ГЛАВА 3. СТАНДАРТНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§1. Биномиальное распределение

Пусть эксперимент проводится по схеме Бернулли.
Определение. Дискретная случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами n, p, если вероятности отдельных ее возможных значений определяются формулой Бернулли:

$$P(\xi = m) \equiv P(m, p) = C_m^n p^m (1-p)^{n-m},$$
$$m = 0,1,...n, \; n = 1,2,...., \; 0 \le p \le 1$$

Случайная величина, имеющая биномиальное распределение с параметрами n, p, представляет собой число наступлений события А в n ***независимых*** испытаниях, в каждом из которых вероятность наступления этого события равняется p.

График биномиального распределения вероятностей представлен на Рис. 1.

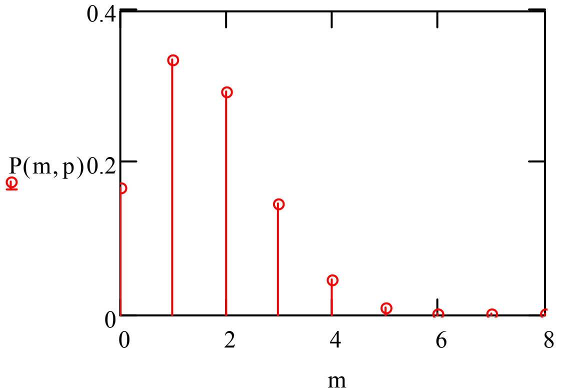

Рис. 1. Биномиальное распределение $P(m, p)$ при $n = 8$ и $p = 0.2$.

Найдем основные числовые характеристики биномиального распределения. Для этого сначала введем обозначения. Пусть ξ – (СВ) числа появлений события А в n независимых испытаниях, $0,1, \ldots n$ – ее возможные значения. Тогда ξ можно представить в виде $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, где ξ_i – (СВ) числа появлений события А в i-ом испытании, которая принимает значения либо 0, либо 1 с вероятностями равными $(1-p)$ и p соответственно. Следовательно,

$$M(\xi_i) = p, D(\xi_i) = p(1-p),$$

так что по свойству математического ожидания

$$M(\xi) = M\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i) = np.$$

Аналогично, дисперсия биномиального распределения равна

$$D(\xi) = D\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D(\xi_i) = np(1-p),\ \sigma(\xi) = \sqrt{np(1-p)}.$$

Найдем коэффициент асимметрии $A_s = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ и коэффициент эксцесса $E_k = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$. Для этого найдем соответствующие центральные моменты

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = D(\xi),\ \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3, \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4.$$

Так как по определению начальный момент второго порядка равен $\nu_2 = \sum_m m^2 P(m, p)$ и $\nu_2 = D(\xi) + M^2(\xi) = np(1-p) + (np)^2$, то, с одной стороны,

$$\frac{\partial \nu_2}{\partial p} = \sum_m m^2\left[\frac{m}{p} - \frac{(n-m)}{p}\right] P(m, p) = \frac{\nu_3}{pq} - \frac{n\nu_2}{q},$$

а, с другой стороны,

$$\frac{\partial \nu_2}{\partial p} = n(q-p) + 2pn^2,$$

откуда следует $\nu_3 = npq(q-p) + 3q(np)^2 + (np)^3$. С учетом полученных соотношений для центрального момента третьего порядка получим

$$\mu_3 = npq(q-p),\ q \equiv 1-p,$$

так что ***коэффициент асимметрии*** равен

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{(q-p)}{\sqrt{npq}}.$$

Аналогично, ***коэффициент эксцесса***

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{1-6pq}{npq}.$$

Мода биномиального распределения определяется выражением

$$Mo = \mathrm{trunc}[(n+1)p],$$

где функция $\mathrm{trunc}[(n+1)p]$ обозначает целую часть числа $[(n+1)p]$. Если число $[(n+1)p]$ – целое, то распределение имеет два модальных значения $[(n+1)p]$ и $[(n+1)p]$-1.

Медиана биномиального распределения равна

$$Me = np \ ,$$

если np – целое число. Если же np – дробное число, то медиана равна одному из двух целых чисел $\mathrm{trunc}[np] \pm 1$, ближе всего расположенных к np.

Из Рис. 1. видно, что последовательность вероятностей $P(m, p)$ сначала монотонно возрастает с увеличением m – до достижения моды $Mo = \mathrm{trunc}[(n+1)p] = \mathrm{trunc}[1.6] = 1$ (или двух модальных значений), а затем начинает монотонно падать.

Определение. Дискретная случайная величина ξ имеет геометрическое распределение, если вероятности отдельных ее возможных значений определяются формулой:

$$P(m) = q^{m-1} p,$$

где ξ – (СВ) числа испытаний, проводимых до первого появления события А; p – вероятность появления события А в каждом отдельном испытании, $q = 1 - p$; m – число испытаний, проводимых до первого появления события А.

Геометрическое распределение имеет следующие числовые характеристики:

$$M(\xi) = \frac{1}{p}, \ D(\xi) = \frac{q}{p^2}.$$

Таким образом, математические испытания геометрического распределения удовлетворяют правилу пропорциональности: для получения события А дважды в среднем потребуется в $\frac{1}{p}$ раз больше испытаний, чем для получения одного события.

Определение. Дискретная случайная величина ξ имеет гипергеометрическое распределение, если вероятности отдельных ее возможных значений определяются формулой:

$$P(m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

где $N-$ общее число элементов некоторого множества А, $M-$ число элементов подмножества А, обладающих некоторым свойством; испытание состоит в отборе наугад n элементов, среди которых m обладают указанным свойством; $\xi-$ (СВ) числа наугад выбранных элементов, обладающих указанным свойством.

