3}{2}}=\frac{(-5+3)\cdot 2}{5}=-\frac{4}{5};$$

$$y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{3+\frac{3}{2}\cdot 4}{1+\frac{3}{2}}=\frac{(3+6)\cdot 2}{5}=\frac{18}{5};$$

$$z_C=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}=\frac{-1+\frac{3}{2}\cdot 4}{1+\frac{3}{2}}=\frac{(-1+6)\cdot 2}{5}=2.$$

Таким образом, $C\left(-\dfrac{4}{5};\dfrac{18}{5};2\right)$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}-2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60^\circ$.

Решение

Длину вектора находим по формуле $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$.

Скалярное произведение двух векторов находим по формуле

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right).$$

$$|\vec{p}|=\left|3\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{\left(3\vec{a}+2\vec{b},3\vec{a}+2\vec{b}\right)}=\sqrt{9\left(\vec{a},\vec{a}\right)+12\left(\vec{a},\vec{b}\right)+4\left(\vec{b},\vec{b}\right)}=$$

$$=\sqrt{9|\vec{a}|^2+12|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)+4\left|\vec{b}\right|^2}=\sqrt{9\cdot 25+12\cdot 5\cdot 2\cdot\cos 60^\circ+4\cdot 4}=$$

$$=\sqrt{225+60+16}=\sqrt{301}.$$

$$|\vec{q}|=\left|3\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{\left(3\vec{a}-2\vec{b},3\vec{a}-2\vec{b}\right)}=\sqrt{9\left(\vec{a},\vec{a}\right)-12\left(\vec{a},\vec{b}\right)+4\left(\vec{b},\vec{b}\right)}=$$

$$=\sqrt{9|\vec{a}|^2-12|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)+4\left|\vec{b}\right|^2}=\sqrt{9\cdot 25-12\cdot 5\cdot 2\cdot\cos 60^\circ+4\cdot 4}=$$

$$=\sqrt{225-60+16}=\sqrt{181}.$$

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$
$A(2;3;-7)$, $B(1;8;-6)$, $C(2;6;-7)$. Найдите:
а) координаты четвёртой вершины D;
б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB;
в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

Решение

а) Обозначим $D(x_D;y_D;z_D)$. По свойству параллелограмма $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{AB}=\{x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\}=\{-1;5;1\}$;

$\overrightarrow{DC}=\{x_C-x_D;y_C-y_D;z_C-z_D\}=\{2-x_D;6-y_D;-7-z_D\}$.

Так как векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ равны, равны их соответствующие координаты

$$\begin{aligned}-1&=2-x_D, \\ 5&=6-y_D, \\ 1&=-7-z_D,\end{aligned}\qquad\Rightarrow\qquad\begin{aligned}x_D&=2+1=3, \\ y_D&=6-5=1, \\ z_D&=-7-1=-8.\end{aligned}$$

Следовательно, $D(3;1;-8)$.

б) Длину h высоты параллелограмма, опущенной из вершины D, найдём, используя формулы для нахождения площади параллелограмма

$$S=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot h \text{ и } S=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|.$$

Откуда $h=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$.

Сначала находим координаты вектора $\overrightarrow{AD}$ и векторное произведение $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]$:

$$\overrightarrow{AD}=\{x_D-x_A;\, y_D-y_A;\, z_D-z_A\}=\{1;-2;-1\},$$

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 5 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}5 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 1 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}(-5+2)-\vec{j}(1-1)+\vec{k}(2-5)=\{-3;0;-3\}.$$

$$\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|=\sqrt{(-3)^2+0^2+(-3)^2}=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2},$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+5^2+1^2}=\sqrt{1+25+1}=3\sqrt{3}.$$

Следовательно, $h=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\dfrac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

в) Чтобы найти косинус угла между диаганалями параллелограмма, найдём координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$. Затем воспользуемся формулой

$$\cos\left(\overrightarrow{AC}\,\hat{;}\,\overrightarrow{BD}\right)=\frac{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|}.$$

Получаем

$$\overrightarrow{AC}=\{x_C-x_A;\, y_C-y_A;\, z_C-z_A\}=\{0;3;0\},$$

$$\overrightarrow{BD}=\{x_D-x_B;\, y_D-y_B;\, z_D-z_B\}=\{2;-7;-2\},$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AC}\,\hat{;}\,\overrightarrow{BD}\right)=\frac{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|}=\frac{0\cdot 2+3\cdot(-7)+0\cdot(-2)}{\sqrt{0^2+3^2+0^2}\cdot\sqrt{2^2+(-7)^2+(-2)^2}}=$$

$$=\frac{-21}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{57}}=-\frac{7}{\sqrt{57}}.$$

Полученное значение косинуса $\cos\left(\overrightarrow{AC}\,\hat{;}\,\overrightarrow{BD}\right)=-\dfrac{7}{\sqrt{57}}<0$ соответствует тупому углу. Чтобы найти значение острого угла между диагоналями, воспользуемся формулами приведения.

Пусть $\left(\overrightarrow{AC}\,\hat{;}\,\overrightarrow{BD}\right)=\alpha$, тогда $\cos\left(180^\circ-\alpha\right)=-\cos\alpha=\dfrac{7}{\sqrt{57}}$.

5. Докажите, что четыре точки $A(5;7;-2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;4;-4)$, $D(1;5;0)$ лежат в одной плоскости.

Решение

Если четыре точки лежат в одной плоскости, то построенные на них три различных вектора компланарны, следовательно. их смешанное произведение равно нулю.

Найдём координаты векторов

$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\} = \{3-5; 1-7; -1-(-2)\} = \{-2; -6; 1\}$,
$\overrightarrow{AC} = \{x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A\} = \{9-5; 4-7; -4-(-2)\} = \{4; -3; -2\}$;
$\overrightarrow{AD} = \{x_D - x_A; y_D - y_A; z_D - z_A\} = \{1-5; 5-7; 0-(-2)\} = \{-4; -2; 2\}$.

Вычисляем смешанное произведение

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, определитель равен нулю, так как его первый и третий столбцы пропорциональны.

Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ компланарны, следовательно, точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

6. Даны векторы $\vec{a} = \{-3; 4; 0\}$ и $\vec{b} = \{-12; 5; 0\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = 112$.

Решение

Из условия $\vec{x} \parallel \vec{a}$ следует, что $\vec{x} = \lambda\vec{a} = \{-3\lambda; 4\lambda; 0\}$.

Из условия $(\vec{x}, \vec{b}) = 112$ получаем $-3\lambda \cdot (-12) + 4\lambda \cdot 5 + 0 \cdot 0 = 112$,

$$36\lambda + 20\lambda = 112,$$
$$56\lambda = 112 \Rightarrow \lambda = 2.$$

Тогда $\vec{x} = 2\vec{a} = \{-6; 8; 0\}$.

7. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{5; 3; -1\}$ и $\vec{b} = \{4; -2; 2\}$, образует с осью Oy острый угол. Найти его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = \sqrt{174}$.

Решение

Так как по условию вектор $\vec{x}$ перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{9; 3; 0\}$ и $\vec{b} = \{4; -1; -2\}$, заключаем, что он параллелен вектору $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$. Тогда

$$\vec{x} = \lambda\left[\vec{a}, \vec{b}\right].$$

Найдём векторное произведение векторов $\vec{a} = \{9; 3; 0\}$ и $\vec{b} = \{4; -1; -2\}$

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$= \vec{i}(6-2) - \vec{j}(10+4) + \vec{k}(-10-12) = \{4; -14; -22\}$.

Тогда $\vec{x} = \{4\lambda; -14\lambda; -22\lambda\}$.

Найдём модуль вектора $\vec{x}$

$$|\vec{x}| = \sqrt{(4\lambda)^2 + (-14\lambda)^2 + (-22\lambda)^2} = \sqrt{696\lambda^2} = 2|\lambda|\sqrt{174}.$$

По условию задачи $|\vec{x}| = \sqrt{174}$, следовательно, $\sqrt{174} = 2|\lambda|\sqrt{174} \Rightarrow |\lambda| = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ $\lambda = \pm\dfrac{1}{2}$. Получаем два вектора $\vec{x}_1 = \{2; -7; -11\}$ и $\vec{x}_2 = \{-2; 7; 11\}$. Вектор $\vec{x}$ образует с осью Oy острый угол, значит вторая координата этого вектора – положительная. Поэтому выбираем вектор $\vec{x}_2 = \{-2; 7; 11\}$.

8. Даны вершины пирамиды $A(2; 2; 2)$, $B(4; 3; 3)$, $C(4; 5; 4)$, $D(5; 5; 6)$. Найти объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC.

Решение

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, совпадающих с рёбрами пирамиды.

$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\} = \{4-2; 3-2; 3-2\} = \{2; 1; 1\}$,

$\overrightarrow{AC} = \{x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A\} = \{4-2; 5-2; 4-2\} = \{2; 3; 2\}$;

$\overrightarrow{AD} = \{x_D - x_A; y_D - y_A; z_D - z_A\} = \{5-2; 5-2; 6-2\} = \{3; 3; 4\}$.

Объем пирамиды находим с помощью смешанного произведения:

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|.$$

Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ в координатной форме

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 5 = 7.$$

Подставим значение смешанного произведения в формулу для вычисления объёма пирамиды, получим:

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right| = \frac{7}{6}.$$

Чтобы найти высоту пирамиды H, воспользуемся известной формулой объёма пирамиды:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot H \cdot S_{\text{осн.}} \Rightarrow H = \dfrac{3 \cdot V}{S_{\text{осн.}}}$, где $S_{\text{осн.}}$ – площадь грани ABC.

Так как грань ABC есть треугольник, то её площадь может быть найдена как половина модуля векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

Сначала найдём векторное произведение $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$ в координатной форме:

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}(2-3)-\vec{j}(4-2)+\vec{k}(6-2)=\{-1;-2;4\}.$$

Тогда

$$\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}.$$

$$S_{\text{осн.}}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|=\frac{\sqrt{21}}{2}.$$

Подставляем найденные значения в формулу

$$H=\frac{3\cdot V}{S_{\text{осн.}}},$$

получаем

$$H=\frac{3\cdot 7/6}{\sqrt{21}/2}=\frac{7}{\sqrt{21}}=\frac{7\sqrt{21}}{21}=\frac{\sqrt{21}}{3}.$$

9. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\overline{e}_1=\{1;4;1\}$, $\overline{e}_2=\{-3;-2;0\}$, $\overline{e}_3=\{1;-1;2\}$, $\overline{x}=\{-5;-8;-3\}$.

а) Докажите, что векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ можно принять за новый базис;

б) Найдите координаты вектора $\overline{x}$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$.

Решение

а) Для того, чтобы доказать, что три вектора образуют базис пространства, достаточно показать, что они некомпланарны, т.е. их смешенное произведение не равно нулю. Находим

$$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=\begin{vmatrix}1 & 4 & 1\\ -3 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4 & 1\\ -3 & -2 & 0\\ -1 & -9 & 0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}-3 & -2\\ -1 & -9\end{vmatrix}=27-2=25\neq 0.$$

б) Запишем разложение вектора $\overline{x}$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$

$$\vec{x}=\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2+\gamma\vec{e}_3.$$

Так как $\overline{x}=\{-5;-8;-3\}$ и $\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2+\gamma\vec{e}_3=\{\alpha-3\beta+\gamma;4\alpha-2\beta-\gamma;\alpha+2\gamma\}$, получаем систему уравнений для определения коэффициентов разложения

$$\begin{cases}\alpha-3\beta+\gamma=-5,\\ 4\alpha-2\beta-\gamma=-8,\\ \alpha+2\gamma=-3.\end{cases}$$

Решим систему методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 4 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=25\neq 0 \Rightarrow$$ Система имеет единственное решение.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-5&-3&1\\-8&-2&-1\\-3&0&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&-3&1\\-13&-5&0\\7&6&0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^4\begin{vmatrix}-13&-5\\7&6\end{vmatrix}=-78+35=-43,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&-5&1\\4&-8&-1\\1&-3&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-5&1\\5&-13&0\\-1&7&0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^4\begin{vmatrix}5&-13\\-1&7\end{vmatrix}=35-13=22,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&-3&-5\\4&-2&-8\\1&0&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-3&-5\\0&10&12\\0&3&2\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^2\begin{vmatrix}10&12\\3&2\end{vmatrix}=20-36=-16.$$

По формулам Крамера находим значения неизвестных системы:

$$\alpha=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-43}{25}=-\frac{43}{25},\ \beta=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{22}{25},\ \gamma=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-16}{25}=-\frac{16}{25}.$$

Таким образом,

$$\vec{x}=-\frac{43}{25}\vec{e}_1+\frac{22}{25}\vec{e}_2-\frac{16}{25}\vec{e}_3.$$

. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 3

Третий раздел дисциплины направлен на изучение различных видов уравнений прямых, плоскостей, кривых и поверхностей 2-го порядка. Поэтому, прежде чем приступать к решению задач, полезно обобщить теоретический материал в таблицы.

Таблица 3.1.

Различные формы уравнения прямой на плоскости

Название уравнения прямой l	Аналитический вид	Входящие постоянные
Общее в координатной форме	$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	$\vec{N}=\{A;B\}$, $M_0(x_0;y_0)\in l$, $\vec{N}\,\square\, l$
Общее	$Ax+By+D=0$	$\vec{N}=\{A;B\}$, $\vec{N}\,\square\, l$
В отрезках	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	a и b – это отрезки, отсекаемые от Ox и Oy
Параметрическо е	$\begin{cases}x=tm+x_0\\ y=tn+y_0\end{cases}$	$M_0(x_0;y_0)\in l$, $\vec{\sigma}=\{m;n\}$, $\vec{\sigma}\parallel l$, t – параметр
Каноническое	$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$	$M_0(x_0;y_0)\in l$, $\vec{\sigma}=\{m;n\}$
По двум точкам	$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$	$M_0(x_0;y_0)\in l$, $M_1(x_1;y_1)\in l$

С угловым коэффициентом	$y = kx + b$	$k = \frac{n}{m}$, $b = y_0 - \frac{n}{m} x_0$

Таблица 3.2.

Различные формы уравнения прямой в пространстве

Название уравнения прямой l	Аналитический вид	Входящие постоянные
Параметрическое	$\begin{cases} x = t\,m + x_0 \\ y = t\,n + y_0 \\ z = t\,p + z_0 \end{cases}$	$M_0(x_0; y_0; z_0) \in l$, $\vec{\sigma} = \{m; n; p\}$, $\vec{\sigma} \parallel l$, t – параметр
Каноническое	$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$	$M_0(x_0; y_0) \in l$, $\vec{\sigma} = \{m; n; p\}$
По двум точкам	$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$	$M_0(x_0; y_0; z_0) \in l$, $M_1(x_1; y_1; z_1) \in l$

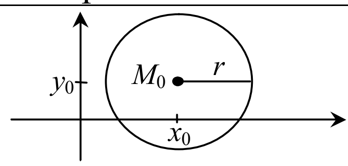
Таблица 3.3.

Различные формы уравнения плоскости

Название уравнения плоскости L	Аналитический вид	Входящие постоянные
Общее в координатной форме	$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$	$M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$, $\vec{N} = \{A; B; C\}$, $\vec{N} \perp L$.
Общее	$Ax + By + Cz + D = 0$	$\vec{N} = \{A; B; C\}$, $\vec{N} \perp L$.
В отрезках	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$	*a, b, c* – это отрезки, отсекаемые от *Ox, Oy, Oz.*
По трем точкам	$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$	$M_0(x_0; y_0; z_0) \in L$, $M_1(x_1; y_1; z_1) \in L$, $M_2(x_2; y_2; z_2) \in L$.

Таблица 3.4.

Кривые 2-го порядка

Название кривой	Аналитический вид	Графическое изображение
Окружность	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ $M_0(x_0; y_0)$ – центр окружности, r – радиус	

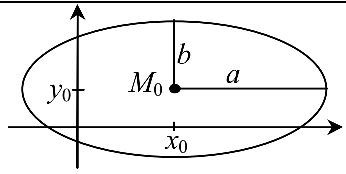
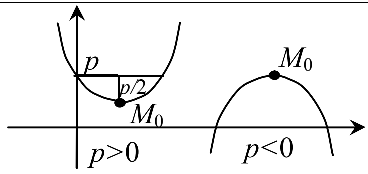
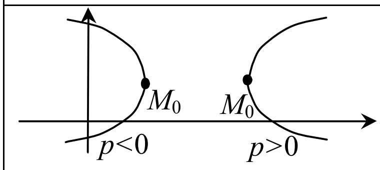
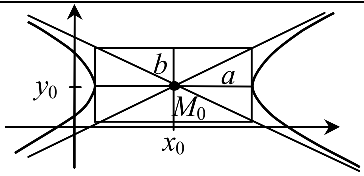
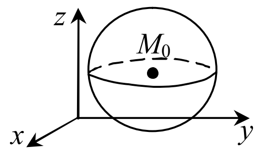
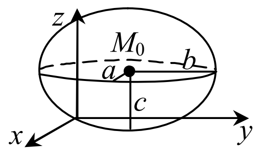
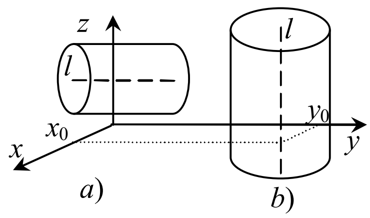
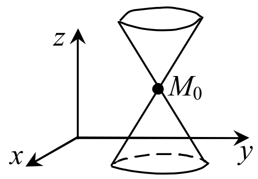
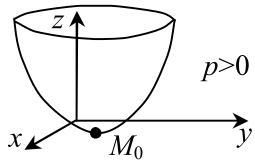
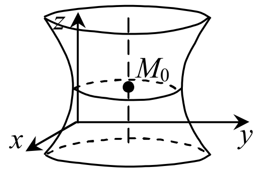
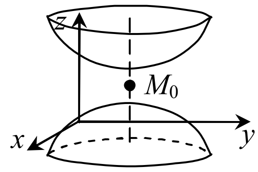
<table>
<tr><td>Эллипс</td><td colspan="2">$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$
$M_0(x_0;y_0)$ – центр окружности,
$a,\ b$ – полуоси</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Парабола</td><td>$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$</td><td rowspan="2">$M_0(x_0;y_0)$ – вершина параболы, p – фокальный параметр</td><td></td></tr>
<tr><td>$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$</td><td></td></tr>
<tr><td>Гипербола</td><td colspan="2">$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$
$M_0(x_0;y_0)$ – центр гиперболы,
$a,\ b$ – полуоси</td><td></td></tr>
</table>

Таблица 3.5.

