ГЛАВА 4. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

§1. Неравенства Чебышева

Доказательство теоремы Чебышева основывается на неравенстве Чебышева. Докажем это неравенство.

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение (СВ) ξ от ее математического ожидания $M(\xi)$ по абсолютной величине меньше любого положительного числа ε удовлетворяет неравенству Чебышева

$$P(|\xi - M(\xi)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство для дискретных величин. Так как события $(|\xi - M(\xi)| < \varepsilon), (|\xi - M(\xi)| \geq \varepsilon)$– противоположны, то

$$P(|\xi - M(\xi)| < \varepsilon) = 1 - P(|\xi - M(\xi)| \geq \varepsilon). \qquad (1)$$

Отбросим в правой части дисперсии $D(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - M(\xi))^2 p_i$ те слагаемые, у которых $(|\xi - M(\xi)| < \varepsilon)$. Без нарушения общности будем считать, что отброшены первые k слагаемых. Тогда по теореме сложения вероятностей

$$D(\xi) \geq \sum_{j=k+1}^{n} (x_j - M(\xi))^2 p_j \geq \varepsilon^2 \sum_{j=k+1}^{n} p_j = \varepsilon^2 P(|\xi - M(\xi)| \geq \varepsilon),$$

так что

$$P(|\xi - M(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$P(|\xi - M(\xi)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2},$$

что и требовалось показать.

Поступая аналогично, можно получить и второе неравенство Чебышева: так как

$$M(|\xi|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| p_i \geq \sum_{j=k+1}^{n} |x_j| p_j \geq \varepsilon \sum_{j=k+1}^{n} p_j = \varepsilon P(|\xi| \geq \varepsilon),$$

то $P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{M(|\xi|)}{\varepsilon}$.

Теперь докажем первое неравенство Чебышева для непрерывных величин. По второму свойству плотности распределения с учетом условия нормировки

$$P\left(\left|\xi - M(\xi)\right| < \varepsilon\right) = \int\limits_{M(\xi)-\varepsilon}^{M(\xi)+\varepsilon} f_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx - \left[\int\limits_{-\infty}^{M(\xi)-\varepsilon} f_\xi(x)dx + \int\limits_{M(\xi)+\varepsilon}^{\infty} f_\xi(x)dx\right] =$$
$$= 1 - \left[\int\limits_{-\infty}^{M(\xi)-\varepsilon} f_\xi(x)dx + \int\limits_{M(\xi)+\varepsilon}^{\infty} f_\xi(x)dx\right] \qquad (3)$$

Так как для любого $x \in (-\infty, M(\xi) - \varepsilon]$ справедливо очевидное неравенство $\frac{(\xi - M(\xi))^2}{\varepsilon^2} \geq 1$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{M(\xi)-\varepsilon} f_\xi(x)dx \leq \int\limits_{-\infty}^{M(\xi)-\varepsilon} \frac{(x - M(\xi))^2}{\varepsilon^2} f_\xi(x)dx.$$

Аналогично для любого $x \in [M(\xi) + \varepsilon, \infty)$

$$\int\limits_{M(\xi)+\varepsilon}^{\infty} f_\xi(x)dx \leq \int\limits_{M(\xi)+\varepsilon}^{\infty} \frac{(x - M(\xi))^2}{\varepsilon^2} f_\xi(x)dx.$$

Тогда

$$\left[\int\limits_{-\infty}^{M(\xi)-\varepsilon} f_\xi(x)dx + \int\limits_{M(\xi)+\varepsilon}^{\infty} f_\xi(x)dx\right] \leq$$
$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\int\limits_{-\infty}^{M(\xi)-\varepsilon} (x - M)^2 f_\xi(x)dx + \int\limits_{M(\xi)+\varepsilon}^{\infty} (x - M)^2 f_\xi(x)dx\right] \leq \qquad (4)$$
$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M)^2 f_\xi(x)dx = \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$$

Из (3) с учетом (4) следует неравенство Чебышева

$$P\left(\left|\xi - M(\xi)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

§2. Теорема Чебышева

Рассмотрим последовательность попарно независимых (СВ)

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n \ldots$$

Пусть существуют $M(\xi_i)$, $D(\xi_i)$. Введем обозначение $\tilde{\xi}_n \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$.

