

Индивидуальное задание №1

Вариант №1

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = -1, \\ -2x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант №2

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 4. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 8x_4 = 0, \\ 2x_1 - 9x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 0, \\ -x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант №3

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант №4

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 10 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 3. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 - 3x_3 - x_4 + x_5 = -4. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант №5

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 14 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 10x_4 + 4x_5 = -7, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 7x_4 + 3x_5 = -6. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант №6

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 13 & 2 & 6 & 4 \\ 18 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 19, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 11, \\ -x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 13. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 5, \\ x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант №7

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} -7 & -2 & -3 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 12 & -4 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -3, \\ -x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант №8

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} -7 & -3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 14, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 6x_1 - 12x_2 + 17x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант №9

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = -11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант №10

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & -6 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:

а) методом Крамера;

б) матричным методом;

в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

4.2.3. Индивидуальное задание №2

Вариант 1

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{4; 2; -1\}$, $\vec{b} = \{5; 3; -2\}$, $\vec{c} = \{3; 2; -1\}$.

Найдите:

а) вектор $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;

б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;

в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;

г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(1; 1; 1)$, $B(4; 5; -3)$ и $|AB| : |CB| = 5 : 2$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$,

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ.$$

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$

$A(-3; 5; 6)$, $B(1; -5; 7)$, $C(6; -7; 2)$.

Найдите:

а) координаты четвёртой вершины D ;

- б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;
 в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .
5. Докажите, что четыре точки $A(-1; 1; -2)$, $B(2; -1; 6)$, $C(0; 2; -4)$, $D(4; 1; 2)$ лежат в одной плоскости.
6. Даны векторы $\vec{a} = \{2; 3; -1\}$ и $\vec{b} = \{5; 0; -12\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = 5$.
7. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{3; -4; 4\}$ и $\vec{b} = \{-1; 1; 2\}$, образует с осью Oy острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = 14\sqrt{5}$.
8. Даны вершины пирамиды $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 1)$, $C(3; 1; 2)$, $D(0; 1; 3)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .
9. Относительно некоторого базиса заданы векторы $\vec{e}_1 = \{4; 2; -1\}$, $\vec{e}_2 = \{5; 3; -2\}$, $\vec{e}_3 = \{3; 2; -1\}$, $\vec{x} = \{12; 7; -4\}$.
- а) Докажите, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ можно принять за новый базис;
 б) Найдите координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Вариант 2

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{-3; 1; 0\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$, $\vec{c} = \{-2; 1; -1\}$.
 Найдите:
- а) вектор $\vec{d} = -3\vec{a} - 2\vec{b} + 7\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;
 б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;
 в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;
 г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(0; -1; 2)$, $B(2; 1; -3)$ и $|AB| : |CB| = 2 : 3$.
3. Найдите модули векторов $\vec{p} = \vec{a} - 3\vec{b}$ и $\vec{q} = 5\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.
4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$ $A(3; 1; 4)$, $B(-1; 6; 1)$, $C(-1; 1; 6)$.
 Найдите:
- а) координаты четвёртой вершины D ;
 б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;
 в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .
5. Докажите, что четыре точки $A(3; 0; 1)$, $B(-1; 2; 0)$, $C(0; 0; -1)$, $D(2; 3; 1)$ лежат в одной плоскости.
6. Даны векторы $\vec{a} = \{4; -4; -3\}$ и $\vec{b} = \{3; 2; -4\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{b}$ и $(\vec{x}, \vec{a}) = 3$.
7. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{3; 5; 3\}$ и $\vec{b} = \{-6; -1; 4\}$, образует с осью Oz тупой угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = 2$.

8. Даны вершины пирамиды $A(-1; 1; 1)$, $B(2; 3; 2)$, $C(-1; 1; 3)$, $D(3; 2; 4)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

9. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\vec{e}_1 = \{5; 3; 5\}$, $\vec{e}_2 = \{2; 0; 3\}$, $\vec{e}_3 = \{0; 1; -1\}$, $\vec{x} = \{9; 6; 8\}$.

а) Докажите, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ можно принять за новый базис;

б) Найдите координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Вариант 3

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{-1; 0; 5\}$, $\vec{b} = \{1; 1; 3\}$, $\vec{c} = \{2; -2; 4\}$.

Найдите:

а) вектор $\vec{d} = -\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;

б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;

в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;

г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Определить координаты точки C на отрезке AB , если $A(1; 4; 1)$, $B(-1; 1; 3)$ и $|AB| : |CB| = 2 : 5$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 5\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 5$,

$(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$

$A(-1; 2; 3)$, $B(2; -1; 1)$, $C(1; -3; -1)$.

Найдите:

а) координаты четвёртой вершины D ;

б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;

в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Докажите, что четыре точки $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$, $D(3; -5; 3)$ лежат в одной плоскости.

6. Даны векторы $\vec{a} = \{1; -3; 4\}$ и $\vec{b} = \{-3; 5; 1\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = 4$.

7. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{-1; 3; -2\}$ и $\vec{b} = \{4; 2; 1\}$, образует с осью Oz острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = \sqrt{6}$.

8. Даны вершины пирамиды $A(1; 0; -1)$, $B(4; 2; 0)$, $C(1; 0; 1)$, $D(5; 1; 2)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

9. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\vec{e}_1 = \{3; 2; 1\}$, $\vec{e}_2 = \{2; 3; 1\}$, $\vec{e}_3 = \{-1; -3; -1\}$, $\vec{x} = \{2; 1; 1\}$.

а) Докажите, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ можно принять за новый базис;

б) Найдите координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Вариант 4

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{1; 1; 3\}$, $\vec{b} = \{-1; 0; 3\}$, $\vec{c} = \{2; 1; 2\}$.

Найдите:

а) вектор $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;

б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;

в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;

г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(1; 2; -1)$, $B(3; -3; 2)$ и $|AB| : |CB| = 3 : 2$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p} = -2\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} - 3\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$,

$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$

$A(3; -1; -1)$, $B(1; 2; -7)$, $C(-5; 14; -3)$.

Найдите:

а) координаты четвёртой вершины D ;

б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;

в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Докажите, что четыре точки $A(2; -1; 2)$, $B(3; 0; 5)$, $C(-1; 2; 3)$, $D(0; 2; -1)$ лежат в одной плоскости.

6. Даны векторы $\vec{a} = \{3; 4; -3\}$ и $\vec{b} = \{4; -5; -3\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{b}$ и $(\vec{x}, \vec{a}) = 8$.

7. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{1; 3; 6\}$ и $\vec{b} = \{5; 3; -2\}$, образует с осью Oy тупой угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = 3$.

8. Даны вершины пирамиды $A(1; 1; 1)$, $B(4; 3; 2)$, $C(1; 1; 3)$, $D(5; 2; 4)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

9. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\vec{e}_1 = \{1; 2; 3\}$, $\vec{e}_2 = \{2; 3; 1\}$, $\vec{e}_3 = \{1; 1; -3\}$, $\vec{x} = \{2; 4; 1\}$.

а) Докажите, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ можно принять за новый базис;

б) Найдите координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

Вариант 5

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{2; 3; -1\}$, $\vec{b} = \{4; 5; -2\}$, $\vec{c} = \{-1; 0; 7\}$.

Найдите:

а) вектор $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;

б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;

в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;

г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(3; 1; 1)$, $B(2; -1; 3)$ и $|AB| : |CB| = 4 : 3$.
3. Найдите модули векторов $\vec{p} = -2\vec{a} + 5\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$.
4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$
 $A(2; -1; -3)$, $B(5; 2; -7)$, $C(-7; 11; 6)$.
 Найдите:
 а) координаты четвёртой вершины D ;
 б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;
 в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .
5. Докажите, что четыре точки $A(3; 1; -1)$, $B(5; 7; -2)$, $C(1; 5; 0)$, $D(9; 4; -4)$ лежат в одной плоскости.
6. Даны векторы $\vec{a} = \{4; 1; -2\}$ и $\vec{b} = \{-6; 7; 7\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = 2$.
7. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{9; 3; 0\}$ и $\vec{b} = \{4; -1; -2\}$, образует с осью Ox острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = 2$.
8. Даны вершины пирамиды $A(0; 2; 1)$, $B(1; -1; 3)$, $C(3; -2; 0)$, $D(2; -3; 4)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .
9. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\vec{e}_1 = \{9; 3; 0\}$, $\vec{e}_2 = \{2; 0; 3\}$, $\vec{e}_3 = \{0; 1; -1\}$, $\vec{x} = \{-11; -7; 1\}$.
 а) Докажите, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ можно принять за новый базис;
 б) Найдите координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

Вариант 6

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{4; 0; 5\}$, $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$, $\vec{c} = \{0; 2; 1\}$.
 Найдите:
 а) вектор $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;
 б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;
 в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;
 г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(0; 1; 3)$, $B(-2; 2; 4)$ и $|AB| : |CB| = 3 : 4$.
3. Найдите модули векторов $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.
4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$
 $A(3; -2; 0)$, $B(2; -3; -1)$, $C(-5; 0; -1)$.

Найдите:

а) координаты четвёртой вершины D ;

б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;

в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Докажите, что четыре точки $A(1; 0; 2)$, $B(3; 5; 9)$, $C(2; 1; 1)$, $D(2; 2; 4)$ лежат в одной плоскости.

6. Даны векторы $\vec{a} = \{2; 4; 3\}$ и $\vec{b} = \{1; 3; 0\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = -4$.

7. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{5; -3; 6\}$ и $\vec{b} = \{1; 0; 7\}$, образует с осью Ox острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = 1$.

8. Даны вершины пирамиды $A(-1; 2; -3)$, $B(4; -1; 0)$, $C(2; 1; -2)$, $D(-7; 0; -1)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

9. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\vec{e}_1 = \{5; 1; 0\}$, $\vec{e}_2 = \{2; -1; 3\}$, $\vec{e}_3 = \{1; 0; -1\}$, $\vec{x} = \{13; 2; 7\}$.

а) Докажите, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ можно принять за новый базис;

б) Найдите координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Вариант 7

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{1; -2; -3\}$, $\vec{b} = \{1; -5; -4\}$, $\vec{c} = \{-3; -1; 2\}$.

Найдите:

а) вектор $\vec{d} = 4\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;

б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;

в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;

г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(-1; 4; 3)$, $B(0; 2; 0)$ и $|AB| : |CB| = 1 : 2$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$,

$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$

$A(-3; 3; 1)$, $B(-1; 3; -1)$, $C(-2; 7; -2)$.

Найдите:

а) координаты четвёртой вершины D ;

б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;

в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Докажите, что четыре точки $A(3; 5; 1)$, $B(2; 4; 7)$, $C(1; 5; 3)$, $D(4; 4; 5)$ лежат в одной плоскости.

6. Даны векторы $\vec{a} = \{2; 5; 1\}$ и $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = -3$.
7. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{0; -1; -2\}$ и $\vec{b} = \{2; 0; 6\}$, образует с осью Ox тупой угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = \sqrt{7}$.
8. Даны вершины пирамиды $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$, $D(3; 7; 2)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .
9. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\vec{e}_1 = \{1; 0; 1\}$, $\vec{e}_2 = \{1; -2; 0\}$, $\vec{e}_3 = \{0; 3; 1\}$, $\vec{x} = \{2; 7; 5\}$.
- а) Докажите, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ можно принять за новый базис;
- б) Найдите координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Вариант 8

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{1; 2; 3\}$, $\vec{b} = \{-1; 0; 4\}$, $\vec{c} = \{-2; 0; -1\}$.
Найдите:
- а) вектор $\vec{d} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;
- б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;
- в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;
- г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(0; -3; 5)$, $B(2; 4; -2)$ и $|AB| : |CB| = 3 : 2$.
3. Найдите модули векторов $\vec{p} = -\vec{a} + 4\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{6}$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$.
4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$
 $A(5; -1; 1)$, $B(2; -3; -1)$, $C(-2; 2; 1)$.
Найдите:
- а) координаты четвёртой вершины D ;
- б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;
- в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .
5. Докажите, что четыре точки $A(2; 3; 0)$, $B(1; 2; 6)$, $C(0; 3; 8)$, $D(1; 1; 8)$ лежат в одной плоскости.
6. Даны векторы $\vec{a} = \{3; -1; 5\}$ и $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = 14$.
7. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{0; -3; -2\}$ и $\vec{b} = \{2; 0; 3\}$, образует с осью Oy острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = 6$.
8. Даны вершины пирамиды $A(1; 5; -7)$, $B(-3; 6; 3)$, $C(-2; 7; 3)$, $D(1; -1; 2)$.
Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

9. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\bar{e}_1 = \{1; 0; 2\}$, $\bar{e}_2 = \{0; 1; 1\}$, $\bar{e}_3 = \{2; -1; 4\}$, $\bar{x} = \{3; -3; 4\}$.
- а) Докажите, что векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ можно принять за новый базис;
- б) Найдите координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$

Вариант 9

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{0; 1; -1\}$, $\vec{b} = \{2; -3; -1\}$, $\vec{c} = \{2; 5; 3\}$.
Найдите:
- а) вектор $\vec{d} = 3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;
- б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;
- в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;
- г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.
2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(-2; 3; 1)$, $B(5; -2; -4)$ и $|AB| : |CB| = 5 : 3$.
3. Найдите модули векторов $\vec{p} = 5\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{q} = \vec{a} + 3\vec{b}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.
4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$
 $A(2; 3; -7)$, $B(1; 8; -6)$, $C(2; 6; -7)$.
Найдите:
- а) координаты четвёртой вершины D ;
- б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;
- в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .
5. Докажите, что четыре точки $A(-1; 0; 1)$, $B(1; 2; 3)$, $C(-2; 5; 2)$, $D(0; 7; 4)$ лежат в одной плоскости.
6. Даны векторы $\vec{a} = \{2; 3; -1\}$ и $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = -14$.
7. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{-3; 1; -1\}$ и $\vec{b} = \{-1; 0; 2\}$, образует с осью Oz острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = \sqrt{6}$.
8. Даны вершины пирамиды $A(2; 3; 1)$, $B(4; 1; -2)$, $C(6; 3; 7)$, $D(-1; 2; 4)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .
9. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\bar{e}_1 = \{2; 1; 0\}$, $\bar{e}_2 = \{1; -1; 2\}$, $\bar{e}_3 = \{2; 2; -1\}$, $\bar{x} = \{3; 7; -7\}$.
- а) Докажите, что векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ можно принять за новый базис;
- б) Найдите координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$

Вариант 10

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{2; -2; 3\}$, $\vec{b} = \{-1; 3; -4\}$, $\vec{c} = \{5; 0; 1\}$.

Найдите:

а) вектор $\vec{d} = \vec{a} - 3\vec{b} - 2\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;

б) скалярное произведение $(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a})$;

в) векторное произведение $[\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} - \vec{a}]$;

г) смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB , если $A(-1; 2; 3)$, $B(1; 0; 6)$ и $|AB| : |CB| = 3 : 5$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 3\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$,

$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$

$A(2; 3; -7)$, $B(1; 8; -6)$, $C(2; 6; -7)$.

Найдите:

а) координаты четвёртой вершины D ;

б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB ;

в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD .

5. Докажите, что четыре точки $A(4; -2; -2)$, $B(3; 1; 1)$, $C(4; 2; 0)$, $D(7; -1; -6)$ лежат в одной плоскости.

6. Даны векторы $\vec{a} = \{0; 2; 3\}$ и $\vec{b} = \{-12; 0; 5\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x}, \vec{b}) = 3$.

7. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a} = \{-1; 1; -1\}$ и $\vec{b} = \{1; 2; 1\}$, образует с осью Ox острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}| = \sqrt{2}$.

8. Даны вершины пирамиды $A(1; -5; 4)$, $B(0; -3; 1)$, $C(-2; -4; 3)$, $D(4; 4; -2)$.

Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC .

9. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\vec{e}_1 = \{0; 1; 5\}$, $\vec{e}_2 = \{3; -1; 2\}$, $\vec{e}_3 = \{-1; 0; 1\}$, $\vec{x} = \{8; -7; 13\}$.

а) Докажите, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ можно принять за новый базис;

б) Найдите координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

4.2.5. Индивидуальное задание №3

Вариант 1

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-5; 1)$

а) параллельно прямой $2x + 3y + 1 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2}$;

в) под углом 30° к прямой $y + 7 = 0$;

г) и точку $B(2; 3)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны вершины треугольника $A(-5; -3)$, $B(4; -12)$, $C(8; 10)$. Составьте:

- а) уравнение стороны AB ;
- б) уравнение высоты CD ;
- в) уравнение медианы BE ;
- г) косинус угла между высотой CD и медианой BE .