Гипергеометрическое распределение имеет следующие числовые характеристики:

$$M(\xi)=\frac{nM}{N},\ D(\xi)=\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

Определение. Дискретная случайная величина ξ имеет полимодальное распределение, если вероятности отдельных ее возможных значений определяются формулой:

$$P(X_1,X_2,\ X_3...X_k\ )=\frac{n!}{X_1!X_2!...X_k!}p_1^{X_1}p_2^{X_2}...p_k^{X_k},$$

где X_1- число элементов, обладающих свойством А, X_2- число элементов, обладающих свойством В, … X_k- число элементов, обладающих свойством С; $A+B+....+C=n$ – общее число элементов; p_1- вероятность выбора элемента, обладающего свойством А, p_2- вероятность выбора элемента, обладающего свойством В, … p_k- вероятность выбора элемента, обладающего свойство С; испытание состоит в отборе n элементов, среди которых X_1 обладают свойством А, X_2 – свойством В, …. X_k – свойством С; $\xi-$ (СВ) числа наугад выбранных элементов, обладающих указанными свойствами.

§2. Распределение Пуассона

Определение. Дискретная случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром λ, если вероятности отдельных ее возможных значений определяются формулой:

$$P(\xi=m)\equiv P(m,\lambda)=\frac{\lambda^m\exp(-\lambda)}{m!},$$
$$m=0,1,...\infty,\ \lambda>0$$

График распределения Пуассона представлен на Рис. 2.

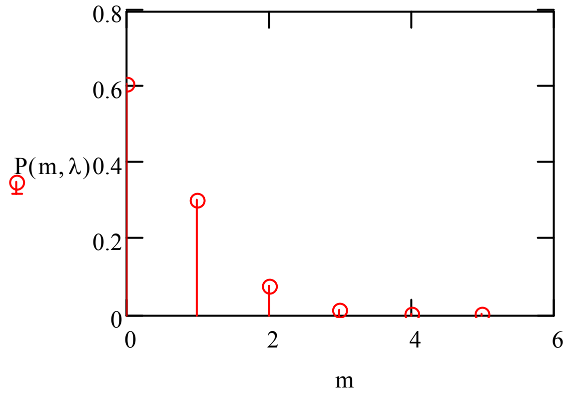

Рис. 2. Распределение Пуассона $P(m,\lambda)$ при $\lambda = 0.5$.

Найдем основные числовые характеристики распределения Пуассона.

Разложим экспоненту e^{λ} в ряд Маклорена $e^{\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!}$. Тогда

$$M(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} mP(m,\lambda) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda .$$

Аналогично, для среднего квадрата получим

$$M\left(\xi^2\right) = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 P(m,\lambda) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda e^{-\lambda}(1+\lambda)e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda ,$$

так что дисперсия

$$D(\xi) = M\left(\xi^2\right) - (M(\xi))^2 = \lambda .$$

Остальные числовые характеристики распределения Пуассона следующие: коэффициент асимметрии $A_S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, коэффициент эксцесса $E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{1}{\lambda}$. Если λ – дробное число, то мода $Mo = \mathrm{trunc}[\lambda]$, а если число λ – целое число, то распределение Пуассона имеет два модальных значения λ и $\lambda - 1$. Медиана распределения Пуассона равна $Me = \lambda$, если λ – целое число. Если же λ – дробное число, то медиана равна одному из двух целых чисел $\mathrm{trunc}[\lambda] \pm 1$, ближе всего расположенных к λ.

Отметим, что последовательность вероятностей $P(m, p)$ сначала монотонно возрастает с увеличением m – до достижения моды (или двух модальных значений), а затем начинает монотонно убывать.

§3. Закон равномерного распределения

Определение. Распределение непрерывной (СВ) называют равномерным, если на интервале, содержащем возможные значения непрерывной (СВ), плотность распределения является константой, т.е.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x \le a \\ A, & a < x \le b \\ 0, & x > b\end{cases} \qquad (1)$$

В точках $x=a, x=b$ плотность $f(x)$ – терпит разрыв. Константу А найдем из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = A\int_a^b dx = A(b-a) = 1,$$

так что $A=\frac{1}{b-a}$. Для нахождения функции распределения воспользуемся свойством $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$. При этом получим:

1) при $(-\infty < x \le a)$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$;

2) при $(a < x \le b)$ $F(x)=\int_{-\infty}^{a} 0dx + \frac{1}{b-a}\int_a^x dx = \frac{x-a}{b-a}$;

3) при $(x > b)$ $F(x)=\int_{-\infty}^{a} 0dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b dx + \int_b^x 0dx = 1$;

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b\end{cases} \qquad (2)$$

откуда видно, что функция распределения $F(x)$ всюду непрерывна.

Определим числовые характеристики равномерного распределения.

С учетом (1) математическое ожидание и дисперсия равны:

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{a+b}{2},$$

$$D(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(\xi))^2 f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b (x-M(\xi))^2 dx=\frac{(b-a)^2}{12},\ \sigma(\xi)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Если $(\alpha,\beta)\in(a,b)$, то по свойству функции распределения (2)

$$P(\alpha\le\xi<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Пример. Жеглов и Фокс условились встретиться в ресторане между 0 и 2 часами. Пришедший первым Жеглов ждет Фокса в течение 10 минут, после чего уходит, а Фокс ждет 20 мин. Чему равна вероятность встречи этих лиц, если моменты прихода каждого из них независимы и распределены равномерно в интервале $(0{,}2)$.

Решение. Пусть ξ – (СВ) времени прихода Жеглова, x – возможные значения ξ; η – (СВ) времени прихода Жеглова, y – возможные значения η. По задачи плотность вероятности системы (СВ) $\{\xi,\eta\}$ равна

$$f_{\xi\eta}(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y)=\frac{1}{(2-0)^2}=\frac{1}{4}.$$

Тогда

$$P[(\xi,\eta)\in D]=\frac{1}{4}\iint\limits_D dxdy, \tag{1}$$

где по условию задачи область интегрирования ограничена следующими линиями:

$$D:\begin{cases} x=2, y=2, y=x+\dfrac{1}{6} \\ x=0, y=0,\ y=x-\dfrac{1}{3} \end{cases}. \tag{2}$$

Учитывая (2), из (1) получим

$$P[(\xi,\eta)\in D]=\frac{1}{4}\iint\limits_D dxdy=\frac{1}{4}\left[\iint\limits_{D_1} dxdy+\iint\limits_{D_2} dxdy+\iint\limits_{D_3} dxdy\right], \tag{3}$$