Теорема Чебышева. Если для последовательности попарно независимых (СВ) $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n \ldots$ все дисперсии равномерно ограничены, т.е. $D(\xi_i) \le C$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\tilde{\xi}_n - M\left(\tilde{\xi}_n\right)\right| < \varepsilon\right) = 1 ,$$

где предел по вероятности $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\bar{\xi}_n - M\left(\bar{\xi}_n\right)\right| < \varepsilon\right) = 1$ означает, что для любых $\varepsilon > 0, \delta > 0$ существует такое $n(\varepsilon, \delta)$, начиная с которого выполняется неравенство $P\left(\left|\bar{\xi}_n - M\left(\bar{\xi}_n\right)\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta$.

Доказательство. Применим неравенство Чебышева к (СВ) $\tilde{\xi}_n \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$. При этом получим

$$P\left(\left|\tilde{\xi}_n - M\left(\tilde{\xi}_n\right)\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D\left(\tilde{\xi}_n\right)}{\varepsilon^2},$$

где согласно условию теоремы из-за независимости (СВ) и равномерной ограниченности

$$D\left(\tilde{\xi}_n\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i) \le \frac{C}{n},$$

так что

$$P\left(\left|\tilde{\xi}_n - M\left(\tilde{\xi}_n\right)\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{C}{\varepsilon^2 n}. \qquad (1)$$

Откуда, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\tilde{\xi}_n - M\left(\tilde{\xi}_n\right)\right| < \varepsilon\right) = 1 .$$

Замечание. Сущность закона больших чисел (теорема Чебышева) заключается в следующем: хотя нельзя предсказать, какое значение примет каждая из (СВ) ξ_i, но можно предсказать, что (СВ) $\tilde{\xi}_n \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$ достаточно большого числа (СВ) ξ_i с вероятностью (СВ) $P \approx 1$ примет значение близкое к определенному числу (СВ) $M(\tilde{\xi}_n)$, так что (СВ) $\tilde{\xi}_n \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ при достаточно большом числе ξ_i утрачивает характер случайной величины.

Пример. Пусть $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n \ldots$ – последовательность одинаково распределенных независимых в совокупности (СВ). Функция распределения каждой из них имеет вид

$$F_{\xi_i}(x) = A + B\,\mathrm{arctg}(x), \; -\infty < x < \infty.$$

Удовлетворяет ли данная последовательность теореме Чебышева?

Решение. Найдем постоянные A и B. Для этого воспользуемся свойством функции распределения $F(\infty) = 1,\; F(-\infty) = 0$. Используя это свойство, получим систему уравнений

$$F_{\xi_i}(\infty) = A + B\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$F_{\xi_i}(-\infty) = A - B\frac{\pi}{2} = 0,$$

откуда получим $A = \frac{1}{2},\; B = \frac{1}{\pi}$. Тогда плотность распределения

$$f_{\xi_i}(x) = \frac{dF_{\xi_i}(x)}{dx} = \frac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)}.$$

Для такой плотности распределения

$$M(\xi_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi\left(1 + x^2\right)}\, dx = 0,$$

$$D(\xi_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\pi\left(1 + x^2\right)}\, dx = \infty.$$

Из-за неограниченности дисперсий данная последовательность не удовлетворяет теореме Чебышева.

§3. Теорема Бернулли

Теорема Бернулли является частным случаем теоремы Чебышева. Пусть эксперимент проводится по схеме Бернулли.

Теорема Бернулли. Если эксперимент проводится по схеме Бернулли, то

$$\lim_{n\to\infty} P(|W(A)-p|<\varepsilon)=1$$

Доказательство. Пусть ξ – (СВ) числа появлений события А в n независимых испытаниях, 0,1, … n – ее возможные значения. Тогда ξ можно представить в виде $\xi=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, где ξ_i – (СВ) числа появлений события А в i-ом испытании, которая принимает значения либо 0, либо 1 с вероятностями равными $(1-p)$ и p соответственно. При этом значение (СВ) $\tilde{\xi}_n \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ равно относительной частоте появлений события А в n независимых испытаниях $W(A)=\frac{m_*}{n}$. Следовательно,

$$M(\xi_i)=p, D(\xi_i)=p(1-p),$$

так что по свойству математического ожидания

$$M(\tilde{\xi}_n)=\frac{1}{n}M\left[\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(\xi_i)=p\ .$$

Так как $p\le 1, q=1-p\le 1$, все дисперсии равномерно ограничены $D(\xi_i)=p(1-p)\le 1$. Тогда, если эксперимент проводится по схеме Бернулли, то по теореме Чебышева

$$\lim_{n\to\infty} P(|\tilde{\xi}_n - M(\tilde{\xi}_n)|<\varepsilon)=\lim_{n\to\infty} P(|W(A)-p|<\varepsilon)1=1,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Теорема Бернулли является теоретическим обоснованием статистического определения вероятности.