Поверхности 2-го порядка

Название поверхности	Аналитический вид	Графическое изображение
Сфера	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – центр сферы, r – радиус	
Эллипсоид	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$ $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – центр эллипсоида, $a,\ b,\ c$ – полуоси	
Цилиндр	$a)\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(z-z_0)^2}{b^2}=1$ Ось $l\,\|\,Oy$. $b)\ \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ Ось $l\,\|\,Oz$.	

Конус	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(z-z_0)^2$ $M_0(x_0;y_0)$ – вершина конуса	
Эллиптический параболоид	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=2p(z-z_0)$	
Гиперболоид (однополостный)	$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}-\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$	
Гиперболоид (двуполостный)	$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}-\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=-1$	

Задача 1. Составить уравнение прямой, проходящей
а) через точку $M(-7;\ 1)$ параллельно прямой $3x-y-4=0$;
б) через точку $M(-7;\ 1)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+3}{5}$;
в) через точку $M(-7;\ 1)$ и точку $B(0;\ -7)$.

Построить все прямые. Для каждой прямой записать вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{\sigma}$ и угловой коэффициент k.

Решение. Обозначим заданные прямые

$$l_1: 3x-y-4=0,\ l_2: \frac{x-1}{6}=\frac{y+3}{5},$$

а искомые прямые – $l_а$, $l_б$, $l_в$.

***а*)** Из данного уравнения прямой $l_1: 3x-y-4=0$ имеем $\vec{N}=\{3;-1\}$ – вектор нормали. Так как $l_a \,||\, l_1$, то вектор $\vec{N}=\{3;-1\}$ будет также вектором нормали для искомой прямой l_a. По условию задачи точка и прямая заданы на плоскости (две координаты). Воспользуемся формулами таблицы 3.1 – общим уравнением прямой в координатной форме

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,$$

где роль точки $M_0(x_0;y_0)$, будет выполнять точка $M(-7;\ 1)$, а вектор нормали $\vec{N}=\{A;B\}=\{3;-1\}$. Подставим x_0, y_0, A и B в уравнение и получим:

$$l_a:\ 3(x-(-7))-1\cdot(y-1)=0 \quad \Rightarrow \quad 3x-y+22=0.$$

Найдем направляющий вектор. Для этого приведем уравнение l_a к каноническому виду $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$:

$$3x=y-22 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{y-22}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{1}=\frac{y-22}{3},$$

где направляющий вектор $\vec{\sigma}_a = \{1;3\}$.
Найдем угловой коэффициент. Для этого приведем уравнение l_a к уравнению с угловым коэффициентом $y = kx + b$:

$$3x = y - 22 \quad \square \quad y = 3x + 22,$$

где угловой коэффициент $k = 3$.

***б*)** Из данного уравнения прямой $l_2 : \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y+3}{5}$ имеем $\vec{\sigma}_2 = \{6;5\}$ – направляющий вектор. Так как $l_б$ □ l_2, то направляющий вектор прямой l_2 будет служить вектором нормали искомой прямой $l_б$: $\vec{\sigma}_2 = \vec{N}_б = \{A;B\}$. Воспользуемся общим уравнением прямой в координатной форме (табл. 3.1):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

где $M_0(x_0;y_0)$ – это точка $M(–7;\ 1)$, A=6, B=5 подставим данные и получим:

$$l_б:\ 6(x - (-7)) + 5(y - 1) = 0 \quad \square \quad 6x + 5y + 37 = 0.$$

Вектор нормали $\vec{N}_б = \{6;5\}$. Найдем направляющий вектор. Для этого приведем уравнение $l_б$ к каноническому виду $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$:

$$6x + 5y + 37 = 0 \quad \square\ 5y = -6(x + 37/6) \quad \square \quad \frac{y}{-6} = \frac{x + 37/6}{5},$$

где направляющий вектор $\vec{\sigma}_б = \{5;–6\}$.
Найдем угловой коэффициент. Для этого приведем уравнение $l_б$ к уравнению с угловым коэффициентом $y = kx + b$:

$$6x + 5y + 37 = 0 \quad \square\ 5y = -6x - 37\ \square\ y = -\frac{6}{5}x - \frac{37}{5},$$

где угловой коэффициент $k = -\dfrac{6}{5}$.

***в*)** Воспользуемся формой уравнения прямой по двум точкам (табл. 3.1)

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0},$$

где $M_0(x_0;y_0)$ – точка $M(–7;\ 1)$, а $M_1(x_1;y_1)$ – точка $B(0;\ –7)$. Подставим данные и получим:

$$l_в:\ \frac{x - (-7)}{0 - (-7)} = \frac{y - 1}{-7 - 1} \quad \square \quad \frac{x + 7}{7} = \frac{y - 1}{-8},\ \text{где}\ \vec{\sigma}_в = \{7;–8\}.$$

Найдем вектор нормали. Для этого преобразуем $l_в$ к уравнению общего вида $Ax + By + D = 0$.

$$-8(x + 7) = 7(y - 1) \quad \square \quad -8x - 56 = 7y - 7 \quad \square \quad 8x + 7y + 49 = 0,$$

где вектор нормали $\vec{N}_в = \{8;7\}$.
Найдем угловой коэффициент. Для этого приведем уравнение $l_в$ к уравнению с угловым коэффициентом $y = kx + b$:

$$\frac{x + 7}{7} = \frac{y - 1}{-8} \quad \square\ -8x - 56 = 7y - 7\ \square\ y = -\frac{8}{7}x - 7,$$

где угловой коэффициент $k = -\dfrac{8}{7}$.

Построим все три прямые (рис. 3.1):

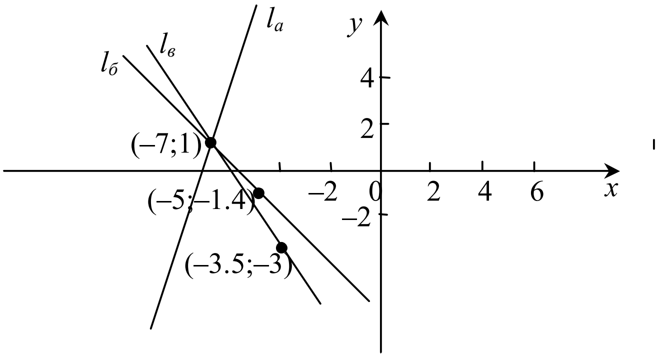


Рис. 3.1.

Задача 2. Даны три прямые

$l_1: 8x - 2y + 3 = 0$; $l_2: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+4}{-4}$ и $l_3: \begin{cases} x = t - 4, \\ y = 4t + 1. \end{cases}$

Исследовать взаимное расположение прямых l_1 и l_2; l_1 и l_3. Для каждой пары прямых найти:

а) координаты точки пересечения или расстояние между прямыми;

б) косинус угла между прямыми.

Решение. Две прямые на плоскости могут либо пересекаться, либо располагаться параллельно. Поэтому, для выяснения взаимного расположения прямых, используем свойства параллельности (коллинеарности) их направляющих векторов. Уравнение прямой l_1 задано в общем виде. Преобразуем его в каноническое:

$$l_1: 8x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow 8(x + 3/8) = 2y \Rightarrow \frac{x + 3/8}{2} = \frac{y}{8}. \qquad (3.1)$$

Из канонического уравнения находим направляющий вектор $\vec{\sigma}_1 = \{2;8\}$ (используем табл.3.1, где указаны константы, входящие в уравнения прямых). Прямые l_2 и l_3 заданы в канонической и параметрической форме. Следовательно, выписываем направляющие векторы этих прямых $\vec{\sigma}_2 = \{1;-4\}$, $\vec{\sigma}_3 = \{1;4\}$. Проверим условие коллинеарности векторов $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2$.

$$\vec{\sigma}_1 = \lambda\vec{\sigma}_2 \Rightarrow \begin{cases} 2 = \lambda \cdot 1 \\ 8 = \lambda \cdot (-4) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{8}{-4} = \lambda \text{ – ложно.}$$

Получили ложное выражение, следовательно, прямые l_1 и l_2 не параллельны, они пересекаются. Проверим условие коллинеарности для векторов $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_3$.

$$\vec{\sigma}_1 = \lambda\vec{\sigma}_3 \Rightarrow \begin{cases} 2 = \lambda \cdot 1 \\ 8 = \lambda \cdot 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{8}{4} = \lambda \text{ – истинно.}$$

Получили истинное выражение, значит прямые l_1 и l_3 параллельны.

***а*)** Найдем точку пересечения для прямых l_1 и l_2. Для этого решим совместно их уравнения:

$$\begin{cases} l_1: 8x-2y+3=0, \\ l_2: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+4}{-4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-2y+3=0, \\ -4x+4=y+4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-2y=-3, \\ -4x-y=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4y=-3, \\ -4x=y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3/4, \\ x=-3/16. \end{cases}$$

Таким образом, координаты точки пересечения прямых l_1 и l_2 $O\left(\dfrac{-3}{16}, \dfrac{3}{4}\right)$.

Найдем расстояние h между прямыми l_1 и l_3. (рис. 3.1). Для этого выберем на каждой прямой точку M_1 и M_2 – это легко сделать по канокическому уравнению прямых, построим вектор $\overline{M_1M_2}$ и найдем проекцию $\overline{M_1M_2}$ на вектор нормали одной из прямых, например $\overline{N_1}=\{8;-2\}$, который известен из общего уравнения прямой l_1. Из уравнения (3.1) выпишем M_1 (–3/8;0), из уравнения для l_3: M_2 (–4;1).

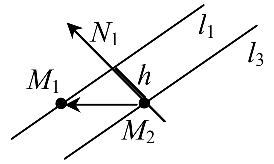


Рис. 3.1

$$\overline{M_1M_2}=\left\{-\frac{29}{8};1\right\},$$

$$Пр_{\vec{N}_1}(\overline{M_1M_2})=\frac{(\overline{M_1M_2},\vec{N}_1)}{|\vec{N}_1|}=\frac{-\frac{29}{8}\cdot(-4)+1\cdot 1}{\sqrt{(-4)^2+1^2}}=\frac{\frac{29}{2}+1}{\sqrt{17}}=\frac{31}{2\sqrt{17}},$$

$$h=\left|Пр_{\vec{N}_1}(\overline{M_1M_2})\right|=\frac{31}{2\sqrt{17}}.$$

***б*)** Найдем косинус угла между прямыми l_1 и l_2 как косинус угла между направляющими векторами $\vec{\sigma}_1=\{2;8\}$ и $\vec{\sigma}_2=\{1;-4\}$:

$$\cos(\vec{\sigma}_1 \hat{,} \vec{\sigma}_2)=\frac{(\vec{\sigma}_1,\vec{\sigma}_2)}{|\vec{\sigma}_1|\cdot|\vec{\sigma}_2|}=\frac{2\cdot 1+8\cdot(-4)}{\sqrt{2^2+8^2}\cdot\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\frac{-30}{\sqrt{68}\cdot\sqrt{17}}=-\frac{15}{17}.$$

Косинус угла между параллельными прямыми l_1 и l_3 равен 1, т. к.

$$\cos(\vec{\sigma}_1 \hat{,} \vec{\sigma}_3)=\cos 0^\circ=1.$$

Задача 3. Привести уравнения линий к каноническому виду, назвать и построить кривые:

а) $x^2+y^2-8x=0$; *б*) $x=-\dfrac{1}{3}\sqrt{25-y^2}$;

в) $-2x^2+3y^2-4x+15y+4=0$; *г*) $x+4y-2y^2-5=0$.

Решение. Решая эту задачу, будем пользоваться таблицей 3.4 канонических уравнений кривых 2-го порядка.

***а*)** $x^2+y^2-8x=0$.

Приведем уравнение к каноническому виду. Для этого сгруппируем переменные и выделим полные квадраты:

$$x^2-8x+y^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{x^2 - 2\cdot 4\cdot x + 4^2}_{(x-4)^2} - 4^2 + y^2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$(x-4)^2 + y^2 = 4^2.$$

Получили уравнение окружности (табл. 3.4) с центром в точке $O'(4;\,0)$ и радиусом r=4 (рис. 3.2).

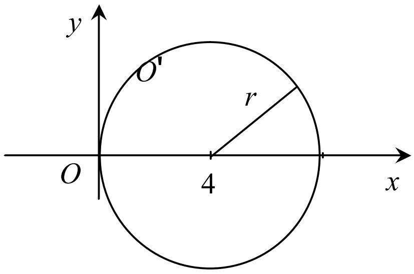


Рис. 3.2.

б) $x = -\dfrac{1}{3}\sqrt{25-y^2}$.

Приведем уравнение к каноническому виду. Для этого умножим обе части уравнения на (–3) и возведем в квадрат:

$$(-3x)^2 = \left(\sqrt{25-y^2}\right)^2 \;\Rightarrow$$

$$9x^2 = 25 - y^2 \;\Rightarrow$$

$$9x^2 + y^2 = 25.$$

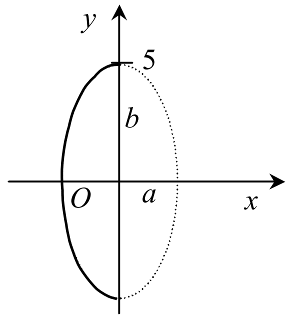


Рис. 3.3

Разделим каждое слагаемое на 25:

$$\frac{9x^2}{25} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

а числитель и знаменатель первой дроби на 9:

$$\frac{x^2}{(5/3)^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1.$$

Получили каноническое уравнение эллипса с центром в точке $O'(0;\,0)$ и полуосями a=(5/3) и b=5 (табл. 3.4). Однако, исходное уравнение определяет не весь эллипс, а только его левую часть, т. к. из исходного уравнения видно, что $x \le 0$ (рис. 3.3).

в) $-2x^2 + 3y^2 - 4x + 15y + 4 = 0$.

Приведем уравнение к каноническому виду. Для этого сгруппируем переменные и выделим полные квадраты:

$$-2x^2 - 4x + 3y^2 + 15y + 4 = 0 \;\Rightarrow\; -2(x^2 + 2x) + 3(y^2 + 5y) + 4 = 0 \;\Rightarrow$$

$$-2\left(\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} - 1\right) + 3\left(\underbrace{y^2 + 2\cdot\frac{5}{2}\cdot y + \left(\frac{5}{2}\right)^2}_{(y+5/2)^2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) + 4 = 0 \;\Rightarrow$$

$$-2\left((x+1)^2-1\right)+3\left((y+5/2)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)+4=0 \;\Leftrightarrow$$

$$-2(x+1)^2+2+3\left(y+\frac{5}{2}\right)^2-3\cdot\frac{25}{4}+4=0 \;\Leftrightarrow$$

$$-2(x+1)^2+3\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{51}{4}.$$

Разделим каждое слагаемое на $\dfrac{51}{4}$:

$$\frac{-2(x+1)^2}{\frac{51}{4}}+\frac{3\left(y+\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{51}{4}}=1,$$

числитель и знаменатель первой дроби разделим на 2, а числитель и знаменатель второй дроби – на 3:

$$-\frac{(x+1)^2}{\frac{51}{8}}+\frac{\left(y+\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{51}{3\cdot 4}}=1 \;\Leftrightarrow\; -\frac{(x+1)^2}{\frac{51}{8}}+\frac{\left(y+\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{17}{4}}=1 \;\Leftrightarrow$$

$$-\frac{(x+1)^2}{\left(\sqrt{\frac{51}{8}}\right)^2}+\frac{\left(y+\frac{5}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{17}{4}}\right)^2}=1.$$

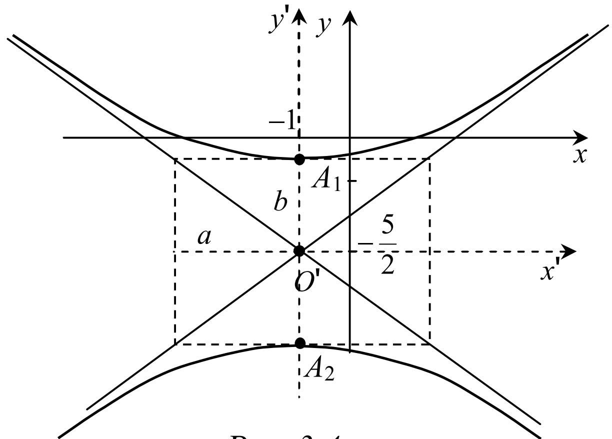


Рис. 3.4

Получили каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $O'\left(-1;-\dfrac{5}{2}\right)$ и полуосями $a=\sqrt{\dfrac{51}{8}}$ и $b=\sqrt{\dfrac{17}{4}}$ (табл. 3.4). Знак «–» стоит перед слагаемым с переменной x. Значит мнимая ось – $O'x'$ – не пересекается графиком, фокальная ось – $O'y'$. Вершины гиперболы – в точках $A_1\left(-1;-\dfrac{5}{2}+\sqrt{\dfrac{17}{4}}\right)$, $A_2\left(-1;-\dfrac{5}{2}-\sqrt{\dfrac{17}{4}}\right)$. Строим вспомагательный прямоугольник с центром в точке O' и сторонами $2a$ и $2b$, проводим диагонали – они будут асимптотами гиперболы, проводим ветви гиперболы через вершины A_1 и A_2 к асимптотам (рис. 3.4).

г) $x+4y-2y^2-5=0$.

Приведем уравнение к каноническому виду. Для этого сгруппируем переменные и выделим полные квадраты:

$$x-2(y^2-2y)-5=0 \quad □$$

$$x-2(\underbrace{y^2-2y+1}_{(y-1)^2}-1)-5=0 \quad □$$

$$x-2(y-1)^2+2-5=0 \quad □$$

$$x-3=2(y-1)^2 \quad □$$

$$(y-1)^2=\frac{1}{2}(x-3) \quad □$$

$$(y-1)^2=2\cdot\frac{1}{4}(x-3).$$

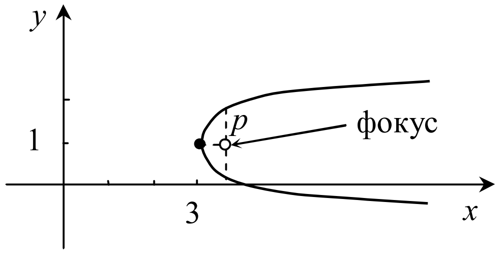


Рис. 3.5

Получили каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $O'(3;1)$, с осью симметрии вдоль оси Ox (т. к. переменная y в квадрате) и фокальным параметром $p=\dfrac{1}{4}$ (рис. 3.5).

