Вариант №1*

1. Ректор Томского политехнического университета R и проректор по науке Q играют в известную игру, которая состоит в следующем. Оба одновременно поднимают один или два пальца. Если общее число поднятых пальцев четно, то Q платит R, а если оно нечетно, то R платит Q сумму, равную общему числу поднятых пальцев. Предполагается, что при каждом испытании игрок случайно, но с фиксированными вероятностями, выбирает одну из 2 возможностей (поднять 1 или 2 пальца). При каких условиях игра является справедливой, и при каких она наиболее несправедлива?

   Ответ: а) при условии $p_1 = q_1 = \frac{1}{2}$, либо $p_1 = q_1 = \frac{2}{3}$ игра справедлива;

   б) при условии $p_1 = q_1 = \frac{7}{12}$, $p_2 = q_2 = \frac{5}{12}$ игра является несправедливой.

   Здесь p_1 – вероятность поднять 1 палец игроком R; p_2 – вероятность поднять 2 пальца игроком R; q_1 – вероятность поднять 1 палец игроком Q; q_2 – вероятность поднять 2 пальца игроком Q;

2. В заколдованном круге радиуса 1 герой Гоголя Хома выбирает наугад точку A и через нее в произвольном направлении проводит магическую хорду BC. Найти среднюю длину хорды BC.

   Ответ: $\frac{16}{3\pi}$.

3. Бомбардировщик, пролетевший вдоль моста через реку Томь, длина которого 30 м и ширина 8 м, сбросил бомбы. Случайные величины X и Y независимы и распределены нормально со среднеквадратичными отклонениями, соответственно равными 6 и 4 м, математическими ожиданиями, равными 0. Здесь X – случайная величина расстояния от вертикальной оси симметрии моста до места падения бомбы; Y – случайная величина расстояния от горизонтальной оси симметрии моста до места падения бомбы. Найти: 1) вероятность попадания в мост одной бомбы; 2) вероятность разрушения моста, если сброшены 2 бомбы, причем известно, что для разрушения моста достаточно одного попадания.

   Ответ: 0.6741, 0.8938.

4. Жеглов и Фогс условились встретиться в ресторане между 0 и 1 часами. Пришедший первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи этих лиц, если моменты

прихода каждого из них независимы и распределены равномерно в интервале $(0,1)$. Найти среднее время ожидания.

Ответ: $\frac{5}{9}$, $M = \frac{1}{3}$ ч.

5. В клетке 50 попугаев, из них 25 розовых. На обед удаву наугад последовательно выбирают двух попугаев. Пусть X1 – случайная величина розовых попугаев, появившихся при случайном выборе первого попугая, а X2 – при выборе второго попугая. Найти коэффициент корреляции X1 и X2.

Ответ: $\rho = -\frac{1}{49}$.

6. В бесконечном слое воздуха толщины H летают тучи комаров размера r, концентрация в воздухе которых равна λ. На слой перпендикулярно падает луч света. Найти вероятность поглощения света, плотность распределения случайной величины r, средний размер комаров.

Ответ: $P = 1 - \exp\left[-\lambda\pi H r^2\right]$, $f(r) = 2\pi\lambda H r \exp\left[-\lambda\pi H r^2\right]$, $M(R) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda H}}$.

Вариант №1

1. Бросают 3 монеты. Требуется: а) задать случайную величину X числа появлений решетки; б) построить ряд распределения и функцию распределения F(x) величины X, если вероятность выпадения герба равна 0.5.
2. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-1,2]$. Найти плотность вероятности случайной величины $\eta=\xi^2$.

   Ответ: $f_\eta(y)=\dfrac{1}{3\sqrt{y}},\ 0<y\le 1.$
3. Устройство состоит из 5 последовательно соединенных блоков с надежностями, равными соответственно $p_1=0.05, p_2=0.5, p_3=0.2,\ p_4=0.15,\ p_5=0.1$. Время, необходимое для поиска неисправности в первом блоке, равно $t_1=5$ мин, во втором – $t_2=20$ мин, $t_3=2$ мин, $t_4=4$ мин, $t_5=5$ мин. Определить порядок проверки блоков, при котором среднее время поиска неисправности в системе будет минимально.

   Ответ: $M(T)=19.2$ мин.