3. Даны две прямые $l_1: y = 5 - 2x$ и $l_2: \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t + 1 \end{cases}$

Найдите:

- а) точку пересечения прямых;
- б) косинус угла между прямыми;
- в) расстояние от точки $M_0(-5; 1)$ до каждой прямой.

4. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

- а) $x^2 + y^2 - 12x + 2y + 12 = 0$;
- б) $x = -2 - 3\sqrt{-5 - 6y - y^2}$;
- в) $5y^2 - 4x^2 + 16x - 36 = 0$;
- г) $y = 2y^2 + 8x + 1$.

5. Постройте линии, заданные в полярных координатах:

- а) $\rho = \cos(\varphi + \pi/3)$;
- б) $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$.

6. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

- а) $\begin{cases} y = 2 \sin t, \\ x = 3 \cos t, \end{cases}$
- б) $\begin{cases} y = \frac{1}{3}(t^3 - 3t), \\ x = t^2. \end{cases}$

7. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

- а) $\begin{cases} x \leq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4, \\ y - x \leq 1 \end{cases}$
- б) $\begin{cases} y \geq 1 - x, \\ y \leq 3 - x, \\ x - y + 1 \geq 0 \end{cases}$

Вариант 2

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 1)$

- а) параллельно прямой $2x + y - 2 = 0$;
- б) перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{1}$;
- в) под углом 60° к прямой $y - 5 = 0$;
- г) и точку $B(-2; 3)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны вершины треугольника $A(-5; 7)$, $B(7; -2)$, $C(11; 20)$. Составьте:

- а) уравнение стороны AB ;
- б) уравнение высоты CD ;
- в) уравнение медианы BE ;
- г) косинус угла между высотой CD и медианой BE .

3. Даны две прямые $l_1: y = 4 - 2x$ и $l_2: \begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = t + 2 \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(2; 2)$ до каждой прямой.

4. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$;

в) $x = -2 - 2\sqrt{4 - y^2}$;

б) $x^2 - y^2 + 12x - 14y + 85 = 0$;

г) $2y^2 + 8y - x + 1 = 0$.

5. Постройте линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho = \cos(\varphi - \pi/3)$;

б) $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$.

6. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а)
$$\begin{cases} y = 2 \cos t, \\ x = 3 \sin t, \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}(t^3 + 3t), \\ x = t^2. \end{cases}$$

7. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а)
$$\begin{cases} x \leq -1, \\ x^2 + y^2 \leq 4, \\ y - x \geq 1 \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} y \geq 2x - 2, \\ y \leq 2x + 1, \\ x + y - 2 \leq 0 \end{cases}$$

Вариант 3

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(5; 0)$

а) параллельно прямой $3x - 2y + 4 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-3}$;

в) под углом 45° к прямой $y - 3 = 0$;

г) и точку $B(-1; 1)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны вершины треугольника $A(-10; 9)$, $B(2; 0)$, $C(6; 22)$. Составьте:

а) уравнение стороны AB ;

б) уравнение высоты CD ;

в) уравнение медианы BE ;

г) косинус угла между высотой CD и медианой BE .

3. Даны две прямые $l_1: y = 2x - 5$ и $l_2: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 5t + 1 \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(-1; 2)$ до каждой прямой.

4. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 16 = 0$;

в) $y = -3 + \sqrt{5x - 2}$;

б) $4x^2 - 24x + 3y^2 + 24 = 0$;

г) $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 5 = 0$.

5. Постройте линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho = \cos(\varphi + \pi/6)$;

б) $\rho = 2(1 + \sin \varphi)$.

6. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а)
$$\begin{cases} y = 2 \sin t, \\ x = 4 \cos t, \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}(t^3 + 3t), \\ x = -t^2. \end{cases}$$

7. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а)
$$\begin{cases} x \leq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4, \\ y + x \geq 1 \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} y \geq x + 1, \\ y \leq x + 3, \\ x + y - 2 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 4

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; -2)$

а) параллельно прямой $-x + 3y + 2 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{5}$;

в) под углом 120° к прямой $y + 12 = 0$;

г) и точку $B(5; -1)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны вершины треугольника $A(2; 0)$, $B(-10; 9)$, $C(6; 22)$. Составьте:

а) уравнение стороны AB ;

б) уравнение высоты CD ;

в) уравнение медианы BE ;

г) косинус угла между высотой CD и медианой BE .

3. Даны две прямые $l_1: y = 3x - 1$ и $l_2: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 5 - 2t \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(-2; -1)$ до каждой прямой.

4. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 18 = 0$;

в) $x = -4 - 3\sqrt{y+5}$;

б) $x^2 - y^2 - 6x + 4y - 4 = 0$;

г) $16y^2 + 9x^2 - 18x = 0$.

5. Постройте линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho = \cos(\varphi - \pi/6)$;

б) $\rho = 2(1 - \sin \varphi)$.

6. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а)
$$\begin{cases} y = 3 \sin t, \\ x = 4 \cos t, \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}(t^3 - 3t), \\ x = -t^2. \end{cases}$$

7. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

$$a) \begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4, \\ y + x \geq 1 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 2y \geq -3x, \\ 2y \leq 6 - 3x, \\ x - y - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Вариант 5

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4; 3)$

а) параллельно прямой $3x + y - 8 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x+2}{7} = \frac{y-3}{1}$;

в) под углом 135° к прямой $y - 7 = 0$;

г) и точку $B(4; -1)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны вершины треугольника $A(-9; 6)$, $B(3; -3)$, $C(7; 19)$. Составьте:

а) уравнение стороны AB ;

б) уравнение высоты CD ;

в) уравнение медианы BE ;

г) косинус угла между высотой CD и медианой BE .

3. Даны две прямые $l_1: y = -5x + 7$ и $l_2: \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 2 - 3t \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(2; 3)$ до каждой прямой.

4. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2 + y^2 + 12x - 4y + 24 = 0$;

в) $y = 1 - \sqrt{7 - 3x}$;

б) $3x^2 + 6x + 4y^2 - 8y + 3 = 0$;

г) $y^2 - x^2 - x - y - 1 = 0$.

5. Постройте линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho = \sin(\varphi - \pi/6)$;

б) $\rho = 3(1 - \sin \varphi)$.

6. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y = 4 \sin t, \\ x = 2 \cos t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = t^3 - t, \\ x = t^2. \end{cases}$

7. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

$$a) \begin{cases} y \geq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4, \\ x - y \geq 1 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3y \geq -2x, \\ 3y \leq 6 - 2x, \\ x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$$

Вариант 6

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; -2)$

а) параллельно прямой $3x - y - 2 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+3}{1}$;

в) под углом 30° к прямой $y - 4 = 0$;

г) и точку $B(2; 5)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны вершины треугольника $A(1; 0)$, $B(13; -9)$, $C(17; 13)$. Составьте:

а) уравнение стороны AB ;

б) уравнение высоты CD ;

в) уравнение медианы BE ;

г) косинус угла между высотой CD и медианой BE .

3. Даны две прямые $l_1: y = 4 - 5x$ и $l_2: \begin{cases} x = 3t - 7 \\ y = -5t + 8 \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(-1; 5)$ до каждой прямой.

4. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$;

в) $4y^2 - 9x^2 + 18x + 16y + 43 = 0$;

б) $x = 3 + \sqrt{-6(y-2)}$;

г) $9y^2 + 4x^2 - 18y - 27 = 0$.

5. Постройте линии, заданные в полярных координатах:

а) $\rho = \sin(\varphi + \pi/3)$;

б) $\rho = 3(1 + \sin \varphi)$.

6. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y = 3 \sin t, \\ x = 2 \cos t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = t^3 + t, \\ x = -t^2. \end{cases}$

7. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} y \leq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4, \\ y + x \geq 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x \geq 2y - 2, \\ x \leq 2y + 1, \\ x + y - 2 \leq 0 \end{cases}$

Вариант 7

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; -1)$

а) параллельно прямой $5x - y - 2 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+4}{4}$;

в) под углом 150° к прямой $y + 5 = 0$;

г) и точку $B(-1; 2)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны вершины треугольника $A(-6; 8)$, $B(4; -1)$, $C(8; 13)$. Составьте:

- а) уравнение стороны AB ;
- б) уравнение высоты CD ;
- в) уравнение медианы BE ;
- г) косинус угла между высотой CD и медианой BE .

3. Даны две прямые $l_1: y = -1 - 2x$ и $l_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 4t \end{cases}$

Найдите:

- а) точку пересечения прямых;
- б) косинус угла между прямыми;
- в) расстояние от точки $M_0(2; -2)$ до каждой прямой.

4. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

- а) $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$;
- б) $x^2 - y^2 + 12x - 14y + 85 = 0$;
- в) $x = -2 - \sqrt{16 - y^2}$;
- г) $y = 2x^2 + 8x + 1$.

5. Постройте линии, заданные в полярных координатах

- а) $\rho = \cos(\varphi + \pi/4)$;
- б) $\rho = 3(1 - \cos \varphi)$.

6. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

- а) $\begin{cases} y = 3 \cos t, \\ x = 2 \sin t, \end{cases}$
- б) $\begin{cases} y = t^2, \\ x = \frac{1}{3}(t^3 + 3t). \end{cases}$

7. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

- а) $\begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 9, \\ y + x \geq 2 \end{cases}$
- б) $\begin{cases} x \geq 2y - 2, \\ x \leq 2y + 1, \\ x + y - 2 \geq 0 \end{cases}$

Вариант 8

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; 5)$

- а) параллельно прямой $4x - y + 1 = 0$;
- б) перпендикулярно прямой $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-5}$;
- в) под углом 45° к прямой $y + 6 = 0$;
- г) и точку $B(2; 2)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны вершины треугольника $A(-12; 6)$, $B(12; 1)$, $C(-6; 23)$. Составьте:

- а) уравнение стороны AB ;
- б) уравнение высоты CD ;
- в) уравнение медианы BE ;
- г) косинус угла между высотой CD и медианой BE .

3. Даны две прямые $l_1 : y = 2x + 5$ и $l_2 : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - 5t \end{cases}$

Найдите:

- а) точку пересечения прямых;
- б) косинус угла между прямыми;
- в) расстояние от точки $M_0(-3; 2)$ до каждой прямой.

4. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

- а) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$;
- б) $4x^2 - 6x + 3y^2 = 0$;
- в) $y = -3 + \sqrt{5x - 2}$;
- г) $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y + 20 = 0$.

5. Постройте линии, заданные в полярных координатах

- а) $\rho = \sin(\varphi + \pi/6)$;
- б) $\rho = 3(1 - \cos \varphi)$.

6. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

- а) $\begin{cases} y = 2 \cos t, \\ x = 4 \sin t, \end{cases}$
- б) $\begin{cases} y = -t^2, \\ x = \frac{1}{3}(t^3 + 3t). \end{cases}$

7. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

- а) $\begin{cases} x \leq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 9, \\ y + x \geq 2 \end{cases}$
- б) $\begin{cases} y \geq 1 - 2x, \\ y \leq 5 - 2x, \\ y - x - 1 \leq 0 \end{cases}$

Вариант 9

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2; 3)$

- а) параллельно прямой $2x - 3y + 2 = 0$;
- б) перпендикулярно прямой $\frac{x+4}{-1} = \frac{y-2}{5}$;
- в) под углом 120° к прямой $y + 1 = 0$;
- г) и точку $B(3; -1)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны вершины треугольника $A(10; -1)$, $B(-2; -6)$, $C(-6; -3)$. Составьте:

- а) уравнение стороны AB ;
- б) уравнение высоты CD ;
- в) уравнение медианы BE ;
- г) косинус угла между высотой CD и медианой BE .

3. Даны две прямые $l_1 : y = 1 - 3x$ и $l_2 : \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 5 - 2t \end{cases}$

Найдите:

- а) точку пересечения прямых;
- б) косинус угла между прямыми;
- в) расстояние от точки $M_0(5; 2)$ до каждой прямой.

4. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

- а) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 8 = 0$;
- б) $x = -4 - 3\sqrt{y + 5}$;

$$б) x^2 - y^2 - 6x + 4y - 4 = 0;$$

$$з) 16y^2 + 9x^2 - 18x = 0.$$

5. Постройте линии, заданные в полярных координатах

$$а) \rho = \cos(\varphi - \pi / 4);$$

$$б) \rho = 4(1 - \sin \varphi).$$

6. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

$$а) \begin{cases} y = 3 \cos t, \\ x = 4 \sin t, \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} y = -t^2, \\ x = \frac{1}{3}(t^3 - 3t). \end{cases}$$

7. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

$$а) \begin{cases} y \geq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 9, \\ y + x \geq 1 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} y \geq 1 - 2x, \\ y \leq 5 - 2x, \\ y - x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Вариант 10

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2; 5)$

а) параллельно прямой $x + 2y - 4 = 0$;

б) перпендикулярно прямой $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+1}{3}$;

в) под углом 150° к прямой $y - 2 = 0$;

з) и точку $B(6; -2)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k .

2. Даны вершины треугольника $A(-10, -13)$, $B(-2, 3)$, $C(2, 1)$. Составьте:

а) уравнение стороны AB ;

б) уравнение высоты CD ;

в) уравнение медианы BE ;

з) косинус угла между высотой CD и медианой BE .

3. Даны две прямые $l_1: y = 7x - 5$ и $l_2: \begin{cases} x = t + 4 \\ y = -2t - 1 \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(-1; 3)$ до каждой прямой.

4. Привести уравнения линий к каноническому виду, назвать и построить кривые:

$$а) x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0;$$

$$в) y = -4 - \sqrt{5x - 10};$$

$$б) 5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0;$$

$$з) 5x^2 - 4y^2 + 16y - 36 = 0.$$

5. Построить линии, заданные в полярных координатах

$$а) \rho = \sin(\varphi - \pi / 4);$$

$$б) \rho = 4(1 + \sin \varphi).$$

6. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

$$а) \begin{cases} y = \cos t, \\ x = 2 \sin t, \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} y = t^2, \\ x = t^3 - t. \end{cases}$$

7. Построить фигуру, заданную неравенствами:

$$a) \begin{cases} y \leq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 9, \\ y + x \geq 1 \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x \geq -1 - 2y, \\ x \leq -1 - 2y, \\ x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$$

Индивидуальное задание №1

Вариант 1

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2^n} = 0;$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{x - 4} = 7.$$

2. Найдите пределы:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 1} - \sqrt{4 + n^2}}{n};$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{(1 - 2x)^2};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2 - x} - \frac{5x}{x^2 - 4} \right);$$

$$д) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x^2 + 7x + 10};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}{x};$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x + 3}{4x - 5} \right)^{\frac{x+1}{3}};$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 3) - \ln 3}{x^2};$$

$$и) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x};$$

$$к) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{arctg} x}{\sin^2 x};$$

$$л) \lim_{x \rightarrow -1-0} \left(2 - 3^{\frac{1}{x+1}} \right);$$

$$м) \lim_{x \rightarrow -1+0} \left(2 - 3^{\frac{1}{x+1}} \right).$$

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$a) y = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4}, & x < -2, \\ x - 3, & -2 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2; \end{cases}$$

$$б) y = \frac{1}{2^x - 1}; \quad в) y = \frac{-2 + x}{|x|}.$$

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow \pi$, если $\alpha(x) = 1 + \cos 3x$ и $\beta(x) = \sin^2 7x$.
5. Определить порядок малости относительно x функции $y = e^{2x} - \cos x$ при $x \rightarrow 0$.

Вариант №2

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 1} = 0$;

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{-x + 1} = -2$.

2. Найдите пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n + 1 + 2n^3}}{n + 2}$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n + 3)!}{(n + 2)! - n!}$;

в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3 + 3x - 1}{2x^3 + x - 2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x^2 - 1} \right)$;

д) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5 - x} - \sqrt{x - 3}}$;

е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{3x}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5}{x^2 - 4} \right)^{x^2 + 1}$;

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x + 2) - \ln x)$;

и) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \operatorname{arctg} x}$;

к) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$;

л) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{x}}}$;

м) $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1 - e^{-\frac{1}{x}}}$.