Задача 4. Построить кривые, заданные в полярных координатах:

а) $\rho=2\cos\varphi$; *б*) $\rho=\sin 3\varphi$.

Найти их уравнения в прямоугольных координатах при условии, что начало прямоугольной системы координат совпадает с полюсом, а положительная ось абсцисс – с полярной осью.

Решение. ***а***) Построим таблицу значений аргумента □ от 0 до 2□□, т. к. период $\cos\varphi$ равен 2□, и вычислим соответствующие значения функции □.

□	0	□/6	□/4	□/3	□/2	□□/3	□	4□/3	3□/2	5□/3	2□
□	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0	–1	–2	–1	0	1	2

1) Выберем полюс *O,* проведем полярную ось горизонтально. Это соответствует □ =0. Все остальные углы будем откладывать от него против часовой стрелки (рис. 3.6).

2) На лучах для каждого □ отложим от полюса *O* вычисленное значение □.

3) Для отрицательных значений □ расстояние от полюса откладываем в противоположном направлении (они будут совпадать с уже отложенными точками в положительном направлении).

4) Соединяем все точки плавной линией.

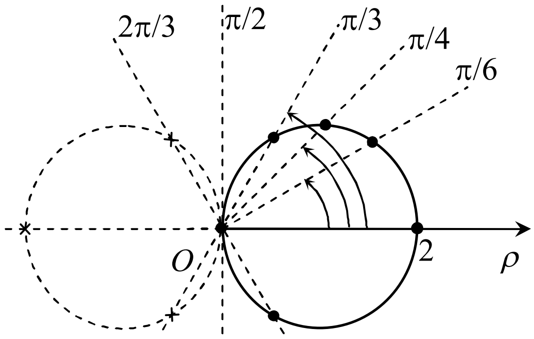


Рис. 3.6

Получим уравнение кривой в декартовой системе координат. Связь полярной и декартовой системы:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases} \quad □ \quad \begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Подставим в уравнение $\rho=2\cos\varphi$ выражение для □□ и□ □:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \Rightarrow$$

$$x^2+y^2=2x \quad \Rightarrow \quad x^2-2x+y^2=0.$$

Выделим полный квадрат и получим каноническое уравнение окружности с центром в точке $O'(1;0)$

$$(x-1)^2+y^2=1.$$

***б*)** Кривая $\rho=\sin 3\varphi$ называется трехлепестковая роза, так как на плоскости трижды повторяются замкнутые кривые, подобные лепесткам. Построим таблицу значений аргумента φ от 0 до $2\pi/3$, т. к. период равен $2\pi/3$, и вычислим соответствующие значения функции ρ.

φ	0	$\pi/18$	$\pi/12$	$\pi/9$	$\pi/6$	$5\pi/18$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$
ρ	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	1/2	0	–1	0

1) Выберем полюс O, проведем полярную ось горизонтально. Это соответствует $\varphi=0$. Все остальные углы будем откладывать от него против часовой стрелки (рис. 3.7).

2) На лучах для каждого φ отложим от полюса O вычисленное значение ρ.

3) Для отрицательных значений ρ расстояние от полюса откладываем в противоположном направлении (они совпадут с точками других лепестков).

4) Соединяем все точки плавной линией.

5) Далее, через $2\pi/3$ рад. поведение кривой будет периодически повторяться. В результате на плоскости ($0 \le \varphi \le 2\pi$) появятся еще 2 лепестка.

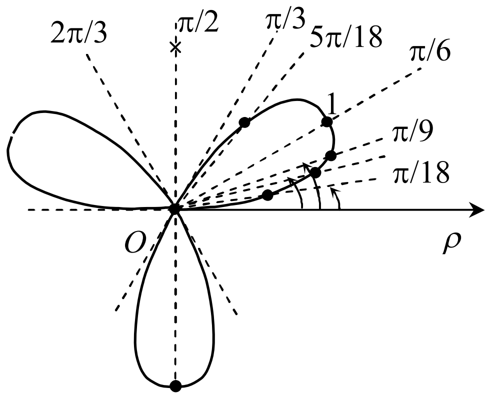


Рис. 3.7

Получим уравнение кривой в декартовой системе координат. Выразим $\sin 3\varphi$ через $\sin\varphi$:

$$\rho=\sin 3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi.$$

Используем формулы (3.1) предыдущей задачи и подставим их в данное выражение:

$$\sqrt{x^2+y^2}=3\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-4\frac{y^3}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}} \quad \Rightarrow$$

$$\left(x^2+y^2\right)^2=3y\left(x^2+y^2\right)-4y^3 \quad \Rightarrow$$

$$\left(x^2+y^2\right)^2=3yx^2-y^3.$$

Задача 5. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} x=-\cos t, \\ y=3\sin t; \end{cases}$ *б*) $\begin{cases} x=(t^3-t)/4, \\ y=t^2/2. \end{cases}$

Решение. ***а*)** Построим таблицу значений параметра *t* и вычислим соответствующие значения функций *x* и *y*. Значения t достаточно взять от 0 до □/2, т. к. все остальные точки можно достроить из соображений симметрии четной функции cos *t* и нечетной функции sin *t*.

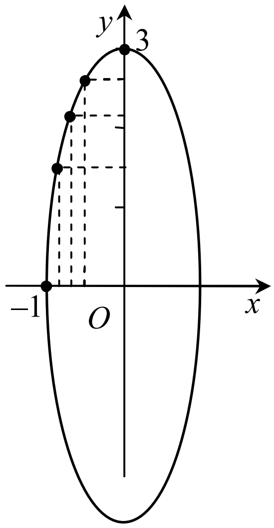


Рис. 3.8

t	0	□/6	□/4	□/3	□/2
x	–1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	–1/2	0
y	0	3/2	$3\sqrt{2}/2$	$3\sqrt{3}/2$	3

На плоскости в декартовой системе поставим точки, соответствующие вычисленным парам координат (*x*;*y*). Получим часть кривой во II четверти. В остальных четвертях точки будут располагаться симметрично относительно осей *Ox* и *Oy*. Таким образом, получили кривую – эллипс (рис. 3.8).

***б*)** Построим таблицу значений параметра *t* и вычислим соответствующие значения функций *x* и *y*. При этом следует обратить внимание, что значения *y* положительны при любых *t*, функция *x*(*t*) – нечетна, т.е. точки кривой будут симметричны относительно оси *Oy*.

t	–2	–1	–2/3	–1/2	0	1/2	2/3	1	2
x	–3/2	0	5/54	3/32	0	0	–5/54	–3/32	3/2
y	2	1/2	2/9	1/8	0	1/8		1/2	2

Начнем построение кривой с отрицательных значений параметра *t*: $-2 \le t \le 0$. Получим одну ветвь графика. Затем симметрично построим вторую ветвь и получим петлю (рис. 3.9).

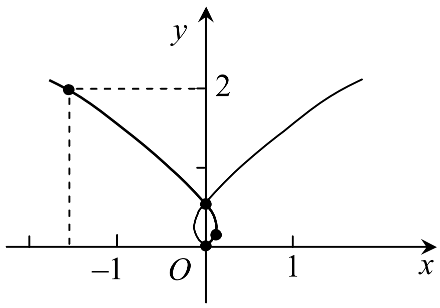


Рис. 3.9

Задача 6. Составить уравнения плоскостей, которые проходят:

а) через три точки *A*(5; –1; 1), *B*(0; –2; 1), *C*(1; –3; 0);

б) через точку *A*(5; –1; 1) перпендикулярно прямой $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z+4}{4}$;

в) через точку *B*(0; –2; 1) параллельно двум векторам $\vec{a}_1 = \{0;-1;2\}$ и $\vec{a}_2 = \{1;2;-1\}$;

г) через точку *C*(1; –3; 0) и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

Решение. ***а*)** Запишем уравнение плоскости по трем точкам (табл 3.3):

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

и подставим заданные по условию задачи точки:

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-(-1) & z-1 \\ 0-5 & (-2)-(-1) & 1-1 \\ 1-5 & (-3)-(-1) & 0-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель, разлагая его по первой строке:

$$\begin{vmatrix} x-5 & y+1 & z-1 \\ -5 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (x-5)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - (y+1)\cdot\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} + (z-1)\cdot\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-5)\cdot 1 - (y+1)\cdot 5 + (z-1)\cdot(10-4) =$$

$$= (x-5) - 5(y+1) + 6(z-1) = 0.$$

Получили общее уравнение плоскости в координатной форме. Можно раскрыть скобки и получить общее уравнение плоскости:

$$x - 5y + 6z - 16 = 0.$$

б) Плоскость перпендикулярна прямой, значит ее вектор нормали является направляющим вектором прямой $\vec{N} = \vec{\sigma} = \{3;-1;4\}$. Запишем общее уравнение плоскости в координатной форме (табл. 3.3):

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0,$$

подставим данные нашей задачи: $M_0(x_0;y_0;z_0) = A(5;-1;1)$, $\vec{N} = \{A;B;C\} = \{3;-1;4\}$ и получим общее уравнение плоскости в координатной форме

$$3(x-5) - (y+1) + 4(z-1) = 0.$$

в) Сделаем схематический рисунок: искомая плоскость L, векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ параллельны плоскости. Т. к. это свободные векторы, расположим их на плоскости (рис. 3.10). Вектор нормали плоскости $\vec{N} \perp L \Rightarrow \vec{N} \perp \vec{a}_1$, $\vec{N} \perp \vec{a}_2$ одновременно. По определению векторного произведения

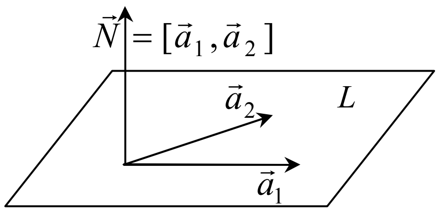


Рис. 3.10

$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2] \perp \vec{a}_1,\ [\vec{a}_1, \vec{a}_2] \perp \vec{a}_2 \quad \text{одновременно.}$$

Следовательно, $\vec{N} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$. Вычислим векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$:

$$\vec{N} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= (1-4)\vec{i} - (0-2)\vec{j} + (0+1)\vec{k} \ \square$$

$$\vec{N} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\,.$$

Подставляем заданную точку $B(0;\,-2;\,1)$ и найденный вектор $\vec{N}$ в общее уравнение плоскости в координатной форме и получаем ответ:

$$-3x + 2(y+2) + z - 1 = 0\,.$$

г) Запишем уравнение плоскости в отрезках (табл. 3.3), при условии, что отсекаемые отрезки равны:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1 \quad \square \quad x + y + z = a\,. \qquad (3.2)$$

Следовательно, вектор нормали искомой плоскости $\vec{N} = \{1;1;1\}$ или $\vec{N} = \{-1;-1;-1\}$. Запишем общее уравнение плоскости в координатной форме с заданной точкой $C(1;\,-3;\,0)$ и вектором нормали $\vec{N} = \{1;1;1\}$:

$$(x-1) + (y+3) + (z-0) = 0\,.$$

Раскроем скобки, выразим $x + y + z$, подставим в (3.2) и найдем a:

$$x + y + z + 2 = 0 \quad \square \quad x + y + z = -2 \quad \square \quad a = -2 \quad \square \quad \vec{N} = \{-1;-1;-1\}\,.$$

Таким образом, уравнение искомой плоскости

$$-(x-1) - (y+3) - (z-0) = 0\,.$$

Задача 7. Составить канонические уравнения прямой, проходящей

а) через точку $M_0(8;\,1;\,-1)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{0;3;-1\}$;

б) через две точки $M_0(8;\,1;\,-1)$ и $M_1(-2;\,0;\,3)$;

в) через точку $M_0(8;\,1;\,-1)$ в направлении, которое составляет с осями координат *Ox* и *Oy* углы □ = 60° и □ = 270°, соответственно;

г) через точку $M_0(8;\,1;\,-1)$ перпендикулярно плоскости $2y - z + 7 = 0$;

д) заданной в общем виде $\begin{cases} x - y + 7z = 0, \\ -3x + y + 2z + 11 = 0. \end{cases}$

Решение. *а*) Запишем каноническое уравнение прямой (табл 3.2):

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

и подставим данные задачи: $M_0(x_0; y_0; z_0) = M_0(8;1;-1)$, $\vec{\sigma} = \vec{a} = \{0;3;-1\}$:

$$\frac{x-8}{0} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}\,.$$

В уравнении прямой ноль в знаменателе – символическая запись, которая обозначает не деление на ноль, а координату направляющего вектора.

б) Запишем уравнение прямой по двум точкам (табл 3.2):

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

и подставим данные задачи $M_0(8;\,1;\,-1)$ и $M_1(-2;\,0;\,3)$:

$$\frac{x-8}{-2-8} = \frac{y-1}{0-1} = \frac{z+1}{3+1} \quad \square$$

$$\frac{x-8}{-10} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{4}\,.$$

в) Найдем координаты направляющего вектора $\vec{\sigma} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ исходя из основного тригонометрического тождества:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \;\Rightarrow$$

$$\cos^2(60^\circ) + \cos^2(270^\circ) + \cos^2\gamma = 1 \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} + 0 + \cos^2\gamma = 1 \quad\Rightarrow\quad \cos^2\gamma = \frac{3}{4} \quad\Rightarrow\quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом, координаты направляющего вектора

$$\vec{\sigma} = \left\{\frac{1}{2}; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Таким образом, можно записать каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x-8}{1/2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{\sqrt{3}/2} \text{ или } \frac{x-8}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{\sqrt{3}}.$$

г) Направляющий вектор прямой, перпендикулярной плоскости, совпадает с вектором нормали этой плоскости. Тогда из уравнения данной плоскости можно найти $\vec{\sigma} = \vec{N} = \{0; 2; -1\}$ и записать каноническое уравнение прямой

$$\frac{x-8}{0} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}.$$

д) Сделаем схематический рисунок (рис. 3.11). Общий вид прямой представляет собой пересечение двух плоскостей. По общим уравнениям плоскостей можно записать их векторы нормалей:

$\vec{N}_1 = \{1; -1; 7\}, \vec{N}_2 = \{-3; 1; 2\}$. Векторы нормалей перпендикулярны прямой, образованной пересечением плоскостей, следовательно, ее направляющий вектор может быть найден как векторное произведение $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$:

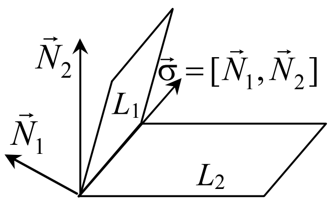


Рис. 3.11.

$$\vec{\sigma} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 7 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= (-2-7)\vec{i} - (2+21)\vec{j} + (1-3)\vec{k} \;\Rightarrow$$

$$\vec{\sigma} = -9\vec{i} - 23\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Найдем какую-либо точку, принадлежащую прямой – решим ее систему:

$$\begin{cases} x - y + 7z = 0, \\ -3x + y + 2z + 11 = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

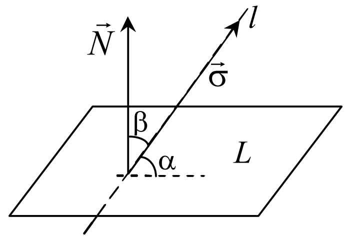
$$\begin{cases} x - y + 7z = 0, \\ -2x + 9z + 11 = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 17, \\ x = 10, \\ z = 1. \end{cases}$$

Запишем каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x-10}{-9}=\frac{y-17}{-23}=\frac{z-1}{-2} \text{ или } \frac{x-10}{9}=\frac{y-17}{23}=\frac{z-1}{2}.$$

Задача 8. Найти точку пересечения и угол между прямой $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-4}{3}$ и плоскостью $x-5z+1=0$.



$\vec{\sigma}$

Рис. 3.12.

Решение. Рассмотрим плоскость с вектором нормали $\vec{N}$ и прямую с направляющим вектором (рис. 3.12). Найдем угол □: □□□□□□□□□Тогда

$$\cos\beta=\cos(\pi/2-\alpha)=\sin\alpha.$$

Таким образом,

$$\sin\alpha=\cos\beta=\frac{(\vec{N},\vec{\sigma})}{|\vec{N}|\cdot|\vec{\sigma}|}. \ □$$

По виду уравнений прямой и плоскости записываем $\vec{N}=\{1;0;-5\}$, $\vec{\sigma}=\{1;-1;3\}$ и вычисляем угол между прямой и плоскостью:

$$\sin\alpha=\frac{1-0-15}{\sqrt{1+25}\cdot\sqrt{1+1+9}}=\frac{-14}{\sqrt{11\cdot 26}}, \ □$$

$$\alpha=\arcsin\left(\frac{-14}{\sqrt{11\cdot 26}}\right).$$

Найдем точку пересечения прямой и плоскости. Для этого запишем уравнение прямой в параметрической форме:

$$\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-4}{3}=t, \ □ \ \begin{cases} x=t, \\ y=-t-1, \\ z=3t+4 \end{cases}$$

и подставим выражения *x*, *y*, *z* в уравнение плоскости, (другими словами решим совместно уравнение прямой и плоскости):

$$t-5(3t+4)+1=0, \ □ \ -14t-19=0, \ □ \ t=-\frac{19}{14}.$$

Вернемся к переменным *x*, *y*, *z* и вычислим координаты точки пересечения прямой и плоскости:

$$\begin{cases} x=-\frac{19}{14}, \\ y=-\frac{19}{14}-1, \\ z=-3\cdot\frac{19}{14}+4; \end{cases} \quad □ \quad \begin{cases} x=-\frac{19}{14}, \\ y=\frac{5}{14}, \\ z=-\frac{1}{14}. \end{cases}$$

Задача 9. Определить тип поверхности и построить ее:

а) $x^2+4y^2+4x-z^2+2z=0$; *б*) $y^2-2y+z^2=0$.