§4. Теорема Ляпунова

Нормально распределенные (СВ) величины часто встречаются на практике. Центральная предельная теорема (теорема Ляпунова) разъясняет этот факт. Пусть дана бесконечная последовательность (СВ) $\xi_1,\xi_2,\xi_3,....\xi_n......$ Пусть существуют их математические ожидания и дисперсии $\gamma_i \equiv M(\xi_i),\ \sigma_i \equiv D(\xi_i)c$.

Определение. Говорят, что последовательность (СВ) $\xi_1,\xi_2,\xi_3,....\xi_n......$ имеет асимптотически нормальное распределение с центром γ_i и средним квадратичным σ_i, если

$$\lim_{i\to\infty} P\left(\frac{|\xi_i-\gamma_i|}{\sigma_i}<t\right)=2\Phi_0(t),$$

где $\Phi_0(x)$– функция Лапласа.

Теорема Ляпунова. Если взаимно независимые (СВ) ξ_i имеют конечные абсолютные моменты третьего порядка

$$\mu_i \equiv M\left(|\xi_i-\gamma_i|^3\right)$$

и если эти моменты удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\mu_i}{\sigma_n^3}\right)=0,$$

то сумма $\bar{\xi}_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ имеет асимптотически нормальное распределение с центром $\gamma_n = M(\bar{\xi}_n)$ и средним квадратичным $\sigma_n=\sqrt{D(\bar{\xi}_n)}$.

Доказательство. Введем величину $Z_n \equiv \frac{\bar{\xi}_n-\gamma_n}{\sigma_n}\equiv\frac{1}{\sigma_n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i$, $\eta_i=\xi_i-\gamma_i$. Тогда

$$P(|Z_n|<t)=\int_{-t}^{t} f_{Z_n}(z)dz=\frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itz}g_{Z_n}(t)dtdz, \qquad (1)$$

где $g_{Z_n}(t)$ – характеристическая функция. Совершим предельный переход в (1) под знак интеграла

$$\lim_{n\to\infty}P(|Z_n|<t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-t}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itz}\lim_{n\to\infty}\left(g_{Z_n}(t)\right)dtdz. \qquad (2)$$

По первому и второму свойствам характеристическая функция

$$g_{Z_n}(t)=\prod_{j=1}^{n}g_{\eta_j}\left(\frac{t}{\sigma_n}\right),$$

где

$$g_{\eta_j}\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{ity}{\sigma_n}}f_{\eta_j}(y)dy,\ y=x-\gamma_j.$$

Разлагая по формуле Тейлора экспоненту по степеням $\frac{1}{\sigma_n}$ и ограничиваясь членами $\frac{1}{\sigma_n^2}$, получим

$$g_{\eta_j}\left(\frac{t}{\sigma_n}\right)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta_j}(y)dy+\frac{it}{\sigma_n}\int_{-\infty}^{\infty} yf_{\eta_j}(y)dy-\frac{t^2}{2\sigma_n^2}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{\eta_j}(y)dy+R_n$$

Здесь

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta_j}(y)dy=1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} yf_{\eta_j}(y)dy=M(\eta_i)=M(\xi_i-\gamma_i)=0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_{\eta_j}(y)dy=M\left(\eta_i^2\right)=D(\eta_i)=D(\xi_i-\gamma_i)=D(\xi_i).$$

а остаточный член R_n представляет собой бесконечно малую более высокого порядка, чем $\frac{1}{\sigma_n^2}$ (доказательство последнего утверждения опускаем). Таким образом,

$$g_{z_n}(t)=\prod_{j=1}^{n}\left[1-\frac{t^2 D(\xi_i)}{2D(\bar{\xi}_n)}\right].$$

Пусть $D(\xi_1)=D(\xi_2)=......$ Тогда $g_{z_n}(t)=\left[1=\frac{t^2}{2n}\right]$ и, следовательно, по второму замечательному пределу

$$\lim_{n\to\infty} g_{z_n}(t)=\lim_{n\to\infty}\left[1=\frac{t^2}{2n}\right]=e^{-\frac{t^2}{2}}. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим

$$I(z)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(zt)e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (4)$$