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

а) $y = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \leq 0, \\ 2, & 0 < x \leq 2, \\ x^2 + 3, & x > 2; \end{cases}$

б) $y = 2 - 3^{\frac{x+1}{x}}$;

в) $y = \frac{x - 1}{|x|}$

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$, если $\alpha(x) = a^x - a^{-x}$ и $\beta(x) = \operatorname{tg} x$.

5. Определить порядок малости относительно x функции $y = a^x - \cos x$ при $x \rightarrow 0$.

Вариант №3

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{6} = 0;$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x} = -2.$

2. Найдите пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 4n}}{\sqrt[3]{2n^3 + 10}};$

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n-1)!}{(n-1)!};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1};$

г) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x^2 - 4} \right);$

д) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x - 10}{x^2 - 5x + 6};$

е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x}};$

ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x-5} \right)^x;$

з) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)(\ln(3x+1) - \ln(3x-4));$

и) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{x};$

к) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{e^{2x} - 1};$

л) $\lim_{x \rightarrow -3+0} \left(3 + 2^{-\frac{1}{x+3}} \right);$

м) $\lim_{x \rightarrow -3-0} \left(3 + 2^{-\frac{1}{x+3}} \right).$

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции: а)

$$y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 3, \\ x + 3 & x > 3; \end{cases}$$

б) $y = 9^{\frac{1}{x+7}};$

в) $y = \frac{x+2}{|x|}.$

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$, если

$\alpha(x) = 1 - \cos \sqrt[3]{x^2}$ и $\beta(x) = \sqrt[3]{x} - x.$

5. Определить порядок малости относительно x функции $y = e^{\sqrt{\sin x}} - 1$ при $x \rightarrow 0.$

Вариант №4

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n} = 3;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3} = 10.$$

2. Найдите пределы:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-2)^3}{n^2 - 3n + 1};$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{2n! - 3(n+1)!};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{6x^2 - 3};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{x^2 - 9} - \frac{1}{x - 3} \right);$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + 2x^2 - x - 14};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{\frac{2x^2-1}{x}};$$

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} \sin \sqrt{x})}{x};$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_5(2x+1)}{x};$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$$

$$\text{л) } \lim_{x \rightarrow 3-0} \left(1 - 4^{-\frac{1}{x-3}} \right);$$

$$\text{м) } \lim_{x \rightarrow 3+0} \left(1 - 4^{-\frac{1}{x-3}} \right).$$

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$\text{а) } y = \begin{cases} x - 3, & x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 4, \\ 3 + \sqrt{x}, & x > 4; \end{cases}$$

$$\text{б) } y = 1 - \frac{1}{x+2};$$

$$\text{в) } y = \frac{x-2}{|x|}.$$

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$, если $\alpha(x) = e^{\sqrt{x^3}} - 1$ и $\beta(x) = 1 - \cos(\sin x)$.

6. Определить порядок малости относительно x функции $y = 1 - \sqrt[3]{\cos x}$ при $x \rightarrow 0$.

Вариант №5

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

$$а) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-3n}{2n} = -\frac{3}{2};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 3} (2x+1) = 7.$$

2. Найдите пределы:

$$а) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+1}+n}{\sqrt[4]{n^3-1}-n};$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!-(n-1)!}{2n(n+1)!};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+(x+1)^3}{2x^3-3(x+1)^3};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x} \right);$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3+2x^2-5}{x^2-3x+2};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25};$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x^2};$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+2)-\ln 2}{x^2};$$

$$и) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x(1-\cos 4x)};$$

$$к) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2};$$

$$л) \lim_{x \rightarrow 2+0} \left(1-3^{\frac{1}{2-x}} \right);$$

$$м) \lim_{x \rightarrow 2-0} \left(1-3^{\frac{1}{2-x}} \right).$$

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции

$$а) y = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 1-x, & 0 \leq x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1; \end{cases}$$

$$б) y = \frac{1}{1 + \frac{1}{8^{3-x}}};$$

$$в) y = \frac{2|x|}{x+1}.$$

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$, если $\alpha(x) = \sin(1-\cos x)$ и $\beta(x) = \sqrt[3]{1+\sqrt{x}} - 1$.

5. Определить порядок малости относительно x функции $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}$ при $x \rightarrow 0$.

Вариант №6

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{1 - 3^n} = 0$;

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = 4$.

2. Найдите пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - (n-1)!}{3(n+1)!}$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^3 + 1}}{x + 1}$;

г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right)$;

д) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 2x^3 + x - 2}{x^5 - x}$;

е) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-1}}{x^2 - 25}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^x$;

з) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left(\ln \left(1 + \frac{x}{2} \right) - \ln \frac{x}{2} \right)$;

и) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{4x^2}$;

к) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \cdot \operatorname{tg} \sqrt{x}}{5 \sin x}$;

л) $\lim_{x \rightarrow -4-0} \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x+4}}}$;

м) $\lim_{x \rightarrow -4+0} \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x+4}}}$.

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

а) $y = \begin{cases} -1, & x \leq 0, \\ 2 \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi + 4}{2} - x, & x > \frac{\pi}{2}; \end{cases}$

б) $y = 1 + 2^{\frac{1}{3x-2}}$;

в) $y = \frac{|x|}{x+3}$.

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$, если $\alpha(x) = \sqrt{\cos x} - 1$ и $\beta(x) = \sqrt[3]{1-x^2} - 1$.
5. Определить порядок малости относительно x функции $y = \operatorname{tg} x - \sin x$ при $x \rightarrow 0$.

Вариант №7

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+4} = 0;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-1}{x+1} = 1.$$

2. Найдите пределы:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 - 5n}{4n^2 + 5n - 2} \right)^2;$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{2n! - 3(n+1)!};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 + x + 2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-6} - 2x \right);$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x - 2};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 3} - 1}{x - 2};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{2x};$$

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\ln(2x+1));$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{1 - \cos x};$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{\operatorname{tg}^2 2x};$$

$$\text{л) } \lim_{x \rightarrow 4-0} \left(1 - 3^{-\frac{1}{x-4}} \right);$$

$$\text{м) } \lim_{x \rightarrow 4+0} \left(1 - 3^{-\frac{1}{x-4}} \right).$$

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$\text{а) } y = \begin{cases} x-3, & x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x \leq 4, \\ 4 + \sqrt{x}, & x > 4; \end{cases}$$

$$\text{б) } y = -1 + 2^{\frac{1}{x+2}};$$

$$\text{в) } y = \frac{2|x|}{x+1}.$$

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$, если $\alpha(x) = \sqrt[4]{1+x^2} - 1$ и $\beta(x) = \sin^2 5x$.

5. Определить порядок малости относительно x функции $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$ при $x \rightarrow 1$.

Вариант №8

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n - 1} = 0$;

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 2$.

2. Найдите пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 1}{3^n + 2}$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!}{2(n+2)! - (n+1)!}$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - \frac{x^2+5}{x+1} \right)$;

д) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^4 - 7x - 2}$;

е) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x-1} \right)^{2x-1}$;

з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{12x} \ln(1+6x)$;

и) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{1 - \cos 3x}$;

к) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 3x}{x^2}$;

л) $\lim_{x \rightarrow -2-0} \left(\frac{x-3}{x^2-4} \right)$;

м) $\lim_{x \rightarrow -2+0} \left(\frac{x-3}{x^2-4} \right)$.

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

а) $y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2, & x > 1; \end{cases}$

б) $y = 2 + \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x-2}}}$;

в) $y = \frac{|2-x|}{2-x}$.

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$, если $\alpha(x) = \ln(1 + \sqrt[3]{x^2})$ и $\beta(x) = \operatorname{tg} 2x$.
5. Определить порядок малости относительно x функции $y = \ln(1 + \sqrt{x^3})$ при $x \rightarrow 0$.

Вариант №9

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

$$а) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4}} = 1;$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 5) = 1.$$

2. Найдите пределы:

$$а) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{3n};$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - n!}{2n! - 5(n+1)!};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{2x^3 - 2x + 3};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x+2} - \frac{x^4 - 2x^2}{x^2 - 4} \right);$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^3 - x - 2}{x^2 - 4x + 3};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - 3}{x^2 - x - 2};$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+4}{2x-1} \right)^{\frac{1-2x}{4}};$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 - 4x);$$

$$и) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^{3x} - 1}{5x};$$

$$к) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} \right)^{\frac{1}{2x}};$$

$$л) \lim_{x \rightarrow -0} 12^{x^{\frac{1}{x}+1}};$$

$$м) \lim_{x \rightarrow +0} 12^{x^{\frac{1}{x}+1}}.$$

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$а) y = \begin{cases} 2x, & x \leq 0, \\ 1 - x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1; \end{cases}$$

$$б) y = -1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{1-x}}};$$

$$в) y = 1 + \frac{x}{|x|}.$$

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$, если $\alpha(x) = x \cdot e^x$ и $\beta(x) = \sqrt[5]{1 + \sin 2x} - 1$.

5. Определить порядок малости относительно x функции $y = e^{3x} - \cos x$ при $x \rightarrow 0$.

Вариант №10

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = 0;$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1} = 6.$$

2. Найдите пределы:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 1}{2^{2n} + 1};$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + (n+3)!}{n(n! - (n+2)!)};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 5x^6 - 1}{2x^7 - 2x};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right);$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^3 - 27};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 12} - 2}{\sqrt{x^2 - 7} - 3};$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x - 4} \right)^{8x-1};$$

$$з) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(2x+1) - \ln(2x-2));$$

$$и) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(4x)}{\operatorname{tg}(3x^2)};$$

$$к) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin \frac{x}{2}} - e^{3x}}{2x};$$

$$л) \lim_{x \rightarrow -3+0} \left(2 - 2^{\frac{1}{x+3}} \right);$$

$$м) \lim_{x \rightarrow -3-0} \left(2 - 2^{\frac{1}{x+3}} \right).$$

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$a) y = \begin{cases} x - 3, & x < 0, \\ 2x, & 0 \leq x < 3, \\ x^2, & x \geq 3; \end{cases}$$

$$б) y = 2^{\frac{-1}{x-1}} - 1;$$

$$в) y = 2 + \frac{|x|}{2}.$$

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$, если $\alpha(x) = \sqrt{1 + x^2} \cdot \sin x - 1$ и $\beta(x) = \sin^3 x$.

5. Определить порядок малости относительно x функции $y = 1 - \cos \sqrt[3]{x^2}$ при $x \rightarrow 0$.

Вариант №11

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n^2 + 2}} = 0;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+7}} = \frac{1}{3}.$$

2. Найдите пределы:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+1} - 1}{1 - 6^n};$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - (n+3)!}{n(n! + (n+2)!)};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x + 2}{x^3 + 3};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{18}{81 - x^2} - \frac{1}{x - 9} \right);$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x - 4};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x-1} \right)^x;$$

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2(x+2) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right);$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 3 \sin x}{x - 2 \operatorname{tg} x};$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sin(4x-2)}{e^{2x-1} - 1};$$

$$\text{л) } \lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x+3}}};$$

$$\text{м) } \lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x+3}}}.$$

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$\text{а) } y = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ 2-x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

$$\text{б) } y = 2^{-\frac{1}{x}};$$

$$\text{в) } y = \frac{x-3}{|x|}.$$

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 4$, если $\alpha(x) = \ln(x-3)$ и $\beta(x) = x^2 - 5x + 4$.

5. Определить порядок малости относительно x функции $y = \sqrt[3]{1-5x^4} - 1$ при $x \rightarrow 0$.

Вариант №12

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{3^n} = 0;$$

$$б) \lim_{x \rightarrow -1} (2 - 3x) = 5.$$

2. Найдите пределы:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{n\sqrt{n^2 - 2}};$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - x + 1}{x^3 + 1};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right);$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{x+5} - \sqrt{5}};$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x+3} \right)^{x+2};$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 0} 3x \left(\ln \left(1 + \frac{x}{3} \right) - \ln \frac{x}{3} \right);$$

$$и) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x - \sin x)^2}{x^2};$$

$$к) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} - 1}{1 - \cos x};$$

$$л) \lim_{x \rightarrow 6-0} \frac{1}{7^{6-x}};$$

$$м) \lim_{x \rightarrow 6+0} \frac{1}{7^{6-x}}.$$

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$a) y = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ x - 3, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{2}{x}, & x > 2 \end{cases}$$

$$б) y = 1 + 2^{-\frac{1}{3x-1}};$$

$$в) y = \frac{|x-2|}{x-1}$$

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 7$, если $\alpha(x) = \ln(x-6)$ и $\beta(x) = \sqrt[3]{8-x} - 1$.

5. Определить порядок малости относительно x функции $y = \sqrt[3]{x^4 + \sin x}$ при $x \rightarrow 0$.

Вариант №13

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1-n} = 0$;

б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = -5$.

2. Найдите пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{5n}$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n}{(n+1)!+n!}$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x + 1}{3x^3 - 1}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6}{9-x^2} - \frac{1}{3-x} \right)$;

д) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{2x^2 - 9x + 9}$;

е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4+x^2} - 2}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$;

з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+5) - \ln 5}{x}$;

и) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{4x+8}$;

к) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$;

л) $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{1 + 4^{\frac{1}{x+1}}}$;

м) $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{1 + 4^{\frac{1}{x+1}}}$.

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

а) $y = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 4, \\ -2\sqrt{x}, & x > 4; \end{cases}$

б) $y = 4^{\frac{1}{2-x}}$;

в) $y = \frac{|x|}{x+1}$.

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$, если $\alpha(x) = 3^{\sin x} - 1$ и $\beta(x) = \sqrt[5]{1-x} - 1$.

5. Определить порядок малости относительно x функции $y = \sqrt{1 + \ln(1 + \sin x)} - 1$ при $x \rightarrow 0$.

Вариант №14

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 3n}{1 - n} = 3;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} (2x - 6) = 4.$$

2. Найдите пределы:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 10n + 1}{10n^3 + 15n};$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - x^2} - \frac{1}{1 - x} \right);$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{3x + 2} \right)^{\frac{x+1}{3}};$$

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 10x)}{x};$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x - 1)}{2x - 2};$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 2x};$$

$$\text{л) } \lim_{x \rightarrow -4+0} \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{4+x}}};$$

$$\text{м) } \lim_{x \rightarrow -4+0} \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{4+x}}}.$$

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$\text{а) } y = \begin{cases} 2, & x \leq 0, \\ x^2 + 2, & 0 < x \leq 1, \\ -x, & x > 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } y = \frac{x}{x^2 - 9};$$

$$\text{в) } y = \frac{x + 2}{|x + 1|}.$$

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$, если $\alpha(x) = 1 - \cos x$ и $\beta(x) = \sin^3 3x$.

5. Определить порядок малости относительно x функции $y = \sqrt[4]{1 + \ln^2(1 + x^2)} - 1$ при $x \rightarrow 0$.

Вариант №15

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 - 1} = 0;$

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = -1.$

2. Найдите пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - (2n-1)^2}{(n+1)^2 + (n-1)^2};$

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + (n-1)!}{(n-1)! - (n+1)!};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 1}{x^3 + 2x - 1};$

г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2}{2x+1} - \frac{2x^3+1}{4x^2} \right);$

д) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1};$

е) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5};$

ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^x;$

з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x \sin x)}{\operatorname{tg} x^2};$

и) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\arcsin^2 3x};$

к) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x^5)}{\sqrt[3]{1+x^5} - 1};$

л) $\lim_{x \rightarrow -1-0} \left(1 + 2^{-\frac{1}{x+1}} \right);$

м) $\lim_{x \rightarrow -1+0} \left(1 + 2^{-\frac{1}{x+1}} \right).$

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

а) $y = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x+1, & x > 2; \end{cases}$

б) $y = \frac{1}{x^2 - 4};$

в) $y = \frac{2x}{|x+2|}.$

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 1$, если $\alpha(x) = \frac{1-x}{1+x}$ и

$\beta(x) = 2 - 2\sqrt{x}.$

5. Определить порядок малости относительно x функции $y = \sin(\sqrt{1+x^2} - 1)$ при $x \rightarrow 0$.

Вариант №16

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{2-n} = 2;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = -5.$$

2. Найдите пределы:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^3 + (2n-1)^3};$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n-1)!}{(n-1)!};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{6x^2 - 3};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - \frac{x^2}{x + 1} \right);$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x - 2};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6 - \sqrt{35x + 1}}{x - 1};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2 - 1} \right)^{x(x+2)};$$

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4\sin x)}{x};$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x};$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{2x}}{x};$$

$$\text{л) } \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{x+2}{x^2 - 9};$$

$$\text{м) } \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{x+2}{x^2 - 9}.$$

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$\text{а) } y = \begin{cases} 2 - x, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^2 + 1, & x > 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } y = \frac{1}{e^{x-1} - 1};$$

$$\text{в) } y = \frac{3|x|}{x}.$$

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$, если $\alpha(x) = \ln(1 + \sqrt{x^2})$ и $\beta(x) = \sqrt[5]{1+x} - 1$.
5. Определить порядок малости относительно x функции $y = 1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x$ при $x \rightarrow 0$.