Решение. *а*) Приведем уравнение к каноническому виду. Выделим полные квадраты:

$$(x^2+4x)+4y^2-(z^2-2z)=0 \quad □$$

$$(\underbrace{x^2+4x+4}_{(x+2)^2}-4)+4y^2-(\underbrace{z^2-2z+1}_{(z-1)^2}-1)=0$$ □

$$(x+2)^2+4y^2-(z-1)^2=3$$ □

$$\frac{(x+2)^2}{3}+\frac{y^2}{3/4}-\frac{(z-1)^2}{3}=1.$$

Получили уравнение однополостного гиперболоида (табл. 3.5) с осью вращения параллельной Oz, центром в точке $M_0(-2;\,0;\,1)$ и полуосями $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{3}/2, c=\sqrt{3}$ (рис. 3.13).

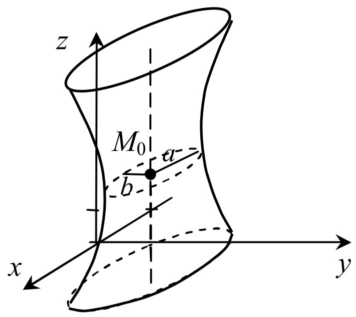


Рис. 3.13.

б) Приведем уравнение к каноническому виду. Выделим полные квадраты:

$$y^2-2y+1-1+z^2=0$$ □

$$(y-1)^2+z^2=1.$$

Получили уравнение цилиндра с осью вращения параллельной оси Ox, центром в точке $M_0(0;\,1;\,0)$ и окружностью с радиусом r=1 в сечении (рис. 3.14).

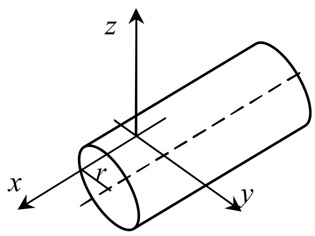


Рис. 3.14.

Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 4

Вариант №0

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^2+1}{5n^2}=2.$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-8x+6}{x-3}=4$.

2. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4-100n^2+1}{100-15n^4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n!}{3n!-(n-1)!}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-5x+1}{2x^3-7x^2-2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^4}{x^2+3}-3x^2\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+x-4}{2x^2+x-3}$; е) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x^3-2\sqrt{2}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x-5}\right)^{x-1}$; з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(5+x)-\ln5}{x}$;

и) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{2x}-1}{x}$; к) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\arcsin(x)}-1}{\operatorname{tg}x^2}$;

л) $\lim\limits_{x\to2-0}\left(\dfrac{1}{1-3^{-\frac{1}{x-2}}}\right)$; м) $\lim\limits_{x\to2+0}\left(\dfrac{1}{1-3^{-\frac{1}{x-2}}}\right)$.

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

а) $y=\begin{cases}x, & x<0,\\ 3, & 0\le x<4,\\ \sqrt{x}, & x\ge4;\end{cases}$ б) $y=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}$;

в) $y=|x|+2$.

4. Сравните бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to0$, если $\alpha(x)=\ln(\sqrt[4]{1-\cos(\sqrt{x})}+1)$ и $\beta(x)=e^{\sqrt{x}}-1$.

5. Определите порядок малости относительно x функции $y=\left(e^{x^2}-\cos x\right)$ при $x\to0$.

Задача 1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^2+1}{5n^2}=2$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-8x+6}{x-3}=4$

Теоретическая справка

При выполнении этого задания используются определения предела последовательности и предела функции.

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует номер N такой, что при $n>N$ выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

Функция $E(x)$ (читают «антье x») используется при записи номера N. Её обозначают символом $[x]$. Функция определяется как наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $E(3{,}1)=3$, $E(0{,}7)=0$, $E(-0{,}5)=-1$.

Определение предела функции по Коши (на языке $\varepsilon-\delta$). Число A *называется пределом функции* $f(x)$ *при* $x\to x_0$, если для любого $\varepsilon>0$

существует такое $\delta > 0$, что для всех x, отвечающих условию $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Определение предела функции по Гейне (на языке последовательностей). Вещественное число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to x_0$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, стремящейся к x_0 соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходиться к A.

При этом предполагается, что последовательность $\{x_n\} \in D(f)$ и $x_n \neq x_0 \; \forall n \in N\cdot$

Решение 1 *а*). Докажите, что $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{10n^2 + 1}{5n^2} = 2.$

Для любого $\varepsilon > 0$ попробуем найти такое натуральное число N, что для всякого натурального $n > N$ выполнялось неравенство

$$|x_n - 2| < \varepsilon.$$

Для этого найдем абсолютную величину разности

$$\left|\frac{10n^2 + 1}{5n^2} - 2\right| = \left|\frac{10n^2 + 1 - 10n^2}{5n^2}\right| = \left|\frac{1}{5n^2}\right| = \frac{1}{5n^2}.$$

Значит, неравенство $|x_n - 2| < \varepsilon$ выполняется, если $\dfrac{1}{5n^2} < \varepsilon$, откуда $n > \sqrt{\dfrac{1}{5\varepsilon}}$.

Поэтому в качестве N можно взять целую часть числа $\sqrt{\dfrac{1}{5\varepsilon}}$, т.е. $N = E\left(\sqrt{\dfrac{1}{5\varepsilon}}\right)$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что из неравенства $n > N$ будет следовать $|x_n - 2| < \varepsilon$, а это значит, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{10n^2 + 1}{5n^2} = 2.$$

Решение 1 *б*). Докажите, что $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - 8x + 6}{x - 3} = 4$

Первый способ – используется определение предела функции по Коши. Следуя определению предела функции по Коши надо доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из равенства $0 < |x - 3| < \delta$ следует $|f(x) - 4| < \varepsilon$.

Рассмотрим модуль разности $|f(x) - 4|$ относительно модуля $|x - 3|$. Другими словами, необходимо решить неравенство

$$\left|\frac{2x^2 - 8x + 6}{x - 3} - 4\right| = \left|\frac{2x^2 - 8x + 6 - 4x + 12}{x - 3}\right| = \left|\frac{2(x - 3)^2}{x - 3}\right| = 2|x - 3| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство показывает, что как только $|x - 3| < \varepsilon/2 = \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - 4| < \varepsilon$. Следовательно, $\delta = \varepsilon/2$ и

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-8x+6}{x-3}=4.$$

Второй способ – используется определение предела функции по Гейне. Рассмотрим любую последовательность $\{x_n\}$ значений x, удовлетворяющую двум условиям:

1) числа x_n, $n \in \mathbf{N}$ принадлежат области определения функции
$$f(x)=\frac{2x^2-8x+6}{x-3}=4 \text{ (т.е. } x_n \neq 3);$$
2) последовательность сходится к числу 3, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

Этой последовательности $\{x_n\}$ соответствует последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$, причем на основании теорем о пределах, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{2x_n{}^2-8x_n+6}{x_n-3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(x_n-3)(x_n-1)}{x_n-3} = \lim_{n\to\infty} 2(x_n-1) = 4.$$

Таким образом, независимо от выбора последовательности $\{x_n\}$ сходящейся к числу 3 ($x_n \neq 3$), соответствующие последовательности значений функции сходятся к числу 4. А это на основании определения предела функции значит, что

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-8x+6}{x-3}=4.$$

Задача 2.

Теоретическая справка

Предел функции не зависит от того, определена она в предельной точке или нет. Но в практике вычисления пределов элементарных функций это обстоятельство имеет существенное значение.

1) Если функция является элементарной и предельное значение аргумента принадлежит ее области определения, то
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$
2) Если аргумент стремиться к бесконечности или к числу, которое не принадлежит области определения функции, то в каждом случае нахождение предела функции требует специального исследования. В этом случае в результате подстановки предельного значения x_0 получают неопределенность (одно из выражений):
$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0\cdot\infty, 0^{\infty}, 1^{\infty},\ldots$$
Для получения ответа неопределенность необходимо раскрыть, причем любую неопределенность необходимо сначала преобразовать к виду:

а) $\frac{0}{0}$ (отношение двух бесконечно малых);

б) $\frac{\infty}{\infty}$ (отношение двух бесконечно больших);

в) 1^{∞}.

Решение 2 *а*). Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-n^2+5}{1+2n-5n^3}$.

Убедившись, что имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, подвергаем последовательность преобразованию. Вынесем за скобки и в числителе и в знаменателе высшую степень аргумента n^3 и сократим в числителе и знаменателе одинаковый множитель – n^3:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n^2+5}{1+2n-5n^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^2}-5\right)}=-5.$$

В последнем выражении каждая из дробей: $\frac{1}{n},\frac{5}{n^3},\frac{1}{n^3},\frac{2}{n^2}$ является бесконечно малой при $n\to\infty$

Решение 2 б). Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n!}{3n!-(n-1)!}$.

Убедившись, что имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty-\infty}$, распишем все факториалы до наименьшего $(n-1)!$, встречающегося в данной функции и вынесем в числителе и знаменателе общий множитель. Учитывая, что $n! = (n-1)!\cdot n$ получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n!}{3n!-(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n-1)!\cdot n}{3(n-1)!\cdot n-(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n-1)!\cdot n}{(n-1)!(3n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n-1}.$$

Далее выносим старшую степень n в числителе и знаменателе как в задании 2а или оставляем главную часть бесконечно большой.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n!}{3n!-(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n}=\frac{2}{3}.$$

В знаменателе оставили главную часть бесконечно большой – $3n$.

Решение 2 *в*). Найдите предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-5x+1}{2x^3-7x^2-2x}$.

Убедившись, что имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, подвергаем функцию преобразованию. Вынесем за скобки и в числителе и в знаменателе высшую степень аргумента x^3 (или оставляем главную часть бесконечно большой), находим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-5x+1}{2x^3-7x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2-\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{1}{2},$$

так как при $x\to+\infty$ величины $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ *и* $\frac{1}{x^3}$ являются бесконечно малыми.

Решение 2 *г*). Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^4}{x^2+3}-3x^2\right)$.

Анализируя условие задачи, заключаем, что при $x\to\infty$ функция представляет разность двух положительных бесконечно больших величин (случай $\infty-\infty$). После этого преобразуем данную функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности. Тем самым данный случай нахождения предела функции сводится к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^4}{x^2+3}-3x^2\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^4-3x^4-9x^2}{x^2+3}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-9x^2}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-9x^2}{x^2}=-9$$

Оставляем главную часть бесконечно большой x^2 в знаменателе.

Решение 2 *д*). Найдите предел $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2+x-4}{2x^2+x-3}$.

Вначале убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой $x = 1$. В этом случае дробь представляет отношение двух бесконечно малых величин (случай $\frac{0}{0}$). Делаем преобразование, чтобы сократить дробь на множитель $(x-1)$, стремящийся к нулю. Разлагаем числитель и знаменатель на множители (делением многочлена на многочлен):

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2+x-4}{2x^2+x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(3x+4)}{(x-1)(2x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{3x+4}{2x+3}=\frac{7}{5}.$$

Решение 2 *е*). Найдите предел $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x^3-2\sqrt{2}}$.

Вначале убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой $x = \sqrt{2}$. В этом случае дробь представляет отношение двух бесконечно малых величин (случай $\frac{0}{0}$). Делаем преобразование, чтобы сократить дробь на множитель $(x-\sqrt{2})$, стремящийся к нулю. Разлагаем числитель и знаменатель дроби на множители, используя формулу разности квадратов в числителе и разности кубов в знаменателе:

$$a^2-b^2=(a-b)\,(a+b),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + a\,b + b^2).$$

Тогда получим

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^2-2}{x^3-2\sqrt{2}} = \lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+2\right)} = \lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{\left(x+\sqrt{2}\right)}{\left(x^2+\sqrt{2}x+2\right)} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Решение 2 *ж*). Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x-5}\right)^{x-1}$.

Убедившись сначала, что при указанном изменении аргумента функция представляет степень, основание которой стремиться к единице, а показатель – к бесконечности (случай 1^∞). Далее преобразуем функцию так, чтобы использовать 2-й замечательный предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Исключив целую часть из дроби, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x-5}\right)^{x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x-5}\right)^{\frac{(3x-5)}{4}\frac{4}{(3x-5)}(x-1)}.$$

Первый множитель у степени забираем для е, второй и третий остается. Итого имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x-5}\right)^{x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{3x-5}\right)^{\frac{(3x-5)}{4}\frac{4}{(3x-5)}(x-1)} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(x-1)}{(3x-5)}} = e^{\frac{4}{3}}.$$

Решение 2 *з*). Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(5+x)-\ln 5}{x}$.

Вначале убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой $x = 0$. В этом случае дробь представляет отношение двух бесконечно малых величин (случай $\dfrac{0}{0}$). Используем свойства логарифмов:

$$\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b},\;\; \ln a + \ln b = \ln ab,\; \ln a^b = b\ln a.$$

В результате получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(5+x)-\ln 5}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{5+x}{5}}{x} = \lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{5}\right)^{\frac{5}{x}\cdot\frac{1}{5}}\right) = \ln e^5 = 5.$$

Решение 2 *и*). Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-1}{x}$.

Вначале убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой $x = 0$. В этом случае дробь представляет отношение двух бесконечно малых величин (случай $\frac{0}{0}$). Воспользуемся таблицей 1.

Эквивалентные бесконечно малые ($\alpha(x)$ – б.м.)

Таблица 1.

$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$
$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$\log_a(1+\alpha(x)) \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$
$\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
$\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$
$1 - \cos\alpha(x) \sim \dfrac{\alpha^2(x)}{2}$	$\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$

Замени выражение, стоящее в числителе на эквивалентную бесконечно малую $(2 \cdot x \cdot \ln 3)$ и получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\ln 3}{x} = 2\ln 3.$$

Решение 2 *к*). Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\arcsin(x)}-1}{\operatorname{tg}x^2}$.

Аналогично убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой $x = 0$. В этом случае дробь представляет отношение двух бесконечно малых величин (случай $\frac{0}{0}$). Воспользуемся таблицей 1 и получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin(x)}-1}{\operatorname{tg}x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Решение 2 *л*). Найдите предел $\lim\limits_{x\to 2-0}\left(\dfrac{1}{1-3^{-\frac{1}{x-2}}}\right)$.

Если переменная x будет стремиться к 2 слева, т. е. $(x - 2)$ будет отрицательной бесконечно малой, то $\left(-\dfrac{1}{x-2}\right)$ будет положительной бесконечно большой и

$$\lim_{x\to 2-0}\left(\frac{1}{1-3^{-\frac{1}{x-2}}}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{1-3^{\frac{1}{x-2}}}\right) = \frac{1}{1-3^{+\infty}} = 0.$$

Решение 2 *м*). Найдите предел $\lim\limits_{x\to 2+0}\left(\dfrac{1}{1-3^{-\frac{1}{x-2}}}\right)$.

Аналогично, если переменная x будет стремиться к 2 справа, то $(x-2)$ будет положительной бесконечно малой, и $\left(-\dfrac{1}{x-2}\right)$ будет отрицательной бесконечно большой и

$$\lim_{x\to 2+0}\left(\frac{1}{1-3^{-\frac{1}{x-2}}}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{1-3^{-\frac{1}{x-2}}}\right)=\frac{1}{1-3^{-\infty}}=1.$$

Задача 3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически функцию:

$$a)\ y=\begin{cases} x, & x<0,\\ 3, & 0\le x<4,\\ \sqrt{x}, & x\ge 4.\end{cases}$$

Теоретическая справка

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если выполняются следующие три условия:

1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0, т.е. $x_0 \in D(f)$;
2) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;
3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода, если функция $f(x)$ имеет конечные пределы справа и слева в этой точке. При этом величина $f(x_0+0) - f(x_0-0) = h$ называется скачком функции $f(x)$ в точке x_0.

Если скачок функции в точке x_0 равен нулю, то точка называется точкой устранимого разрыва.

Во всех остальных случаях x_0 называется точкой разрыва второго рода. Т.е. если хотя бы один из односторонних пределов равен ∞ или вообще не существует.

При исследовании функции на непрерывность можно придерживаться следующего ***плана***:

1. Найти область определения функции и точки, подозрительные на разрыв.
2. Найти односторонние пределы для каждой подозрительной точки. Вычислить значение функции в этих точках.
3. Проклассифицировать характер разрыва.
4. Построить эскиз графика. Если необходимо вычислить пределы функции на $\pm\infty$.

Решение. Область определения функции $D(y) = (-\infty; +\infty)$. Но из этого не следует, что она и непрерывна на всей числовой оси, так как эта функция неэлементарная. Она задана тремя различными формулами для различных интервалов изменения аргумента x и может иметь разрыв в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$, где меняется ее аналитическое выражение.

Исследуя точку $x_1 = 0$, находим односторонние пределы функции при стремлении аргумента к этой точке слева и справа:

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0} x = 0, \qquad \lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0} 3 = 3,$$

Левый и правый пределы функции конечны, но не равны между собой. Поэтому, вследствие невыполнения 2-го условия непрерывности, в точке $x_1 = 0$ функция имеет разрыв первого рода.

В этой точке разрыва функция имеет конечный скачек:

$$h = \lim_{x\to +0} f(x) - \lim_{x\to -0} f(x) = 3 - 0 = 3\,.$$

Исследуя точку $x_2 = 4$, находим односторонние пределы функции при стремлении аргумента к этой точке слева и справа

$$\lim_{x\to 4-0} f(x) = \lim_{x\to 4-0} 3 = 3, \qquad \lim_{x\to 4+0} f(x) = \lim_{x\to 4+0} \sqrt{x} = 2,$$

Левый и правый пределы функции конечны, но не равны между собой. Поэтому, вследствие невыполнения 2-го условия непрерывности, в точке $x_2 = 4$ функция имеет разрыв первого рода.

В этой точке разрыва функция имеет конечный скачек:

$$h = \lim_{x\to 4+0} f(x) - \lim_{x\to 4-0} f(x) = 2 - 3 = -1.$$

Во всех остальных точках числовой оси $y = f(x)$ непрерывна, так как формулы, которыми она задана, определяют собой элементарные непрерывные функции.

График функции на рис.1.

