ВВЕДЕНИЕ

Предметом теории вероятностей являются только те случайные явления, исходы которых в ***принципе*** возможно наблюдать в одних и тех же условиях много раз. Такие случайные явления называют массовыми. Теория вероятностей устанавливает связи между вероятностями случайных событий, которые позволяют вычислять вероятности сложных событий по вероятностям более простых событий (теоремы сложения, умножения..).

Возникновение теории вероятностей (ТВ) как науки относится к середине XVII века, и связано с именами Б. Паскаля, П. Ферма, Х. Гюйгенса. Они разработали общие методы решения задач подсчета шансов выигрыша в азартных играх.

Основополагающими работами (ТВ) стали работы Я. Бернулли о законе больших чисел (1713) и А. Муавра (1730), в которой сформулирована и доказана центральная предельная теорема. В 1812 году в трактате П. Лапласа была обобщена теорема Муавра на несимметричный случай схемы Бернулли $(p \neq q)$, и вероятностные методы были применены к теории ошибок наблюдений. В этот период С. Пуассон разработал понятие распределения и случайного процесса, а К.Ф. Гаусс создал теорию ошибок.

Следующий период в становлении (ТВ) связан с именами П.Л. Чебышева, А.А. Маркова, А.М. Ляпунова, создавшими в начале XIX века эффективные методы доказательства предельных теорем для сумм случайных величин.

Современный этап в развитии (ТВ) начинается с установления ее аксиоматики в работах С.Н. Бронштейна, Р. Мизеса, Э. Бореля и А.И. Колмогорова (1933). В работе Колмогорова была предложена аксиоматика, позволившая охватить не только все классические разделы (ТВ), но и дать строгую основу для развития теории случайных процессов и математической статистики.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§1. Пространство элементарных событий

Определение 1. Всякий неразложимый исход случайного эксперимента называется элементарным событием и обозначается ω_i.

Определение 2. Пространством элементарных событий Ω называется множество всех возможных элементарных событий ω_i.

Всякое подмножество А пространства элементарных событий (ПЭС) называют ***случайным*** событием. Говорят, что событие А наступило, если наступило хотя бы одно из ω_i, входящих в Ω. Само пространство Ω еще называют ***достоверным*** событием. Пустое же подмножество Ø множества Ω называется ***невозможным*** событием.

Говорят, что событие А является ***причиной*** события В, если каждое появление события А сопровождается появлением события В, и пишут $A \subset B$

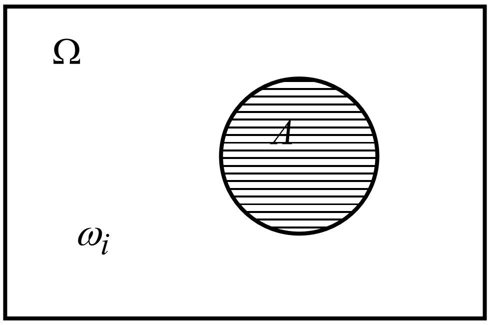
События А и В называют ***равносильными***, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Равносильность событий обозначается следующим образом $A = B$.

События называются ***равновозможными***, если нет оснований ожидать, что при многократном повторении испытания хотя бы одно из них будет появляться чаще любого другого.

Замечание. Далее мы будем рассматривать такие испытания, среди возможных исходов которых можно выделить совокупность таких событий, которые образуют Ω. Однако оказывается, что все результаты, которые будут получены для таких испытаний остаются в силе и для тех испытаний, для которых нельзя построить Ω.

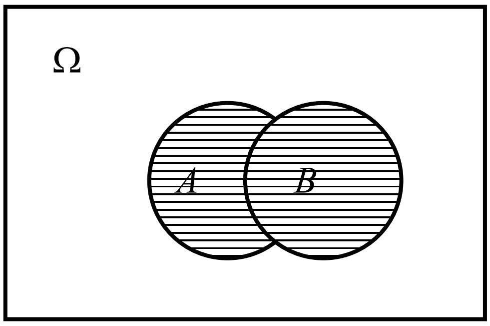
§2. Алгебра случайных событий

Для наглядности будем использовать представление Ω в виде прямоугольной области на плоскости, а ω_i будем изображать точками, лежащими внутри Ω. Случайные события будем изображать в виде фигур.

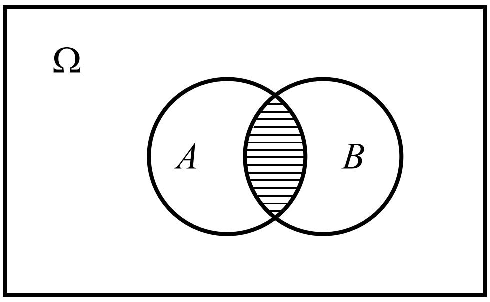


На множестве случайных событий пространства элементарных событий (ПЭС) определены следующие операции: сложение, умножение, вычитание и дополнение. Операция дополнения вводится с помощью понятия противоположного события.

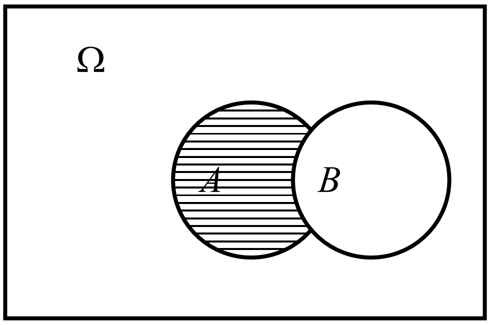
1) Суммой событий (А+В) называют событие, состоящее из тех ω_i, которые входят либо в А, либо в В, либо в А и В одновременно.



2) Произведением событий $A \cdot B$ называют событие, состоящее из тех ω_i, которые входят в А и В одновременно.



3) Разностью событий (А-В) называют событие, состоящее из тех ω_i, которые входят в А, но не входят в В.