4. Двумерная случайная величина имеет плотность распределения вероятностей $f(x,y)=\dfrac{A}{\pi^2\left(3+x^2\right)\left(1+y^2\right)}$. Найти: а) величину A; б) функцию распределения $F(x,y)$; с) вероятность попадания случайной точки в квадрат, ограниченный прямыми $x=0, y=0,\ x=1, y=1$.

   Ответ: $A=\sqrt{3},\ F(x,y)=\left[\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)+0.5\right]\left[\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(y)+0.5\right],\ P=\dfrac{1}{24}$.
5. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время t равна 0.05. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом отказов за время t меньше 2.

   Ответ: $P\ge 0.88$.

6. Стрелок стреляет в цель до тех пор, пока не поразит ее. Вероятность попадания при отдельном выстреле равна p, результаты выстрелов можно считать независимыми. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение числа выстрелов.

   Ответ: $\dfrac{1}{p}, \dfrac{1-p}{p^2}, \dfrac{\sqrt{1-p}}{p}$.

Вариант №2

1. Плотность вероятности случайной величины равна $f(x)=\frac{A}{e^{x}+e^{-x}}$.

   Найти: а) коэффициент А; б) вероятность того, что в двух независимых наблюдениях случайная величина примет значение, меньшее 1.

   Ответ: $A=\frac{2}{\pi}$, 0. 6015

2. Вероятность обнаружения затонувшего судна за время поиска t задается формулой $P(t)=1-exp(-\lambda t)$. Определить среднее время поиска, необходимое для обнаружения судна.

   Ответ: $\frac{1}{\lambda}$

3. Плотность вероятности случайной величины равна

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ 1/b-a, & a\le x\le b\\ 0, & x>b\end{cases}$$

   Найти математическое ожидание, дисперсию среднеквадратичное отклонение.

   Ответ: $M(X)=\frac{a+b}{2}, D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}, \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$

4. Независимые случайные величины X и У распределены нормально, M(X)=2, M(У)=4, D(X)=4, D(Y)=9. Написать плотность вероятности и функцию распределения их суммы.

   Ответ: $f_{\xi+\eta}(z)=\frac{1}{\sqrt{26\pi}}\exp\left(-\frac{(z+1)^2}{26}\right), F_{\xi+\eta}(z)=\frac{1}{\sqrt{26\pi}}\int\limits_{-\infty}^{z} f(z)dz=\Phi\left(\frac{z+1}{\sqrt{13}}\right)$

5. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-1,2]$. Найти плотность вероятности случайной величины $\eta=\xi^2$.

   Ответ: $f_\eta(y)=\frac{1}{3\sqrt{y}}$, $0<y\le 1$.

6. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x}{3}, & 0<x<3\\ 1, & 3\le x\end{cases}$$

   Найти $M(X)$, $D(X)$, $P(1<X<2)$.

   Ответ:1.5, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$.

Вариант № 3

1. Плотность вероятности случайной величины X равна
$$f(x) = Ax^2 e^{-\lambda x},\ \lambda > 0,\ 0 \le x \le \infty .$$
а) Найти коэффициент A; б) найти функцию распределения; с) вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$.

   Ответ: $A = \frac{\lambda^3}{2}, F(x) = 1 - \frac{\lambda^2 x^2 + 2\lambda x + 2}{2}\exp(-\lambda x), P = 0.0803$

2. Случайная величина X распределена равномерно на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Найти закон распределения случайной величины $Y = \sin(X)$. Ответ: $f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} & -1 < y < 1 . \end{cases}$

3. Функция распределения случайной величины X имеет вид $F(x) = \frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right),\ -\infty < x < \infty$. Найти такое возможное значение x_0 случайной величины X, что с вероятностью 0.25 она примет значение больше x_0.
Ответ: 2

4. Определить дисперсию числа атомов радиоактивного вещества, распадающегося за 1 секунду, если известны масса вещества m, период полураспада T, атомная масса вещества A, число атомов в моле N_0.

   Ответ: M(X)= D(X)= $\frac{mN_0 \ln 2}{AT}$

5. Случайные величины X и У независимы и имеют одно и тоже показательное распределение с плотностью $f_X(x) = f_Y(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \ge 0$. Найти плотность $f_{X+Y}(z)$.