здесь

$$D_1:\begin{cases} x=\dfrac{1}{3},\ y=x+\dfrac{1}{6}, \\ x=0, y=0. \end{cases} D_2:\begin{cases} x=\dfrac{11}{6},\ y=x+\dfrac{1}{6}, \\ x=\dfrac{1}{3}, y=x-\dfrac{1}{3}. \end{cases}, D_3:\begin{cases} x=2,\ y=2, \\ x=\dfrac{11}{6}, y=x-\dfrac{1}{3}. \end{cases} \quad (4)$$

С учетом (4) из (3) окончательно найдем

$$P[(\xi,\eta)\in D]=\frac{1}{4}\left[\int_0^{1/3}dx\int_0^{x+1/6}dy+\int_{1/3}^{11/6}dx\int_{x-1/3}^{x+1/6}dy+\int_{11/6}^{2}dx\int_{x-1/3}^{2}dy\right]=\frac{67}{288}.$$

§4. Интеграл Эйлера-Пуассона

Интегралом Эйлера-Пуассона называют несобственный интеграл вида

$$I\equiv\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=2\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx.$$

Этот интеграл часто будет встречаться в дальнейшем. Вычислим его способом Пуассона. Для этого рассмотрим двойной интеграл

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\frac{I^2}{4}.$$

Проведем вычисление этого интеграла в полярных координатах

$$\begin{cases} x=\rho\cos(\varphi) \\ y=\rho\sin(\varphi) \\ \rho^2=x^2+y^2 \end{cases}$$

Тогда

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}e^{-\rho^2}\rho d\rho d\varphi=\frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}e^{-\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{4}=\frac{I^2}{4},$$

откуда следует, что $I=\sqrt{\pi}$, что и требовалось получить.

§5. Нормальный закон распределения

Среди всех законов распределения (СВ) наибольшее теоретическое и практическое значение имеет нормальный закон распределения. Дело в том, что согласно центральной предельной теореме он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях.

Определение. Распределение непрерывной (СВ) ξ называют нормальным (кратко $N\left(a,\sigma^2\right)$), если соответствующая ей плотность распределения выражается формулой

$$f_\xi\left(x,a,\sigma^2\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right],\ -\infty<x<\infty,\sigma>0\,,$$

где a,σ – параметры распределения. Используя интегральную связь функции распределения с плотностью распределения, представим функцию нормального распределения в удобном для табулирования виде

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(x,a,\sigma)dx=\Phi_1\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где функция Лапласа $\Phi_1(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, для которой составлены таблицы.

Кроме того, составлены таблицы и для функции $\Phi_0(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Между этими функциями существует очевидное соотношение $\Phi_1(x)=\Phi_0(x)-0.5$.

График нормального распределения представлен на Рис. 3.

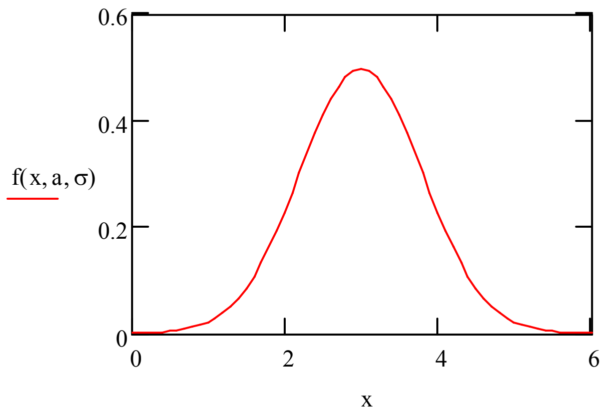

Рис. 3. Нормальное распределение $f(x,3,0.8)$.

Для выяснения вероятностного смысла параметров a, σ определим основные числовые характеристики (СВ), распределенной по нормальному закону. По свойству математического ожидания $M(\xi) = a + M(\xi - a)$, где

$$M(\xi - a) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a) f(x, a, \sigma) dx = 0,$$

так как подынтегральная функция четная, а пределы симметричные, так что параметр a нормального распределения является математическим ожиданием $M(\xi) = a$, и, следовательно, $Mo = Me = a$. Аналогично, центральный момент третьего порядка $\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^3 f(x, a, \sigma) dx = 0$, так что коэффициент асимметрии $A_S = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$.

Используя интеграл Эйлера-Пуассона, дисперсию вычислим непосредственно по определению

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 f(x, a, \sigma) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 \exp\left(-\frac{(x - a)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \left| \begin{matrix} t = \dfrac{x - a}{\sigma\sqrt{2}} \\ dx = \sigma\sqrt{2} dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp\left(-t^2\right) dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left[-t^2 e^{-t^2} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-t^2\right) dt \right] = \sigma^2$$

так что параметр σ^2 нормального распределения является дисперсией $D(\xi) = \sigma^2$.

Центральный момент четвертого порядка вычислим по методу дифференцирования интеграла по параметру. Для этого в качестве дифференцируемого интеграла используем интеграл Эйлера-Пуассона

$$I_0(h) \equiv \int_0^{\infty} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}, \ h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}.$$

Тогда центральный момент четвертого порядка

$$\mu_4 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^4 \exp\left[-\frac{(x - a)^2}{2\sigma^2}\right] dx = -\frac{1}{\sigma h\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial h} \left[-\frac{1}{2h} \frac{\partial}{\partial h} I_0(h) \right] = \frac{3\sqrt{\pi}}{4h^5 \sigma\sqrt{2\pi}} = 3\sigma^4$$