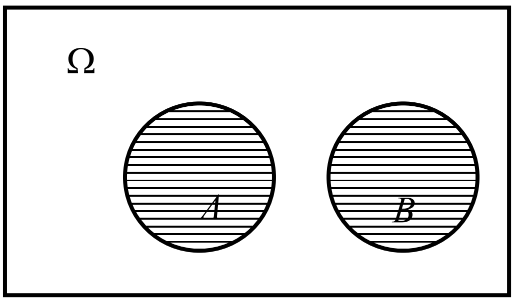


Непосредственно из определений операций над случайными событиями следуют формулы двойственности:

$$\overline{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \ \overline{\prod_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

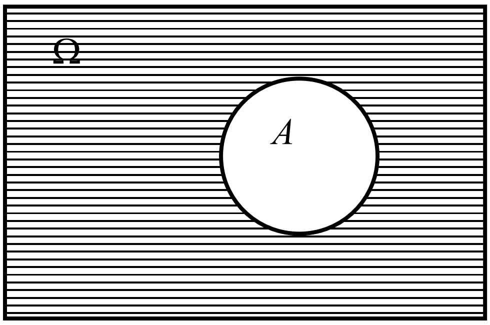
Определение 1. События А и В называются ***несовместными,*** если

$$A \cdot B = \varnothing.$$

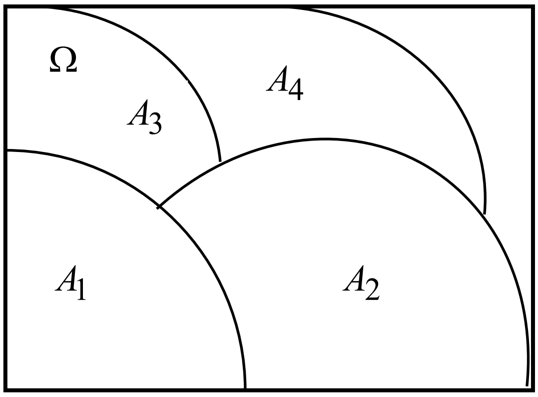


Определение 2. Событие $\overline{A}$ называется противоположным событию А, если

$$A + \overline{A} = \Omega, \ A \cdot \overline{A} = \varnothing.$$



Определение 3. Говорят, что события $A_1, A_2, ...A_n$ образуют полную группу событий, если $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$, $A_i \cdot A_j = \varnothing$, $(i \neq j)$.



Введем понятие предела последовательности событий. Пусть $\{A_n\}$ – бесконечная последовательность случайных событий. Обозначим через A^* множество всех тех и только тех элементарных событий, которые принадлежат бесконечному числу множеств A_n. Тогда имеет место формула

$$A^* = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=n}^{\infty} A_m \right].$$

Действительно, если $\omega \in A^*$, то

$$\omega \in \sum_{m=n}^{\infty} A_m$$

для каждого n, и, следовательно,

$$\omega = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=n}^{\infty} A_m \right],$$

т.е.

$$A^* \in \prod_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=n}^{\infty} A_m\right].$$

Если же $\omega = \prod_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=n}^{\infty} A_m\right]$, то $\omega \in A^*$, что и требовалось показать.

Пусть A_* – множество тех и только тех элементарных событий, которые принадлежат бесконечному числу множеств A_n, за исключением конечного их числа. Тогда, проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получаем

$$A_* = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\prod_{m=n}^{\infty} A_m\right].$$

Очевидно, $A_* \subseteq A^*$. Событие A^* называется верхним пределом последовательности $\{A_n\}$

$$A^* = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n,$$

а событие A_* называется нижним пределом последовательности $\{A_n\}$

$$A_* = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n.$$

Определение 4. Если $A_* = A^*$, то говорят, что последовательность событий $\{A_n\}$ имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n.$$

Замечание. Операции над событиями помогают упростить вычисление вероятностей сложных случайных событий, выражаемых через другие события с помощью операций сложения, умножения, вычитания и дополнения.

Описанная выше алгебра событий является частным случаем булевой алгебры, в которой в качестве единицы выступает достоверное событие Ω, а в качестве нуля – невозможное событие Ø.

Дополнение булевой алгебры Cx истолковывается как противоположное событие $\overline{A}$.

В качестве булевской операции частичного упорядочения $x \le y$ выступает отношение причинности $A \subset B$, которое имеет место тогда и только тогда, когда $A \cdot B = A$, так что пространство событий так же является частично упорядоченным.

Операции булевой алгебры $\sup\{x, Cx\} = 1, \inf\{x, Cx\} = 0$ в алгебре случайных событий означают $A + \overline{A} = \Omega,\ A \cdot \overline{A} = \varnothing.$

Примеры случайных событий

1) Выпадение герба при бросании монеты (испытание – бросание монеты, случайное событие – выпадение герба).
2) Появление туза пик при вынимании наугад карты из колоды.

Пример достоверного события

Достоверным событием является выпадение не более 6 очков при бросании обычной игральной кости.

Примеры невозможных событий

1) Извлечение более 4 тузов из обычной карточной колоды.
2) Появление 8 очков при бросании одной игральной кости.

Пример несовместных событий

Появление 3 и 5 очков при одном бросании одной игральной кости.

Пример равновозможных событий

Появление того или иного числа очков наброшенной игральной кости.

Пример противоположных событий

Появление герба и решетки при одном бросании монеты – противоположные события.

Примеры событий, образующих полную группу

Появление герба и решетки образуют полную группу событий. Попадание и промах при одном выстреле по цели образуют полную группу событий.

Пример элементарных событий

При бросании игральной кости возможны 6 элементарных событий: ω_1 – выпадение 1, ω_2 – выпадение 2, …..

§3. Классическая вероятность

Вероятность является одним из основных понятий теории вероятностей. С материалистической философской точки зрения вероятность события – это степень объективной возможности этого события. Существует несколько математических определений этого понятия: классическая вероятность – отношение чисел ω_i, геометрическая вероятность – отношение мер, статистическая вероятность – относительная частота и аксиоматическая вероятность – функция, определенная на классе событий. Следует отметить, что ни классическая, ни геометрическая, ни статистическая, ни аксиоматическая вероятность не дают исчерпывающего описания реального содержания понятия вероятности, а являются лишь приближениями ко все более полному его описанию.

Дадим определение, которое называют классическим.

Определение. Если Ω состоит из n ***равновозможных*** ω_i, то вероятность $P(A)$ события А равна числу m элементарных событий ω_i, входящих в А, деленному на число n всех ω_i, т.е

$$P(A)=\frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Случай равновозможных событий называют классическим. Поэтому и вероятность (1) называется классической. Из определения следует, что $0 \le P \le 1$, вероятность достоверного события $P(\Omega)=1$, а вероятность невозможного события P (Ø)=0.

Основы комбинаторики

Как правило, вычисление классической вероятности сводится к нахождению чисел m и n методами комбинаторного анализа. Поэтому приведем наиболее употребляемые комбинаторные формулы. В теории вероятностей используют сочетания, размещения, перестановки и принцип умножения.