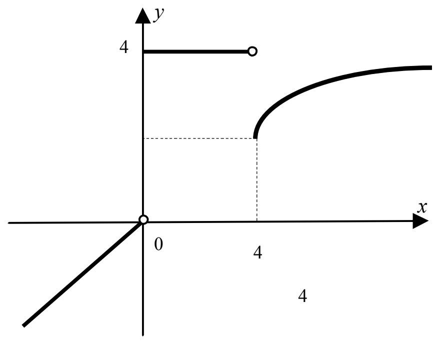


Рис.1.

Задача 3 *б*) Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически функцию:

$$y = \frac{1}{2^{\frac{1}{x-2}} + 1}.$$

Решение. Область определения функции $D(y) = (-\infty;\ 2)\cup(2;+\infty)$. Элементарная функция $y = f(x)$ определена, а следовательно, и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 2$. В точке $x = 2$ функция имеет разрыв, поскольку она определена в любой окрестности этой точки, за исключением самой точки.

Найдем односторонние пределы функции в этой точке

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}=\left(\frac{1}{2^{-\infty}+1}\right)=1,\qquad \lim_{x\to 2+0}\frac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}=\left(\frac{1}{2^{+\infty}+1}\right)=0,$$

Левый и правый пределы функции конечны, но не равны между собой. Следовательно, функция в точке $x = 2$ имеет разрыв первого рода; при этом она имеет конечный скачек:

$$h=\lim_{x\to 2+0}f(x)-\lim_{x\to 2-0}f(x)=0-1=-1.$$

Исследуем поведение функции при $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}=\frac{1}{2^0+1}=\frac{1}{2},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}=\frac{1}{2^0+1}=\frac{1}{2}.$$

График функции на рис.4.2.1.

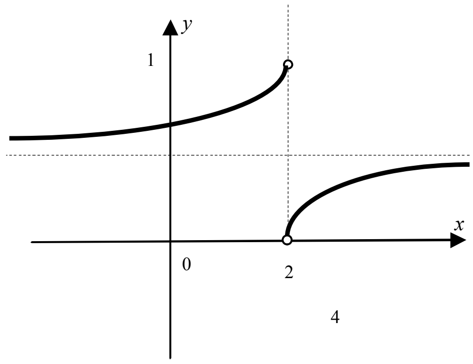


Рис. 4.2.1.

Задача 3 *в*). Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически функцию

$$y=|x|+2.$$

Решение: Область определения функции $D(y) = (-\infty;\ +\infty)$. Но из этого не следует, что она и непрерывна на всей числовой оси, так как эта функция неэлементарная:

$$y=|x|+2=\begin{cases}x+2, & \text{если}\ x\ge 0,\\ -x+2, & \text{если}\ x<0.\end{cases}$$

Она задана двумя различными формулами для различных интервалов изменения аргумента x и может иметь разрыв в точке $x = 0$, где меняется ее аналитическое выражение.

Исследуя точку $x = 0$, находим односторонние пределы функции при стремлении аргумента к этой точке слева и справа:

$$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}(x+2)=2,\qquad \lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}(-x+2)=2,$$

Левый и правый пределы функции конечны и равны между собой. Следовательно, в точке выполняются все условия непрерывности: функция определена в окрестности точки $x = 0$ и

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to +0} f(x) = f(0).$$

Поэтому в точке $x = 0$ функция $y = |x| + 2$ непрерывна.

График функции на рис.4.2.2.

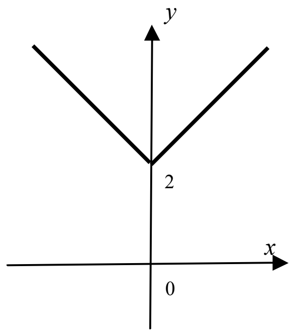


Рис. 4.2.2.

Задача 4. Сравните бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to 0$, если $\alpha(x) = \ln(\sqrt[4]{1-\cos(\sqrt{x})} + 1)$ и $\beta(x) = e^{\sqrt{x}} - 1$.

Решение: Для сравнения двух бесконечно малых при $x \to x_0$ используем следующее определение:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \begin{cases} 0 & - \ a(x) \text{ б.м. более высокогопорядка, чем } b(x), \\ \infty & - \ a(x) \text{ б.м. низшего порядка относительно } b(x), \\ C,\ C \neq 0, \text{const} & - \ a(x) \ и \ b(x) \text{ б.м. одного порядка.} \end{cases}$$

Находим предел отношения $\alpha(x)$ к $\beta(x)$ при $x \to 0$, используя таблицу эквивалентных бесконечно малых (таблица 1 в примере 2.и.):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sqrt[4]{1-\cos(\sqrt{x})}+1)}{e^{\sqrt{x}}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1-\cos(\sqrt{x})}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[4]{2x}} = +\infty.$$

Следовательно, $\alpha(x) = \ln(\sqrt[4]{1-\cos(\sqrt{x})} + 1)$ бесконечно малая низшего порядка, чем $\beta(x) = e^{\sqrt{x}} - 1$ при $x \to 0$.

Задача 5. Определите порядок малости относительно x функции

$$y = \left(e^{x^2} - \cos x\right) \text{ при } x \to 0.$$

Решение: Бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой порядка k относительно бесконечно малой $\beta(x)$, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=c\,,\ \text{где } c=\text{const}\neq 0.$$

Находим предел отношения функции $y=\left(e^{x^2}-\cos x\right)$ к функции x^k при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x^2}-\cos x\right)}{x^k}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\frac{x^2}{2}}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{2x^k}=\frac{3}{2},\ \text{при } k=2.$$

Следовательно, порядок малости относительно x функции $y=\left(e^{x^2}-\cos x\right)$ при $x\to 0$ равен 2.

Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания №5

Задача 1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x)=1-x+(x+2)^2$, $x_0=3$;

1.2. $f(x)=\begin{cases}1+e^{\frac{-1}{|x-2|}}, & x\neq 2;\\ 1, & x=2,\end{cases}$ $x_0=2$.

Решение 1.1. $f(x)=1-x+(x+2)^2$, в точке $x_0=3$.

По определению производной:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

где $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Найдем $f(x_0+\Delta x)$ для заданной функции. В $f(x)$ вместо x подставим $x_0+\Delta x$:

$$f(x_0+\Delta x)=1-[x_0+\Delta x]+([x_0+\Delta x]+2)^2\ \Rightarrow$$

$$f(3+\Delta x)=1-[3+\Delta x]+([3+\Delta x]+2)^2.$$

Найдем $\Delta f(3)$ для заданной функции:

$$\Delta f(3)=f(3+\Delta x)-f(3)=1-[3+\Delta x]+([3+\Delta x]+2)^2-[1-3+(3+2)^2]=$$
$$=1-3-\Delta x+25+10\Delta x+\Delta x^2-23=9\Delta x+\Delta x^2.$$

Подставим полученное приращение функции в точке $x_0=3$ в определение производной:

$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{9\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(9+\Delta x)=9.$$

Таким образом, $f'(3)=9$.

Решение 1.2. $f(x)=\begin{cases}1+e^{\frac{-1}{|x-2|}}, & x\neq 2;\\ 1, & x=2,\end{cases}$ в точке $x_0=2$.

По определению производной:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Однако, данная функция кусочно-заданная. Поэтому, производная будет существовать в точке x_0, если

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0).$$

По определению левой и правой производных:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \qquad f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Найдем левую и правую производные, учитывая, что $f(x_0) = f(2) = 1$:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(1 + e^{\frac{-1}{|2+\Delta x-2|}}) - 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{e^{\frac{-1}{|\Delta x|}}}{\Delta x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{\Delta x}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\frac{1}{\Delta x}}{e^{-\frac{1}{\Delta x}}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

по правилу Лопиталя

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\frac{1}{\Delta x^2}}{\frac{1}{\Delta x^2} \cdot e^{-\frac{1}{\Delta x}}} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-1}{e^{-\frac{1}{\Delta x}}} = 0.$$

Аналогичный результат получим для правой производной:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{e^{\frac{-1}{|\Delta x|}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{e^{\frac{-1}{\Delta x}}}{\Delta x} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\Delta x}}{e^{\frac{1}{\Delta x}}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{\Delta x^2}}{-\frac{1}{\Delta x^2} \cdot e^{\frac{1}{\Delta x}}} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{\Delta x}}} = 0.$$

Таким образом, левая и правая производные в точке x_0= 2 равны, следовательно, производная функции в точке x_0= 2 существует и равна нулю $f'(2) = 0$.

Замечание. Для функций, у которых производная в точке x_0 приводит к неопределенности $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, производная ищется по определению.

Задача 2. Найти производную функций:

2.1. $y = 2 + 2x^2 + \ln(x-3)$;

2.2. $y = 3^x - \log_3 x + x^3$;

2.3. $y=(1-4x)^4\cdot 3^{\sqrt[5]{(1+2x)^2}}$;

2.4. $y=\dfrac{3x^4-2x^3+10x-12}{1-x^2}$;

2.5. $y=\sqrt[3]{1-x-3\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{3-3x^2+x^4}}$;

2.6. $y=\sin^3(2-x+x^2)$;

2.7. $y=\ln(5^x-\sqrt{x^2+\sqrt{2x+\sqrt{x}}})$;

2.8. $y=arcctg\left(tg4x+\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}\right)$.

Решение 2.1. $y=2+2x^2+\ln(x-3)$.

Воспользуемся правилом дифференцирования суммы и таблицей производных:

$$(u+v)'=u'+v'.$$

Тогда

$$y'=\left(2+2x^2+\ln(x-3)\right)'=2'+\left(2x^2\right)'+\left(\ln(x-3)\right)'=0+4x+\frac{1}{x-3}.$$

Решение 2.2. $y=3^x-\log_3 x+x^3$.

Воспользуемся правилом дифференцирования суммы и таблицей производных:

$$y'=\left(3^x\right)'-\left(\log_3 x\right)'+\left(x^3\right)'=3^x\ln 3-\frac{1}{x\ln 3}+3x^2.$$

Решение 2.3. $y=(1-4x)^4\cdot 3^{\sqrt[5]{(1+2x)^2}}$.

Воспользуемся правилом дифференцирования произведения

$$(u\cdot v)'=u'v+uv'.$$

и правилом дифференцирования сложной функции

$$(y(u))'=y'_u\cdot u'_x.$$

Тогда $$y'=\left((1-4x)^4\right)'\cdot 3^{\sqrt[5]{(1+2x)^2}}+(1-4x)^4\cdot\left(3^{\sqrt[5]{(1+2x)^2}}\right)'=$$

$$=4(1-4x)^3(1-4x)'\cdot 3^{\sqrt[5]{(1+2x)^2}}+(1-4x)^4\cdot 3^{\sqrt[5]{(1+2x)^2}}\left(\sqrt[5]{(1+2x)^2}\right)'=$$

$$=4(1-4x)^3(-4)\cdot 3^{\sqrt[5]{(1+2x)^2}}+(1-4x)^4\cdot 3^{\sqrt[5]{(1+2x)^2}}\cdot\frac{2}{5}(1+2x)^{-\frac{3}{5}}\cdot 2.$$

Решение 2.4. $y=\dfrac{3x^4-2x^3+10x-12}{1-x^2}$;.

Воспользуемся правилом дифференцирования частного

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

$$y'=\frac{(3x^4-2x^3+10x-12)'\cdot(1-x^2)-(3x^4-2x^3+10x-12)\cdot(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}=$$

$$=\frac{(12x^3-6x^2+10)\cdot(1-x^2)-(3x^4-2x^3+10x-12)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}.$$

Решение 2.5. $y=\sqrt[3]{1-x-3\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{3-3x^2+x^4}}$.

Перепишем заданную функцию в более удобном для дифференцирования виде:

$$y=(1-x-3\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}-(3-3x^2+x^4)^{-\frac{1}{2}}.$$

Найдем производную как от степенной функции:

$$y'=\frac{1}{3}(1-x-3\sqrt{x})^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-x-3\sqrt{x})'+\frac{1}{2}(3-3x^2+x^4)^{-\frac{3}{2}}\cdot(3-3x^2+x^4)'=$$

$$=\frac{1}{3}(1-x-3\sqrt{x})^{-\frac{2}{3}}\cdot(-1-\frac{3}{2\sqrt{x}})+\frac{1}{2}(3-3x^2+x^4)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-6x+4x^3).$$

Решение 2.6. $y=\sin^3(2-x+x^2)$.

Перепишем заданную функцию в более удобном для дифференцирования виде:

$$y=\left(\sin(2-x+x^2)\right)^3.$$

Продифференцируем сложную функцию сначала как степенную $y=u^3$, затем как тригонометрическую $u=\sin v$, затем как сумму элементарных функций $v=2-x+x^2$.

$$y'=3\left(\sin(2-x+x^2)\right)^2\cdot(\sin(2-x+x^2))'=$$

$$=3\left(\sin(2-x+x^2)\right)^2\cdot\cos(2-x+x^2)\cdot(2-x+x^2)'=$$

$$=3\left(\sin(2-x+x^2)\right)^2\cdot\cos(2-x+x^2)\cdot(-1+2x)$$

Решение 2.7. $y=\ln(5^x-\sqrt{x^2+\sqrt{2x+\sqrt{x}}})$.

Найдем производную сложной функции:

$$y'=\frac{1}{5^x-\sqrt{x^2+\sqrt{2x+\sqrt{x}}}}(5^x-\sqrt{x^2+\sqrt{2x+\sqrt{x}}})'=$$

$$=\frac{1}{5^x-\sqrt{x^2+\sqrt{2x+\sqrt{x}}}}\left(5^x\ln 5-\frac{1}{2\sqrt{x^2+\sqrt{2x+\sqrt{x}}}}\cdot(x^2+\sqrt{2x+\sqrt{x}})'\right)=$$

$$=\frac{1}{5^x-\sqrt{x^2+\sqrt{2x+\sqrt{x}}}}\left(5^x\ln 5-\frac{1}{2\sqrt{x^2+\sqrt{2x+\sqrt{x}}}}\cdot(2x+\frac{1}{2\sqrt{2x+\sqrt{x}}}(2x+\sqrt{x})'\right)=$$

$$=\frac{1}{5^x-\sqrt{x^2+\sqrt{2x+\sqrt{x}}}}\left(5^x\ln 5-\frac{1}{2\sqrt{x^2+\sqrt{2x+\sqrt{x}}}}\cdot(2x+\frac{1}{2\sqrt{2x+\sqrt{x}}}(2+\frac{1}{2\sqrt{x}})\right).$$

Решение 2.8. $y = arcctg\left(tg4x + \frac{1}{\sqrt{\cos x}}\right).$

Перепишем заданную функцию в более удобном для дифференцирования виде:

$$y = arcctg\left(tg4x + (\cos x)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Найдем производную сложной функции:

$$y' = \frac{1}{1 + \left(tg4x + (\cos x)^{-\frac{1}{2}}\right)^2}\left(tg4x + (\cos x)^{-\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{1 + \left(tg4x + \frac{1}{\sqrt{\cos x}}\right)^2}\left(\frac{4}{\cos^2 4x} - \frac{1}{2}(\cos x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-\sin x)\right).$$

Замечание. В заданиях на нахождение производной нет необходимости упрощать полученные выражения. Однако, при вычислении производных высших порядков или в задачах на приложение производной упрощение выражений обязательно.

Задача 3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\cos\sqrt{1-x})^{x^2}$.

Решение. Таблица производных не содержит производную степенно-показательной функции. Поэтому выполним тождественное преобразование над заданной функцией:

$$y = (\cos\sqrt{1-x})^{x^2} = e^{\ln(\cos\sqrt{1-x})^{x^2}} = e^{x^2 \cdot \ln(\cos\sqrt{1-x})}.$$

Получили показательную функцию с показателем в виде произведения двух сложных функций.

$$y' = e^{x^2 \cdot \ln(\cos\sqrt{1-x})} \cdot (x^2 \cdot \ln(\cos\sqrt{1-x}))' =$$

$$= e^{x^2 \cdot \ln(\cos\sqrt{1-x})} \cdot \left((x^2)' \cdot \ln(\cos\sqrt{1-x}) + x^2 \cdot (\ln(\cos\sqrt{1-x}))'\right) =$$

$$= e^{x^2 \cdot \ln(\cos\sqrt{1-x})} \cdot \left(2x \cdot \ln(\cos\sqrt{1-x}) + x^2 \cdot \frac{1}{\cos\sqrt{1-x}}(\cos\sqrt{1-x})'\right) =$$

$$= e^{x^2 \cdot \ln(\cos\sqrt{1-x})} \cdot \left(2x \cdot \ln(\cos\sqrt{1-x}) + x^2 \cdot \frac{-\sin\sqrt{1-x}}{\cos\sqrt{1-x}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right).$$

Заметим, что первый множитель – это исходная функция. Поэтому окончательный результат можно переписать как

$$y' = (\cos\sqrt{1-x})^{x^2} \cdot \left(2x \cdot \ln(\cos\sqrt{1-x}) + x^2 \cdot \frac{-\sin\sqrt{1-x}}{\cos\sqrt{1-x}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \right).$$

Задача 4. Найти производную неявной функции y=y(x):
$\sin(x \cdot y) = \ln(x + y)$.

Решение. Продифференцируем левую и правую части равенства по x:

$$(\sin(x \cdot y))' = (\ln(x + y))' \quad \square$$

$$\cos(xy) \cdot (x \cdot y)' = \frac{1}{x+y}(x + y)' \quad \square$$

$$\cos(xy) \cdot (x'y + xy') = \frac{1}{x+y}(x' + y').$$

Учитывая, что x – свободная переменная, а $y(x)$ – функция, запишем:

$$\cos(xy) \cdot (y + xy') = \frac{1}{x+y}(1 + y').$$

Раскроем скобки и выразим y':

$$y\cos(xy) + xy'\cos(xy) = \frac{1}{x+y} + y' \cdot \frac{1}{x+y} \quad \square$$

$$y'\left(x\cos(xy) - \frac{1}{x+y} \right) = \frac{1}{x+y} - y\cos(xy) \quad \square$$

$$y' = \frac{\dfrac{1}{x+y} - y\cos(xy)}{x\cos(xy) - \dfrac{1}{x+y}}.$$

Задача 5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \sin^3 2t, \\ y = t - \cos^3 2t. \end{cases}$

Решение. Воспользуемся формулой для производной параметрической функции $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t): \end{cases}$ $\qquad y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Найдем производные y'_t и x'_t:

$$y'_t = 1 - 3\cos^2 2t \cdot (-\sin 2t) \cdot 2 = 1 + 6\cos^2 2t \cdot \sin 2t,$$

$$x'_t = 3\sin^2 2t \cdot \cos 2t \cdot 2 = 6\sin^2 2t \cdot \cos 2t.$$

Подставим найденные производные по параметру t в формулу y'_x:

$$y'_x = \frac{1 + 6\cos^2 2t \cdot \sin 2t}{6\sin^2 2t \cdot \cos 2t}.$$

Задача 6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой y=y(x) в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0;y_0)$:

6.1. $y = arcctg\dfrac{\sqrt{3}}{x}$, $x_0 = -1$; $\qquad$ 6.2. $\begin{cases} x = 2t^3 + 1, \\ y = t^4, \end{cases}$ $M_0(-15;\ 16)$.