Вариант №17

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{1+n} = 2;$

б) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 6x - 8}{x + 4} = -10.$

2. Найдите пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 - 5n}{n^2 + 5n} \right)^3;$

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{(n+1)!};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x^2 + 3}{6x^2 - 2};$

г) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x^2 - 9} - \frac{1}{2x - 6} \right);$

д) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 11x + 10}{3x^2 - 5x + 6};$

е) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 3} - 1}{x - 2};$

ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{\frac{x+1}{3}};$

з) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x+1) \cdot \ln(x^2 + 1) - \ln x^2);$

и) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{1 - \cos x};$

к) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{\operatorname{tg}^2 2x};$

л) $\lim_{x \rightarrow -2-0} \left(1 - 5^{\frac{1}{x^2-4}} \right);$

м) $\lim_{x \rightarrow -2+0} \left(1 - 5^{\frac{1}{x^2-4}} \right).$

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

а) $y = \begin{cases} x - 2, & x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 4, \\ \sqrt{x}, & x > 4; \end{cases}$

б) $y = -1 + 2^{\frac{1}{x+3}};$

в) $y = \frac{x-2}{|x|}.$

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$, если $\alpha(x) = 3^{x^2} - \cos x$ и $\beta(x) = 5 \sin x^2$.
5. Определить порядок малости относительно x функции $y = \ln(x^2 + 2x - 2)$ при $x \rightarrow 1$.

Вариант №18

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+5n} = 0;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4.$$

2. Найдите пределы:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 - 15}{7n^5 + 5n + 1};$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{3x^3 - 5};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{4}{4-x} - \frac{3}{16-x^2} \right);$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x^2 - 2x + 1};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1};$$

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \cdot \ln(1 + 2 \sin x);$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x};$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{x \cdot \operatorname{tg}(3x)};$$

$$\text{л) } \lim_{x \rightarrow 1-0} \left(1 - 7^{\frac{1}{x-1}} \right);$$

$$\text{м) } \lim_{x \rightarrow 1+0} \left(1 - 7^{\frac{1}{x-1}} \right).$$

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$\text{а) } y = \begin{cases} x + 2, & x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 4, \\ \sqrt{x}, & x > 4; \end{cases}$$

$$\text{б) } y = \frac{1}{\frac{1}{1 - e^{\frac{1}{x-1}}}};$$

$$\text{в) } y = 2|x - 3|.$$

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 2$, если $\alpha(x) = \frac{4-x^2}{2+x}$ и

$$\beta(x) = \ln(3-x).$$

5. Определить порядок малости относительно x функции $y = \sqrt[3]{1+x} - 1$ при $x \rightarrow 0$.

Вариант №19

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-2n} = 0$;

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

2. Найдите пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^2 + (n+2)^2}{(n+2)^3 - (n+1)^3}$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n!}{3n! - 2(n-1)!}$;

в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2x + 3}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x-2} - \frac{x}{x^2 - 4} \right)$;

д) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$;

е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{2 - \sqrt{x^2 + 4}}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x-2} \right)^{2(x+1)}$;

з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \ln(1 + 3x^2)$;

и) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin(x)} - 1}{x^2}$;

к) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2(x))^{\operatorname{ctg}^2(x)}$;

л) $\lim_{x \rightarrow 2-0} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x-2}} \right)$;

м) $\lim_{x \rightarrow 2+0} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x-2}} \right)$.

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

а) $y = \begin{cases} 2, & x \leq 0, \\ x^2 + 2, & 0 < x \leq 2, \\ x - 1, & x > 2; \end{cases}$

б) $y = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}}$;

в) $y = |x| - x$.

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$, если $\alpha(x) = \sqrt{1 + (2x)^2} - 1$ и $\beta(x) = \ln(1 - x^2)$.

5. Определить порядок малости относительно x функции $y = x^3 + 1000x^2$ при $x \rightarrow 0$.

Вариант №20

1. Используя определение предела последовательности (предела функции), докажите, что

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2} = 0;$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1} = 6.$$

2. Найдите пределы:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 100n^2 + 1}{100 - 15n^4};$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n-1)!}{3(n-2)! - (n-1)!};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 7x + 2}{2x^2 + 5x - 2};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^4}{x^2 + 3} - 3x^2 \right);$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 4}{2x^2 + x - 3};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x^3 - 2\sqrt{2}};$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x-5} \right)^{x-1};$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5+x) - \ln 5}{x};$$

$$и) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{x};$$

$$к) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \arcsin(x)} - 1}{\operatorname{tg} x^2};$$

$$л) \lim_{x \rightarrow -2-0} \left(\frac{1}{1 - 3 \frac{1}{x-2}} \right);$$

$$м) \lim_{x \rightarrow -2+0} \left(\frac{1}{1 - 3 \frac{1}{x-2}} \right).$$

3. Исследуйте на непрерывность, найдите точки разрыва, укажите характер разрыва и изобразите графически следующие функции:

$$a) y = \begin{cases} x, & x < 0, \\ 3, & 0 \leq x < 4, \\ \sqrt{x}, & x \geq 4; \end{cases}$$

$$б) y = \frac{1}{2^{\frac{1}{x-2}} + 1};$$

$$в) y = |x| + 2.$$

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$, если $\alpha(x) = \ln(\sqrt[4]{1 - \cos(\sqrt{x})} + 1)$ и $\beta(x) = e^{\sqrt{x}} - 1$.

5. Определить порядок малости относительно x функции $y = (e^{x^2} - \cos x)$ при $x \rightarrow 0$.

Индивидуальное задание №2

Вариант 1

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = (2-x)^2, x_0=1; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x^3 + x^2 \sin \frac{2}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0=0.$$

2. Найти производную функций:

$$2.1. y = x \cdot \ln(x+1); \quad 2.2. y = 1 - \sin x + (1-x^2)^3;$$

$$2.3. y = x^2 \cdot e^{\sqrt{x^2+x+1}};$$

$$2.4. y = \frac{3x^5 - 2x^4 + 4}{\sqrt{x^2 - 1}};$$

$$2.5. y = 2\sqrt[3]{x+3} - \frac{3}{\sqrt{x^2+x+1}};$$

$$2.6. y = \cos^3(1 - 5x^2);$$

$$2.7. y = \ln(2x + \sqrt{2^x - \sqrt{x+1}});$$

$$2.8. y = \arctg(tg^2 x + \sqrt{1 - \sin x}).$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sin x)^{x^2}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $tg(xy) = e^{x^2+y^3}$.

5. Найти производную параметрической функции:
$$\begin{cases} x = t^3 - 3t, \\ y = \frac{1}{2}t^2 - t. \end{cases}$$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$6.1. y = \frac{4x - x^2}{4}, x_0 = 2;$$

$$6.2. \begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t, \end{cases} M_0\left(\frac{a}{8}; a \frac{3\sqrt{3}}{8}\right).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = x^2 \cdot e^{\sqrt{x^2+x+1}};$$

$$7.2. \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin^2 t. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[3]{x}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала $y = \sqrt[3]{7.76}$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \ln(1 - \cos 2x)$ в точке $x_0 = \pi/2$.

Вариант 2

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = (2+x)^2, x_0 = -1; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x \cos \frac{1}{3x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$\begin{aligned} 2.1. y &= (x+1) \cdot \ln x; & 2.2. y &= 2 - \cos x + (1-x^2)^4; \\ 2.3. y &= x^3 \cdot e^{\sqrt{x^2-x+1}}; & 2.4. y &= \frac{2x^3 - 2x + 1}{\sqrt{1-x^2}}; \\ 2.5. y &= \sqrt[4]{x+3} - \frac{3}{(x^2+x+1)^2}; & 2.6. y &= \cos^2(1-5x^3); \\ 2.7. y &= \ln(x - \sqrt{3^x - \sqrt{x+1}}); & 2.8. y &= \operatorname{arcctg}(tg^3 x + \sqrt{1+\sin x}). \end{aligned}$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\cos x)^{x^2}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\operatorname{ctg}(xy) = e^{x^2+y}$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$6.1. y = 1 + x - x^2, x_0 = 2; \quad 6.2. \begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t, \end{cases} \quad M_0\left(\frac{1}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = x^2 \cdot e^{x^2+1}; \quad 7.2. \begin{cases} x = 2 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin t. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[4]{x}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала $y = \sqrt[4]{16.06}$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \ln(1 - \sin 2x)$ в точке $x_0 = \pi/8$.

Вариант 3

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = (1+x)^3, x_0=1$; 1.2. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x^2 \cos \frac{1}{3x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0=0.$

2. Найти производную функций:

2.1. $y = x^2 \cdot \ln x$; 2.2. $y = 2 - \cos x + x^2$;

2.3. $y = x^3 \cdot e^{\sqrt[3]{x^2-x+1}}$; 2.4. $y = \frac{x^3 + 2x^2 - 11}{\sqrt{1-x^3}}$;

2.5. $y = \sqrt[4]{3x-1} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+x+1}}$; 2.6. $y = \operatorname{tg}^2(1+5x^3)$;

2.7. $y = \log_3(x - \sqrt{3^x - \sqrt{x}})$; 2.8. $y = \arcsin(\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{1 - \sin x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sin(1+x))^{x^2}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\operatorname{tg}(x+y) = e^{x^2+y}$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \frac{1}{t}, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

6.1. $y = 1 + x^3 - 2x^5, x_0 = -1$; 6.2. $\begin{cases} x = 2\sin^3 t, \\ y = 2\cos^3 t, \end{cases} M_0\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}; \frac{1}{4}\right).$

7. Найти производную второго порядка y''_{xx} для функций:

7.1. $y = x \cdot e^{x^2-1}$; 7.2. $\begin{cases} x = \frac{1}{t}, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \frac{x + \sqrt{5-x^2}}{2}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(0.98)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = x \cdot e^{x^2-1}$; в точке $x_0=1$.

Вариант 4

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = (1-x)^3, x_0 = -1; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(x^2 \cos \frac{1}{3x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$2.1. y = (1-x^2) \cdot \ln x;$$

$$2.2. y = 2x^2 - \operatorname{tg} x + 2;$$

$$2.3. y = x \cdot e^{\sqrt[5]{x-x^2+1}};$$

$$2.4. y = \frac{\sin(2x^2 - 11)}{\sqrt{x^3 - 1}};$$

$$2.5. y = \sqrt[3]{x-3} - \frac{1}{\sqrt{x^3 + x + 1}};$$

$$2.6. y = \operatorname{ctg}^2(1-5x^3);$$

$$2.7. y = \log_2(3x - \sqrt{4^x - \sqrt{2x}});$$

$$2.8. y = \arccos(\ln x + \sqrt{1-e^x}).$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\frac{x}{y} = 2^{x^2+y}$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = \frac{1}{t}. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$6.1. y = 2x^3 - x^2, x_0 = -1; \quad 6.2. \begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} M_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = (x^2 - 1) \cdot e^{x^2-1};$$

$$7.2. \begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = \frac{1}{t}. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала $y = \sqrt[3]{1.012}$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = (x^2 - 1) \cdot e^{x^2-1}$ в точке $x_0 = -1$.

Вариант 5

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = 1 + x + x^2, x_0 = -1; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 + x^2 \sin \frac{2}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$2.1. y = (1 - x) \cdot \ln(1 - x);$$

$$2.2. y = 2x^5 - \arctg x + 1;$$

$$2.3. y = x^2 \cdot 7^{\sqrt{1-x^2+x}};$$

$$2.4. y = \frac{\ln(2x^2 - 11)}{e^{x^3-1}};$$

$$2.5. y = \sqrt[3]{x+3} - \frac{1}{\sqrt{x^3+x}};$$

$$2.6. y = \sin^2(1 + x^3);$$

$$2.7. y = \log_2\left(3 - \sqrt{4^x - \frac{1}{\sqrt{2x}}}\right);$$

$$2.8. y = \arccos(\cos x + \sqrt{e^x - 1}).$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\frac{x+1}{y} = \sin(x^2 + y)$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$6.1. y = x^5 - 2x^3, x_0 = 1; \quad 6.2. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} M_0\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}; 1\right).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = (x^2 - 1) \cdot e^{1-x^2};$$

$$7.2. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[3]{x}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала $y = \sqrt[3]{27.54}$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = (x^2 - 1) \cdot e^{1-x^2}$ в точке $x_0 = 0$.

Вариант 6

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = 1 - x^2$, $x_0 = -1$;

1.2. $f(x) = \begin{cases} \ln(1 - x^2), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$

2. Найти производную функций:

2.1. $y = (1 + x) \cdot \ln(x^2 - 1)$;

2.2. $y = \frac{1}{x} - 5^x - 10$;

2.3. $y = (1 - x)^2 \cdot e^{\sqrt[3]{1 - x^2 + x}}$;

2.4. $y = \frac{\sin(2 - x^3)}{e^{\sqrt{x} - 1}}$;

2.5. $y = \sqrt[3]{x^2 + 3} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3 + x}}$;

2.6. $y = \cos^2(1 + x^3)$;

2.7. $y = \log_3(3 - \sqrt{4^x - \sqrt{2x}})$;

2.8. $y = \arcsin(\cos(x + \sqrt{e^x - 1}))$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (1 + x)^{\sin x}$.

4. Найти производную неявной функции $y = y(x)$: $x \cdot y = \operatorname{arctg}(x^2 + y)$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 - \cos 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y = y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

6.1. $y = 1 + \sin x - \cos 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;

6.2. $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases} M_0(1; 2).$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y = (x^2 - 1) \cdot \ln(1 - x^2)$;

7.2. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 - \cos 2t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.016)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = (x^2 - 1) \cdot \ln(1 - x^2)$ в точке $x_0 = 0$.

Вариант 7

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = 1 + x^2, x_0 = -1; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \frac{3 \sin x^2}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$\begin{aligned} 2.1. y &= x \cdot \ln(x^2 - 1); & 2.2. y &= \sqrt{x} - 2^x - 3; \\ 2.3. y &= (1 - \sqrt{x})^3 \cdot e^{\sin^4 x}; & 2.4. y &= \frac{2 - x^3 + x^5}{e^{x-1}}; \\ 2.5. y &= \sqrt[3]{3 - x^2} - \frac{1}{\sqrt[4]{1 - x^3 + x}}; & 2.6. y &= \cos^2(1 - x^4); \\ 2.7. y &= \log_3(\sqrt{3} - \sqrt{4^x - \sqrt{1 - x}}); & 2.8. y &= \arccos(\sin(x + \sqrt{e^x - 1})). \end{aligned}$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (1 - x)^{\ln x}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\sin(x \cdot y) = x^2 + y$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$6.1. y = 1 + \sin x - \cos 2x, x_0 = -\frac{\pi}{6}; \quad 6.2. \begin{cases} x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, \\ y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}, \end{cases} M_0\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = (x^2 - 1) \cdot \ln(x^2 - 1); \quad 7.2. \begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = \arcsin x$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(0.08)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = (x^2 - 1) \cdot \ln(x^2 - 1)$ в точке $x_0 = 2$.

Вариант 8

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = 2 + x^3, x_0 = -1; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$\begin{aligned} 2.1. y &= x^4 \cdot \ln(x-1); & 2.2. y &= \sqrt{x} - \frac{1}{x} - 3; \\ 2.3. y &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) \cdot e^{\cos^4 x}; & 2.4. y &= \frac{2 + x^3 - x^5}{e^{x+1}}; \\ 2.5. y &= \sqrt{3x - x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 + x^3} + x}; & 2.6. y &= \cos^3(1 - x^4); \\ 2.7. y &= 4^{\sqrt{3} - \sqrt{4^x - \sqrt{1-x}}}; & 2.8. y &= \operatorname{arctg}(\sin(x + \sqrt{e^x - 1})). \end{aligned}$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln x}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $x \cdot y = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$6.1. y = x + \sin x + \cos 2x, x_0 = \frac{\pi}{2}; \quad 6.2. \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^2}, \\ y = \frac{3t^2}{1+t^2}, \end{cases} M_0\left(\frac{6}{5}; \frac{12}{5}\right).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = (1 - x^2) \cdot \ln(x^2 - 1); \quad 7.2. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(0.97)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$ в точке $t_0 = \pi/3$.