Пусть дано множество $A=\{\omega_1,\omega_2,....\omega_n\}$, состоящее из n элементов.

Определение 1. Сочетанием из n по k называется любое неупорядоченное k – элементное подмножество множества А. Их общее число N_c определяется по формуле

$$N_c \equiv C_k^n=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}.$$

Определение 2. Размещением из n по k называется любое упорядоченное k – элементное подмножество множества А. Их общее число N_r определяется по формуле

$$N_r \equiv A_k^n=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Определение 3. Перестановка – это размещение при $n=k$. Их общее число равно

$$N_p \equiv A_n^n=\frac{n!}{0!}=n!.$$

Принцип умножения. Для упрощения подсчетов классической вероятности часто используется принцип умножения, состоящий в том, что, если требуется выполнить последовательно k действий, то число способов выполнения всех k действий вычисляется по формуле

$$N_k=n_1\cdot n_2 ....\cdot n_k,$$

где n_1 – число способов выполнения первого действия, n_2 – число способов выполнения второго действия, и т.д.

Пусть $k_1, k_2, ...k_m$ – целые неотрицательные числа, причем $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$. Тогда число способов, которыми можно представить множество А из n элементов в виде суммы m множеств $B_1, B_2, ..., B_m$, число элементов которых составляет соответственно $k_1, k_2, ...k_m$, равно

$$N_n(k_1, k_2, ...k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_m!}.$$

Числа $N_n(k_1, k_2, ...k_m)$ называют полиномиальными коэффициентами.

Определение 4. Сочетаниями из m элементов по n элементов с повторениями называются группы, содержащие n элементов, причем каждый элемент принадлежит одной из m типов.

Число сочетаний из m элементов по n элементов с повторениями равно

$$N_m^n = C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-1}^n.$$

Пример. Газ, состоящий из n молекул, находится в замкнутом сосуде. Мысленно разделим сосуд на n равных ячеек и будем считать, что вероятность каждой молекулы попасть в каждую из n ячеек одна и та же, и равна $\frac{1}{n}$. Какова вероятность того, что молекулы окажутся распределенными так, что в первой ячейке окажутся m_1 молекул, во второй – m_2 молекул и т.д., наконец в n-ой – m_n молекул?

Решение. Пусть А – событие, состоящее в том, что молекулы окажутся распределенными так, что в первой ячейке окажутся m_1 молекул, во второй – m_2 молекул и т.д., наконец в n-ой – m_n молекул. Требуется найти вероятность $P(A)$, которая по формуле классической вероятности равна $P(A) = \frac{m}{n}$.

В соответствии с принципом умножения $n = n_1 \cdot n_2 \cdots n_n$, где n_1 – число способов размещения первой молекулы по n ячейкам, n_2 – второй молекулы, ….., n_n – n-ой молекулы. При этом каждая молекула может находиться в каждой из n ячеек; следовательно, $n_1 = n_2 = \cdots = n_n$ и n молекул можно распределить по n ячейкам n^n различными способами. Аналогично подсчитаем число исходов, благоприятствующих событию А,

$$m = M_1 \cdot M_2 \cdot \cdot M_n,$$

где M_1 – число способов размещения m_1 – молекул по n ячейкам, M_2 – m_2 – молекул по $(n - m_1)$ ячейкам, …., M_n – m_n – молекул по $(n - m_n)$ ячейкам. При этом

$$M_1 = C_{m_1}^n,\ M_2 = C_{m_2}^{n-m_1},\ \ldots,\ M_n = C_{m_n}^{n-m_1-m_2-....m_{n-1}}.$$

Тогда окончательно находим

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{m_1}^{n}\cdot C_{m_2}^{n-m_1}\cdots C_{m_n}^{n-m_1-m_2-....-m_{n-1}}}{n^n}=\frac{n!}{n^n m_1!\cdot m_2!\cdots m_n!}.$$

Пример. (Статистика Бозе-Эйнштейна). Рассмотрим совокупность r неразличимых шаров (частиц), каждый из которых независимо от остальных может находиться в одном из n ящиков (состояний). Так как шары неразличимы, то каждое состояние такой системы задается упорядоченным набором $(r_1, r_2, ..., r_n)$, где r_k – число частиц в каждом ящике, $\sum_{k=1}^{n} r_k = n$. Найти вероятность каждого состояния системы, если все состояния системы равновероятны.

Решение. Подсчитаем число различных состояний системы, т.е. число различных наборов $(r_1, r_2, ..., r_n)$. Для этого состояние системы представим в виде конфигурации из r точек на вещественной оси и $n-1$ вертикальных отрезков-границ ящиков. Каждая такая конфигурация задает размещение неразличимых шаров по ящикам. Очевидно, что каждая конфигурация определяется положениями внутренних $n-1$ перегородок, которые могут находиться в $n+r-1$ позициях. Следовательно, имеем ровно C_{n+r-1}^{n-1} различных конфигураций-состояний рассматриваемой системы, так что с учетом равновероятности вероятность каждого состояния системы равна

$$P_{ba}=\frac{1}{C_{n+r-1}^{n-1}}=\frac{r!(n-1)!}{(n+r-1)!}.$$

Пример. (Статистика Ферми-Дирака). Модель Ферми-Дирака определяется аналогично модели Бозе-Эйнштейна, но в которой дополнительно действует принцип запрета Паули, требующий, чтобы в каждой ячейке находилось не более одного шара. Так как и в этом случае шары неразличимы, то состояние системы характеризуется набором чисел $(r_1, r_2, ..., r_n)$, где уже $r_k = 0{,}1$, при этом $r \le n$. Задать состояние такой системы можно, указав заполненные ячейки, а их можно выбрать C_n^r различными способами, так что вероятность каждого состояния системы Ферми-Дирака равна

$$P_{fd}=\frac{1}{C_n^r}=\frac{r!(n-r)!}{n!}.$$

Пример. (Излучение абсолютно черного тела). Требуется вычислить интенсивность излучения абсолютно черного тела.