и, следовательно, коэффициент эксцесса нормального распределения

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 0.$$

Пример. Бомбардировщик, пролетевший вдоль моста через реку Томь, длина которого 30 м и ширина 8 м, сбросил бомбы. Случайные величины ξ и η независимы и распределены нормально со среднеквадратичными отклонениями, соответственно равными 6 и 4 м, математическими ожиданиями, равными 0. Здесь ξ – случайная величина расстояния от вертикальной оси симметрии моста до места падения бомбы; η – случайная величина расстояния от горизонтальной оси симметрии моста до места падения бомбы. Найти: 1) вероятность попадания в мост одной бомбы; 2) вероятность разрушения моста, если сброшены 2 бомбы, причем известно, что для разрушения моста достаточно одного попадания.
Решение. Вероятность попадания одной бомбы равна

$$P[(\xi,\eta)\in D]=\iint\limits_D f(x,y)dxdy. \qquad (1)$$

Так как ξ и η независимы, то $f(x,y)=f_\xi(x)f\eta(y)$. По условию задачи область интегрирования ограничена следующими линиями:

$$D:\begin{cases} x=15, \ \ y=4 \\ x=-15, \ \ y=-4 \end{cases} \qquad (2)$$

Тогда из (1) с учетом (2) получим

$$P[(\xi,\eta)\in D]=\left(\int\limits_{-15}^{15} f_\xi(x)dx\right)\left(\int\limits_{-4}^{4} f_\eta(y)dy\right)=\frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-\frac{15}{\sigma_\xi}}^{\frac{15}{\sigma_\xi}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right]dt\right]\left[\int\limits_{-\frac{4}{\sigma_\eta}}^{\frac{4}{\sigma_\eta}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right]dt\right]=$$

$$=[\Phi_1(2.5)-\Phi_1(-2.5)][\Phi_1(1)-\Phi_1(-1)]=0.6741$$

Для получения ответа на вторую часть вопроса задачи введем обозначения:
A_1 – событие, состоящее в попадании в цель первой бомбы; A_2 – событие, состоящее в попадании в цель второй бомбы. Тогда вероятность попадания в мост хотя бы одной бомбы по теореме сложения вероятностей совместных событий и теореме умножения вероятностей независимых событий равна

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2)=2\cdot 0.6741-(0.6741)^2=0.8938.$$

§6. Распределения Вейбулла, Рэлея, показательное

Определение. Распределение непрерывной (СВ) ξ называют показательным, если соответствующая ей плотность распределения выражается формулой

$$f_\xi(x,\lambda)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases},$$

где λ – параметр распределения, который одновременно определяет моду этого распределения $Mo=\lambda$. Функция показательного распределения равна

$$F_\xi(x,\lambda)=\int_{-\infty}^{x} f_\xi(x,\lambda)dx=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$$

График плотности показательного распределения представлен на Рис. 4.

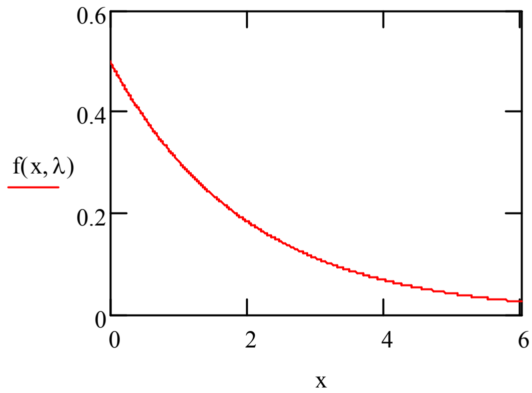

Рис. 4. Показательное распределение $f(x,0.5)$.

Числовые характеристики показательного распределения:

$$M(\xi)=\lambda\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty te^{-t}dt=\frac{1}{\lambda},$$

$$D(\xi)=\lambda\int_0^\infty\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda x}dx=\frac{e^{-1}}{\lambda^2}\int_{-1}^\infty t^2e^{-t}dt=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma=\frac{1}{\lambda},$$

$$\mu_3=\lambda\int_0^\infty\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)^3 e^{-\lambda x}dx=\frac{e^{-1}}{\lambda^3}\int_{-1}^\infty t^3e^{-t}dt=\frac{2}{\lambda^3},\ A_S=\frac{\mu_3}{\sigma^3}=2,$$

$$\mu_4=\lambda\int_0^\infty\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)^4 e^{-\lambda x}dx=\frac{e^{-1}}{\lambda^4}\int_{-1}^\infty t^4e^{-t}dt=\frac{9}{\lambda^4},\ E_k=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=6.$$

Из определяющего медиану условия

$$P(\xi<Me)=\lambda\int_0^{Me}e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda Me}=P(\xi>Me)=\lambda\int_{Me}^\infty e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda Me}=\frac{1}{2},$$

следует, что медиана показательного распределения равна

$$Me = \frac{\ln(2)}{\lambda}.$$

Показательный закон используется в теории надежности, в которой надежность устройства характеризуется функцией надежности. Функцией надежности $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t:

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t).$$

Для показательного закона $R(t) = P(T > t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$. Показательный закон удобен тем, что он обладает следующим свойством: вероятность безотказной работы элемента на интервале времени длительностью t не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого интервала, а зависит только от длительности времени t.

Для доказательства этого свойства введем обозначения событий:
А – безотказная работа элемента на интервале $(0, t_0)$ длительностью t_0; В – безотказная работа элемента на интервале $(0, t_0 + t)$ длительностью t. Тогда АВ – безотказная работа элемента на интервале $(t_0, t_0 + t)$ длительностью $t_0 + t$. Вероятности этих событий определяются функцией надежности и равны

$$P(A) = e^{-\lambda t_0},\ P(B) = e^{-\lambda t},\ P(AB) = e^{-\lambda(t_0 + t)},$$

откуда найдем условную вероятность того, что элемент будет работать безотказно на интервале $(t_0, t_0 + t)$ при условии, что он уже проработал безотказно на предшествующем интервале $(0, t_0)$,

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = e^{-\lambda t}.$$

Полученная формула не содержит t_0, так что время работы на предшествующем интервале не сказывается на величине вероятности безотказной работы на последующем интервале, что и требовалось показать. Можно показать, что таким свойством обладает только показательное распределение. Это означает, что если на практике изучаемая величина этим свойством обладает, то она распределена по показательному закону.

Определение. Распределение непрерывной (СВ) ξ называют распределением Рэлея, если соответствующая ей плотность распределения выражается формулой

$$f_\xi(x,\lambda)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{\lambda^3}{2}x^2e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases},$$

где λ – параметр распределения. Функция распределения Рэлея равна

$$F_\xi(x,\lambda)=\int_{-\infty}^{x} f_\xi(x,\lambda)dx=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-\dfrac{\left[1+(1+\lambda x)^2\right]}{2}e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$$

График плотности распределения Рэлея представлен на Рис. 5.