   Ответ: $f_{\xi+\eta}(z) = \lambda^2 z\exp(-\lambda z), z \ge 0$

6. Длина изготовляемых изделий является случайной величиной, среднее значение которой равно 90 см. Дисперсия этой величина равна 0.0225. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что: а) отклонение длины изготовленного изделия от ее среднего значения по абсолютной величине не превзойдет 0.4; б) длина изделия выразится числом, заключенным между 89.7 и 90.3.
Ответ: $P \ge 0.86$; $P \ge 0.75$

Вариант №4

1. Плотность вероятности случайной величины X равна

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x<1\\ x-\frac{1}{2},1\le x\le 2\\ 0,\ x>2\end{cases}.$$

Найти функцию распределения и построить ее график. Ответ: $F(x)=\{0$ при x<1 ; $\frac{x^2-x}{2}$ при $1\le x\le 2$; 1 при x>2.

2. Случайная величина X имеет показательное распределение с плотностью вероятности $f(x)=e^{-x}$, $0\le x\le\infty$. Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины $Y=\exp(-X)$. Ответ: $f_\eta(y)=\{0$ при $y\le 0$;1 при 0< $y\le 1$;0 при y>1 ; $F_\eta(y)=\{0$ при $y\le 0$;y при 0<y$\le$1;1 при y >1.

3. Ребро куба x измерено приближенно, причем $a\le x\le b$. Рассматривая длину куба как случайную величину X, распределенную равномерно в интервале (a,b), найти математическое ожидание и дисперсию объема куба.

Ответ: $M=\frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}, D=\frac{b^7-a^7}{7(b-a)}-\left[\frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4}\right]^2$

4. Случайная величина X имеет плотность вероятности $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\cos(x),\ |x|\le\frac{\pi}{2}\\ 0,\ |x|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Ответ: M=0, D=0.3225.

5. Двумерная случайная величина (X,У) имеет плотность вероятности $f(x,y)=\frac{A}{\pi^2(3+x^2)(1+y^2)}$. Найти константу A, функцию распределения, вероятность попадания случайной точки (x,y) в квадрат, ограниченный прямыми x=0, y=0, x=1, y=1.

Ответ: $A=\sqrt{3}, F(x,y)=\left[\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right]\left[\frac{1}{2}arctg y+\frac{1}{2}\right]; P=\frac{1}{24}$

6. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что любая случайная величина X отклоняется от своего математического ожидания менее чем на 3 среднеквадратичных отклонений этой величины.

Ответ: $P\ge\frac{8}{9}$.

Вариант № 5

1. Функция распределения случайной величины X задана формулой $F(x) = A + B\,\mathrm{artg}(x)$, $(-\infty < x < \infty)$. Найти постоянные A и B, плотность вероятности, вероятность того, что величина X попадает в отрезок $[-1;1]$.

   Ответ: $B = \frac{1}{\pi}, A = \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)}; \frac{1}{2}$.

2. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Найти закон распределения случайной величины $Y = \frac{1}{X}$.

   Ответ: $f_{\eta}(y) = \frac{1}{\sigma y^2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(- \frac{1}{2\sigma^2 y^2} \right)$.

3. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$. Что больше $P(-0.5 < X < -0.1)$ или $P(1 < X < 2)$.

   Ответ: $P_1 = 0.1516$, $P_2 = 0.1359$.

4. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических погрешностей. Случайные погрешности взвешивания подчинены нормальному закону со среднеквадратичным отклонением равным 20 г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с погрешностью, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

   Ответ: P=0.383.

5. Бросают 2 игральные кости. Пусть X – сумма очков, выпадающих на их верхних гранях. Найти закон распределения случайной величины X.

   Ответ: Случайная величина принимает значения 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 с вероятностями , равными соответственно 1/6, 1/3 , 1/2 , 4/6 , 5/6 , 1 , 5/6 , 4/6 , 3/6 , 2/6.

6. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения
7.

x_i	0.3	0.6
p_i	0.2	0.8

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < 0.2$.

Ответ: $P \geq 0.64$.

Вариант №6

1. Дана функция распределения случайной величины X $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left(-t^2\right)dt$. Найти плотность распределения этой величины.

   Ответ: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

2. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения

x_i	1	3	5
p_i	0.4	0.1	0.5

   Построить ряд распределения случайной величины $Y=3X$.

   Ответ: Случайная величина принимает значения 3,9,15 с вероятностями , равными соответственно 0.4 , 0.1 , 0. 5

3. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически; из средняя масса равна 1.06 кг. Найти стандартное отклонение, если 5% коробок имеют массу меньше 1 кг. Предполагается, что масса коробок распределена по нормальному закону.