Решение. Решим задачу, используя подход Планка. Пусть имеется N резонаторов частоты ν, N' резонаторов (осцилляторов) частоты ν' и так далее. Задача состоит в том, чтобы найти распределение энергии между отдельными резонаторами из группы резонаторов частоты ν. Пусть энергия E_N этой группы резонаторов состоит из точного числа r равных частей ε, так что $r = \frac{E_N}{\varepsilon}$. Число способов распределения этих r элементов по N резонаторам согласно формуле $N_m^n = C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-1}^{n}$ комбинаторного анализа равно

$$N_N^r = \frac{(N+r-1)!}{r!(N-1)!},$$

откуда по формуле Стирлинга $N_N^r \approx \frac{(N+r)^{N+r}}{N^N r^r}$. Определяя полную энтропию резонаторов как $S_N = k\ln\left(N_N^r\right)$, с учетом формулы Стирлинга находим

$$S_N = Ns = kN\left[\left(1+\frac{\overline{E}}{\varepsilon}\right)\ln\left(1+\frac{\overline{E}}{\varepsilon}\right) - \frac{\overline{E}}{\varepsilon}\ln\left(\frac{\overline{E}}{\varepsilon}\right)\right],$$

где $\overline{E} = \frac{E_N}{N}$ – энергия, а $s = \frac{S_N}{N}$ – энтропия отдельного резонатора. Используя термодинамическое соотношение $\frac{ds}{d\overline{E}} = \frac{1}{T}$ и положив $\varepsilon = h\nu$, получим формулу Планка

$$I(\nu) = \frac{8\pi\nu^3 h}{c^2}\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}.$$

Главное открытие Планка состоит в том, что распределение по частотам интенсивности $I(\nu)$ черного излучения можно объяснить, только предположив, что энергия резонаторов частоты ν есть целое кратное величины $\varepsilon = h\nu$, т.е. осцилляторы могут принимать только дискретные значения энергии $E_n - E_0 = nh\nu$.

§4. Геометрическая вероятность

Классическое определение вероятности предполагает, что число ω_i конечно. На практике же весьма часто встречаются испытания, число возможных исходов которых – ∞. В таких случаях классическое определение вероятности неприменимо. Указанный недостаток может быть устранен путем обобщения классической вероятности. Таким обобщением понятия «классическая вероятность» является понятие «геометрическая вероятность».

Определение. Геометрическая вероятность – это величина, равная

$$P(A)=\frac{\text{мера } g}{\text{мера } G}.$$

Здесь пространство событий представляет собой совокупность бесконечного множества точек области G, в качестве меры которой может выступать длина, площадь или объем; g – часть области G. Геометрическая вероятность выражает вероятность попадания в область g наугад брошенной в область G точки. Причем, предполагается, что вероятность попадания точки в какую либо ее часть не зависит от расположения и формы этой части, что является аналогом равновозможности событий, постулируемой при классическом определении вероятности.

Пример. В квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) наугад брошена точка $M(x,y)$. Найти вероятность того, что корни уравнения

$$Z^2+xZ+y=0$$

являются действительными.

Решение. Чтобы корни уравнения были действительными его дискриминант должен удовлетворять условию

$$D=x^2-4y\geq 0, \text{ или } y\leq\frac{x^2}{4}.$$

Для решения задачи нужно найти вероятность попадания точки $M(x,y)$ в область квадрата, лежащую под кривой $y=\frac{x^2}{4}$. По формуле геометрической вероятности она равна $P(A)=\frac{s}{S}$, где площадь под кривой $y=\frac{x^2}{4}$ равна $s=\int\limits_0^1\frac{x^2}{4}dx=\frac{1}{12}$, а площадь единичного квадрата равна $S=1$. Тогда окончательно получим $P(A)=\frac{s}{S}=\frac{1}{12}$.

Пример. Какой толщины h должна быть монета, чтобы вероятность падения на ребро была равна $\frac{1}{3}$?

Решение. Монету радиуса r будем рассматривать как вписанную в сферу радиуса R. Если радиус, проведенный из центра сферы, пересекает боковую поверхность монеты, то считается, что монета упала на ребро, причем, направление радиуса совпадает с направлением вектора силы тяжести. Тогда по формуле геометрической вероятности вероятность падения монеты на ребро равна отношению площади шарового слоя к площади сферы, т.е. $P(A)=\frac{s}{S}$, где площадь шарового слоя равна $s=2\pi Rh$, а площадь сферы $S=4\pi R^2$, так что

$$P(A)=\frac{s}{S}=\frac{h}{2R}=\frac{h}{\sqrt{h^2+4r^2}}=\frac{1}{3}.$$

Решая последнее равенство, получим $h = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

§5. Статистическая вероятность

Наиболее слабые стороны классической и геометрической вероятности состоят в следующем:

1) очень часто невозможно среди исходов испытания выделить пространство элементарных событий;
2) еще труднее указать основания, позволяющие считать исходы испытания равновозможными.

По этой причине наряду с классическим и геометрическим определением вероятности пользуются также статистическим определением вероятности. Статистическое определение вероятности основывается на понятии относительной частоты, обладающей свойством статистической устойчивости. Относительная частота, наряду с вероятностью, принадлежит к основным понятиям теории вероятностей.

Определение. Относительной частотой $W(A)$ события А называют отношение числа испытаний, в которых событие А появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{m_*}{n_*},$$

где m_* – число появлений события А, n_* – общее число испытаний. Следует отличать числа m_* и n_* от чисел m, n классической вероятности. Например, в случае испытания, связанного с бросанием монеты, (А – появление герба) $n = 2$, и $m = 0,$ либо $m = 1$, а n_* может быть любым числом.

Длительные наблюдения показали, что если в одинаковых условиях производятся серии испытаний, в каждой из которых число испытаний достаточно велико, то $W(A)$ обнаруживает свойство устойчивости. Это свойство состоит в том, что в различных сериях испытаний $W(A)$ мало отличаются друг от друга, колеблясь около некоторого постоянного числа p. Это постоянное число p и принимают за вероятность события А. Таким образом, если опытным путем установлена $W(A)$, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности.

Определение. Статистической вероятностью события А называют предел по вероятности относительной частоты

$$W(A) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{вер}}{\longrightarrow}} p.$$

Теоретическим обоснованием приближенного равенства $W(A) \approx p$ служит теорема Бернулли, являющаяся частным случаем теоремы Чебышева, которые будут доказаны в дальнейшем.

Пример. Проведено 3 серии испытаний, каждое из которых состоит в бросании монеты. Подсчитывалось число появлений герба. Результаты представлены в таблице.

Число испытаний в серии	Число выпадений герба	Относительная частота
4040	2048	0.5080
12000	6019	0.5016
24000	12012	0.5005

Из таблицы видно, что частоты $W(A)$ незначительно отклоняются от числа 0.5, причем, тем меньше, чем больше число испытаний. В первой серии отклонение равно 0.008, во второй – 0.0016, в третьей – 0.0005. С другой стороны для данного испытания классическая вероятность $P(\Gamma)=\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$. Откуда убеждаемся, что $W(A)\approx P(\Gamma)$.