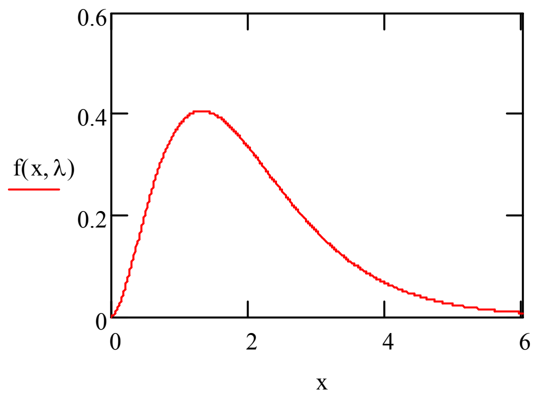

Рис. 5. Распределение Рэлея $f(x,1.5)$.

Числовые характеристики распределения Рэлея:

$$M(\xi)=\frac{\lambda^3}{2}\int_0^\infty x^3e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{2\lambda}\int_0^\infty t^3e^{-t}dt=\frac{3}{\lambda},$$

$$D(\xi)=\frac{\lambda^3}{2}\int_0^\infty\left(x-\frac{3}{\lambda}\right)^2x^2e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{2\lambda^2}\int_0^\infty t^2(t-3)^2e^{-t}dt=\frac{3}{\lambda^2},\ \sigma=\frac{\sqrt{3}}{\lambda},$$

$$\mu_3=\frac{\lambda^3}{2}\int_0^\infty\left(x-\frac{3}{\lambda}\right)^3x^2e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{2\lambda^3}\int_0^\infty t^2(t-3)^3e^{-t}dt=\frac{6}{\lambda^3},\ A_s=\frac{\mu_3}{\sigma^3}=\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\mu_4=\frac{\lambda^3}{2}\int_0^\infty\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)^4x^2e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{2\lambda^4}\int_0^\infty t^2(t-3)^4e^{-t}dt=\frac{45}{\lambda^4},\ E_k=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=2.$$

Из определяющего моду необходимого условия экстремума $f'(x)=0$ нетрудно найти моду $Mo=\frac{2}{\lambda}$. Из определяющего медиану условия

$$P(\xi<Me)=F(Me)=P(\xi>Me)=1-F(Me)=\frac{1}{2},$$

следует уравнение, неявно задающее медиану

$$F(Me)=1-\frac{\left[1+(1+\lambda Me)^2\right]}{2}e^{-\lambda Me}=\frac{1}{2}.$$

Распределение Рэлея находит широкое применение в теории стрельбы и статистической теории связи.

Определение. Непрерывная (СВ) ξ имеет распределение Вейбулла, если соответствующая ей плотность распределения выражается формулой

$$f_\xi(x,\alpha,\sigma_0,x_0)=\begin{cases}0, & x\le x_0\\ \dfrac{\alpha}{\sigma_0}\left[\dfrac{x-x_0}{\sigma_0}\right]^{\alpha-1}\exp\left[-\left(\dfrac{x-x_0}{\sigma_0}\right)^{\alpha}\right], & x>0\end{cases},$$

где α,σ_0,x_0 – параметры распределения. Распределение Вейбулла находит применение в задачах долговечности и надежности. График плотности распределения Вейбулла представлен на Рис. 6.

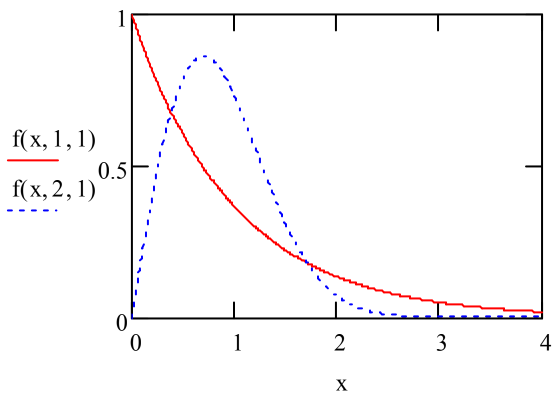

Рис. 6. Плотность распределения Вейбулла при $\sigma=1, x_0=0$ для значений $\alpha=1$ – сплошная линия, и $\alpha=2$ – пунктирная кривая.

Распределение Вейбулла имеет следующие числовые характеристики:

$$M(\xi)=x_0+\sigma_0\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right),\ D(\xi)=\sigma_0^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right], Me=x_0+\sigma_0(\ln(2))^{1/\alpha}$$

$$Mo = x_0 + \sigma_0\left[1-\frac{1}{\alpha}\right]^{1/\alpha},\ \alpha \ge 1,\ A_S = \frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{\alpha}\right) - 3\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) + 2\Gamma^3\left(1+\frac{3}{\alpha}\right)}{\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^{3/2}}.$$

§7. Распределение Парето

Определение. Непрерывная (СВ) ξ имеет распределение Парето с параметрами $a, b > 0$, если соответствующая ей плотность распределения выражается формулой

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0,\ x < a \\ \left(\frac{b}{x}\right)\left[\frac{a}{x}\right]^b,\ x \ge a \end{cases}.$$

График плотности распределения Парето представлен на Рис. 7.

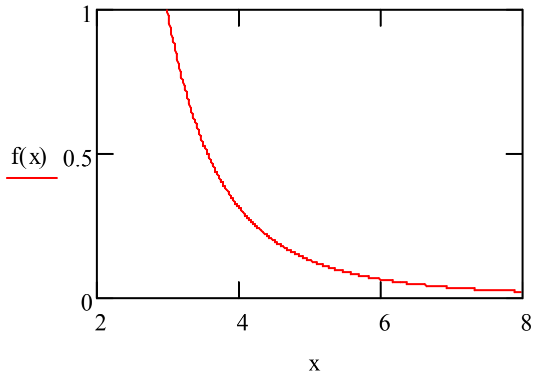

Рис. 7. Плотность распределения Парето при $a = 3, b = 3$.