Интеграл $I(z)$ вычислим методом дифференцирования по параметру z. Для этого продифференцируем этот интеграл по параметру z, а затем проинтегрируем по частям. При этом получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dI(z)}{dz} = -zI(z). \tag{5}$$

Решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными (5) имеет вид

$$I(z) = I_0 e^{-\frac{z^2}{2}},$$

где константа интегрирования I_0 находится из условия нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} I(z)dz = 1$ и равна $I_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, так что

$$I(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

и окончательно

$$\lim_{n\to\infty} P(|Z_n| < t) = 2\Phi_0(t),$$

что и требовалось показать.

§5. Формулы Муавра-Лапласа

Первая интегральная формула Муавра-Лапласа. Если эксперимент проводится по схеме Бернулли, то справедлива интегральная формула Муавра-Лапласа

$$P(m_1 < m < m_2) = \Phi_0\left(\frac{m_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{m_1 - a}{\sigma}\right).$$

Проверим выполнение условий теоремы Ляпунова. Для этого вычислим абсолютные моменты третьего порядка

$$\mu_i = M\left(|\xi_i - M(\xi_i)|^3\right) = M\left(|\xi_i - p|^3\right).$$

Ряд распределения куба модуля отклонения имеет вид

$\lvert \xi_i - p \rvert^3$	p^3	q^3
p_i	q	p

Откуда следует

$\mu_i = M\left(\lvert \xi_i - M(\xi_i) \rvert^3\right) = M\left(\lvert \xi_i - p \rvert^3\right) = pq\left(q^2 + p^2\right), \ \sum_{i=1}^{n} \mu_i = npq\left(q^2 + p^2\right), \sigma_n = \sqrt{npq}$,

так что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sigma_n^3} \lim_{n\to\infty} \frac{npq\left(q^2 + p^2\right)}{(pq)^{3/2} n^{3/2}} = \frac{q^2 + p^2}{(pq)^{3/2}} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0 .$$

Независимость случайных величин следует из независимости испытаний. Таким образом, условия теоремы Ляпунова для испытаний, проводимых по схеме Бернулли, выполняются. Тогда закон распределения (СВ) $\bar{\xi}_n$ можно считать приближенно нормальным при достаточно большом числе испытаний, т.е.

$$P\left(\frac{\lvert \bar{\xi}_n - \gamma_n \rvert}{\sigma_n} < t\right) \approx 2\Phi_0(t) = \Phi_0(t) - \Phi_0(-t), \qquad (1)$$

где для схемы Бернулли $\gamma_n = M(\bar{\xi}_n) = \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i) = np, \ \sigma_n = \sigma = \sqrt{npq}$. Представим неравенство $\left(\frac{\lvert \bar{\xi}_n - \gamma_n \rvert}{\sigma_n} < t\right)$ в эквивалентном виде

$$np - t\sigma < \bar{\xi}_n < np + t\sigma , \qquad (2)$$

и введем обозначения

$$\begin{cases} np - t\sigma = m_1, \\ np + t\sigma = m_2. \end{cases}$$

Откуда находим $-t = \frac{m_1 - np}{\sigma}, \ t = \frac{m_2 - np}{\sigma}$, так что согласно (1)

$$P(m_1 < \bar{\xi}_n < m_2) = \Phi_0\left(\frac{m_2 - np}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{m_1 - np}{\sigma}\right). \qquad (3)$$

Вторая интегральная формула Муавра-Лапласа. Представим двойное неравенство $\left(-t < \frac{\bar{\xi}_n - \gamma_n}{\sigma_n} < t\right)$ в эквивалентном виде

$-\frac{t\sigma_n}{n} < W(A) - p < \frac{t\sigma_n}{n}$, $\frac{\bar{\xi}_n}{n} = W(A)$, $\sigma_n = \sqrt{npq}$ и введем обозначение $\frac{t\sigma_n}{n} = \varepsilon$. Тогда $|W(A) - p| < \varepsilon$ и с учетом нечетности функции Лапласа интегральная формула Муавра-Лапласа примет вид

$$P\left(|W(A) - p| < \varepsilon\right) = 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Дифференциальная формула Лапласа. Пусть $m_2 = m_1 + 1$. Тогда из формулы (3) получим локальную формулу Лапласа:

$$P(m_1) \approx P\left(m_1 < \bar{\xi}_n < m_1 + 1\right) = \Phi_0\left(\frac{m_1 + 1 - np}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{m_1 - np}{\sigma}\right) \approx \Phi_0'\left[\frac{m_1 np}{\sigma}\right] \cdot \frac{1}{\sigma} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left[\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right],$$