§6. Аксиоматическая вероятность

Аксиоматическое определение вероятности основывается на понятии класса событий.

Определение. Классом событий, связанных с данным испытанием, называют совокупность подмножеств $\widetilde{\Omega}$ пространства Ω, для которых определены операции сложения, умножения, дополнения, и среди которых существует достоверное событие Ω и невозможное событие Ø, т.е., если

1) $\varnothing\in\widetilde{\Omega},\ \Omega\in\widetilde{\Omega};$

2) если $A\in\widetilde{\Omega}$, то $\overline{A}\in\widetilde{\Omega};$

3) если $A_n\in\widetilde{\Omega}$, то $\sum\limits_{m=1}^{\infty}A_n\in\widetilde{\Omega}.;$

4) если $A,B\in\widetilde{\Omega}$, то $A\cdot B\in\widetilde{\Omega}.$

Тогда вероятностью $P(A)$ события А называют функцию

$$P(A):\widetilde{\Omega}\to R,$$

удовлетворяющую четырем аксиомам:

1) $P(A)\geq 0,\ \forall A\in\widetilde{\Omega},$
2) $P(\Omega)=1,$
3) $P(A_1+A_2+...)=P(A_1)+P(A_2)+.......$ Для любой последовательности несовместных событий $\{A_i\}$,

4) $P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1)$, где $P(A_2 / A_1)$ – вероятность наступления события A_2, вычисленная при условии, что событие A_1 уже наступило, называемая условной вероятностью.

Происхождение первой и второй аксиом можно объяснить, исходя из реального свойства статистической устойчивости относительных частот. Третья аксиома имеет происхождение, связанное с требованиями развиваемой на основе аксиоматики математической теории нахождения вероятности попадания частицы в произвольную область евклидова пространства, что можно сделать с помощью третьей аксиомы, приближая произвольную область фигурами, составленными из конечных сумм квадратов.

Пространство элементарных событий Ω вместе с алгеброй случайных событий и вероятностью, определенной на множестве случайных событий $\tilde{\Omega}$, называется вероятностным пространством и обозначается $\left(\Omega, \tilde{\Omega}, P(A)\right)$. Вероятностное пространство $\left(\Omega, \tilde{\Omega}, P(A)\right)$ является математической моделью произвольного случайного явления. Действительно, учитывая, что исходы такого явления случайны, для его описания необходимо рассматривать как все исходы (за это отвечает Ω), так и вероятности, с которыми они происходят (за это отвечает P(A)).

В простейших случаях, когда число событий счётно, для полного описания случайного явления можно было бы ограничиться $(\Omega, P(A))$.

В общем случае, когда число событий несчётно, в пространстве Ω могут найтись подмножества, для которых вероятность определить нельзя. Поэтому событиями называют только измеримые подмножества (за это отвечает $\tilde{\Omega}$).

Замечание. Далее мы докажем основные теоремы теории вероятностей на основе классического определения вероятности. Однако, эти теоремы справедливы и тогда, когда классическое определение вероятности невозможно. Это утверждение обусловлено тем, что вероятности событий при большом числе испытаний близки к $W(A)$, а для $W(A)$ доказательство теорем проводится так же, как и для классической вероятности. При геометрическом и аксиоматическом подходах содержание этих теорем постулируется (3 и 4 аксиомы). Отметим, что существуют аксиоматики, в которых четвертая аксиом отсутствует, а ее содержание $P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1)$, рассматривается как следствие определения условной вероятности $P(A_2 / A_1) = \dfrac{P(A_1 \cdot A_2)}{P(A_1)}$.

§7. Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Пусть A, B – несовместные события. Вероятности $P(A), P(B)$ заданы. Возникает задача вычисления вероятности $P(A+B)$. Решение этой задачи дает теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Теорема. Вероятность суммы двух ***несовместных*** событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е.

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Доказательство. Введем обозначения: n – общее число исходов; m_1 – число исходов, благоприятствующих событию A; m_2 – число исходов, благоприятствующих событию B. Тогда по формуле классической вероятности

$$P(A)=\frac{m_1}{n},\ P(B)=\frac{m_2}{n}.$$

Так как A и B – несовместные события, то (m_1+m_2) – число исходов, благоприятствующих событию $(A+B)$. Согласно формуле классической вероятности

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Вероятность суммы нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е.

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

Доказательство. Это следствие доказывается методом индукции. Сначала обобщим теорему на случай трех событий. Для трех событий

$$P(A+B+C)=P((A+B)+C)=P(A+B)+P(C)=P(A)+P(B)+P(C).$$

Предположим, что теорема справедлива для k событий $(k>3)$. В соответствии с методом индукции докажем справедливость теоремы для $k+1$ событий, которые можно представить как два события $(A_1+A_2+....+A_k)$ и A_{k+1}. Тогда по теореме сложения двух событий и с учетом сделанного выше предположения

$$P((A_1+A_2+....+A_k)+A_{k+1})=P(A_1+A_2+....+A_k)+P(A_{k+1})=\sum_{i=1}^{k}P(A_i)+P(A_{k+1}),$$

что и требовалось показать.

Следствие 2. Если события $(A_1, A_2, ..., A_n)$ образуют полную группу, то

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Доказательство. Так как по определению полной группы $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$, то $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(\Omega) = 1$. Кроме того, по определению полной группы эти события несовместны, так что по доказанному выше следствию

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1,$$

что и требовалось показать.

§8. Теорема умножения

Прежде введем понятия зависимости и независимости событий.

Определение 1. Два события называют зависимыми, если вероятность появления одного из них зависит от появления или не появления другого события.

Определение 2. Два события называют независимыми, если вероятность появления одного из них не зависит от появления или не появления другого события, т.е.

$$P(A/B) = P(A),\ P(B/A) = P(B).$$

Определение 3. События $(A_1, A_2, ..., A_n)$ называют попарно независимыми, если любые два из них независимы.

Определение 4. События $(A_1, A_2, ..., A_n)$ называют независимыми в совокупности, если вероятность каждого из них не зависит от появления или не появления произведения любого числа из остальных.