   Ответ: 0.0365 кг.

4. Случайная величина X ошибок измерений распределена по нормальному закону. Найти вероятность того, что X примет значение между -3σ и 3σ, $\sigma-$ среднеквадратичное отклонение величины X.

   Ответ: 0.997.

5. По мишени производится один выстрел. Вероятность попадания равна p. Рассматриваются две случайные величины: X – число попаданий; У – число промахов. Построить функцию распределения $F(x,y)$ двумерной случайной величины.

   Ответ:

6. Последовательность независимых случайных величин задана рядом распределения

x_i	a	$-a$
p_i	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

   Применима ли к этой последовательности теорема Чебышева.

   Ответ: Применима.

Вариант №7

1. В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули 1 шар. Случайная величина X – случайная величина числа вынутых белых шаров. Построить ряд распределения и функцию распределения этой величины.

   Ответ: $F(x) = (0$ при x<0 ; 5/6 при $0 \le x \le 1$; 1 при x>1

2. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Найти плотность распределения величины $Y = 3X$.

   Ответ: $f_\eta(y) = \frac{1}{3} f_\xi\left(\frac{y}{3}\right)$

3. Найти среднюю скорость молекул газа и дисперсию скорости, подчиняющуюся закону Максвелла

$$f(v) = \begin{cases} 0, \ v < 0 \\ \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} v^2 \exp\left(-h^2 v^2\right), \ v \ge 0 \end{cases}.$$

   Ответ: $M = \frac{2}{h\sqrt{\pi}}, D = \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right)\frac{1}{h^2}$

4. Распределением χ^2 с n степенями свободы называется распределение случайной величины $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, где ξ_i – независимые случайные величины, распределенные нормально с параметрами $a = 0, \sigma = 1$. Найти плотность распределения величины ξ_i^2, математическое ожидание и дисперсию случайной величины χ^2.

   Ответ: $f_{\xi_1^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) x^{-1/2}$ для $x \ge 0$ и равна 0 для x<0 ; n ; 2n

5. Двумерная случайная величина $\{X, Y\}$ подчинена закону распределения $f(x, y) = Axy$ в области D и $f(x, y) = 0$ вне этой области. Область D – треугольник, ограниченный прямыми $x = 0, \ y = 0, \ x + y - 1 = 0$. Найти величины

$$A, M(X), D(X), M(Y), D(Y), \ \mathrm{cov}(X, Y), \ \rho(X, Y).$$

   Ответ: $A = 24, M\xi = M\eta = 2/5, D\xi = D\eta = 1/25, \mathrm{cov}(\xi, \eta) = -2/75, \rho = -2/3$

6. Вероятность появления события в каждом испытании равна ¼. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число появлений события заключено в пределах от 150 до 250, если будет произведено 800 испытаний.

   Ответ: 0.94.

Вариант №8

1. Построить ряд распределения и функцию распределения числа попаданий мячом в корзину при 2 бросках, если вероятность попаданий равна 0.4.
   Ответ:
2. Дискретная случайная величина X принимает ряд значений $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ с соответствующими вероятностями $0.2,\ 0.7, 0.1$. Построить ряд распределения величины $Y = \sin(X)$.
   Ответ:

3. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = 0$ при $x \le 0$ и $f(x) = \frac{1}{x\beta\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln(x) - a)^2}{2\beta^2}\right]$ при $x > 0$. Найти $M(X),\ D(X)$.
   Ответ: $M(\xi) = \exp\left(\frac{\alpha + \beta^2}{2}\right), D(\xi) = \exp(2\alpha)\left(\exp\left(\beta^2\right) - 1\right)\exp\left(\beta^2\right)$

4. Случайная величина эксцентриситета детали имеет распределение Рэлея $F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),\ x \ge 0$. Найти плотность распределения случайной величины, ее моду и медиану.
   Ответ: $f(x) = \frac{x}{\sigma^2} exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), M_0 = \sigma, M_e = \sigma\sqrt{2ln2}$

5. Случайные величины X и У независимы и распределены по закону Пуассона. Найти закон распределения их суммы.
   Ответ: $P = \frac{1}{m!}\exp\left(-\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)\right)\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)^m$
6. В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна 0.8. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом включенных ламп за время T окажется: а) меньше 3; б) не меньше 3.
   Ответ: $P \ge 0.64$; $P \le 0.36$.