Решение. 6.1. $y = arcctg\dfrac{\sqrt{3}}{x}$, $x_0 = -1$.

Угловой коэффициент k касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 – это производная функции $y=y(x)$ в точке x_0. Тогда

$$k = y' = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{x}\right)' = \frac{1}{1+\dfrac{3}{x^2}}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{x^2} = \frac{-\sqrt{3}}{x^2+3}.$$

Найдем y' в точке $x_0= -1$:

$$k = y'(-1) = \frac{-\sqrt{3}}{(-1)^2+3} = \frac{-\sqrt{3}}{4}.$$

Уравнение касательной и нормали к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 имеют вид:

$$y - y(x_0) = y'(x_0)(x-x_0) \qquad \text{и} \qquad y - y(x_0) = \frac{-1}{y'(x_0)}(x-x_0)$$

соответственно.

Найдем $y(x_0)$:

$$y(-1) = arcctg\frac{\sqrt{3}}{-1} = -\frac{\pi}{3} + \pi n.$$

Выберем значение функции $y(-1)$ для $n=0$ (для определенности) и запишем уравнение касательной

$$y + \frac{\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{4}(x+1)$$

и нормали

$$y + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}(x+1).$$

Решение. 6.1. $\begin{cases} x = 2t^3+1, \\ y = t^4, \end{cases}$ $M_0(-15;\, 16)$.

Угловой коэффициент k касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 – это производная функции $y=y(x)$ в точке x_0. Тогда

$$k = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4t^3}{6t^2} = \frac{2}{3}t.$$

Чтобы найти y' в точке x_0, нужно вычислить точку t_0. Подставим $x_0= -15$ в функцию $x = 2t^3+1$:

$$-15 = 2t^3+1 \quad \square \quad t_0 = -2.$$

Проверим, удовлетворяет ли найденная t_0 функции $y = t^4$ при $y_0=16$:

$$16 \equiv (-2)^4.$$

Получили истинное высказывание, значит t_0 найдена правильно. Найдем y' в точке $t_0= -2$:

$$k = y'_x(-2) = \frac{2}{3}\cdot(-2) = -\frac{4}{3}.$$

запишем уравнение касательной

$$y-16 = \frac{-4}{3}(x+15)$$

и нормали

$$y-16 = \frac{3}{4}(x+15).$$

Задача 7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y=(x-1)\cdot e^{x^3}$; 7.2. $\begin{cases} x = 2t^3+1, \\ y = t^4, \end{cases}$

Решение. 7.1. $y=(x-1)\cdot e^{x^3}$.

По определению производной второго порядка

$$y'' = (y')'.$$

Найдем производную первого порядка:

$$y' = (x-1)'\cdot e^{x^3} + (x-1)(e^{x^3})' = e^{x^3} + (x-1)\cdot 3x^2\cdot e^{x^3}.$$

Для вычисления второй производной упростим выражение y':

$$y' = (1+3x^3-3x^2)\cdot e^{x^3}.$$

$$y'' = (1+3x^3-3x^2)'\cdot e^{x^3} + (1+3x^3-3x^2)\cdot(e^{x^3})' =.$$

$$= (9x^2-6x)\cdot e^{x^3} + (1+3x^3-3x^2)\cdot 3x^2\cdot e^{x^3} =$$

$$= (9x^5-9x^4+12x^2-6x)\cdot e^{x^3}.$$

Задача 8. Найти дифференциал функции $y=\frac{1}{\sqrt{4x+1}}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(3.8)$.

Решение. По определению дифференциала функции первого порядка

$$dy = y'dx.$$

Тогда $$dy = \left(\frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right)' dx = \frac{-4}{2\sqrt{(4x+1)^3}}dx = \frac{-2}{\sqrt{(4x+1)^3}}dx.$$

При достаточно малых приращениях свободной переменной x дифференциал функции можно считать приближенно равным приращению функции, т.е. $\Delta y \approx dy$. Тогда,

$$\Delta y = y(x) - y(x_0) \approx y'(x_0)dx \;\square$$

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)dx.$$

Выберем в качестве x_0 число, достаточно близкое к заданному x=3.8, но при котором $y(x_0)$ и $y'(x_0)$ достаточно легко вычисляются. Таким числом является $x_0 = 3.75$. Тогда

$$dx = x - x_0 = 3.8 - 3.75 = 0.05.$$

Подставим числовые значения в приближенную формулу:

$$y(3.8) \approx y(3.75) + y'(3.75)dx$$

$$y(3.8) \approx \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 3.75 + 1}} - \frac{2}{\sqrt{(4 \cdot 3.75 + 1)^3}} \cdot 0.05 = \frac{1}{\sqrt{16}} - \frac{2}{\sqrt{(16)^3}} \cdot 0.05$$

$$y(3.8) \approx \frac{1}{4} - \frac{0.1}{4^3} = \frac{159}{640}.$$

Задача 9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ в точке $x_0 = 3$.

Решение. По определению дифференциала функции второго порядка

$$d^2 y = y'' dx^2.$$

Найдем первую и вторую производные:

$$y' = \frac{(\sqrt{x+1})'(x-1) - (x-1)'\sqrt{x+1}}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{(x-1)}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}}{(x-1)^2} = \frac{(x-1) - 2(x+1)}{2\sqrt{x+1} \cdot (x-1)^2} = \frac{-x-3}{2\sqrt{x+1} \cdot (x-1)^2}$$

$$y'' = \frac{(-x-3)' \cdot \sqrt{x+1} \cdot (x-1)^2 - (-x-3) \cdot (\sqrt{x+1} \cdot (x-1)^2)'}{2\left(\sqrt{x+1} \cdot (x-1)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{-\sqrt{x+1} \cdot (x-1)^2 + (x+3) \cdot \left(\dfrac{(x-1)^2}{2\sqrt{x+1}} + 2(x-1)\sqrt{x+1} \right)}{2(x+1)(x-1)^4} =$$

$$= \frac{-\sqrt{x+1} \cdot (x-1) + (x+3) \cdot \left(\dfrac{(x-1) + 2\sqrt{x+1} \cdot 2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}} \right)}{2(x+1) \cdot (x-1)^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{x+1} \cdot (1-x) \cdot 2\sqrt{x+1} + (x+3) \cdot (5x+3)}{2(x+1) \cdot 2\sqrt{x+1} \cdot (x-1)^3} = \frac{2(1-x)(x+1) + (5x^2 + 18x + 9)}{4(x+1)^{3/2} \cdot (x-1)^3} =$$

$$= \frac{3x^2 + 18x + 11}{4(x+1)^{3/2} \cdot (x-1)^3}$$

Найдем вторую производную функции в точке $x_0 = 3$:

$$y''(3)=\frac{3\cdot(3)^2+18\cdot3+11}{4(3+1)^{3/2}\cdot(3-1)^3}=\frac{92}{4\cdot8^2}=\frac{23}{64}$$

Подставляя в формулу для второго дифференциала в точке

$$d^2y(x_0)=y''(x_0)dx^2$$

получим: $$d^2y(3)=\frac{23}{64}dx^2.$$

Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания №6

Задача 1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя: *а*) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x}-4x-1}{x^2}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln x\right)^{\frac{2}{x-1}}$; *в*) $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2xtgx}\right]$.

Решение 1 *а*) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x}-4x-1}{x^2}$.

По теореме Лопиталя если $f(x)\to0$ и $g(x)\to0$ при $x\to x_0$ и существует предел отношения производных этих функций $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=const$ то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Аналогично правило Лопиталя формулируется для функций, стремящихся к бесконечности $f(x)\to\infty$ и $g(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. Т.е. правило Лопиталя применимо к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Поэтому, начнем решение с установления неопределенности.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-4x-1}{x^2}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to0}\frac{(e^{4x}-4x-1)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{4e^{2x}-4}{2x}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

применим правило Лопиталя еще раз:

$$=\lim_{x\to0}\frac{(4e^{2x}-4)'}{(2x)'}=\lim_{x\to0}\frac{8e^{2x}}{2}=4.$$

Решение 1 *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln x\right)^{\frac{2}{x-1}}$.

Установим вид неопределенности. Для этого подставим в функцию значение переменной x, к которому она стремится:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln x\right)^{\frac{2}{x-1}}=\left|\infty^0\right|.$$

Для такого вида неопределенности правило Лопиталя неприменимо.

Воспользуемся определением логарифма: $a=e^{\ln a}$ и запишем

$$\left(\ln x\right)^{\frac{2}{x-1}} = e^{\ln\left(\ln x\right)^{\frac{2}{x-1}}}.$$

По свойству логарифма $\ln x^b = b\ln x$, тогда

$$e^{\ln\left(\ln x\right)^{\frac{2}{x-1}}} = e^{\frac{2}{x-1}\cdot\ln\left(\ln x\right)} = e^{\frac{2\ln\left(\ln x\right)}{x-1}}.$$

Применим выполненное преобразование для вычисления предела

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln x\right)^{\frac{2}{x-1}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(\ln x\right)^{\frac{2}{x-1}}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{2\ln\left(\ln x\right)}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\ln\left(\ln x\right)}{x-1}}.$$

Последнее равенство можно применить в силу непрерывности показательной функции.

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\ln\left(\ln x\right)}{x-1}} = e^{\left|\frac{\infty}{\infty}\right|}.$$

Теперь можно применить правило Лопиталя.

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\ln\left(\ln x\right)}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2\ln(\ln x))'}{(x-1)'}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x\ln x}} = e^{\frac{2}{\infty}} = e^0 = 1.$$

Решение 1 *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2xtgx}\right]$.

Установим неопределенность

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2xtgx}\right] = \left|\infty - \infty\right|.$$

Приведем дроби к общему знаменателю, тем самым преобразуем неопределенность вида $\left|\infty-\infty\right|$ к неопределенности $\left|\frac{0}{0}\right|$:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2xtgx}\right] = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{tgx - x}{x^2 tgx} = \left|\frac{0}{0}\right| = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{2xtgx + \frac{x^2}{\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{2xtgx\cdot\cos^2 x + x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x\sin x\cdot\cos x + x^2} =$$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(\sin 2x + x)} = \left|\frac{0}{0}\right| = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{(\sin 2x + x) + x(2\cos 2x + 1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 2x + x + 2x\cos 2x + x} = \left|\frac{0}{0}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{2\cos 2x + 1 + 2\cos 2x - 4x\sin 2x + 1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2+1+2-0+1} = \frac{1}{4}.$$

Задача 2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0: *а*); *б*) $y = \frac{x - \ln(1-x^2)}{x}$, $x_0=0$.

Решение *а*) $y = e^{3-2x}$, $x_0 = 1$.

Формула Тейлора в окрестности точки x_0 имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n$$

Задача может быть решена двумя способами.

I способ. Найдем значение функции и n ее производных в точке x_0=1:

$$\begin{aligned}
&y(1) = e \\
&y' = -2e^{3-2x} &&\Rightarrow\ y'(1) = -2e, \\
&y'' = -2(-2)e^{3-2x} &&\Rightarrow\ y''(1) = (-2)^2 e, \\
&y''' = -2(-2)(-2)e^{3-2x} &&\Rightarrow\ y'''(1) = (-2)^3 e, \\
&\dots \\
&y^{(n)} = (-2)^n e^{3-2x} &&\Rightarrow\ y^{(n)}(1) = (-2)^n e.
\end{aligned}$$

Подставим полученные значения производных в формулу Тейлора и запишем ответ:

$$f(x) = e - \frac{2e}{1!}(x-1) + \frac{4e}{2!}(x-1)^2 + ... + (-1)\frac{2^n e}{n!}(x-1)^n + R_n$$

II способ. Выделим в показателе функции степень (x–1). Для этого выполним тождественное преобразование (вычтем и прибавим единицу) и запишем функцию как произведение двух множителей:

$$y = e^{3-2x} = e^{3-2(x-1+1)} = e^{3-2([x-1]+1)} = e^{1-2[x-1]} = e^1 \cdot e^{-2[x-1]}.$$

Используем для разложения по формуле Тейлора стандартное разложение Маклорена для функции

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + ... + \frac{t^n}{n!} + R_n.$$

Положим $t = -2(x-1)$ и запишем ответ:

$$y = e\left(1 - \frac{2}{1!}(x-1) + \frac{4}{2!}(x-1)^2 + ... + (-1)\frac{2^n}{n!}(x-1)^n + R_n\right) \Rightarrow$$

$$y = e - \frac{2e}{1!}(x-1) + \frac{4e}{2!}(x-1)^2 + ... + (-1)\frac{2^n e}{n!}(x-1)^n + R_n.$$

б) $y = \dfrac{x - \ln(1 - x^2)}{x}$, x_0=0. Так как x_0=0, то для заданной функции необходимо записать формулу Маклорена. Используем стандартное разложение Маклорена для функции $\ln(1+t)$,

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + R_n,$$

положив $t = -x^2$. Подставим это разложение в функцию:

$$y=\frac{x-\left(-x^2-\frac{(-x^2)^2}{2}+\frac{(-x^2)^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{(-x^2)^n}{n}+R_n\right)}{x}\Rightarrow$$

$$y=\frac{x-\left(-x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{-x^6}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n}+R_n\right)}{x}.$$

Раскроем скобки и разделим каждое слагаемое на знаменатель x:

$$y=1+x+\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{3}+...+\frac{x^{2n-1}}{n}+R_n.$$

Задача 3. Найти экстремумы функций:

а) $y=(x^2+x+2)(x^2+x-2)$; *б*) $y=\frac{e^x}{(x+3)^2}$; *в*) $y=x+\sqrt{3-x}$.

Решение *а*) $y=(x^2+x+2)(x^2+x-2)$. Область определения D[y]=R. Согласно достаточному признаку экстремума, точка x_0 является экстремумом, если при переходе через x_0 меняется знак первой производной заданной функции. Найдем производную функции:

$$y'=(x^2+x+2)'(x^2+x-2)+(x^2+x+2)(x^2+x-2)'=$$
$$=(2x+1)(x^2+x-2)+(x^2+x+2)(2x+1).$$

Приравняем производную к нулю, чтобы найти критические точки (необходимый признак экстремума). Для этого разложим выражение производной на множители:

$$y'=(2x+1)(x^2+x-2+x^2+x+2)=(2x+1)(2x^2+2x)=2x(2x+1)(x+1)=0.$$

Имеем критические точки:

$$x_1=0,\ x_2=-\frac{1}{2},\ x_3=-1.$$

Проверим достаточный признак экстремума. Для этого поместим на числовую ось x_1, x_2, x_3 и рассмотрим знак производной слева и справа от каждой из критических точек (рис. 4.2.3):

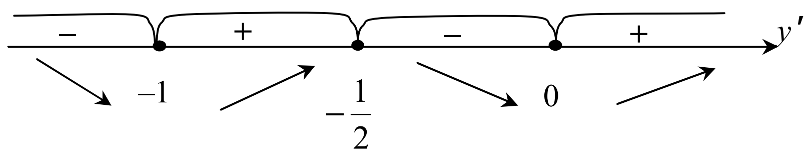


Рис. 4.2.3.

Получили, что точка x_1=1 – точка минимума, $x_2=-\frac{1}{2}$ – точка максимума, x_3=0 – точка минимума данной функции. Более того, можно сделать вывод о поведении функции: на интервале (–∞;–1) функция убывает, на интервале (–1;

$-\frac{1}{2}$) – возрастает, на интервале ($-\frac{1}{2}$;0) – убывает, на интервале (0;+ ∞) – возрастает.

Решение *б*) $y = \dfrac{e^x}{(x+3)^2}$. Область определения функции – вся числовая ось кроме $x = -3$. Согласно достаточному признаку экстремума, точка x_0 является экстремумом, если при переходе через x_0 меняется знак первой производной заданной функции. Найдем производную функции:

$$y' = \frac{(e^x)'(x+3)^2 - ((x+3)^2)'e^x}{(x+3)^4} = \frac{e^x(x+3)^2 - 2(x+3)e^x}{(x+3)^4} =$$

$$= \frac{e^x(x+3-2)}{(x+3)^3} = \frac{e^x(x+1)}{(x+3)^3}.$$

Найдем критические точки. Для этого приравняем производную к нулю и рассмотрим точки, в которых производная не существует:

$$y' = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$y' \nexists \Rightarrow x_2 = -3$$

Проверим достаточный признак экстремума. Для этого поместим на числовую ось x_1, x_2 и рассмотрим знак производной слева и справа от каждой из критических точек (рис. 4.2.4):

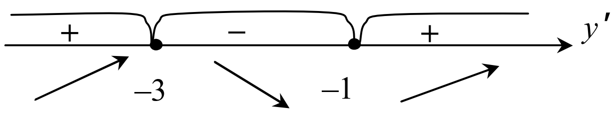


Рис. 4.2.4.

Получили, что точка $x_1 = -1$ – точка минимума, $x_2 = -3$ – точка максимума данной функции. Более того, можно сделать вывод о поведении функции: на интервале (–∞;–3) функция возрастает, на интервале
(–3;–1) – убывает, на интервале (–1,+ ∞) – возрастает.