Теорема. Если события А и В произвольны, то вероятность произведения этих событий равна произведению безусловной вероятности одного из них на условную вероятность другого, т.е.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Доказательство. Для доказательства теоремы введем обозначения: n – общее число исходов; m_1 – число исходов, благоприятствующих событию А; m_2 – число исходов, благоприятствующих событию В, l – число исходов, благоприятствующих событиям А и В одновременно. Тогда по формуле классической вероятности

$$P(A) = \frac{m_1}{n}, \qquad (1)$$

$$P(B) = \frac{m_2}{n}, \qquad (2)$$

$$P(B/A) = \frac{l}{m_1}, \qquad (3)$$

$$P(A/B)=\frac{l}{m_2}, \tag{4}$$

$$P(A\cdot B)=\frac{l}{n}. \tag{5}$$

Представим (5) в виде

$$P(A\cdot B)=\frac{l}{m_1}\cdot\frac{m_1}{n}. \tag{6}$$

Из (6) с учетом (1) и (3) следует

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A).$$

Теперь представим (5) в виде

$$P(A\cdot B)=\frac{l}{m_2}\cdot\frac{m_2}{n}. \tag{7}$$

Из (7) с учетом (2) и (4) следует

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A/B),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если событие А не зависит от события В, то и В не зависит от А.

Доказательство. Так как по условию утверждения событие А не зависит от события В, то по определению независимости

$$P(A/B)=P(A). \tag{8}$$

По теореме умножения

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A), \tag{9}$$

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A/B). \tag{10}$$

С учетом (8) из (10) следует

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A), \tag{11}$$

а согласно (11) и (9)

$$P(B)=P(B/A). \tag{12}$$

Равенство (12) означает, что В не зависит от А.

Следствие 2. Если А и В – независимые события, то

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A).$$

Это следствие непосредственно вытекает из определения независимости событий и теоремы умножения.

Следствие 3. Теорема умножения может быть обобщена на случай произвольного числа событий

$$P(A_1\cdot A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\cdot A_2)\cdots P(A_n/A_1\cdot A_2\cdots A_{n-1}).$$

Это следствие доказывается по методу индукции. В случае взаимно независимых событий

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\cdots P(A_n).$$

Следствие 4. Если события взаимно независимые, то из теоремы умножения с учетом формул двойственности следует формула

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\overline{\sum_{i=1}^{n} A_i}\right) = 1 - P\left(\prod_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{A_i}\right).$$

Пример. Найти вероятность выпадения m единиц одновременно хотя бы один раз при бросании m игральных костей k раз. Вывести асимптотическое «правило пропорциональности критических значений».

Решение. Пусть $A-$ событие, состоящее в выпадении m единиц одновременно хотя бы один раз при бросании m игральных костей k раз; A_i – событие, состоящее в выпадении m единиц при i-ом броске m игральных костей; $p = \frac{1}{6} -$ вероятность появления единицы при одном броске одной кости. Тогда $A = \sum_{i=1}^{k} A_i$ и $p^m -$ вероятность выпадения m единиц одновременно при одном броске m игральных костей. По четвертому следствию

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{k} P\left(\overline{A_i}\right) = 1 - \left(1 - p^m\right)^k.$$

Найдем критическое значение числа бросков $\tilde{k}$, при котором $P(A) = \frac{1}{2}$. Из условия $P(A) = \frac{1}{2}$ следует

$$\tilde{k} = 1 + trunc\left[-\frac{\ln(2)}{\ln\left(1 - p^m\right)}\right] = 1 + trunc\left[\frac{\ln(2)}{\left[p^m + \frac{p^{2m}}{2} + ...\right]}\right],$$

где $trunc(x)$ обозначает целую часть числа x. Например, при $m = 1$ критическое значение $\tilde{k} = 4$, а при $m = 2$ критическое значение $\tilde{k} = 25$. Очевидно, при $m = 1$ и $p << 1$ критическое значение удовлетворяет «правилу пропорциональности критических значений» $\tilde{k} \approx \frac{1}{p}$, которое утверждает, что если вероятность уменьшается в n раз, то критическое значение возрастает в n раз. Это правило является правилом асимптотически верным, а ошибка от его применения растет с ростом p.

Пример. Бросается монета до первого появления герба. Найти вероятность того, что для этого понадобится четное число бросков.
Решение. Пусть A_i – событие, состоящее в появлении герба при i – ом броске. Пусть A – событие, состоящее в появлении герба впервые при четном числе бросков. Тогда $A = A_2 + A_4 + ...$, а по теореме сложения вероятностей несовместных событий

$$P(A) = P(A_2) + P(A_4) + ... \qquad (1)$$

Пусть $\omega_г$ – событие, состоящее в появлении герба при одном броске, ω_p – событие, состоящее в появлении решетки при одном броске. Тогда $A_2 = \omega_p \cdot \omega_г$, $A_4 = \omega_p \cdot \omega_p \cdot \omega_p \cdot \omega_г ......$, а по теореме умножения

$$P(A_2) = P(\omega_p) \cdot P(\omega_г),\ P(A_4) = [P(\omega_p)]^3 \cdot P(\omega_г)... \qquad (2)$$

где $P(\omega_p) = P(\omega_г) = \frac{1}{2}$. Из (1) и (2) следует

$$P(A) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + ...,$$

где сумма бесконечной геометрической прогрессии равна

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + ... = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3},$$

так что $P(A) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + ... = \frac{1}{3}$.

§9. Теорема сложения вероятностей совместных событий

Пусть A, B – ***совместные*** события. Вероятности $P(A), P(B)$ заданы. Возникает задача вычисления вероятности $P(A + B)$. Решение этой задачи дает теорема сложения вероятностей ***совместных*** событий. Доказательство основывается на теореме сложения вероятностей ***несовместных*** событий.
Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух ***совместных*** событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления, т.е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Доказательство. Нетрудно доказать геометрически, что события $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, AB – несовместны и

$$A + B = A\overline{B} + \overline{A}B + AB, \qquad (1)$$

$$A = A\overline{B} + AB, \qquad (2)$$

$$B = \overline{A}B + AB. \qquad (3)$$

По теореме сложения вероятностей ***несовместных*** событий из (1)-(3) следует

$$P(A+B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB), \quad (4)$$
$$P(A)=P(A\overline{B})+P(AB)\ , \quad (5)$$
$$P(B)=P(\overline{A}B)+P(AB). \quad (6)$$

Согласно (5) и (6)

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB), \quad (7)$$
$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB). \quad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (4), получим

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B),$$

что и требовалось доказать.