Вариант 9

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = 2 - x^3, x_0 = -1; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0; \\ \pi, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$\begin{aligned} 2.1. y &= x^4 \cdot \ln(1-x); & 2.2. y &= e^x - \frac{1}{x} - 3x; \\ 2.3. y &= \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \sqrt{3-x} \right) \cdot 5^{\cos^4 x}; & 2.4. y &= \frac{2+x-x^4}{e^{x+1}}; \\ 2.5. y &= \sqrt[4]{3x-x^3} - \frac{1}{\sqrt{1+x^3}-2x}; & 2.6. y &= \operatorname{tg}^3(1-x-x^4); \\ 2.7. y &= 4^{\sqrt{3}-\sqrt{4^x-\sqrt{1-x}}}; & 2.8. y &= \operatorname{arctg}(\sin(x+\sqrt{e^x-1})). \end{aligned}$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\operatorname{tg}^2 x)^{\ln x}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $x + y = \operatorname{arctg}(x^2 \cdot y)$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = t^2 - 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$6.1. y = x + \sin x - \cos 2x, x_0 = \pi; \quad 6.2. \begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4, \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3, \end{cases} M_0(0; 0).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = \sqrt{x^2 - 1} \cdot \ln(x^2 - 1); \quad 7.2. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = t^2 - 2t. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.97)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = x + \sin x - \cos 2x$ в точке $x_0 = \pi$.

Вариант 10

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = (2 + x)^2, x_0 = 3; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - x^3 \sin \frac{2}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$\begin{aligned} 2.1. y &= (x + 1)^4 \cdot \ln(x); & 2.2. y &= 2^x - \sqrt{x} - 3x; \\ 2.3. y &= \left(\frac{1}{\sqrt{x-4}} - \sqrt{x+4}\right) \cdot 5^{\sin^4 3x}; & 2.4. y &= \frac{2x - 3x^2 - x^3}{x^2 + 1}; \\ 2.5. y &= \sqrt[3]{3 - x - x^3} - \frac{1}{\sqrt{1 + 3x - 4x^2}}; & 2.6. y &= \operatorname{tg}^5(1 + 4x - x^4); \\ 2.7. y &= \log_5(\sqrt{3} - \sqrt{4^x - x^4}); & 2.8. y &= \operatorname{arctg}(\ln x + \sqrt{1 - e^x}). \end{aligned}$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln^2 x}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}(x + y)$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = t - \cos t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$6.1. y = 1 + e^{-3x}, x_0 = 0; \quad 6.2. \begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, \end{cases} M_0\left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = (1 - x)^2 \cdot e^{x^2 - 1}; \quad 7.2. \begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = t - \cos t. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = x^{11}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.021)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = (1 - x)^2 \cdot e^{x^2 - 1}$ в точке $x_0 = 2$.

Вариант 11

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = (1+x)^2, x_0 = 4; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x \cdot \sin \frac{7}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$2.1. y = x^4 \cdot e^{x+1}; \quad 2.2. y = 3^x - \sqrt{1+x} - x^3;$$

$$2.3. y = \left(\frac{1}{\sqrt{4-x}} - \sqrt{\ln x + 4} \right) \cdot 5^{\sin^2 3x}; \quad 2.4. y = \frac{2-3x^3+x^4}{\sqrt{1-x}};$$

$$2.5. y = \sqrt[3]{3+x-2x^3} - \frac{1}{\cos(1-x)-4x^2}; \quad 2.6. y = \operatorname{ctg}^5(1-x^4);$$

$$2.7. y = \log_5(\sqrt{3} - \sin 4x + \cos^4 x); \quad 2.8. y = \operatorname{arctg} \sqrt{1-e^x}.$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\frac{y}{x} = \sin(x \cdot y)$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = \sin t - t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$6.1. y = 1 + \ln(x-1) - x^2, x_0 = 2; \quad 6.2. \begin{cases} x = \frac{1+t}{t^2}, \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t}, \end{cases} M_0\left(\frac{3}{4}; \frac{11}{8}\right).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = (1-x)^2 \cdot \sin(x^2 - 1); \quad 7.2. \begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = \sin t - t. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = x^{21}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.998)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = (1-x)^2 \cdot \sin(x^2 - 1)$ в точке $x_0 = -1$.

Вариант 12

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = x^2, x_0 = -3; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + \ln(1 + x^2)} \cos \frac{1}{x} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$2.1. y = (1 - x)^2 \cdot 2^{x+1};$$

$$2.2. y = \ln x + \frac{1}{x} - \cos x;$$

$$2.3. y = \left(\frac{1}{9 - x^2} - \sqrt{e^x + x^3} \right) \cdot \operatorname{tg}^2 3x;$$

$$2.4. y = \frac{2 + 3x^2 + 5x^4}{\sqrt{1 + x}};$$

$$2.5. y = \sqrt[3]{3 - 2x^3} - \frac{1}{\sin(1 - x) - 4x^2};$$

$$2.6. y = \operatorname{ctg}^4(1 + x^5);$$

$$2.7. y = \log_2(\sqrt{3} - \cos 4x + \sin^4 x);$$

$$2.8. y = \operatorname{arccctg} \sqrt{1 - e^x}.$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sin x)^{\sqrt{1-x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\frac{y}{x} = x \sin y$.

5. Найти производную параметрической функции:
$$\begin{cases} x = \frac{1}{t^2 - t}, \\ y = t + t^2. \end{cases}$$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$6.1. y = 1 + \operatorname{tg}^2 x, x_0 = \pi;$$

$$6.2. \begin{cases} x = 1 + \sin t, \\ y = 1 - \cos 2t, \end{cases} M_0\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = (x - 1)^2 \cdot \cos(x^2 - 1);$$

$$7.2. \begin{cases} x = \frac{1}{t^2 + t}, \\ y = t + t^2. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = x^6$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(2.01)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = (x - 1)^2 \cdot \cos(x^2 - 1)$ в точке $x_0 = -1$.

Вариант 13

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = 2 + x, x_0 = 10; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} 3 \frac{\sin x^2}{x} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$\begin{aligned} 2.1. y &= x^4 \cdot \ln(1-x); & 2.2. y &= 2^x - c \operatorname{tg} x + x^2; \\ 2.3. y &= (1-x)^3 \cdot e^{\sqrt[5]{x-1}}; & 2.4. y &= \frac{3x^4 + 2x^3 - 1}{\sqrt{1-x^3}}; \\ 2.5. y &= \sqrt{3x^2 - 1} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 1}}; & 2.6. y &= \operatorname{tg}^2(1-x^3); \\ 2.7. y &= \ln(1 - \sqrt{5^x - \sqrt{x}}); & 2.8. y &= \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{1 - \sin x}). \end{aligned}$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sin x)^{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}$

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\frac{y}{x} = y \sin x$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \operatorname{tg} t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$6.1. y = 10 + x(3 - 2x^3), x_0 = -1; \quad 6.2. \begin{cases} x = \frac{1+t}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}, \end{cases} M_0(0; 2).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = (x-1)^2 \cdot \cos(1-x^2); \quad 7.2. \begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.03)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = x^2 \cdot \cos(1-x^2)$ в точке $x_0 = -1$.

Вариант 14

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = (2 + x)^2, x_0 = 8; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} 10 \frac{\arcsin x^2}{x} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$\begin{aligned} 2.1. y &= x \cdot \ln(1 - x^2); & 2.2. y &= 7^x - \arccos x + x^7; \\ 2.3. y &= (1 - x^3) \cdot e^{\sqrt{x-1}}; & 2.4. y &= \frac{x - 2x^3 + 3}{\sqrt{1 - x^3}}; \\ 2.5. y &= \sqrt[3]{1 - 3x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - x}}; & 2.6. y &= \sin^3(1 - x^2); \\ 2.7. y &= \ln(x^2 + \sqrt{5^x - \sqrt{x}}); & 2.8. y &= \operatorname{arctg}(\cos^2 x + \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}). \end{aligned}$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sin \sqrt{x})^x$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\frac{x}{y} = x \sin y$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \operatorname{tg} 2t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$6.1. y = x + \sin \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{4}, x_0 = 2\pi; \quad 6.2. \begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3, \end{cases} M_0(-3; -6).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = x^3 \cdot \ln^2 x; \quad 7.2. \begin{cases} x = \operatorname{tg} 2t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt{4x - 1}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(2.56)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = x^3 \cdot \ln^2(x + 1)$ в точке $x_0 = 0$.

Вариант 15

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = x^3, x_0 = -2; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \frac{4 \operatorname{arctg}^2 x}{x} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$2.1. y = x + 1 + \ln(1 - x);$$

$$2.2. y = 2^{x+1} - \operatorname{tg} x + x^3;$$

$$2.3. y = (1 - x^2)^3 \cdot e^{\sqrt[5]{x-1}};$$

$$2.4. y = \frac{3 + x^4 - 2x^3}{\sqrt{1 - x^3}};$$

$$2.5. y = \sqrt[3]{3x^2 - x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + x - 1}};$$

$$2.6. y = \operatorname{ctg}^2(1 - 2x^3);$$

$$2.7. y = \ln(5^x - \sqrt{1 - \sqrt{x}});$$

$$2.8. y = \operatorname{arctg}(\sin^4 x + \sqrt{1 - \cos x}).$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sin \sqrt{x})^{\sqrt{x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\frac{x}{y} = y \sin x$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = t + e^t, \\ y = t - e^{-t}. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$6.1. y = 1 + x^3 + x^5, x_0 = -1;$$

$$6.2. \begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t \cos t, \end{cases} M_0(0; 0).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = (1 - x)^3 \cdot \ln^2(x - 1);$$

$$7.2. \begin{cases} x = t + e^t, \\ y = t - e^{-t}. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = x^7$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(2.002)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = x \cdot \ln^2(x + 1)$ в точке $x_0 = 1$.

Вариант 16

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = 2 + x, x_0 = 11; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} 3^{x \sin \frac{1}{x}} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$2.1. y = 1 - x + \ln(1 + x); \quad 2.2. y = 3^{x+1} - \cos x + (x + 1)^3;$$

$$2.3. y = (1 + 2x^3)^2 \cdot e^{\sqrt{1-x}}; \quad 2.4. y = \frac{3x^4 + x^3 - 3}{\sqrt{1-2x^2}};$$

$$2.5. y = \sqrt[3]{3x-3} - \frac{1}{\sqrt[4]{10-x^4+x}}; \quad 2.6. y = \operatorname{tg}^3(1-2x)^2;$$

$$2.7. y = \ln(2^x - \sqrt{x - \sqrt{2x}}); \quad 2.8. y = \operatorname{arctg}(\sin 4x + \sqrt{\cos x}).$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sin \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $2x - 3y = x \ln y$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = t - \sin 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$6.1. y = \sin^3 x + \cos^2 x, x_0 = \frac{\pi}{6}; \quad 6.2. \begin{cases} x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \frac{t}{t^2-1}, \end{cases} M_0\left(3; \frac{2}{3}\right).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = (1+x)^3 \cdot \ln^2(x+1); \quad 7.2. \begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = t - \sin 2t. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[3]{2x + \cos x}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(0.01)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \frac{x^3}{x+1}$ в точке $x_0 = 1$.

Вариант 17

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = 1 + x - x^2, x_0 = 1; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 4^x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$\begin{aligned} 2.1. y &= 1 - x^2 + \ln(1 - x); & 2.2. y &= 3^x - \log_3 x + x^3; \\ 2.3. y &= (1 + 2x)^2 \cdot e^{\sqrt[3]{1-x}}; & 2.4. y &= \frac{3x^2 - 3}{\sqrt{2 - x^2}}; \\ 2.5. y &= \sqrt[3]{3x^3 - x} - \frac{1}{\sqrt{10 - x^2 + x^4}}; & 2.6. y &= \sin^4(x - 2x^2); \\ 2.7. y &= \ln(3^x - \sqrt{2x - \sqrt{2 + x}}); & 2.8. y &= \cos(\operatorname{arctg} 4x + \sqrt{\operatorname{tg} x}). \end{aligned}$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sqrt{x})^{\frac{1}{\sin x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $2x - 3y = x \ln(y^2)$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t - t^2. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$6.1. y = x - x^3 - 2x^5, x_0 = 1; \quad 6.2. \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} M_0\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; 2\sqrt{2}\right).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = (x - 1)^3 \cdot \ln^2(1 - x); \quad 7.2. \begin{cases} x = \ln t, \\ y = t - t^2. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt{1 + x + \sin x}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(0.01)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \frac{x - 1}{x + 1}$ в точке $x_0 = 0$.

Вариант 18

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = 2 + x + x^2, x_0 = 1; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \frac{3^x - 4^x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$\begin{aligned} 2.1. y &= 1 - 2x + \ln(1 - 2x); & 2.2. y &= 4^x - \log_4 x + x^4; \\ 2.3. y &= (1 - 2x)^2 \cdot e^{\sqrt[3]{1+x}}; & 2.4. y &= \frac{3x^2 + 3}{\sqrt{2 + x^2}}; \\ 2.5. y &= \sqrt[3]{3x^3 + x} - \frac{1}{\sqrt{10 + x^2 - x^4}}; & 2.6. y &= \sin^3(x + 2x^2); \\ 2.7. y &= \ln(3^x + \sqrt{2x + \sqrt{2 - x}}); & 2.8. y &= \cos(\operatorname{arctg} 4x - \sqrt{c \operatorname{tg} x}). \end{aligned}$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = x^{\frac{1}{\cos x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $x^2 - 3y = e^x \cdot y$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = t^2 - 3, \\ y = 3 + \ln 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$6.1. y = \operatorname{arctg} x - 2, x_0 = 0; \quad 6.2. \begin{cases} x = 1 - t^4, \\ y = t^2 - t^3, \end{cases} M_0(0; 0).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = x \cdot \ln^3 x; \quad 7.2. \begin{cases} x = t^2 - 3, \\ y = 3 + \ln 2t. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[4]{2x - \sin(\pi x/2)}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.02)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ в точке $x_0 = 0$.

Вариант 19

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = x^2 - x, x_0 = -1; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x^2, & x \neq 0; \\ x, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$\begin{aligned} 2.1. y &= x - x^3 + \ln(1 + 2x); & 2.2. y &= 2^x + \log_2 x - x^2; \\ 2.3. y &= (1 + 2x^2) \cdot e^{\sqrt[4]{1-x}}; & 2.4. y &= \frac{x^2 - x}{\sqrt{2 - x^3}}; \\ 2.5. y &= \sqrt[3]{x^3 - 2x} - \frac{1}{\sqrt{10 + 3x^4}}; & 2.6. y &= \cos^4(x - 2x^2); \\ 2.7. y &= \ln(5^x - \sqrt{2x + \sqrt{2 - 5x}}); & 2.8. y &= \sin(\operatorname{arctg} 4x + \sqrt{\operatorname{tg} x}). \end{aligned}$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sqrt{1-x})^{\frac{1}{x^2}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $x(x+y) = e^{x-y}$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{t}}, \\ y = \sqrt{t} - 2 \cdot t^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$6.1. y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, x_0 = 1; \quad 6.2. \begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1, \end{cases} M_0(2; 3).$$

7. Найти производную второго порядка y''_{xx} для функций:

$$7.1. y = x^3 \cdot \ln x; \quad 7.2. \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{t}}, \\ y = \sqrt{t} - 2 \cdot t^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt{x^2 + 5}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.97)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ в точке $x_0 = -1$.

Вариант 20

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = x + x^2, x_0 = 2; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$\begin{aligned} 2.1. y &= (1+x)^2 + \ln(1+x); & 2.2. y &= 6^x - \log_3 x + x^6; \\ 2.3. y &= (1-x)^3 \cdot e^{\sqrt[3]{1+2x}}; & 2.4. y &= \frac{3x-1}{\sqrt{2-x}}; \\ 2.5. y &= \sqrt[3]{x^3 - x} - \frac{1}{\sqrt{1-3x^2 + x^4}}; & 2.6. y &= \sin^2(2x - x^2); \\ 2.7. y &= \ln(5^x + 3 \cdot \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}); & 2.8. y &= \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 4x + \sqrt{\cos x}). \end{aligned}$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sqrt{1-x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $x \cdot y = e^{x+y}$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = 1 - \sin^3 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$6.1. y = \operatorname{arctg} \frac{2}{x}, x_0 = -2; \quad 6.2. \begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \end{cases} M_0(-7; 4).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = x \cdot e^{x^3}; \quad 7.2. \begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = 1 - \sin^3 2t. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.58)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \frac{x+1}{x-1}$ в точке $x_0 = -1$.