Вариант №9

1. Закон распределения случайной величины задан функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x<2\\(x-2)^2,\ 2\le x\le 3\\1,\ x>3\end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения; б) вероятность попадания величины X в интервал $(1,2.5)$.

Ответ: $f(x)=\{0$ при x<2 ; 2 (x-2) при $2\le x\le 3$; 0 при x>3 ; б) 0.25

2. Дискретная случайная величина принимает ряд значений $-2,-1,0,1,2$ с соответствующими вероятностями $0.1,0.2,0.3,0.3,0.1$. Построить ряд распределения случайной величины $Y=X^2+1$.

Ответ:

3. Бросают n игральных костей. Найти математическое ожидание числа таких бросаний, в каждом из которых выпадает ровно m шестерок, если общее число бросаний равно N.

Ответ: $M=NP(m)=NC_n^m\left(\frac{1}{6}\right)^m\left(\frac{5}{6}\right)^{n-m}$

4. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических погрешностей. Случайные погрешности взвешивания подчинены нормальному закону со среднеквадратичным отклонением равным 20 г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с погрешностью, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

Ответ: P=0.383.

5. Случайные величины X и У независимы и нормально распределены с параметрами $M(X)=M(Y)=0,\ D(X)=D(Y)=1$. Найти вероятность того, что случайная точка $\{X,Y\}$ попадет в кольцо $\left\{(X,Y):2\le\sqrt{x^2+y^2}\le 3\right\}$.

Ответ: 0.1242

6. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X-M(X)|<0.2$, если $D(X)=0.004$.

Ответ: $P\ge 0.9$.

Вариант №10

1. В партии из 6 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны 3 детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины числа стандартных деталей среди отобранных.
   Ответ:
2. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины 1,2,3, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата $M(X)=2.3;\ M\left(X^2\right)=5.9$. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям величины X.
   Ответ: 0.2 ; 0.3 ; 0.5
3. Функция распределения непрерывной случайной величины (времени безотказной работы устройства) равна $F(x)=1-\exp\left(-\frac{x}{T}\right),\ x\geq T$. Найти среднее время безотказной работы устройства.
   Ответ: 1/e
4. Случайная величина X в интервале $(-3,3)$ задана плотностью распределения $f(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$, а вне заданного интервала $f(x)=0$. Найти: а) дисперсию X; б) что вероятнее: в результате испытания окажется $x<1$ или $x>1$?
   Ответ: D=4.5,P(-3<x<1)=0.5 $\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$; $P(1<x<3)$=0.5–$\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$.
5. Непрерывная двумерная случайная величина (X,У) равномерно распределена внутри трапеции с вершинами A(-6,0), B(-3,4), C(3,4), D(6,0). Найти двумерную плотность вероятности системы.
   Ответ: 1/36

6. Каждая случайная величина ξ_i последовательности независимых случайных величин задана рядом распределения

ξ_i	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Применима ли к этой последовательности теорема Чебышева?
Ответ: Применима.

Вариант №11

1. Случайная величина X задана на всей оси функцией распределения $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(x)$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение в интервале $(0,1)$.
   Ответ: 1/4

2. Ребро куба измерено приближенно, причем $1 \le x \le 2$. Рассматривая ребро куба как случайную величину X, распределенную равномерно в интервале $(1,2)$, найти: а) математическое ожидание объема куба; б) дисперсию объема куба.
   Ответ: M=15/4, D=4.08

3. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 2\exp(-2x),\ x\ge 0\end{cases}$. Найти $M(X), D(X)$, вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем $M(X)$; найти $P\left[\left|X-M(X)\right|<3\sqrt{D(X)}\right]$.
   Ответ: M=1/2 ; D= 1/4 ; 1-1/e ; 0.9817

4. Точка брошена наудачу внутрь круга радиуса 4 см. Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади этой области. Найти дисперсию расстояния от точки до центра круга.
   Ответ: 8/9

5. Задана двумерная плотность распределения $f(x,y)=\frac{C}{\left(9+x^2\right)\left(16+y^2\right)}$ двумерной случайной величины $\{X,Y\}$. Найти постоянную С.
   Ответ: $12/\pi^2$

6. Дана последовательность взаимно независимых случайных величин $\{\xi_i\}$, подчиняющихся закону распределения с плотностью вероятности $f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}, -\infty<x<\infty$. Применима ли к этой последовательности теорема Чебышева?
   Ответ: Нет.