где $\varphi(x) = \Phi_0'(x)$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Пример. В эпоху зарождения теории вероятностей существовала проблема, известная под названием «парадокс Муавра»: с одной стороны, по теореме Бернулли вероятность того, что число гербов ***приближенно*** равно числу решеток стремится к 1, а с другой стороны, вероятность того, что число гербов в ***точности*** совпадает с числом решеток, стремится к 0.

Решение. Противоречие было окружено атмосферой парадоксальности до тех пор, пока де Муавр не разрешил его. Последуем его примеру.

Когда монету бросают $2n$ раз, то согласно формуле Бернулли вероятность того, что герб выпадет ровно n раз, равна

$$P_{2n}(n) = C_n^{2n}(pq)^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} 2^{-2n},$$

и для больших n с учетом формулы Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ вероятность

$$P_{2n}(n) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} 2^{-2n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

так что

$$\lim_{n\to\infty} P_{2n}(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = 0.$$

Таким образом, вероятность того, что число гербов в ***точности*** совпадает с числом решеток, стремится к 0.

С другой стороны, по теореме Бернулли вероятность того, что число гербов ***приближенно*** равно числу решеток стремится к 1.

Пусть Γ_n – (СВ) числа гербов; P_n – (СВ) числа решеток; m_g – число гербов; m_r – число решеток; $m_r + m_g = n$. По теореме Бернулли

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\left|W(\Gamma) - p(\Gamma)\right| < \varepsilon\right] = 1,\ W(\Gamma) = \frac{\Gamma_n}{n}.$$

Так как $m_r + m_g = n$, то $\Gamma_n - np(\Gamma) = \frac{(\Gamma_n - \mathrm{P}_n)}{2} + n\left(\frac{1}{2} - p(\Gamma)\right) = \frac{(\Gamma_n - \mathrm{P}_n)}{2}$, и, следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\frac{|\Gamma_n - \mathrm{P}_n|}{2n} < \varepsilon\right] = 1.$$

Таким образом, согласно закону больших чисел Бернулли, вероятность того, что разность $\Gamma_n - \mathrm{P}_n$ становится пренебрежимо малой величиной по сравнению с n, стремится к 1.

Если случайный эксперимент проводится по схеме Бернулли, то согласно теореме Ляпунова имеет место соотношение, известное под названием «предельная теорема Муавра-Лапласа»,

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\frac{|\Gamma_n - np|}{\sqrt{npq}} < \varepsilon\right] = \lim_{n \to \infty} P\left[\left|\frac{\Gamma_n}{n} - p\right| < \varepsilon\sqrt{\frac{pq}{n}}\right] = 2\Phi_0(\varepsilon),\ \varepsilon > 0,$$

откуда при $p = q = \frac{1}{2}$ следует

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\left|\frac{\Gamma_n}{n} - p\right| < \varepsilon\sqrt{\frac{pq}{n}}\right] = \lim_{n \to \infty} P\left[\left|\Gamma_n - \mathrm{P}_n\right| < \varepsilon\sqrt{n}\right] = 2\Phi_0(\varepsilon).$$

Таким образом, разность $|\Gamma_n - \mathrm{P}_n|$ не является пренебрежимо малой величиной по сравнению с $\sqrt{n}$. Например, для $n = 3600$ вероятность того, что разность $|\Gamma_n - \mathrm{P}_n|$ не превосходит 6, равна

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\left|\Gamma_n - \mathrm{P}_n\right| < 60\varepsilon\right] = 2\Phi_0(0.1). \approx 0.08,$$

а вероятность того, что разность $|\Gamma_n - \mathrm{P}_n|$ не превосходит 60 уже равна

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\left|\Gamma_n - \mathrm{P}_n\right| < 60\varepsilon\right] = 2\Phi_0(1). \approx 0.68,$$

так что формула Муавра-Лапласа устанавливает связь между нулевой и единичной вероятностями.