Индивидуальное задание №3

Вариант 1

1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right]; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi/x}{\operatorname{ctg}(\pi x/2)}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, x_0=1; \quad б) y = x \cdot \sin x^2, x_0=0.$$

3. Найти экстремумы функций:

$$a) y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1; \quad б) y = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}; \quad в) y = x - 2 \ln x.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x + \sqrt{x}, [0;4]; \quad б) y = \frac{x+3}{x^2+7}, [-3;7].$$

5. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \frac{(x+1)^2}{x-2} \quad б) y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

- 1) Область определения: $X \in (-\infty;4) \cup (4;\infty).$
- 2) Вертикальные асимптоты: $x = 4.$
- 3) Горизонтальные асимптоты: $y = 0 (x \rightarrow +\infty).$
- 4) Наклонные асимптоты: $y = x (x \rightarrow -\infty).$
- 5) Стационарные точки: $1; 2.$
- 6) Точки, где $(y' = \infty)$: $-2; 0.$
- 7) Интервалы монотонности:
 - а) возрастания: $(-\infty;-2), (-2;-1), (0;2), (2;4)$
 - б) убывания: $(-1;0), (4;\infty).$
- 8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
 - а) выпуклости: $(-2;0), (0;2)$
 - б) вогнутости: $(-\infty;-2), (2;4), (4;\infty).$
- 9) Значение функции в некоторых точках:
 $y(-2)=0, y(-1)=2, y(0)=0, y(2)=3, y(5)=2.$

Вариант 2

1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x^n \cdot \sin \frac{a}{x} \right];$

б) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\cos(\pi x/2)};$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(a+x)(b+x)(c+x)} - x \right).$

2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

а) $y = \cos x, x_0 = \frac{\pi}{4};$

б) $y = x \cdot e^{-6x^2}, x_0=0.$

3. Найти экстремумы функций:

а) $y = \frac{2}{3}x^2 \cdot \sqrt[3]{6x-7};$

б) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1};$

в) $y = \ln x + \frac{1}{x}.$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = x^4 - 2x^2 + 3, [-3;2];$

б) $y = \frac{x-5}{x^2+11}, [-3;7].$

5. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = x + \ln(x^2 - 4);$

б) $y = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}.$

6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-2; +\infty).$

2) Вертикальные асимптоты: $x = -2.$

3) Горизонтальные асимптоты: $y = 2 (x \rightarrow +\infty).$

4) Наклонные асимптоты: $-$

5) Стационарные точки: $-1; 1.$

6) Точки, где $(y' = \infty)$: $0; 2.$

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-1;0), (1;2), (2;\infty)$

б) убывания: $(-2;-1), (0;1).$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(2;\infty)$

б) вогнутости: $(-2;0), (0;2).$

9) Значение функции в некоторых точках:

$y(-1)=-2, y(0)=0, y(1)=-2, y(2)=0.$

Вариант 3

1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} [x^n \cdot e^{-x}]; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{3}{4 + \ln x}}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctgx} - \frac{1}{x} \right).$$

2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}; \quad б) y = \frac{\ln(1-3x)}{x}, \quad x_0=0.$$

3. Найти экстремумы функций:

$$a) y = x \cdot \sqrt{2-x^2}; \quad б) y = \frac{1 + \ln x}{x}; \quad в) y = (x-1)^4.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2, \quad \left[-\frac{1}{2}; 3\right]; \quad б) y = \frac{x-4}{x^2+9}, \quad [-4; 6].$$

5. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \left(\frac{x-1}{x} \right)^2 \quad б) y = x^3 \cdot e^x.$$

6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.

2) Вертикальные асимптоты: $x = 2$.

3) Горизонтальные асимптоты: $y = 3$ ($x \rightarrow +\infty$), $y = 0$ ($x \rightarrow -\infty$).

4) Наклонные асимптоты: —

5) Стационарные точки: $-2; 1; 3$.

6) Точки, где $(y' = \infty)$: 0 .

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-2; 0), (3; \infty)$

б) убывания: $(-\infty; -2), (0; 1), (1; 2), (2; 3)$.

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-\infty; -3), (1; 2), (4; \infty)$

б) вогнутости: $(-3; 0), (0; 1), (2; 4)$.

9) Значение функции в некоторых точках:

$y(-3)=-1, y(-2)=-2, y(0)=3, y(1)=1, y(3)=2, y(4)=2,5$.

Вариант 4

1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} [\ln x \cdot \ln(x-1)]; \quad б) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}.$$

2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = \ln x, \quad x_0 = e; \quad б) y = \frac{1}{\sqrt[5]{1+x^4}}, \quad x_0 = 0.$$

3. Найти экстремумы функций:

$$a) y = (1+x) \cdot e^x; \quad б) y = \frac{4\sqrt{x}}{x+2}; \quad в) y = 2x^3 - 3x^2.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = 3x^4 - 16x^3 + 2, \quad [-3;1]; \quad б) y = \frac{x-2}{x^2+5}, \quad [-2;3].$$

5. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = x + \frac{2x}{x^2-1}; \quad б) y = x + \frac{1}{x^2}.$$

6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-3;0) \cup (0;2).$

2) Вертикальные асимптоты: $x = -3, x = 2.$

3) Горизонтальные асимптоты: $-$

4) Наклонные асимптоты: $-$

5) Стационарные точки: $-2; -1; 1.$

6) Точки, где $(y' = \infty)$: $0 (x \rightarrow \pm 0).$

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-3;-2), (-1;0), (0;1), (1;2);$

б) убывания: $(-2;-1).$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-3;-\frac{3}{2}), (0;1);$

б) вогнутости: $(-\frac{3}{2};0), (1;2).$

9) Значение функции в некоторых точках:

$y(-1)=1, y(-0)=2, y(+0)=0, y(1)=1.$

Вариант 5

1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{2} \cdot \ln(1-x)}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} (ctgx)^{\sin x}; \quad в) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{x}{ctgx} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right].$$

2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = \ln(2+x), \quad x_0 = -1; \quad б) y = \frac{x^3}{6} - \sin x^3, \quad x_0 = 0.$$

3. Найти экстремумы функций:

$$a) y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4; \quad б) y = (1+x) \cdot e^{-x}; \quad в) y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^3 - 3x + 1, \quad \left[\frac{1}{2}; 2\right]; \quad б) y = \frac{4-x^2}{4+x^2}, \quad [-1; 3].$$

5. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = 2x - \arcsin x; \quad б) y = \ln \frac{x-1}{x+2}.$$

6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

- 1) Область определения: $X \in (-\infty; \infty)$.
- 2) Вертикальные асимптоты: —
- 3) Горизонтальные асимптоты: $y=0, (x \rightarrow -\infty)$.
- 4) Наклонные асимптоты: $y=x-2 (x \rightarrow \infty)$.
- 5) Стационарные точки: $-1; 1; 3$.
- 6) Точки, где $(y' = \infty)$: $0; 2$.
- 7) Интервалы монотонности:
 - а) возрастания: $(-\infty; -1), (0; 1), (3; \infty)$,
 - б) убывания: $(-1; 0); (1; 2); (2; 3)$.
- 8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
 - а) выпуклости: $(-2; 0), (0; 2)$
 - б) вогнутости: $(-\infty; -2), (2; \infty)$.
- 9) Значение функции в некоторых точках:
 $y(-2)=1, y(-1)=2, y(0)=0, y(1)=4, y(2)=3, y(3)=2$.

Вариант 6

1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x^3}{\sin^6 2x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (tgx)^{2x-\pi}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 0} [\arcsin x \cdot ctgx].$$

2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = \sqrt{2+x}, \quad x_0 = -1; \quad б) y = \frac{1 - e^{-3x}}{x}, \quad x_0 = 0.$$

3. Найти экстремумы функций:

$$a) y = x^3 - 6x^2 + 12x; \quad б) y = \frac{x^3}{x^2 + 3}; \quad в) y = x^3(x+2)^2.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^3 - 12x + 7, \quad [0;3]; \quad б) y = \frac{\ln x}{x}, \quad (0;\infty).$$

5. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \sqrt[3]{(x^2 - 8)^2}; \quad б) y = \frac{1 - x^3}{x^2}.$$

6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty; \infty)$.

2) Вертикальные асимптоты: —

3) Горизонтальные асимптоты: —

4) Наклонные асимптоты: $y = x \quad (x \rightarrow \pm\infty)$.

5) Стационарные точки: $-2; 2; 3$.

6) Точки, где $(y' = \infty)$: 0 .

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-2;0), (2;3)$,

б) убывания: $(-\infty;-2); (0;2); (3;\infty)$.

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(2.5;3.5)$

б) вогнутости: $(-\infty;0), (0;2.5), (3.5;\infty)$.

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-2) = 3, \quad y(0) = 5, \quad y(2) = -3, \quad y(3) = -1, \quad y(5) = -4.5.$$

Вариант 7

1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 6x + 6 \sin x}{x^5}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x)^{\frac{6}{1+2 \ln x}}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right].$$

2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = \sqrt[3]{3+x}, \quad x_0 = -2; \quad б) y = \sin(100x^2), \quad x_0 = 0.$$

3. Найти экстремумы функций:

$$a) y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}; \quad б) y = \frac{\ln^2 x}{x}; \quad в) y = 2x^2 - x^4.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^3 - 18x^2 + 96x, \quad [0;9]; \quad б) y = \frac{(x+2)^2}{x-1}, \quad [-4;0].$$

5. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \frac{2}{x^2 - 4}; \quad б) y = xe^{-x}.$$

6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty).$

2) Вертикальные асимптоты: -1

3) Горизонтальные асимптоты: $-$

4) Наклонные асимптоты: $y = \frac{1}{2}x - 1.$

5) Стационарные точки: $0; -3.$

6) Точки, где $(y' = \infty)$: $-$

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-\infty; -3), (-1; \infty),$

б) убывания: $(-3; -1).$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-\infty; -1), (-1; 0)$

б) вогнутости: $(0; \infty).$

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-3) = -\frac{27}{8}, \quad y(-2) = -4, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = \frac{4}{3}.$$

Вариант 8

1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$а) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \cdot \operatorname{tg} x; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right); \quad в) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + e^x \right)^{\frac{1}{x}}.$$

2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$а) y = e^{2+x}, \quad x_0 = -2; \quad б) y = \cos(100x^2), \quad x_0 = 0.$$

3. Найти экстремумы функций:

$$а) y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3; \quad б) y = \sqrt{2x - x^2}; \quad в) y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$а) y = x^3 - 12x + 7, \quad [-3; 0]; \quad б) y = \frac{x^3 + 16}{x}, \quad [1; 4].$$

5. Исследовать и построить графики функций:

$$а) y = (x + 4)e^{2x}; \quad б) y = x - \ln(x + 1).$$

6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty).$

2) Вертикальные асимптоты: $x=1.$

3) Горизонтальные асимптоты: $y=0.$

4) Наклонные асимптоты: $-$

5) Стационарные точки: $0; 3.$

6) Точки, где $(y' = \infty)$: $-$

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(0; 1), (1; 3),$

б) убывания: $(-\infty; 0), (3; \infty).$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-\infty; -0.5), (1; 4);$

б) вогнутости: $(-0.5; 1), (4; \infty).$

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-0.5) = -0.5, \quad y(0) = -1, \quad y(0.5) = 0, \quad y(1.5) = 0, \quad y(3) = 2, \quad y(4) = 1.$$

Вариант 9

1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x); \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\ln x}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}.$$

2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = e^{2-x}, \quad x_0 = 2; \quad б) y = \frac{1}{\sqrt[3]{64 - x^3}}, \quad x_0 = 0.$$

3. Найти экстремумы функций:

$$a) y = 3 - 2x^2 - x^4; \quad б) y = \frac{x}{\sqrt[3]{x-4}}; \quad в) y = e^x + e^{-x}.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}, \quad [-2; 0.5]; \quad б) y = \sqrt[3]{2x^2 + 1}, \quad [-2; 1].$$

5. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}; \quad б) y = x^2 e^x.$$

6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$.

2) Вертикальные асимптоты: $x = -1$

3) Горизонтальные асимптоты: —

4) Наклонные асимптоты: $y = x - 1$.

5) Стационарные точки: $-2; 0; 2$.

6) Точки, где $(y' = \infty)$: 1 .

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-\infty; -2), (1; \infty)$;

б) убывания: $(-2; -1), (-1; 0), (0; 1)$.

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-\infty; -1), (0; 1), (1; 2)$;

б) вогнутости: $(-1; 0), (2; \infty)$.

9) Значение функции в некоторых точках:

$y(-2) = -3.5, y(0) = 0, y(1) = -2, y(2) = 2$.

Вариант 10

1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right); \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{(x/2)}}{x + e^x}; \quad в) \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = \frac{1}{\sqrt[4]{2x-1}}, x_0=1; \quad б) y = \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}, x_0=0.$$

3. Найти экстремумы функций:

$$a) y = \frac{1}{3}x^3 - x^4; \quad б) y = x \cdot \sqrt[3]{x-1}; \quad в) y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1, [-3; 0]; \quad б) y = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2, [-3; 0].$$

5. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \ln(x^2 - 4x + 8); \quad б) y = (x-1)e^{3x}.$$

6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$.

2) Вертикальные асимптоты: $x = -2, x = 2$

3) Горизонтальные асимптоты: $y = 0 (x \rightarrow \infty), y = -1 (x \rightarrow -\infty)$

4) Наклонные асимптоты: —

5) Стационарные точки: $-4; 0; 4$.

6) Точки, где $(y' = \infty)$: —

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-\infty; -4), (-2; 2), (4; \infty)$;

б) убывания: $(-4; -2), (2; 4)$.

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-5; -2), (-2; 0), (5; \infty)$;

б) вогнутости: $(-\infty; -5), (0; 2), (2; 5)$.

9) Значение функции в некоторых точках:

$y(-5) = 0, y(-4) = 1, y(-3) = 0, y(0) = 0, y(3) = -1, y(4) = -2, y(5) = -1$.

Вариант 11

1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right);$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - (e^x + e^{-x}) \cdot \cos x}{x^4}.$$

2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = \cos^2 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4};$$

$$б) y = \frac{1}{\sqrt[4]{16+x^4}}, \quad x_0=0.$$

3. Найти экстремумы функций:

$$a) y = x - \ln(1+x^2);$$

$$б) y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}};$$

$$в) y = x - \sqrt[3]{x^2}.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right), \quad [0;1];$$

$$б) y = \frac{x-3}{x^2+7}, \quad [2;8].$$

5. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = x^3 \ln x;$$

$$б) y = \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^2.$$

6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения:

$$X \in (-\infty; \infty).$$

2) Вертикальные асимптоты:

—

3) Горизонтальные асимптоты:

—

4) Наклонные асимптоты:

$$y = -0.5x. \quad -$$

5) Стационарные точки:

$$0; 4.$$

6) Точки, где $(y' = \infty)$:

$$-3; 3.$$

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания:

$$(-3;0), (3;4);$$

б) убывания:

$$(-\infty; -3), (0;3), (4; \infty).$$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости:

$$(-\infty; -3), (-3;3), (3;5);$$

б) вогнутости:

$$(5; \infty).$$

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-4)=0, y(-3)=-4, y(-2)=0, y(0)=4, y(2)=0, y(3)=-4, y(4)=0, y(5)=2.$$

Вариант 12

1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - x^2); \quad б) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{\frac{a}{\ln 2(x-1)}}; \quad в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - \arctg x}{\frac{3}{e^x - 1}}.$$

2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = \sin^2 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}; \quad б) y = x \cdot \ln(1 - 2x^2), \quad x_0 = 0.$$

3. Найти экстремумы функций:

$$a) y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x; \quad б) y = \frac{x}{1 + x^2}; \quad в) y = x \cdot e^{-x}.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^4 + 4x, \quad [-2; 2]; \quad б) y = \sqrt{100 - x^2}, \quad [-6; 8].$$

5. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \frac{x^3 + 16}{x}; \quad б) y = x^2 - 2 \ln x.$$

6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty; 3) \cup (3; \infty)$.

2) Вертикальные асимптоты: $x = 3$.

3) Горизонтальные асимптоты: $y = 0$.