Пример. Что вероятнее: при бросании четырех игральных костей хотя бы на одной из них получить единицу, или при 24 бросках двух игральных костей хотя бы один раз получить две единицы?

Решение. Введем обозначения: A_1– событие, состоящее в том, что на первой кости выпадет единица; A_2– событие, состоящее в том, что на второй кости выпадет единица; A_3– событие, состоящее в том, что на третьей кости выпадет единица; A_4– событие, состоящее в том, что на четвертой кости выпадет единица. Тогда $A=A_1+A_2+A_3+A_4$ – событие, состоящее в том, что хотя бы на одной из 4 костей выпадет единица при бросании 4 игральных костей. Геометрически можно показать, что имеет место формула двойственности $\overline{A}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3\cdot\overline{A}_4$. По определению противоположного события $A+\overline{A}=\Omega$, так что

$$P(A_1+A_2+A_3+A_4)=1-P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3\cdot\overline{A}_4). \quad (1)$$

По теореме умножения

$$P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3\cdot\overline{A}_4)=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3)\cdot P(\overline{A}_4), \quad (2)$$

где $P(\overline{A}_i)$ – вероятность того, что на i-ой кости не появится единица, и $P(\overline{A}_i)=\frac{5}{6}$. Подставляя (2) в (1), получим $P(A_1+A_2+A_3+A_4)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\approx 0.52$.

Для ответа на вторую часть вопроса введем обозначения: B– событие, состоящее в том, что выпадут хотя бы один раз две единицы за 24 броска двух игральных костей; B_1– событие, состоящее в появлении единицы при первом броске двух костей; B_2– событие, состоящее в появлении единицы при втором броске двух костей; …; B_{24}– событие, состоящее в появлении единицы при 24 броске двух костей; b_1– событие, состоящее в появлении единицы при одном броске на первой кости; b_2– событие, состоящее в появлении единицы при одном броске на второй кости. В данных обозначениях $B = B_1 + B_2 + ... + B_{24}$, $B_i = b_1 \cdot b_2$. С учетом теоремы умножения и введенных обозначений

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \left(P(\overline{B}_i)\right)^{24} = 1 - [1 - P(b_1)P(b_2)]^{24} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.49 .$$

Окончательно имеем $P(A) > P(B)$.

Пример. В сфере радиуса R случайно и независимо друг от друга разбросано N точек. Чему равна вероятность того, что расстояние от центра до ближайшей точки будет не меньше r? К чему стремится вероятность, найденная выше, если $\lim\limits_{R\to\infty}\left(\frac{N}{R^3}\right) = \frac{4\pi}{3}\lambda$?

Решение. По формуле геометрической вероятности вероятность того, что одна точка окажется в указанной области, равна

$$P(r \le L \le R) = \frac{\frac{4\pi}{3}\left(R^3 - r^3\right)}{\frac{4\pi}{3}R^3} = \left[1 - \frac{r^3}{R^3}\right],$$

а по теореме умножения вероятность того, что N частиц окажется в указанной объеме, определяется выражением

$$P_N(r \le L \le R) = \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right]^N,$$

так что

$$P_N(r \le L \le \infty) = \lim_{R\to\infty}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right]^N = \lim_{R\to\infty}\left[1 - \frac{1}{(R/r)^3}\right]^N = \exp\left(-\frac{4\pi r^3}{3}\lambda\right)$$

§10. Формула полной вероятности

Пусть выполняются следующие условия:

1) события $H_1, H_2, ...H_n$ образуют полную группу событий, т.е.
$$H_1, + H_2 + ... + H_n = \Omega,$$
$$H_i \cdot H_j = \varnothing.$$
2) событие A может наступить при условии появления одного из событий $H_1, H_2, ...H_n$.

Пусть известны вероятности $P(A/H_i)$, $P(H_i)$. Возникает задача определения вероятности $P(A)$. Решение задачи основывается на следующей теореме.

Теорема. Вероятность события A, которое может появиться лишь при условии появления одного из событий $H_1, H_2, ...H_n$, образующих полную группу событий, вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Доказательство. По условию теоремы $H_1+H_2+\ldots+H_n=\Omega$, $H_i\cdot H_j=\emptyset$, так что

$$A(H_1+H_2+\ldots+H_n)=A\Omega=A.$$

Откуда следует

$$A=AH_1+AH_2+\ldots.+AH_n,$$

где AH_i – несовместные события. Тогда по теореме сложения вероятностей несовместных событий и теореме умножения

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+\ldots.+P(H_n)P(A/H_n),$$

что и требовалось показать.

§11. Формула Байеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из событий $H_1,H_2,\ldots H_n$, образующих полную группу событий. Так как заранее не известно, какое из H_i наступит, то их называют гипотезами. Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие A. Возникает задача переоценки вероятностей $P(H_i)$ после испытания, в результате которого наступило событие A. Задача решается на основе формулы Байеса.

По теореме умножения

$$P(AH_i)=P(A)\cdot P(H_i/A)=P(H_i)P(A/H_i),$$

откуда следует

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)},$$

где $P(A)=\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A/H_j)$.

Полученная формула $P(H_i/A)=\dfrac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}$ называется формулой Байеса. Она позволяет переоценить безусловные вероятности $P(H_i)$ после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A. Изменение скачком вероятностей от $P(H_i)$ до $P(H_i/A)$ в результате проведения испытания является классическим аналогом коллапса волновой функции, возникающего в квантовой механике.

Пример. Телеграфное сообщение состоит из точек и тире. Помехи таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений точек, и 1/3 сообщений тире. Точка и тире встречаются в сообщении в отношении 5/3. Найти вероятность того, что при приеме сигнала точки и тире в действительности были переданы эти сигналы.