Распределение Парето используется в экономике для описания величины дохода, причем параметр a – минимально возможный доход.

§8. Логистическое распределение

Определение. Непрерывная (СВ) ξ имеет логистическое распределение, если соответствующая ей плотность распределения выражается формулой

$$f_\xi(x) = \frac{\exp\left[-\frac{(x-a)}{b}\right]}{b\left[1+\exp\left[-\frac{(x-a)}{b}\right]\right]^2},\ b > 0, a \in R..$$

График плотности логистического распределения представлен на Рис. 8.

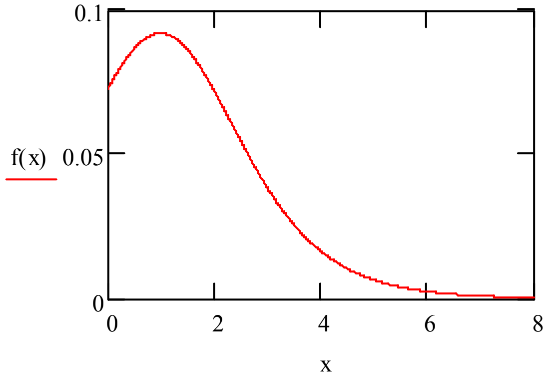

Рис. 8. Плотность логистического распределения при $a = 0, b = 1$.

Логистическое распределение часто используется вместо нормального распределения при исследовании медико-биологических объектов.

§9. Характеристические функции

Простое решение многих задач теории вероятностей удается получить с помощью характеристических функций. Теория характеристических функций развита в курсе математического анализа в разделе «Ряды и интегралы Фурье».

Определение. Характеристической функцией $g_\xi(t)$ (СВ) ξ называют функцию вида

$$g_\xi(t) = M\left(e^{it\xi}\right),$$

где $i-$ мнимая единица; $t-$ параметр, являющийся аргументом характеристической функции, $M\left(e^{it\xi}\right)$ – математическое ожидание (СВ) $e^{it\xi}$.

Если $\xi-$ непрерывная (СВ), то

$$g_\xi(t) = M\left(e^{it\xi}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx, \qquad (1)$$

а если $\xi-$ дискретная (СВ), то

$$g_\xi(t) = M\left(e^{it\xi}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{itx_j} p_j. \qquad (2)$$

Преобразование (1), которому нужно подвергнуть плотность распределения $f_\xi(x)$, чтобы получить $g_\xi(t)$ называется преобразованием Фурье. В разделе «Ряды и интегралы Фурье» курса математического анализа доказывается, что если $g_\xi(t)$ выражается через $f_\xi(x)$ с помощью преобразования Фурье, то, в свою очередь, $f_\xi(x)$ выражается через $g_\xi(t)$ с помощью обратного преобразования Фурье

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} g_\xi(t) dt .$$

Непосредственно из определения характеристической функции, свойств математического ожидания и условия нормировки следует, что характеристические функции обладают следующими свойствами:

Свойство 1. Если (СВ) ξ и η связаны линейно $\eta = a\xi + b$,

$$g_\eta(t) = g_\xi(at)e^{ibt}$$

Свойство 2. Если (СВ) ξ и η – независимы, то для (СВ) $\chi = \xi + \eta$,

$$g_\chi(t) = g_\xi(t) g_\eta(t).$$

Свойство 3.

$$g_\eta(0) = 1,\ \left|g_\xi(t)\right| \le 1,\ \frac{d^k g_\xi(0)}{dx^k} = i^k \nu_k .$$

Пример. Найти характеристическую функцию для случайной величины, распределенной по биномиальному закону.

Решение. По формуле Бернулли

$$P(\xi = k) = C_k^n p^k q^{n-k} .$$

Тогда по определению характеристической функции и с учетом формулы бинома Ньютона

$$g_\xi(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} C_k^n p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\left(e^{it}p\right)^k C_k^n q^{n-k} = \left[pe^{it} + q\right]^n .$$

Пример. Найти характеристическую функцию для случайной величины, распределенной по закону Пуассона.

Решение. По формуле Пуассона

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Тогда по определению характеристической функции

$$g_\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(e^{it}\lambda\right)^k}{k!} = \exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right].$$

Пример. Найти характеристическую функцию равномерной на отрезке $[a,b]$ случайной величины.

Решение. По определению характеристической функции для непрерывной случайной величины с плотностью распределения $f_\xi(x) = \frac{1}{b-a}, x \in [a,b]$

$$g_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{itx} dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

Пример. Найти характеристическую функцию случайной величины, распределенной по нормальному закону.

Решение. По условию задачи плотность распределения имеет нормальный вид $f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$. По теореме о функции (СВ) для (СВ) $\eta = \frac{\xi - a}{\sigma}$ плотность распределения равна

$$f_\eta(y) = x'_y f_\xi(y\sigma + a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Тогда по определению характеристической функции

$$g_\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} f_\eta(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[ity - \frac{y^2}{2}\right] dy.$$

Продифференцируем обе части последнего равенства по t

$$g'_\eta(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y \exp\left[ity - \frac{y^2}{2}\right] dy.$$

Откуда, интегрируя по частям, получим

$$g'_\eta(t)=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp[ity]d\left(e^{-\frac{y^2}{2}}\right)=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{ity-\frac{y^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}-it\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[ity-\frac{y^2}{2}\right]dy\right]=-tg_\eta(t).$$

Решение полученного уравнения $g'_\eta(t)=-tg_\eta(t)$ с начальным условием $g_\eta(0)=1$ имеет вид

$$g_\eta(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Так как $\xi=\sigma\eta+a$, то по свойству характеристических функций

$$g_\xi(t)=e^{ita}g_\eta(\sigma t)=\exp\left[ita-\frac{\sigma^2t^2}{2}\right],$$

что и требовалось получить.

§10. χ^2-распределение

Определение. Непрерывная случайная величина ξ имеет χ^2- распределение с m степенями свободы, если плотность ее распределения выражается формулой

$$f_\xi(x,m)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ \dfrac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}x^{\frac{m}{2}-1}\exp\left(-\dfrac{x}{2}\right),\ x>0\end{cases}.$$

График плотности χ^2- распределения представлен на Рис. 9.