4) Наклонные асимптоты: — —

5) Стационарные точки: $-2; 2; 5$.

6) Точки, где $(y' = \infty)$: 0 .

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-\infty; -2), (0; 2), (2; 3), (3; 5);$

б) убывания: $(-2; 0), (5; \infty).$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-3; 0), (0; 2), (3; 6);$

б) вогнутости: $(-\infty; -3), (2; 3), (6; \infty).$

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-3)=1, y(-2)=2, y(0)=-4, y(2)=1, y(5)=2, y(6)=1.$$

Вариант 13

1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\operatorname{ctg}(x - \alpha)}{\ln(x - \alpha)}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right); \quad в) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}, x_0=1; \quad б) y = x \cdot \sin 25x^2, x_0=0.$$

3. Найти экстремумы функций:

$$a) y = 2x + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}; \quad б) y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}; \quad в) y = x \cdot \ln x.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = 81x - x^4, [-1;4]; \quad б) y = \frac{4-x^2}{4+x^2}, [-1;3].$$

5. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = x^{\frac{2}{3}} \cdot e^{-x}; \quad б) y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty).$

2) Вертикальные асимптоты: $x = -1, x = 1.$

3) Горизонтальные асимптоты: $-$

4) Наклонные асимптоты: $y = x (x \rightarrow \pm\infty).$ $-$

5) Стационарные точки: $-2; 0; 2.$

6) Точки, где $(y' = \infty)$: $-3, 3.$

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-\infty; -3), (-2; -1), (1; 2), (3; \infty);$

б) убывания: $(-3; -2), (-1; 1), (2; 3).$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(0; 1), (1; 3), (3; \infty);$

б) вогнутости: $(-\infty; -3), (-3; -1), (-1; 0).$

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-3) = -1, y(-2) = -3, y(0) = 0, y(2) = 3, y(3) = 1.$$

Вариант 14

1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{1}{x(x-1)}} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right);$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{2x} + x \right)^{\frac{1}{x}}.$$

2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = \sqrt[3]{x}, x_0 = -1;$$

$$б) y = x^3 \cdot e^{-2x}, x_0 = 0.$$

3. Найти экстремумы функций:

$$a) y = x^2(x-12)^2;$$

$$б) y = \frac{16}{x(4-x^2)};$$

$$в) y = \sqrt{x} \cdot \ln x.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^3 - 3x + 1, [0; 2];$$

$$б) y = \frac{x^2}{x^2 - 4}, (-2; 3].$$

5. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2;$$

$$б) y = \ln(2x^2 + 3).$$

6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения:

$$X \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty).$$

2) Вертикальные асимптоты:

$$x = -1.$$

3) Горизонтальные асимптоты:

—

4) Наклонные асимптоты:

$$y = -\frac{1}{2}x + 1. \quad -$$

5) Стационарные точки:

$$-2; 0; 2.$$

6) Точки, где $(y' = \infty)$:

$$1.$$

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания:

$$(-2; -1), (1; 2);$$

б) убывания:

$$(-\infty; -2), (-1; 1), (2; \infty).$$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости:

$$(-\infty; -3), (0; 1), (1; 3);$$

б) вогнутости:

$$(-3; -1), (-1; 0), (3; \infty).$$

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-3) = 1, y(-2) = 0, y(0) = 0, y(1) = -2, y(2) = 1, y(3) = 0.$$

Вариант 15

1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right); \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos x}}{x^2}; \quad в) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + e^x \right)^{\lg \frac{2}{x}}.$$

2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = \sqrt[4]{2-x}, x_0=1;$$

$$б) y = x^4 + \sin x^2, x_0=0.$$

3. Найти экстремумы функций:

$$a) y = x^3 + x^2 + 3;$$

$$б) y = \frac{x^2 + 6x + 13}{x - 3};$$

$$в) y = x^2 \cdot e^{-x}.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^3(8-x), [0;7];$$

$$б) y = \frac{3-x}{x^2+7}, [-3;2].$$

5. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \frac{x^3 - 1}{4x^2};$$

$$б) y = e^{3x-x^2}.$$

6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty; \infty)$.

2) Вертикальные асимптоты: —

3) Горизонтальные асимптоты: $y = -1$ ($x \rightarrow +\infty$), $y = 0$ ($x \rightarrow -\infty$).

4) Наклонные асимптоты: — —

5) Стационарные точки: $-4; -2; 0; 2; 4$.

6) Точки, где $(y' = \infty)$: $-1; 1$.

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-\infty; -4), (-2; -1), (0; 1), (2; 4);$

б) убывания: $(-4; -2), (-1; 0), (1; 2), (4; \infty).$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-5; -3), (3; 5);$

б) вогнутости: $(-\infty; -5), (-3; -1), (-1; 1), (1; 3).$

9) Значение функции в некоторых точках: $y(-5) = \frac{1}{2}, y(-4) = 1, y(-3) = 0,$
 $y(-2) = -1, y(-1) = 2, y(0) = 1, y(2) = -2, y(3) = -1, y(4) = 0, y(5) = -\frac{1}{2}.$

Вариант 16

1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{tgx} - e^x}{tg 2x - 2x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} (tgx)^{2tg 2x}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2} - \frac{1}{x} \right].$$

2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = \ln(2-x), \quad x_0 = 1; \quad б) y = \sin(5x/2)^2, \quad x_0 = 0.$$

3. Найти экстремумы функций:

$$a) y = x^3 + x^2 - x + 2; \quad б) y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}; \quad в) y = \frac{2x}{1+x^2}.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}, \quad [-2; 2]; \quad б) y = \frac{x-2}{x^2+5}, \quad [2; 8].$$

5. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = e^{2x-x^2}; \quad б) y = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty).$

2) Вертикальные асимптоты: $x = -1, x = 1$

3) Горизонтальные асимптоты: $-$

4) Наклонные асимптоты: $y = \frac{1}{2}x.$

5) Стационарные точки: $-2\frac{1}{2}; 0; 2\frac{1}{2}.$

6) Точки, где $(y' = \infty)$: $-4.$

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-\infty; -4), (-2\frac{1}{2}; -1), (-1; 1), (2\frac{1}{2}; \infty);$

б) убывания: $(-4; -2\frac{1}{2}), (1; 2\frac{1}{2}).$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-1; 0), (4; \infty);$

б) вогнутости: $(-\infty; -4), (-4; -1), (0; 1), (1; 4).$

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-4) = 0, \quad y(-2\frac{1}{2}) = -2, \quad y(0) = 0, \quad y(2\frac{1}{2}) = 0, \quad y(4) = 1.$$

Вариант 17

1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^{2x} - 1} \right]; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\operatorname{tg}^6 \frac{x}{2}}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = \ln(3 - x), \quad x_0 = 2; \quad б) y = (x^2 - 1) \cdot e^{x^2}, \quad x_0 = 0.$$

3. Найти экстремумы функций:

$$a) y = 14x - x^4; \quad б) y = x - \arctg x; \quad в) y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^3 - 3x + 1, \quad \left[-1; \frac{1}{2}\right]; \quad б) y = \frac{x + 6}{x^2 + 13}, \quad [-5; 5].$$

5. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}; \quad б) y = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$$

6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$.

2) Вертикальные асимптоты: $x = 2$

3) Горизонтальные асимптоты: —

4) Наклонные асимптоты: $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

5) Стационарные точки: $-4; 0; 4$.

6) Точки, где $(y' = \infty)$: -2 .

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-4; -2), (2; 4)$;

б) убывания: $(-\infty; -4), (-2; 2), (4; \infty)$.

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-\infty; -5), (0; 2), (2; 5)$;

б) вогнутости: $(-5; -2), (-2; 0), (5; \infty)$.

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-5) = 0, y(-4) = -2, y(-2) = 4, y(0) = 0, y(4) = -1, y(5) = -2.$$

Вариант 18

1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} (x)^{\frac{m}{x^2 - 1}};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x \cdot \ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{\ln(1 + x)} \right].$$

2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = \ln(3 + x), \quad x_0 = -2;$$

$$б) y = \frac{x + \ln(1 - x)}{x}, \quad x_0 = 0.$$

3. Найти экстремумы функций:

$$a) y = x^3 - 6x^2 + 9x;$$

$$б) y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1};$$

$$в) y = x \cdot \sqrt{1 - x}.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2, \quad [0; 2];$$

$$б) y = \frac{x - 3}{x^2 + 16}, \quad [-5; 5].$$

5. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = x + \frac{1}{x};$$

$$б) y = x^3 \cdot e^{-x}.$$

6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения:

$$X \in (-\infty; 2) \cup (2; \infty).$$

2) Вертикальные асимптоты:

$$x = 2$$

3) Горизонтальные асимптоты:

$$y = 1 \quad (x \rightarrow +\infty), \quad y = 0 \quad (x \rightarrow -\infty)$$

4) Наклонные асимптоты:

$$-$$

5) Стационарные точки:

$$-1; 1; 4.$$

6) Точки, где $(y' = \infty)$:

$$0.$$

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания:

$$(-1; 0), (1; 2), (2; 4);$$

б) убывания:

$$(-\infty; -1), (0; 1), (4; \infty).$$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости:

$$(-\infty; -2), (2; 5);$$

б) вогнутости:

$$(-2; 0), (0; 2), (5; \infty).$$

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-2) = -\frac{1}{2}, \quad y(-1) = -1, \quad y(0) = 3, \quad y(3) = 1.5, \quad y(4) = 2, \quad y(5) = 1.5.$$

Вариант 19

1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right];$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 2a} \left(3 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4a}};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} [(\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \cdot \ln x].$$

2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = e^{3-x}, \quad x_0 = 2;$$

$$б) y = \frac{\ln(1 - 3x^3)}{x}, \quad x_0 = 0.$$

3. Найти экстремумы функций:

$$a) y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x;$$

$$б) y = (x - 5) \cdot e^x;$$

$$в) y = \frac{x^3}{(x - 2)(x + 3)}.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2, \quad [-2; 0];$$

$$б) y = \frac{1 + x^2}{1 + x^4}, \quad [-0.1; 4].$$

5. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = e^{-x^2};$$

$$б) y = \frac{4x}{1 + x^2}.$$

6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения:

$$X \in (-\infty; -1) \cup (-1; \infty).$$

2) Вертикальные асимптоты:

$$x = -1$$

3) Горизонтальные асимптоты:

—

4) Наклонные асимптоты:

$$y = x.$$

5) Стационарные точки:

$$-2; 0.$$

6) Точки, где $(y' = \infty)$:

$$-3.$$

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания:

$$(-\infty; -3), (-2; -1), (1; \infty);$$

б) убывания:

$$(-3; -2).$$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости:

$$(-1; 0);$$

б) вогнутости:

$$(-\infty; -3), (-3; -1), (0; \infty).$$

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-3) = -1, y(-2) = -3.5, y(0) = 1.$$

Вариант 20

1. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{1 - xe^x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} (ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}; \quad в) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [tgx - \sec x].$$

2. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = e^{x-4}, \quad x_0 = 1; \quad б) y = \frac{x - \ln(1+x)}{x}, \quad x_0 = 0.$$

3. Найти экстремумы функций:

$$a) y = 2x^3 - 3x^2 + 1; \quad б) y = \frac{4x}{x^2 + 4}; \quad в) y = x \cdot \sqrt{1 - x^2}.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = 3x^4 - 16x^3 + 2, \quad [0; 4]; \quad б) y = \frac{x-3}{x^2+16}, \quad [3; 10].$$

5. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \frac{4x}{(1+x^2)^2}; \quad б) y = \frac{2^x}{x}.$$

6. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty).$

2) Вертикальные асимптоты: $x = 0$

3) Горизонтальные асимптоты: —

4) Наклонные асимптоты: $y = -\frac{1}{2}x.$

5) Стационарные точки: $-2; -1; 1.$

6) Точки, где $(y' = \infty)$: $-3; 2.$

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-3; -2), (-1; 0), (1; 2);$

б) убывания: $(-\infty; -3), (-2; -1), (0; 1), (2; \infty).$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-\infty; -3), (-3; -\frac{3}{2});$

б) вогнутости: $(-\frac{3}{2}; 0), (0; 2), (2; \infty).$

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-3) = 0, \quad y(-2) = 3, \quad y(-1.5) = 2, \quad y(-1) = 1.5, \quad y(1) = -2, \quad y(2) = 0.$$

Индивидуальное задание №4

Вариант 1

1. Найдите область определения функции $z = \ln(y + x^2 - 4)$. Сделайте чертеж.
2. Постройте график функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = \ln(e^x + e^y)$.
4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = xy \ln(x + y)$ если $x = t^2 + 1$,
 $y = \frac{1}{t^2}$.
5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = \operatorname{arctg} xy$ если
 $x = \frac{u}{v^2}$, $y = \frac{u^2}{v}$.
6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением
 $z^2 x + x^2 y + y^2 z + 2x - y = 0$.
7. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением $z = x^2 y^2 - xy^3 - 3y - 1$. Найдите
а) производную в точке $M(2, 1)$ в направлении от точки M к точке $O(0, 0)$;
б) $\operatorname{grad} z$ в точке $N(2, 2)$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности
 $y^2 - 2z^2 - x^2 = 1$ в точке $M(1, 2, 1)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.
10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции
 $z = \ln(2x - y)$ в окрестности точки $M(1, 1)$.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2y^2$ в круге
 $x^2 + y^2 \leq 4$. Постройте чертёж.
12. Вычислите приближённо $1,002 \cdot (2,003)^2$.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции $z = \sqrt{x^2 - y^2 + 1}$. Сделайте чертеж.
2. Постройте график функции $z = x^2 + y^2 - 9$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{y^2}{4x}}$.
4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = x^2 y - y^3 x$, если $x = te^{-t}$, $y = \frac{e^t}{e^t + 1}$.
5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = \frac{x + y}{x - y}$, если $x = u^2 v^2$, $y = \frac{u^2}{v^2} - 1$.
6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $z^3 + 3x^2 z = 2xy$.
7. Функция $u = u(x, y, z)$ задана уравнением $u = xyz$. Найдите
 - а) производную в точке $M(5, 1, 2)$ в направлении от точки M к точке $N(0, 1, 1)$;
 - б) $\text{grad} u$ в точке $K(3, 1, 1)$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - y^2 + z^2 = 4$ в точке $M(1, 1, 2)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = \frac{x^3}{3} + 2y^2 - x + y$.
10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $z = \sin(2\pi x - y)$ в окрестности точки $M(1, 0)$.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = (x^2 - y^2) \cdot \sqrt[3]{(x - 1)^2}$ в области, ограниченной кривыми $y^2 = x$, $x = 2$. Постройте чертёж.
12. Вычислите приближённо $3,01 \cdot e^{0,01}$.

Вариант 3

1. Найдите область определения функции $z = \ln(x + y + 1)$. Сделайте чертеж.
2. Постройте график функции $z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = \ln \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$, $(a, b - \text{const})$.
4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = \sqrt{xy} + x$ если $x = \log_2 t$, $y = 2^t$.
5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = \arcsin \frac{x}{y}$, если $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$.
6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - xz - yz = 2$.
7. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением $z = (1 + \log_y x)^3$. Найдите
 - а) производную в точке $M(e, e)$ в направлении от точки M к точке $N(3e, -2e)$;
 - б) $\text{grad } z$ в точке $K(1, 2)$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^3 - 3xy + y^3$ в точке $M(1, 1, -1)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.
10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $z = \cos(x - y)$ в окрестности точки $M(\pi, 0)$.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x - 2y + 5$ в области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$. Постройте чертёж.
12. Вычислите приближённо значение функции $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ в точке $M(1,98; 1,01)$.

Вариант 4

1. Найдите область определения функции $z = \sqrt{3 - x + y}$. Сделайте чертеж.
2. Постройте график функции $z = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = xe^y + ye^x$.
4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, если $x = ctgt$, $y = \cos t$.
5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, если $x = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$, $y = u + v$.
6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$.
7. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением $z = \ln(x + y)$. Найдите
а) производную в точке $M(1, 2)$ в направлении от точки M к точке $N(-3, 6)$;
б) $\text{grad } z$ в точке $K(1, 1)$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $3x^2 + y^2 + z^2 = 8$ в точке $M(1, -1, 2)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 2xy - 3y$.
10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $z = e^{x^2 - y}$ в окрестности точки $M(1, 0)$.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 5x^2 + 3xy + y^2 + 4$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = -1$, $y = -1$, $x + y = 1$. Постройте чертёж.
12. Вычислите приближённо значение функции $z = \frac{1}{2} \ln(y^2 - 2x^2)$ в точке $M(2, 1; 3, 02)$.