Решение *в*) $y = x + \sqrt{3-x}$. Область определения функции – полупрямая $x \le 3$. Найдем критические точки:

$$y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{3-x}} = \frac{2\sqrt{3-x} - 1}{2\sqrt{3-x}}.$$

$$y' = 0 \Rightarrow \sqrt{3-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow 3 - x = \frac{1}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{11}{4},$$

$$y' \nexists \Rightarrow x_2 = 3.$$

Проверим достаточный признак экстремума. Для этого поместим на числовую ось x_1, x_2 и рассмотрим знак производной слева и справа от каждой из критических точек (рис. 4.2.5):

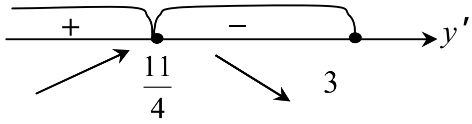


Рис. 4.2.5.

Получили, что точка $x_1 = \dfrac{11}{4}$ – точка максимума, $x_2 = 3$ – не является экстремумом. Это граница области определения. А по определению локального экстремума точка-экстремум должна иметь двустороннюю окрестность, в которой функция принимает максимальное или минимальное значение. Можно сделать вывод о поведении функции: на интервале $(-\infty; \dfrac{11}{4})$ функция возрастает, на интервале $(\dfrac{11}{4}; 3)$ – убывает.

Задача 4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = x^4 - 8x^2 + 3, \quad [-2;1]$; *б*) $y = \dfrac{x^3 - 1}{4x^2}, \quad [-8;-1]$.

Решение *а*) $y = x^4 - 8x^2 + 3, \quad [-2;1]$.

Найдем производную и приравняем ее к нулю:

$$y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x-2)(x+2).$$

$$y' = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2.$$

Однако, $x_3 = 2 \notin [-2;1]$, поэтому, исключаем ее из рассмотрения. Вычислим значения функции в критических точках и на концах интервала:

$$y(0) = 3, \qquad y(-2) = -13, \qquad y(1) = -4.$$

Выбираем наибольшее и наименьшее значение из полученных:

$$y_{наибольшее} = 3,$$
$$y_{наименьшее} = -13.$$

Решение *б*) $y = \dfrac{x^3 - 1}{4x^2}, \quad [-8;-1]$.

Найдем производную и приравняем ее к нулю:

$$y' = \frac{1}{4} \cdot \frac{3x^2 \cdot x^2 - 2x \cdot (x^3 - 1)}{x^4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3x^2 \cdot x^2 - 2x \cdot x^3 + 2x}{x^4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3 + 2}{x^3}.$$

$$y' = 0 \Rightarrow x_1 = -\sqrt[3]{2}, \quad y' \nexists \Rightarrow x_2 = 0.$$

Однако, $x_2 = 0 \notin [-8;-1]$, поэтому, исключаем ее из рассмотрения. Вычислим значения функции в критических точках и на концах интервала:

$$y(\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[3]{4}} \approx 0.158,$$
$$y(-8) = \frac{-3}{4 \cdot 4} \approx -0.188,$$
$$y(-1) = \frac{-2}{4} = -0.5.$$

Выбираем наибольшее и наименьшее значение из полученных:

$$y_{наибольшее} = y(\sqrt[3]{2}) \approx 0.158,$$
$$y_{наименьшее} = y(-1) = -0.5.$$

Задача 5. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = \dfrac{x^3+1}{x^2}$; *б*) $y = x\sqrt{1-x^2}$.

Решение *а*) $y = \dfrac{x^3+1}{x^2}$.

1. Область определения функции – вся числовая ось, кроме точки $x = 0$.
2. Вертикальные асимптоты: $x = 0$. Найдем пределы слева и справа:

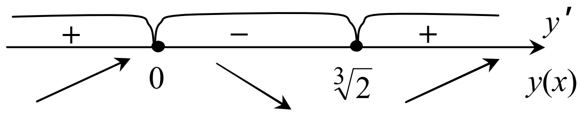
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+1}{x^2} = \frac{1}{(-0)^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+1}{x^2} = \frac{1}{(+0)^2} = +\infty.$$

3. Функция не периодическая, общего вида.
4. Критические точки:

$$y' = \frac{3x^2 \cdot x^2 - 2x \cdot (x^3+1)}{x^4} = \frac{x^4 - 2x}{x^4} = \frac{x^3-2}{x^3}.$$

$y' = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt[3]{2}$, y' □ □ $x_2 = 0$.

5. Экстремумы и промежутки возрастания и убывания:



6. Точки, подозрительные на перегиб. Найдем вторую производную и приравняем ее к нулю:

$$y'' = \frac{3x^2 \cdot x^3 - 3x^2(x^3-2)}{x^6} = \frac{6x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4}.$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = \varnothing,$$

y' □ □ $x = 0$.

7. Точка x_0 является точкой перегиба, если при переходе через x_0 меняется знак второй производной. Для заданной функции вторая производная положительна для любого x из области определения функции. Следовательно, перегибов нет. Согласно достаточному признаку выпуклости и вогнутости функции, если $y'' > 0$, то функция вогнута □.
8. Найдем наклонные асимптоты: $y = k\,x + b$, где

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x}; \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[y(x) - kx\right].$$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1}{x^3} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3+1}{x^2} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1-x^3}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Таким образом, наклонная асимптота – прямая $y = x$.

9. Нули функции и некоторые вспомогательные точки: $y(-1)=0$, $y(\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Результаты исследования сводим в таблицу

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;\sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2};\infty)$
$y(x)$	↗ □	0	↗ □	вертикальная асимптота	□ ↘	*min*	↗ □
$y'(x)$	+	+	+	□	–	0	+
$y''(x)$	+	+	+	□	+	+	+

Построение графика начинаем с асимптот: вертикальной $x = 0$ и наклонной $y = x$. Затем ставим вспомогательные точки $y(-1)=0$, $y(\sqrt[3]{2}) = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. Теперь, согласно данным таблицы, рисуем кривую, возрастающую вогнуто от асимптоты $y = x$ к асимптоте $x = 0$ через точку $y(-1)=0$. Следующая часть графика – кривая убывает вогнуто от асимптоты $x = 0$ до точки *min*, затем вогнуто возрастает, приближаясь к асимптоте $y = x$. График функции изображен на рисунке 4.2.6.

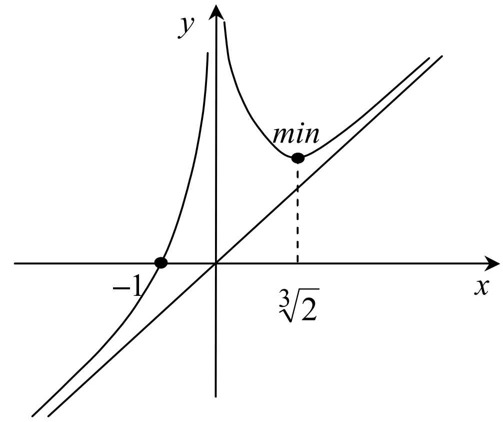


Рис. 4.2.6.

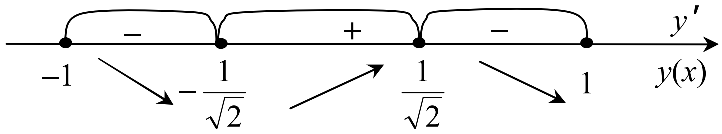
Решение *b*) $y = x\sqrt{1-x^2}$.

1. Область определения функции – отрезок $-1 \le x \le 1$.
2. Вертикальных асимптот нет.
3. Функция не периодическая, нечетная (можно исследовать и построить функцию на полуинтервале, а на вторую половину достроить центрально симметрично).
4. Критические точки:

$$y' = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$y' = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\; x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\quad y' \text{ □ □ } x_{3,4} = \pm 1.$$

5. Экстремумы и промежутки возрастания и убывания:



6. Точки, подозрительные на перегиб. Найдем вторую производную и приравняем ее к нулю:

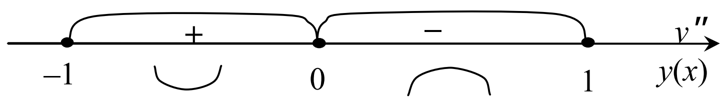
$$y'' = \frac{-4x\cdot\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{-4x\cdot(1-x^2) + x(1-2x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{-3x+2x^3}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x(\sqrt{2}x-\sqrt{3})(\sqrt{2}x+\sqrt{3})}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

$$y'' = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}},\; x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}},\qquad y' \text{ □ □ } x_{3,4} = \pm 1.$$

Однако, $x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \notin D[y]$. Поэтому, исключаем их из рассмотрения.

7. Точка x_0 является точкой перегиба, если при переходе через x_0 меняется знак второй производной. Исследуем знак второй производной.



8. Наклонных асимптот нет, т.к. область определения – отрезок. А наклонные асимптоты существуют только при $x \to \pm\infty$.

9. Нули функции и некоторые вспомогательные точки: $y(\pm 1)=0$, $y(0)=0$,

$$y\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Результаты исследования сводим в таблицу

x	$[-1; -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}};0)$	0	$(0; \frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt{2}};1]$
$y(x)$	□ ↘	min	↗ □		↗ ∩		∩ ↘
$y'(x)$	–	0	+	+	+	0	–
$y''(x)$	+	+	+	0	–	+	–

График функции изображен на рисунке 4.2.7.

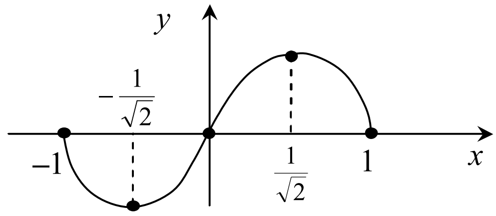


Рис. 4.2.7.

Задача 6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;1) \cup (1;\infty)$.

2) Вертикальные асимптоты: $x = 1$

3) Горизонтальные асимптоты: $y = 1 \ (x \to -\infty), y = -2 \ (x \to +\infty)$

4) Наклонные асимптоты: –

5) Стационарные точки: –2; 0; 2; 4.

6) Точки, где $(y' = \infty)$: –1.

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-2;-1), (1;2), (4;\infty)$;

б) убывания: $(-\infty;-2), (-1;1), (2;4)$.

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-\infty;-5/2), (0;1), (1;3), (5;\infty)$;

б) вогнутости: $(-5/2;-1), (-1;0), (3;5)$.

9) Значение функции в некоторых точках: $y(-5/2)= 3/4$, $y(-2)= 1/2$,

$y(-1)= 4$, $y(0)= 1$, $y(2)= -1$, $y(3)= -2$, $y(4)= -3.5$, $y(5)= -2.5$.

Решение. Результаты аналитического исследования функции изобразим схематически:

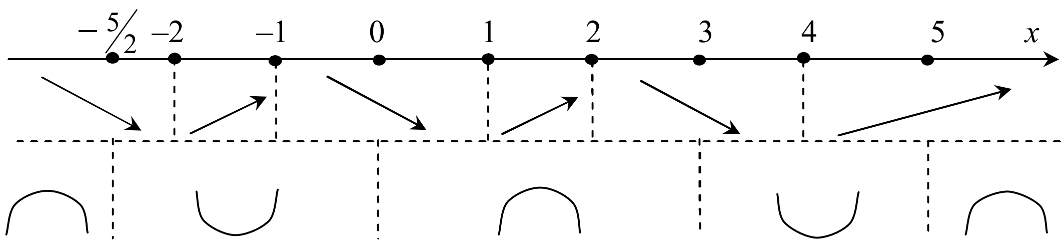


Рис. 4.2.8. Промежутки возрастания и убывания; выпуклости и вогнутости

Построение графика начинаем с асимптот. Затем строим заданные в пункте 9 некоторые точки. График функции изображен на рисунке 4.2.9.

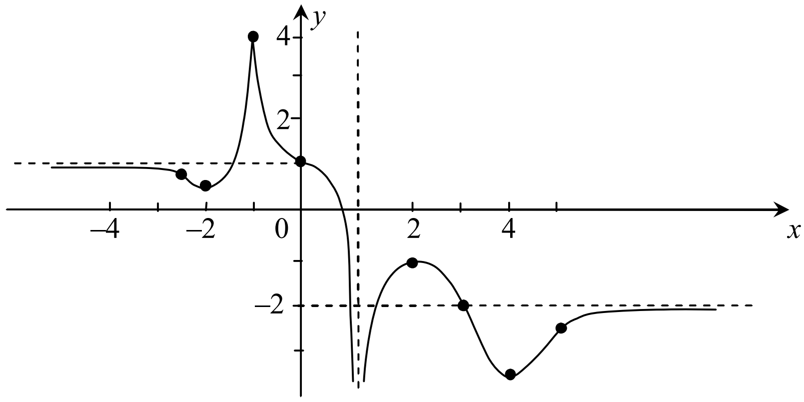


Рис. 4.2.9.

Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания №7

Вариант 0

1. Найдите область определения функции $z = \ln(x^2 + y^2 - 9)$. Сделайте чертеж.
2. Постройте график функции $z = x^2 + y^2 - 1$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = \arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.
4. Найдите производную $\dfrac{dz}{dt}$ сложной функции $z = \ln\cos\dfrac{\sqrt{x}}{y}$, если $x = \sqrt[3]{t+1}, \quad y = 3^t$.
5. Найдите частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = e^{x^2+y^2}$, если $x = uv, \quad y = \dfrac{u}{v}$.
6. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $z^3 - 3xyz - 8 = 0$.
7. Функция $u = u(x, y)$ задана уравнением $u = \sqrt{x^2 + 3y^2}$. Найдите
   а) производную в точке $M(1, 1)$ в направлении вектора $S = i + 3j$;
   б) grad u в точке $K(2, -2)$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 - y^2 + 6xy$ в точке $M(2, 3, -1)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = e^{\frac{x}{y}}$ в окрестности точки $M(0, 1)$.

11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2y^2 - 4x - 12$ в области $x \le 0,\ x - y + 3 \ge 0,\ y \ge 0$. Постройте чертёж.

12. Вычислите приближенно $e^{1,02} \cdot 2{,}96$.

Задача 1. Найдите область определения функции $z = \ln(x^2 + y^2 - 9)$ Сделайте чертёж.

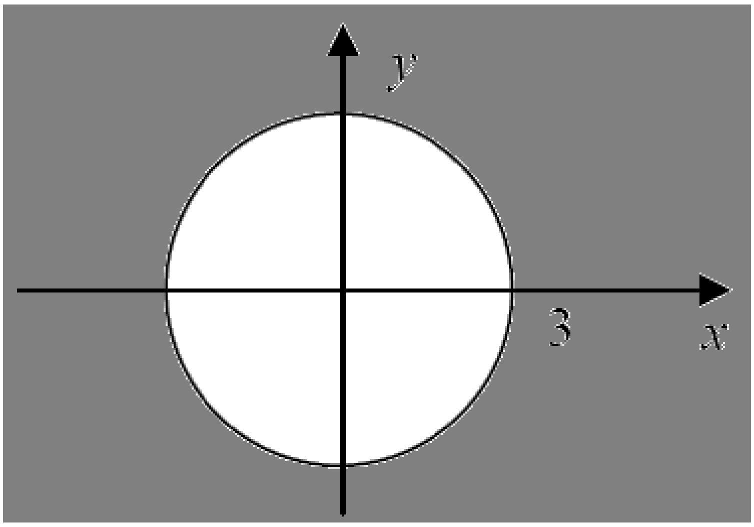
Решение: Область определения – это множество значений *x,y*, при которых функция *z* принимает действительные значения. Логарифмическая функция определена только для положительных значений аргумента, то есть *x,y* должны удовлетворять неравенству

$$x^2 + y^2 - 9 > 0 \text{ или } x^2 + y^2 > 9.$$

Множество точек, удовлетворяющих этому неравенству, находятся вне окружности радиуса, равного 3, с центром в начале координат ($x^2 + y^2 > 9$) но не на самой окружности ($x^2 + y^2 = 9$).

Следовательно, область определения данной функции есть часть плоскости вне круга радиуса, равного 3, с центром в начале координат, но граница круга не принадлежит области определения.

Сделаем чертёж:



Ответ: Область определения функции $z = \ln(x^2 + y^2 - 9)$ есть часть плоскости вне круга радиуса, равного 3, с центром в начале координат, граница круга не принадлежит области определения.

Задача 2. Постройте график функции $z = x^2 + y^2 - 1$. Укажите область определения функции.

Решение: Графиком функции двух переменных является некоторая поверхность S, которая представляет собой множество значений z при различных x, y из области определения.

Данная функция при любых x, y имеет действительное значение. Следовательно, областью определения функции является вся плоскость Oxy или $D(z) = \{(x,y) \in R^2\}$.

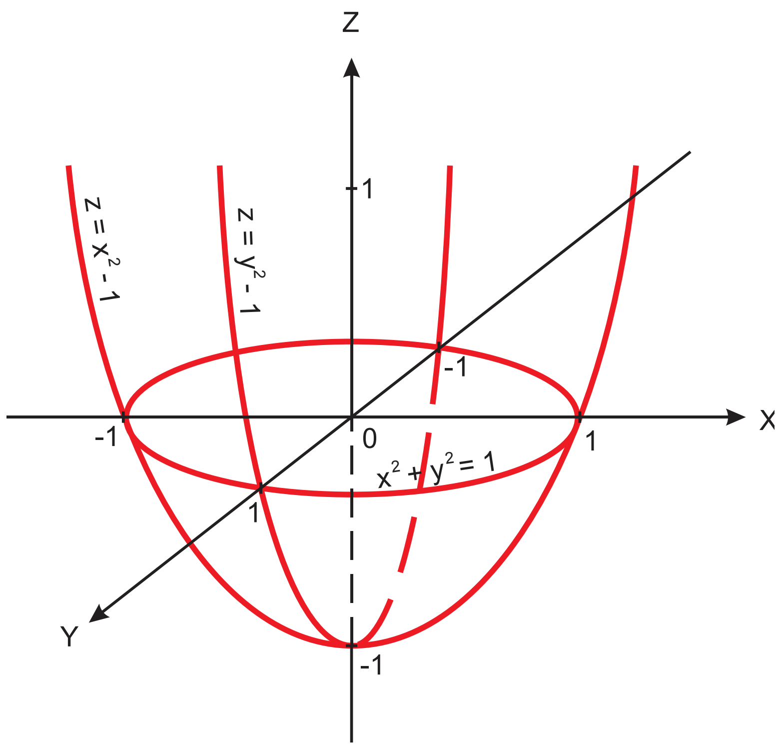
Построим поверхность S. Найдем линии пересечения поверхности с координатными плоскостями:

$x = 0$: в плоскости Oyz линия пересечения – парабола $z = y^2 - 1$;

$y = 0$: в плоскости Oxz линия пересечения – парабола $z = x^2 - 1$;

$z = 0$: в плоскости Oxy линия пересечения – окружность с центром в начале координат радиуса 1, то есть, $x^2 + y^2 = 1$.