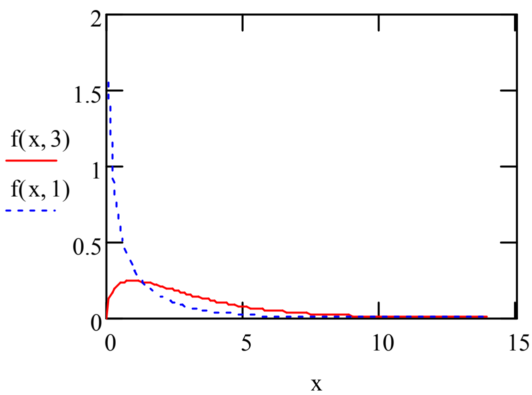

Рис. 9. Плотность χ^2- распределения для различных степеней свободы m: при $m=1$ – пунктирная линия; при $m=3$ – сплошная линия.

Применение χ^2- распределения основано на его интерпретации как распределения суммы квадратов m независимых (СВ), распределенных по закону $N(0,1)$. Докажем это утверждение.

Теорема. Если m независимых (СВ) $\xi_j, j=1,2,...m$ одинаково распределены по закону $N(0,1)$, то (СВ) $\chi^2 = \sum_{j=1}^{m} \xi_j^2$ имеет χ^2- распределение.

Доказательство. По условию теоремы

$$f_{\xi_j}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad (1)$$

Введем обозначения: $\eta = \xi^2$, x– возможные значения (СВ) ξ; y– возможные значения (СВ) η. Найдем плотность $f_\eta(y)$. Для этого найдем соответствующую ей функцию распределения

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P\left(\xi^2 < y\right) = P\left(-\sqrt{y} < \xi < \sqrt{y}\right) = F_\xi\left(\sqrt{y}\right) - F_\xi\left(-\sqrt{y}\right). \quad (2)$$

Тогда с учетом (1) плотность распределения (СВ) η принимает вид

$$f_\eta(y) = \frac{dF_\eta(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_\xi\left(\sqrt{y}\right) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_\xi\left(-\sqrt{y}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right), y > 0. \quad (3)$$

Учитывая (3), для плотности $f_\eta(y)$ найдем характеристическую функцию

$$f_\eta(t) = \int_0^\infty e^{ity} f_\eta(y) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-2it)}} \int_0^\infty t^{1/2-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(1-2it)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-2it)}},$$

откуда по свойству характеристических функций для (СВ) $\chi^2 = \sum_{j=1}^{m} \eta_j$ имеем

$$f_{\chi^2}(t) = \prod_{j=1}^{m} f_{\eta_j}(t) = \frac{1}{(1-2it)^{m/2}}. \quad (4)$$

Из (4) с помощью обратного преобразования Фурье получим

$$f_{\chi^2}(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-itz} f_{\chi^2}(t)dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-itz}}{(1-2it)^{m/2}}dt=\frac{z^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}}i}{\pi\cdot 2^{\frac{m}{2}}}\int\limits_C t^{-\frac{n}{2}}e^{t}dt=\frac{z^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{z}{2}}}{2^{\frac{m}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)},$$

что и требовалось доказать.

χ^2- распределение имеет следующие числовые характеристики:

$$M\left(\chi^2\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_{\chi^2}(x)dx=\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int\limits_0^\infty x^{\frac{m}{2}}e^{-\frac{x}{2}}dx=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int\limits_0^\infty t^{\frac{m}{2}}e^{-t}dt=\frac{2\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}=m,$$

$$D\left(\chi^2\right)=\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int\limits_0^\infty (x-m)^2 x^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx=$$

$$=\frac{4}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left[\Gamma\left(\frac{m}{2}+2\right)-m\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)+\frac{m^2}{4}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\right]=2m$$

Из условия экстремума $f'(x)=\left[\frac{\left(\frac{m}{2-1}\right)}{x}-\frac{1}{2}\right]f(x)=0$ следует, что мода для χ^2-распределения равна

$$Mo=m-2.$$

§11. Распределение Фишера

Определение. Непрерывная случайная величина ξ имеет распределение Фишера с m_1 и m_2 степенями свободы, если плотность ее распределения выражается формулой

$$f_\xi(x,m_1,m_2)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{m_1}{2}}x^{\frac{m_1}{2}-1}}{B\left(\frac{m_1}{2},\frac{m_2}{2}\right)}\left[1+\frac{m_1}{m_2}x\right]^{-\frac{m_1+m_2}{2}}, & x>0\end{cases}.$$

График плотности распределения Фишера представлен на Рис. 10.

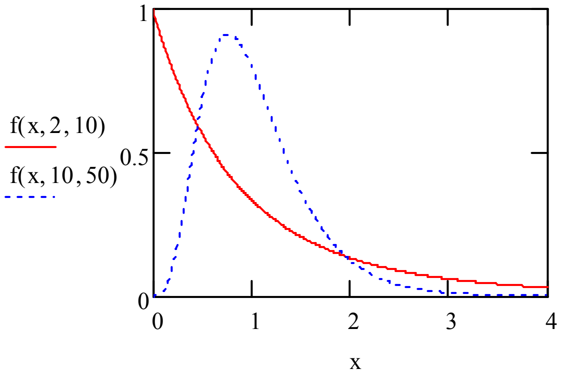

Рис. 10. Плотность распределения Фишера для различных степеней свободы m_1, m_2: при $m_1 = 10, m_2 = 50$ – пунктирная линия; при $m_1 = 2, m_2 = 10$ – сплошная линия.

Применение распределения Фишера основано на следующей теореме.

Теорема. Если ξ и η – независимые (СВ), имеющие χ^2- распределение соответственно с m_1 и m_2 степенями свободы, то (СВ) $F = \dfrac{\xi m_2}{\eta m_1}$ подчиняется распределению Фишера с (m_1, m_2) степенями свободы.