Вариант 5

1. Найдите область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$. Сделайте чертёж.
2. Постройте график функции $z = x - 3y + 4$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}$ ($a = \text{const}$).
4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = \ln(x^2 + y^2)$, если $x = \operatorname{tg} t$, $y = \frac{1}{\sin t}$.
5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = \frac{y}{x}$, если $x = u^v$, $y = u^2$.
6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $xyz = x + y + z$.
7. Функция $u = u(x, y, z)$ задана уравнением $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$. Найдите
 - а) производную в точке $M(-3, 1, 0)$ в направлении от точки M к точке $O(0, 0, 0)$;
 - б) $\operatorname{grad} z$ в точке $N(1, 2, 2)$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $-3x^2 + y^2 + z^2 = 8$ в точке $M(0, -2, 2)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3axy$ ($a > 0$).
10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $z = e^{x-y^2}$ в окрестности точки $M(0, 1)$.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ в круге $x^2 + y^2 \leq 25$. Постройте чертёж.
12. Вычислите приближённо $\sin 59^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$.

Вариант 6

1. Найдите область определения функции $z = \ln(x + y - 2)$. Сделайте чертеж.
2. Постройте график функции $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = x \sin \frac{x}{y}$.
4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$, если $x = \sqrt{t}$, $y = \ln t$.
5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = \ln \frac{x}{y}$, если $x = \ln(e + uv)$, $y = 1 + uv$.
6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $z^3 - 3xyz = a^3$ ($a - \text{const}$).
7. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$. Найдите
а) производную в точке $M(3, 1)$ в направлении от точки M к точке $N(6, 5)$;
б) $\text{grad } z$ в точке $K(2, 1)$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $3x^2 + y^2 - 4z^2 = -12$ в точке $M(1, -1, 2)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.
10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $z = \sqrt{x + y}$ в окрестности точки $M(2, 2)$.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в треугольнике, ограниченном прямыми $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 3$. Постройте чертёж.
12. Вычислите приближённо $(5,2)^2 + (3,96)^2$.

Вариант 7

1. Найдите область определения функции $z = \ln(x^2 + y^2 - 4)$. Сделайте чертеж.
2. Постройте график функции $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = \cos xy^2$.
4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = x^y$, если $x = \arctgt$, $y = \ln t$.
5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = tg(x + y)$, если $x = 2^{uv}$, $y = u - v$.
6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$.
7. Функция $u = u(x, y, z)$ задана уравнением $u = xy + yz + xz - x^2 - y^2 - z^2$. Найдите
а) производную в точке $M(1, 2, -3)$ в направлении от точки M к точке $N(3, 3, -1)$;
б) $\text{grad} u$ в точке $K(1, 0, 1)$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 9$ в точке $M(1, -2, -2)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = x^2 + xy^2 + 3axy$ ($a > 0$).
10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $z = \frac{x}{y}$ в окрестности точки $M(1, 1)$.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy$ в круге $x^2 + y^2 \leq 4$. Постройте чертёж.
12. Вычислите приближённо $\sqrt{(3,01)^2 + (3,98)^2}$.

Вариант 8

1. Найдите область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$. Сделайте чертёж.
2. Постройте график функции $z = 4 - 2x + y$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = \sin(x^2 + xy)$.
4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = e^{x-2y}$ если $x = \sin t$, $y = t^3$.
5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = \ln(2x + 3y)$, если $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$.
6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$.
7. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением $u = xy^2 + z^3 - xyz$. Найдите
 - а) производную в точке $M(1, 1, 2)$ в направлении, образующим с осями координат углы 60° , 45° и 60° соответственно;
 - б) $\text{grad } z$ в точке $K(2, 1, 1)$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 = 2$ в точке $M(-1, 1, -1)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 + 2x + 4y$.
10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = x^{yz}$ в окрестности точки $M(1, 1, 0)$.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - 4y^2$ в области, ограниченной кривыми $x^2 = y - 2$, $y = 6$. Постройте чертёж.
12. Вычислите приближённо $\arcsin \frac{0,2}{1,3}$.

Вариант 9

1. Найдите область определения функции $z = \sqrt{2 + x - y}$. Сделайте чертеж.
2. Постройте график функции $z = x^2 + y^2 + 2$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = xy^2 + \sin \frac{x}{y}$.
4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = \sin xy$, если $x = t^2$, $y = e^{-t}$.
5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = 2^{\frac{x}{y}}$, если $x = 3u - 4v$, $y = 2uv$.
6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$.
7. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением $z = \operatorname{arctg}(xy)$. Найдите
 - а) производную в точке $M(1, 1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла;
 - б) $\operatorname{grad} z$ в точке $K(1, 0)$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 = 2$ в точке $M(1, 1, 1)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$.
10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = \ln(x - y + z)$ в окрестности точки $M(1, 0, 1)$.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = \sqrt{2 - 2x^2 - y^2}$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$. Постройте чертёж.
12. Вычислите приближённо $0,99^{1,01}$.

Вариант 10

1. Найдите область определения функции $z = \ln(x^2 + y^2 - 1)$. Сделайте чертёж.
2. Постройте график функции $z = 2x - 2y + 1$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = x^2 e^{\frac{y}{x}}$.
4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = \sqrt[3]{y+1}$, если $x = 3t + 1$, $y = \ln t$.
5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = 2x - y^2$, если $x = \ln(u + v)$, $y = \ln u + \ln v$.
6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$.
7. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением $z = 3x^4 - xy + y^3$. Найдите
 - а) производную в точке $M(1, 2)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол в 60° , а с осью Oy — 120° ;
 - б) $\text{grad } z$ в точке $N(2, 1)$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $y^2 - 2z^2 + x^2 = 3$ в точке $M(-2, 1, 1)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.
10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = e^{x-y+z}$ в окрестности точки $M(1, 0, 1)$.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - 2y^2 + 4x$ в круге $x^2 + y^2 \leq 9$. Постройте чертёж.
12. Вычислите приближённо $\sqrt{(1,02)^2 + (1,97)^3}$.

Вариант 11

1. Найдите область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$. Сделайте чертеж.
2. Постройте график функции $z = x^2 + y^2 - 4$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = x \cdot 2^{\frac{x}{y}}$.
4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$, если $x = (t-1)^2$, $y = 4^{t^2}$.
5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = \frac{1}{\sin xy}$, если $x = \frac{1}{\sqrt{u+1}}$, $y = \frac{v}{u}$.
6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $\ln z = x + y + z - 1$.
7. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением $z = \ln(e^x + e^y)$. Найдите
а) производную в точке $O(0, 0)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{-3, 4\}$;
б) $\text{grad } z$ в точке $N(1, 1)$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2x^2 - y^2 + z^2 = 2$ в точке $M(1, 1, 1)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$.
10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = \cos(x - y)$ в окрестности точки $M(\pi, 0)$.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$. Постройте чертёж.
12. Вычислите приближённо значение функции $z = \frac{x+y}{x-y}$ в точке $M(2,04; 2,95)$.

Вариант 12

1. Найдите область определения функции $z = \sqrt{x^2 - y^2 - 4}$. Сделайте чертеж.
2. Постройте график функции $z = 2x + 3y - 6$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции

$$u = \ln \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = \arcsin \frac{y}{x}$, если $x = 3^{-t}$, $y = t^3$.
5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, если $x = \sqrt{u} + v$, $y = uv$.
6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $z^3 + xz + y - 2x = 0$.
7. Функция $u = u(x, y, z)$ задана уравнением $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$. Найдите
 - а) производную в точке $O(0, 0, 0)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{1, -2, 3\}$;
 - б) $\text{grad} u$ в точке $O(0, 0, 0)$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 9$ в точке $M(1, 0, 2)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = xy - x^2y - xy^2$.
10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = \sin(x - y)$ в окрестности точки $M(\pi, 0)$.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = \sqrt{3 - x^2 - 2y^2}$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$. Постройте чертёж.
12. Вычислите приближённо $\sqrt[5]{1,002} \cdot \sqrt[3]{7,995}$.

Вариант 13

1. Найдите область определения функции $z = \ln(x - y + 5)$. Сделайте чертеж.
2. Постройте график функции $z = -x^2 - y^2 + 1$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = \ln(x + e^y)$.
4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = e^{x^2y}$ если $x = \lg t$, $y = \frac{1}{t^3}$.
5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = y^x$, если $x = 3u^2 + 1$, $y = u^3 + v^3$.
6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$.
7. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$. Найдите
 - а) производную в точке $M(1, 2)$ в направлении от точки M к точке $N(2, 0)$;
 - б) $\text{grad } z$ в точке $K(2, 2)$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - 10y + 2z^2 = 2$ в точке $M(2, 1, 2)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = 6x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$.
10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = x^3y - yz^2 + xyz$ в окрестности точки $M(1, 1, 1)$.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = y^2 + 2xy - 3x^2 + x$ в замкнутой области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$. Постройте чертёж.
12. Вычислите приближённо $0,97^{1,05}$.

Вариант 14

1. Найдите область определения функции $z = \ln(x^2 + y + 1)$. Сделайте чертеж.
2. Постройте график функции $z = -x^2 - y^2$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = ye^{\frac{y}{x}}$.
4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = 2^{\frac{x}{y}}$, если $x = 1/\sqrt{t}$, $y = \operatorname{arctg} \sqrt{t}$.
5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = \left(\frac{x}{y}\right)^2$, если $x = \sin(2u + v)$, $y = \cos(u + 2v)$.
6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x^3 + 2y^3 + z^3 - 2xyz - 2y + 8 = 0$.
7. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением $z = \sin(x^2 + y^2)$. Найдите
а) производную в точке $M(1, 1)$ в направлении от точки M к точке $N(3, 7)$;
б) $\operatorname{grad} z$ в точке $K(0, \sqrt{\pi/2})$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$ в точке $M(1, 1, 3)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.
10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = x^2yz - xyz^2 + xy^2z$ в окрестности точки $M(1, 1, 1)$.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в области $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$. Постройте чертёж.
12. Вычислите приближённо значение функции $z = \sqrt{x^3 + y^3}$ в точке $M(1,02; 1,97)$.

Вариант 15

1. Найдите область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 5}}$. Сделайте чертёж.
2. Постройте график функции $z = 3 - x - y$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = \ln \sqrt{x^2 + y}$.
4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = \frac{x}{y^2}$, если $x = \cos \frac{1}{t}$, $y = \frac{1}{\cos t}$.
5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = x^3 + y$, если $x = e^{u-v}$, $y = e^{u+v}$.
6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $xz^5 + y^2z - x^3 = 0$.
7. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$. Найдите
 - а) производную в точке $M(1, 1)$ в направлении от точки M к точке $N(2, 2)$;
 - б) $\text{grad } z$ в точке $K(3, 4)$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 + 1 = 0$ в точке $M(1, 1, 2)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5$.
10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = x^3 - z^3 + xy^2$ в окрестности точки $M(1, 1, 1)$.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ в квадрате $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Постройте чертёж.
12. Вычислите приближённо $\sqrt{(2,98)^2 + (4,01)^2}$.

Вариант 16

1. Найдите область определения функции $z = \ln(x^2 + y^2 - 2)$. Сделайте чертеж.
2. Постройте график функции $z = -x^2 - y^2 + 2$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = tg \frac{y}{x}$.
4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = arctg \frac{1}{xy}$, если $x = \sqrt[3]{t}$, $y = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$.
5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = y^{2x}$, если $x = u \cdot v$, $y = \frac{v}{u}$.
6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x - yz + e^z = 0$.
7. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$. Найдите
 - а) производную в точке $M(3, 4)$ в направлении радиус-вектора точки M ;
 - б) $\text{grad } z$ в точке $K(1/2, 1/2)$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + 2z = 2$ в точке $M(-2, 3, 0)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = 2x^2 + xy^2 - 16x$.
10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = \ln(x^3 y^3)$ в окрестности точки $M(1, 1)$.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ в прямоугольнике $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Постройте чертёж.
12. Вычислите приближённо $(1,1)^{3,97}$.

Вариант 17

1. Найдите область определения функции $z = \sqrt{x^2 + y - 1}$. Сделайте чертеж.
2. Постройте график функции $z = 3 - x - 2y$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = \sqrt[3]{x^3 + y^2}$.
4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = \sin \frac{x}{\sqrt{y}}$, если $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2 + 1}$.
5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = \frac{x}{y}$, если $x = u^2 + v^2$, $y = u \cdot v$.
6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x + y + z = e^z$.
7. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением $z = x^2 + y^2 - 3x + 2y$. Найдите
а) производную в точке $O(0, 0)$ в направлении от точки O к точке $N(3, 4)$;
б) $\text{grad} u$ в точке $O(0, 0)$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2x^2 - 2y^2 + 7z^2 = -3$ в точке $M(4, 7, 3)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = 2 + (x - y)^2 + (y - 1)^4$.
10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = e^{x^2 + y}$ в окрестности точки $M(1, 1)$.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 3y^2 + y$ в замкнутой области, ограниченной треугольником с вершинами в точках $A(1, 0)$, $B(0, 0)$ и $C(0, 1)$. Постройте чертёж.
12. Вычислите приближённо значение функции $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ в точке $M(1, 01; 1, 03)$.

Вариант 18

1. Найдите область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$. Сделайте чертёж.
2. Постройте график функции $z = 1 - x^2 - y^2$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$.
4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = e^{x-2y}$ если $x = \sin^2 t$, $y = t^3$.
5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = x^2 + y^3$, если $x = 2u + 4v^3$, $y = 3u^2 + v$.
6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $e^z - xyz - 1 = 0$.
7. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением $z = \ln(x^2 + y^2)$. Найдите
 - а) производную в точке $M(1, 3)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{1, -2\}$;
 - б) $\text{grad } z$ в точке $N(1, 0)$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2x^2 - 2y^2 - z^2 = 2$ в точке $M(-2, 1, 2)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = x^2 - xy + y^2 - x$.
10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = e^{x+y^2}$ в окрестности точки $M(0, 1)$.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x - 2y - 3$ в области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$. Постройте чертёж.
12. Вычислите приближённо значение функции $z = 1 + \sqrt{y + x^2}$ в точке $M(0,99; 0,02)$.

Вариант 19

1. Найдите область определения функции $z = \sqrt{3 - x + y}$. Сделайте чертеж.
2. Постройте график функции $z = 2 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = y \cos \frac{2x}{y}$.
4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = \frac{3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, если $x = a \cos t, y = a \sin t (a - \text{const})$.
5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = x^3 - y^3$, если $x = u \cdot v, y = u^2 + v^2$.
6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.
7. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением $z = 3yx^2$. Найдите
 - а) производную в точке $M(-9, 12)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла;
 - б) $\text{grad } z$ в точке $M(-9, 12)$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - 2y^2 - z^2 = 1$ в точке $M(1, 1, 1)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = x^2 - 2xy + y^4$.
10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = x^4 + y^3 + z^2xy + x^2y^2z^2$ в окрестности точки $M(1, 1, 0)$.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ в квадрате $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4$. Постройте чертёж.
12. Вычислите приближённо $2,003^2 \cdot 3,998^3$.

Вариант 20

1. Найдите область определения функции $z = \ln(x + y^2 + 2)$. Сделайте чертёж.
2. Постройте график функции $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Укажите область определения функции.
3. Найдите частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $u = 3x^2y - e^{xy} + \sqrt{xy}$.
4. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$ сложной функции $z = xy$, если $x = \ln(1 + t^2)$ и $y = \arctgt$.
5. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = 2x - y^2$, если $x = \ln(u + v)$, $y = \ln u + \ln v$.
6. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $z^3 + zxy - x = 0$.
7. Функция $z = z(x, y)$ задана уравнением $z = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$. Найдите
 - а) производную в точке $M(1, 1)$ в направлении от точки M к точке $O(0, 0)$;
 - б) $\text{grad } z$ в точке $M(1, 1)$.
8. Запишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2z + y^2 + x^2 = 0$ в точке $M(1, 1, -1)$.
9. Исследуйте на экстремум функцию $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.
10. Запишите формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = x^2 + y^3 + zxy + x^3y^3z^3$ в окрестности точки $M(1, 1, 1)$.
11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2xy - 3x^2 - 3y^2 + 4x + 4y + 4$ в прямоугольнике $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$. Постройте чертёж.
12. Вычислите приближённо $1,08^{3,96}$.