Решение. Введем обозначения: А – прием сигнала точки; В – прием сигнала тире; H_1 – передан сигнал точки; H_2 – передан сигнал тире. Тогда по условию задачи

$$P(B/H_1)=\frac{2}{5}, \tag{1}$$

$$P(A/H_2)=\frac{1}{3}, \tag{2}$$

$$\frac{P(H_1)}{P(H_2)}=\frac{5}{3}. \tag{3}$$

Требуется найти условные вероятности $P(H_1/A)$, $P(H_2/B)$. Так как события (A/H_1), (B/H_1) образуют полную группу, то

$$P(A/H_1)=1-P(B/H_1)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}. \tag{4}$$

Аналогично,

$$P(B/H_2)=1-P(A/H_2)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}. \tag{5}$$

Гипотезы H_1, H_2 также образуют полную группу, так что

$$P(H_1)+P(H_2)=1. \tag{6}$$

Из (3) и (6) следует

$$P(H_1)=\frac{5}{8},\ P(H_2)=\frac{3}{8}. \tag{7}$$

Учитывая (2), (4), (7), по формуле полной вероятности получим

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}. \tag{8}$$

По формуле Байеса с учетом (8) найдем

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}}{0.5}=0.75,\ P(H_2/B)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}}{0.5}=0.5.$$

В данном примере в результате испытания происходит коллапс вероятности от значения $P(H_1)=\frac{5}{8}=0.625$ до значения $P(H_1/A)=0.75$ и от значения $P(H_2)=\frac{3}{8}=0.375$ до значения $P(H_2/B)=0.5$. При этом информационная энтропия уменьшается от значения

$$S_i=-\left[P(H_1)\ln(P(H_1))+P(H_2)\ln(P(H_2))\right]=0.662$$

до значения

$$S_f=-\left[P(H_1/A)\ln(P(H_1/A))+P(H_2/B)\ln(P(H_2/B))\right]=0.562.$$

§12. Формула Бернулли

Говорят, что испытания производятся по схеме Бернулли, если выполняются следующие условия:

1) испытания независимы;
2) вероятность появления события А в каждом отдельном испытании постоянна;
3) в каждом испытании событие А может появиться, либо не появиться.

При таких условиях применима следующая теорема.

Теорема. Если эксперимент проводится по схеме Бернулли, то вероятность появления события А ровно m раз в n независимых испытаниях вычисляется по формуле Бернулли

$$P(m) = C_m^n p^m \cdot q^{n-m},$$

где число сочетаний $C_m^n = \dfrac{n!}{(n-m)!\cdot m!}$, p – вероятность появления события А в каждом отдельном испытании, $q = 1 - p$ – вероятность не появления события А в каждом отдельном испытании.

Доказательство. Пусть A_i – событие, состоящее в том, что событие А появится в i-ом испытании; $\overline{A}_i$ – событие, состоящее в том, что событие А не появится в i-ом испытании; $D_j = A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdots A_{i_m} \cdot \overline{A}_{i_{m+1}} \cdot \overline{A}_{i_{m+2}} \cdots \overline{A}_{i_n}$ – событие, состоящее в том, что событие А появится ровно m раз в n независимых испытаниях. Очевидно, событий D_j может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по m элементов, т.е. $j = 1,2,...N$, где $N = C_m^n$. С учетом сделанных обозначений по теореме умножения вероятностей независимых событий

$$P(D_j) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_m}) \cdot P(\overline{A}_{i_{m+1}}) \cdot P(\overline{A}_{i_{m+2}}) \cdots P(\overline{A}_{i_n}) = p^m \cdot q^{n-m}.$$

События D_j несовместны. Поэтому по теореме сложения вероятностей несовместных событий

$$P\left(\sum_{j=1}^{N} D_j\right) = \sum_{j=1}^{N} P(D_j) = Np^m q^{n-m} = C_m^n p^m q^{n-m},$$

что и требовалось получить.

§12. Формулы Пуассона и Муавра-Лапласа

Формулы Пуассона и Муавра-Лапласа будут получены в дальнейшем. В том случае, когда $p < 0.1$ и $npq \le 9$ вместо формулы Бернулли применяют приближенную формулу Пуассона

$$P(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \ \lambda = np. \qquad (1)$$

В том случае, когда p, q не малы, а $npq > 9$ для приближенного вычисления вероятностей $P(m)$ применяются формулы Муавра-Лапласа.

Локальная формула Муавра-Лапласа

Вероятность того, что в n независимых испытаниях событие А наступит ровно m, приближенно равна

$$P(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(m-a)^2}{2\sigma^2}\right), \ \sigma = \sqrt{npq}, \ a = np. \qquad (2)$$

Интегральные формулы Муавра-Лапласа

Вероятность того, что в n независимых испытаниях число появлений события А находится в пределах $m_1 < m < m_2$ приближенно равна

$$P(m_1 < m < m_2) = \Phi_1\left(\frac{m_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi_1\left(\frac{m_1 - a}{\sigma}\right) = \Phi_0\left(\frac{m_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{m_1 - a}{\sigma}\right), \qquad (3)$$

где функции Лапласа затабулированы и

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \ \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \ \Phi_0(x) = \Phi_1(x) - \frac{1}{2}.$$

Непосредственно из формулы (3) следует интегральная формула

$$P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 1 - 2\Phi_1\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \ W(A) = \frac{m}{n}. \qquad (4)$$

Пример. Французский ученый Бюффон бросил монету 4040 раз, причем герб появился 2048 раз. Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона относительная частота появления герба по абсолютной величине не более чем в опыте Бюффона.

Решение. Так как относительная частота появлений герба $W(\varGamma) = \frac{2048}{4040} = 0.507$, то отклонение частоты от вероятности равно $\varepsilon = 0.507 - 0.5 = 0.007$. Тогда согласно интегральной формуле (4)

$$P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi_0\left(0.007\sqrt{\frac{4040}{0.5^2}}\right) \approx 0.6196.$$

Пример. Какова вероятность того, что в столбце из 100 наугад отобранных монет число монет, расположенных гербом вверх будет заключено в пределах от 45 до 55?
Решение. Согласно интегральной формуле Муавра - Лапласа эта вероятность равна

$$P(45 \le m \le 55) \approx \Phi_0\left(\frac{55-100\cdot 0.5}{\sqrt{100\cdot 0.5\cdot 0.5}}\right) - \Phi_0\left(\frac{45-100\cdot 0.5}{\sqrt{100\cdot 0.5\cdot 0.5}}\right) = 2\Phi_0(1) \approx 0.68\,.$$

С другой стороны, по формуле Бернулли

$$P(45 \le m \le 55) = \sum_{k=45}^{55} C_k^{100}\cdot 2^{-n} \approx 0.73\,,$$

так что отличие точного значения вероятности 0.73 от приближенного значения 0.68 составляет 5%.

Погрешность приближенной формулы Муавра-Лапласа определяется выражением

$$\frac{P(m_1 \le m \le m_2)}{m_2 - m_1} \approx \Phi_0'\left(\frac{m_1 - a}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma} \approx \frac{\exp\left(-\frac{(m_1-a)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,.$$

Для исследованной выше задачи эта величина равна $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} \approx 0.048$, что составляет 5%.