Доказательство. По условию теоремы

$$f_\xi(x, m_1) = \begin{cases} 0, \; x \le 0 \\ \dfrac{1}{2^{\frac{m_1}{2}} \Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)} x^{\frac{m_1}{2}-1} \exp\left(-\dfrac{x}{2}\right), \; x > 0 \end{cases}, \tag{1}$$

$$f_\eta(y, m_2) = \begin{cases} 0, \; x \le 0 \\ \dfrac{1}{2^{\frac{m_2}{2}} \Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)} y^{\frac{m_2}{2}-1} \exp\left(-\dfrac{y}{2}\right), \; y > 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Пусть x – возможные значения (СВ) ξ; y – возможные значения (СВ) η; z – возможные значения (СВ) F. Тогда $z = \dfrac{m_2}{m_1} \dfrac{x}{y}$ и, следовательно,

$$x = \frac{m_1}{m_2} zy, \; x'_z = \frac{m_1}{m_2} y. \tag{3}$$

Из условия нормировки

$$\int_0^\infty f_F(z)dz = \int_0^\infty\int_0^\infty f_\xi(x)f_\eta(y)dxdy = 1$$

с учетом равенств (1-3) следует, что

$$f_F(z) = \int_0^\infty x'_z f_\xi(x)f_\eta(y)dy = \frac{m_1}{m_2}\int_0^\infty y f_\xi\left(\frac{m_1}{m_2}zy\right)f_\eta(y)dy =$$

$$= \frac{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{m_1}{2}} z^{\frac{m_1}{2}-1}}{2^{\frac{m_1+m_2}{2}}\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)}\int_0^\infty y^{\frac{m_1+m_2}{2}-1}\exp\left[-\frac{y}{2}\left(1+\frac{m_1}{m_2}z\right)\right]dy =$$

$$= \frac{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{m_1}{2}} z^{\frac{m_1}{2}-1}\left[1+\frac{m_1}{m_2}z\right]^{-\frac{m_1+m_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)}\int_0^\infty t^{\left(\frac{m_1+m_2}{2}-1\right)}e^{-t}dt =$$

$$= \frac{\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{m_1}{2}}\Gamma\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)} z^{\frac{m_1}{2}-1}\left[1+\frac{m_1}{m_2}z\right]^{-\frac{m_1+m_2}{2}},$$

что и требовалось доказать.

Математическое ожидание и дисперсия распределения Фишера определяются по формулам

$$M(F) = \frac{m_2}{m_2-2},\ m_2 > 2,\quad D(F) = \frac{2m_2^2(m_1+m_2-2)}{m_1(m_2-2)^2(m_2-4)},\ m_2 > 4.$$

§12. Распределение Стьюдента

Определение. Непрерывная случайная величина ξ имеет распределение Стьюдента с m степенями свободы, если плотность ее распределения выражается формулой

$$f_\xi(x,m) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\cdot\sqrt{\pi m}}\left[1+\frac{x^2}{m}\right]^{-\frac{m+1}{2}},\ -\infty < x < \infty..$$

График плотности распределения Стьюдента представлен на Рис. 11.

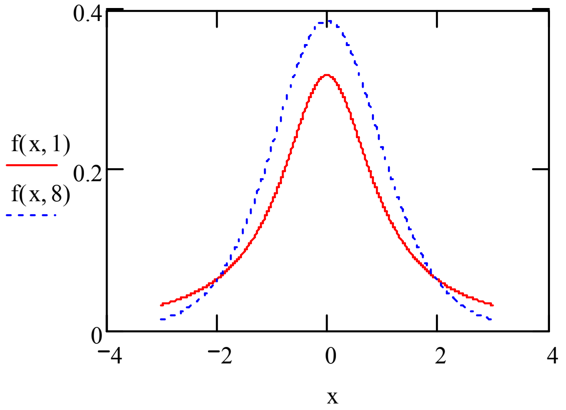

Рис. 11. Плотность распределения Стьюдента для различных степеней свободы m: при $m = 8$ – пунктирная линия; при $m = 1$ – сплошная линия.

Применение распределения Стьюдента основано на следующей теореме.

Теорема. Если ξ и η – независимые (СВ), причем ξ имеет распределение $N(0,1)$, а η – χ^2- распределение соответственно с m степенями свободы, то (СВ) $T = \dfrac{\xi\sqrt{m}}{\sqrt{\eta}}$ подчиняется распределению Стьюдента с m степенями свободы.

Доказательство. По условию теоремы

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right], \tag{1}$$

$$f_\eta(y, m) = \begin{cases} 0, \ y \le 0 \\ \dfrac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} y^{\frac{m}{2}-1} \exp\left(-\dfrac{y}{2}\right), \ y > 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Пусть x – возможные значения (СВ) ξ; y – возможные значения (СВ) η; z – возможные значения (СВ) T. Тогда $z = \dfrac{x\sqrt{m}}{\sqrt{y}}$ и, следовательно,

$$x = \frac{z\sqrt{y}}{\sqrt{m}}, \ x'_z = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{m}}. \tag{3}$$

Из условия нормировки

$$\int_0^{\infty} f_T(z)dz = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(y)dxdy = 1$$

с учетом равенств (1-3) следует, что

$$f_T(z) = \int_0^{\infty} x'_z f_\xi(x) f_\eta(y)dy = \frac{1}{\sqrt{m}}\int_0^{\infty} \sqrt{y} f_\xi\left(\frac{z\sqrt{y}}{\sqrt{m}}\right) f_\eta(y)dy =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sqrt{2\pi m}} \int_0^{\infty} y^{\frac{m-1}{2}} \exp\left[-\frac{y}{2}\left(1+\frac{z^2}{m}\right)\right]dy =$$

$$= \frac{\left[1+\frac{z^2}{m}\right]^{-\frac{m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sqrt{\pi m}} \int_0^{\infty} t^{\left(\frac{m+1}{2}-1\right)} e^{-t}dt = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sqrt{\pi m}}\left[1+\frac{z^2}{m}\right]^{-\frac{m+1}{2}},$$

что и требовалось доказать. Распределение Стьюдента обладает следующими числовыми характеристиками:

$$M(\xi) = 0,\ D(\xi) = \frac{m}{m-2}\ (m>2),\ A_S = 0\,(m>3), Mo = Me = 0.$$