Сделаем чертеж:



Задача 3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = 3x^2y - e^{xy} + \sqrt{xy}$.

Решение: Найдем частную производную по x, то есть $\frac{\partial u}{\partial x}$ при этом y следует считать постоянными и продифференцировать функцию по x, применяя обычные правила дифференцирования функции одной переменной. Получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy - e^{xy} \cdot y + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$$

При нахождении частной производной по y считаем постоянными x:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - e^{xy} \cdot x + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$$

Найдем полный дифференциал по формуле: $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$.

$$du = \left(6xy - e^{xy}\cdot y + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\right)dx + \left(3x^2 - e^{xy}\cdot x + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\right)dy$$

Ответ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy - e^{xy}\cdot y + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - e^{xy}\cdot x + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}},$$

$$du = \left(6xy - e^{xy}\cdot y + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\right)dx + \left(3x^2 - e^{xy}\cdot x + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\right)dy.$$

Задача 4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = xy$, если $x = \ln\left(1 + t^2\right)$ и $y = \mathrm{arctg}\,t$.

Решение: Используем формулу

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Получим

$$\frac{dz}{dt} = y\frac{2t}{1+t^2} + x\frac{1}{1+t^2} = \frac{2t\,\mathrm{arctg}\,t}{1+t^2} + \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}.$$

Ответ:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2t\,\mathrm{arctg}\,t}{1+t^2} + \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}.$$

Задача 5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = e^{x^2+y^2}$, если $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$.

Решение: Применим формулу

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Получим

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2xe^{x^2+y^2}\cdot v + 2ye^{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{1}{v}\right) = 2e^{u^2\left(v^2+\frac{1}{v^2}\right)}\cdot\left(uv^2 - \frac{u^2}{v^2}\right).$$

Аналогично $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$,

.

$$\frac{\partial z}{\partial v}=2xe^{x^2+y^2}\cdot u+2ye^{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right)=2e^{u^2\left(v^2+\frac{1}{v^2}\right)}\cdot\left(u^2v-\frac{u^2}{v^3}\right).$$

Ответ:
$$\frac{\partial z}{\partial u}=2e^{u^2\left(v^2+\frac{1}{v^2}\right)}\cdot\left(uv^2-\frac{u^2}{v^2}\right),$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=2e^{u^2\left(v^2+\frac{1}{v^2}\right)}\cdot\left(u^2v-\frac{u^2}{v^3}\right).$$

Задача 6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z=z(x,y)$ задана неявно уравнением $z^3-3xyz-8=0$.

Решение. Во-первых, функция $F(x,y,z)=z^3-3xyz-8$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными
$\frac{\partial F}{\partial x}=-3yz$, $\frac{\partial F}{\partial y}=-3xz$, $\frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-3xy$ всюду на $\boldsymbol{R}^3$.

Найдём $\frac{\partial z}{\partial x}$. Можно воспользоваться готовой формулой
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{-3zy}{3z^2-3xy}=\frac{zy}{z^2-xy}.$$

Найдём $\frac{\partial z}{\partial y}$. Используем готовую формулу
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{-3zx}{3z^2-3xy}=\frac{zx}{z^2-xy}.$$

Ответ:
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zy}{z^2-xy},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{zx}{z^2-xy}.$$

Задача 7. Функция $u = u(x, y)$ задана уравнением $u=\sqrt{x^2+3y^2}$. Найдите

а) производную в точке $M(1, 1)$ в направлении вектора $S = i + 3j$;

б) grad u в точке $K(2,-2)$.

Решение: а) Производная функции нескольких переменных по направлению вектора S определяется по формуле:
$$\frac{\partial u}{\partial s}(M)=\frac{\partial u}{\partial x}(M)\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(M)\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}(M)\cos\gamma, \qquad (4.1)$$
где $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора S. В нашем случае, для задачи на плоскости, $\cos\gamma=0$.

Найдем частные производные функции u в точке M:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{6y}{2\sqrt{x^2+3y^2}} = \frac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M) = \frac{3}{\sqrt{1+3}} = \frac{3}{2}$$

Далее найдем направляющие косинусы вектора S:

$$\cos\alpha = \frac{S_x}{\sqrt{S_x{}^2+S_y{}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\beta = \frac{S_x}{\sqrt{S_x{}^2+S_y{}^2}} = \frac{3}{\sqrt{1+9}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Подставляя в формулу (4.1), получим:

$$\frac{\partial u}{\partial s}(M) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{1+9}{2\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Таким образом, производная функции u в точке M в направлении вектора S:

$$\frac{\partial u}{\partial s}(M) = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

б) Градиентом функции u в точке K называется вектор

$$\overrightarrow{grad}\ u(K) = \frac{\partial u}{\partial x}(K)\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(K)\vec{j}.$$

Найдем частные производные функции u в точке K:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(K) = \frac{2}{\sqrt{2+12}} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(K) = \frac{-6}{\sqrt{4+12}} = -\frac{3}{2}.$$

Подставляя значения частных производных в точке K, получим:

$$\overrightarrow{grad}\ u(K) = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}.$$

Ответ: Производная функции $u = \sqrt{x^2+3y^2}$ в точке M(1,1) в направлении вектора $S = i + 3j$:

$$\frac{\partial u}{\partial s}(M) = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Градиентом функции u в точке K:

$$\overrightarrow{grad}\ u(K) = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}.$$

Задача 8. Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 - y^2 + 6xy$ в точке $M(2, 3, -1)$

Решение: Так как уравнение поверхности разрешено относительно z, то касательная плоскость (T) и нормаль (N) определяются уравнениями:

$$\text{T: } z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_x(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\text{N: } \frac{x - x_0}{z'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_x(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Найдем частные производные z'_x и z'_y:

$$z'_x = 2x + 6y,$$

$$z'_y = 6x - 2y.$$

Вычислим значения частных производных в точке касания:

$$z'_x(x_0, y_0) = z'_x(2{,}3) = 2 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 22,$$

$$z'_y(x_0, y_0) = z'_y(2{,}3) = 6 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 6.$$

Подставив эти значения и координаты точки касания в уравнения (T), (N), получим:

$$z + 1 = 22\,(x - 2) + 6\,(y - 3),$$

$$z + 1 = 22x - 44 + 6y - 18.$$

$22x + 6y - z - 63 = 0$ – уравнение касательной плоскости

$$\frac{x-2}{22} = \frac{y-2}{6} = \frac{z+1}{-1}.$$

Ответ: Уравнение касательной плоскости: $22x + 6y - z - 63 = 0$, уравнение нормали: $\frac{x-2}{22} = \frac{y-2}{6} = \frac{z+1}{-1}$.

Задача 9. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

Решение: Необходимое условие экстремума – равенство нулю всех первых частных производных:

$$\begin{cases} z'_x = 2x - y + 3 \\ z'_y = -x + 2y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Решить полученную систему линейных неоднородных уравнений можно используя метод Гаусса, метод Крамера или матричный метод.

Используя метод Гаусса, получим

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{4}{3}, \\ y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Функция имеет одну стационарную точку $M(-4/3;\ 1/3)$, где может быть экстремум. Используем достаточный признак экстремума. Для этого найдем вторые частные производные:

$$z''_{xx} = 2 = A$$

$$z''_{yy} = 2 = B$$

$$z''_{xy} = -1 = C$$

Согласно достаточным условиям экстремума, выражение

$$A \cdot B - C^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$$

Следовательно, экстремум существует. Так как $A > 0$, то точка $M(-4/3; 1/3)$ является точкой минимума, и значение функции в этой точке принимает минимальное значение:

$$z_{\min} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 =$$

$$= \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} - 4 - \frac{2}{3} + 1 = \frac{21}{9} - \frac{2}{3} - 3 = \frac{7-2-9}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Ответ: Функция $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$ имеет точку минимума $M(-4/3; 1/3)$ и имеет минимальное значение функции $z_{\min} = -\dfrac{4}{3}$.

Задача 10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = e^{\frac{x}{y}}$ в окрестности точки $M_0(0, 1)$.

Решение: Формула Тейлора 2-го порядка для функции $u = f(x, y, z, \ldots t)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0, \ldots t_0)$ записывается в виде

$$f(M) = f(M_0) + df(M_0) + \tfrac{1}{2!} d^2 f(M_0) + R_2,$$

Для разложения функции по формуле Тейлора указанного порядка потребуются следующие величины: $f(M_0)$, $du(M_0)$, $d^2u(M_0)$ и R_2. Найдём значение функции, ее частные производные и дифференциал в точке M_0:

$$f(M_0) = e^{\frac{x}{y}}\Bigg|_{(0,1)} = 1; \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y}\Big|_{(0,1)} = 1; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\Big|_{(0,1)} = 0;$$

$$du(M_0) = \left(dx + 0dy\right)\Big| = dx.$$

Найдём частные производные второго порядка и дифференциал второго порядка в точке M_0:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y^2}\Big|_{(0,1)} = 1; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^3}\right) + e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\Big|_{(0,1)} = -1;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x^2}{y^2}\right) + e^{\frac{x}{y}} \frac{2x}{y^3}\Big|_{(0,1)} = 0;$$

$$d^2u(M_0) = 1dx^2 - 1dxdy + 0dy^2 = dx^2 - dxdy.$$

Найдём остаточный в форме Пеано

$$R_2 = o\left(\rho^2\right) = o\left(\left(x-0\right)^2 + \left(y-1\right)^2\right) = o(x^2 + (y-1)^2).$$

Теперь запишем требуемую формулу с учётом того, что

$$dx = \Delta x = x, \quad dy = \Delta y = y - 1.$$

Окончательно получаем формулу Тейлора до членов 2-го порядка с остаточным членом в форме Пеано

$$e^{\frac{x}{y}} = 1 + x + \frac{1}{2!}\left(x^2 - x(y-1)\right) + o(x^2 + (y-1)^2).$$

Ответ: $$e^{\frac{x}{y}} = 1 + x + \frac{1}{2!}\left(x^2 - x(y-1)\right) + o(x^2 + (y-1)^2).$$

Задача 11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2y^2 - 4x - 12$ в области $x \le 0$, $x - y + 3 \ge 0$, $y \ge 0$. Постройте чертёж.

Решение: Построим область D на плоскости Oxy (4.2.10). Найдем все точки, где функция может принимать наибольшее и наименьшее значения. Эти точки могут находиться, как внутри области, так и на её границе.

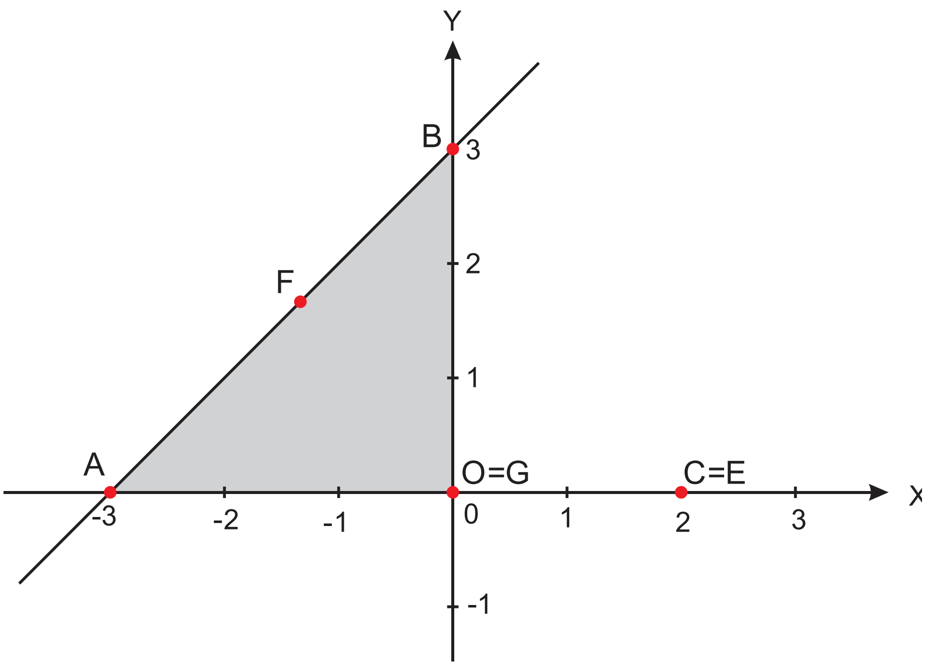


Рис. 4.2.10.

Найдем внутренние точки области, в которых функция может иметь экстремум, для чего первые частные производные приравняем нулю.

$$z'_x = 2x - 4,$$
$$z'_y = 4y.$$

Решим систему:

$$\begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ 4y = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 0. \end{cases}$$

Получили точку C (2, 0), которая не находится внутри области D. Значит, наибольшее и наименьшее значения функции лежат на границе.

Рассмотрю точки границы области D. Граница области D состоит из трёх отрезков OA, AB, BO.

На отрезке OA: $y = 0$, поэтому на этом отрезке $z = x^2 – 4x – 12$ ($–3 \le x \le 0$) есть функция одной переменной x. Её наименьшее и наибольшее значения находятся среди точек экстремума и на концах отрезка.

Найдем производную $z' = 2x – 4$. Необходимое условие экстремума для функции одной переменной $z' = 0$ или $2x – 4 = 0$ дает нам $x = 2$. Имеем точку E (2, 0), но так как координаты точки E совпадают с координатами точки C и точка E не принадлежит области D, то функция может принимать наибольшее и наименьшее значения на границе отрезков OA т.е. O (0, 0) и A (–3, 0).

На отрезке AB: $y = x + 3$, поэтому на этом отрезке

$$z = x^2 + 2(x+3)^2 - 4x - 12 \ \square$$

$$z = x^2 + 2(x^2 + 6x + 9) - 4x - 12 \ \square$$

$$z = x^2 + 2x^2 + 12x + 18 - 4x - 12 \ \square$$

$$z = 3x^2 + 8x + 6 \ \ (-3 \le x \le 0)$$

есть функция одной переменной x. Её наибольшее и наименьшее значения находятся среди точек экстремума и на концах отрезка AB.

Найдем производную

$$z' = 6x + 8,$$

решим уравнение $z' = 0$ или $6x + 8 = 0$ и найдем $x = -\frac{4}{3}$.

Имею точку $F(-\frac{4}{3}; \frac{5}{3})$ и граничные точки отрезка AB: $A(–3, 0)$ и $B(0, 3)$. В этих точках функция может принимать наибольшее и наименьшее значения на отрезке AB.

На отрезке BO: $x = 0$, поэтому на этом отрезке $z = 2y^2 – 12$ ($0 \le y \le 3$) есть функция одной переменной y. Её наибольшее и наименьшее значения находятся среди точек экстремума и на концах отрезка.

Найдем производную $z' = 4y$, решим уравнение $z' = 0$ или $4y = 0$ и найдем $y=0$.

Имею точку $G(0, 0)$ и граничные точки отрезка BO: $B(0, 3)$ и $O(0, 0)$. Координаты точки G совпадают с координатами точки O, поэтому рассмотрим граничные точки B и O. В этих точках функция может принимать наибольшее и наименьшее значения на отрезке BO.

Таким образом, наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2y^2 - 4x - 12$ в данной замкнутой области D находятся среди её значений в точках $O(0, 0)$, $A(–3, 0)$, $F(-\frac{4}{3}; \frac{5}{3})$ и $B(0, 3)$, то есть среди значений:

$z(0, 0) = – 12$,
$z(–3, 0) = 9 + 12 – 12 = 9$,

$$z\left(-\frac{4}{5}; \frac{5}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{4}{3}\right) - 12 = \frac{16}{9} + 2 \cdot \frac{25}{9} + \frac{16}{3} - 12 =$$

$$= \frac{16+50+48-108}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

$$z\,(0,\,3) = 2 \cdot 9 - 12 = 6.$$

Выберем из них наибольшее и наименьшее, это 9 и –12 соответственно. Они и являются наибольшим и наименьшим значениями данной функции в данной замкнутой области D:

$$z_{\text{наиб}} = 9, \qquad\qquad z_{\text{наим}} = -12.$$

Ответ: Функция $z = x^2 + 2y^2 - 4x - 12$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств $x \le 0$, $x - y + 3 \ge 0$, $y \ge 0$, имеет наибольшее значение $z_{\text{наиб}} = 9$ и наименьшее значение $z_{\text{наим}} = -12$.

Задача 12. Вычислите приближённо $1{,}08^{3{,}96}$.

Решение: Пусть требуется вычислить значение функции $f\,(x,\,y)$ в точке $M_1(x_1,\,y_1)$. Если проще вычислить значения этой функции и ее частные производные в точке $M_0(x_0,\,y_0)$, то при достаточно малых, по абсолютной величине, значениях разностей $(x_1 - x_0)=\mathrm{d}x$, $(y_1 - y_0) = \mathrm{d}y$ можно заменить полное приращение функции ее полным дифференциалом:

$$f(M_1) - f(M_0) \approx f_x'(M_0)dx + f_y'(M_0)dy,$$

И отсюда найти приближенное значение искомой функции по формуле

$$f(M_1) \approx f(M_0) + f_x'(M_0)dx + f_y'(M_0)dy.$$

Полагая, что $1{,}08^{3{,}96}$ есть частное значение функции $f(x,\,y) = x^y$ в точке $M_1(1{,}08;\,3{,}96)$ и что вспомогательная точка $M_0\,(1;\,4)$, получим:

$$f\,(M_0) = 1^4 = 1,$$

$$f_x'(M) = yx^{y-1}, \quad f_x'(M_0) = 4, \qquad\qquad f_y'(M) = x^y \ln x, \quad f_y'(M_0) = 0,$$

$$dx = 1{,}08 - 1 = 0{,}08, \quad dy = 3{,}96 - 4 = -0{,}04.$$

Подставляя в формулу найденные значения, получим

$$1{,}08^{3{,}96} \approx f(M_0) + f_x'(M_0)dx + f_y'(M_0)dy = 1 + 4 \cdot 0{,}08 = 1{,}32.$$

Ответ: $1{,}08^{3{,}96} \approx 1{,}32.$