Вариант №12

1. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна $p = 0.01$. Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью не меньшей, чем 0.95?

   Ответ: ≥ 300

2. Случайная величина X распределена нормально. Найти плотность распределения величины $Y = X^2$.

   Ответ: $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right)$

3. Брошены 12 игральных костей. Найти дисперсию суммы числа очков, которые могут появиться на всех выпавших гранях.

   Ответ: 35

4. Автомат изготовляет шарики. Шарик считается годным, если отклонение диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0.7 мм. Считая, что случайная величина диаметра шариков распределена нормально со среднеквадратичным отклонением 0.4 мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди 100 изготовленных.

   Ответ: 92

5. Задана функция двумерной случайной величины $F(x, y) = 1 + 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}$, $x > 0, y > 0$. Найти вероятность случайной точки в треугольник с вершинами A(1,3), B(3,3), C(2,8).

   Ответ: $P = \frac{5}{3 2^{12}}$

6. Случайная величина принимает ряд значений 0.1, 0.4, 0.6 с соответствующими вероятностями 0.2, 0.3, 0.5. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, $|X - M(X)| < \sqrt{0.4}$.

   Ответ: 0.909.

Вариант №13

1. Производится испытание трех элементов, работающих независимо. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по закону с плотностью распределения для 1 элемента $f_1(t) = 0.1\exp(-0.1t)$, для второго – $f_2(t) = 0.2\exp(-0.2t)$, для третьего – $f_3(t) = 0.3\exp(-0.3t)$. Найти вероятность того, что в интервале времени $(0,10)$ч. отказали не менее 2 элементов.
   Ответ: 0.656.

2. Случайная величина X распределена по закону Коши $f(x) = \dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$.
   Найти плотность распределения случайной величины $Y = X^3 + 2$.
   Ответ: $g(y) = \dfrac{1}{3\pi\left[(y-2)^{2/3} + (y-2)^{4/3}\right]}$

3. Число частиц, достигающих счетчика в некотором опыте, является случайной величиной X, которая принимает значения 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 с соответствующими вероятностями 0.026, 0.081, 0.156, 0.201, 0.195, 0.151, 0.097, 0.054, 0.026, 0.011, 0.007. Найти математическое ожидание, дисперсию числа частиц, достигающих счетчика; вероятность того, что число частиц, достигающих счетчика, меньше 4.
   Ответ: M=3.868 , D= 3. 841 , P=0. 541.

4. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$. Найти математическое ожидание и дисперсию.
   Ответ: 2/3 , 1/2

5. Двумерная случайная величина равномерно распределена в треугольнике $0 < x < 5,\ 0 < y < 2 - \dfrac{2}{5}x$. Найти уравнение регрессии Y на X и регрессию X на Y.
   Ответ: y= 1- x/5 при 0<x<5 ; x= 5/2 - 5y/4 при 0<y<2

6. Дискретная случайная величина X принимает ряд значений 0.3 и 0.6 с соответствующими вероятностями 0.2, 0.8. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < 0.2$.
   Ответ: $P \ge 0.64$.

Вариант №14

1. Производится испытание трех элементов, работающих независимо. Длительность времени безотказной работы элементов распределена по закону с плотностью распределения для 1 элемента $f_1(t) = 0.1\exp(-0.1t)$, для второго – $f_2(t) = 0.2\exp(-0.2t)$, для третьего – $f_3(t) = 0.3\exp(-0.3t)$. Найти вероятность того, что в интервале времени $(0{,}10)$ч. откажет хотя бы один элемент.

   Ответ: 0.9975

2. Случайная величина распределена равномерно на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y = \mathrm{tg}(X)$.

   Ответ: $g(y) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$, $|y| < 1$, $g(y) = 0$, $|y| > 1$.

3. Найти математическое ожидание и дисперсию при бросании N игральных костей.

   Ответ: 3.5 N ; 17.5 N/6

4. Найти среднее значение и дисперсию произведения двух независимых случайных величин X и Y с равномерным распределением: X в интервале (0,1), У – в интервале (1,3).

   Ответ: M=1 , D=4/9

5. Будут ли зависимы случайные величины X и У, если их совместное распределение является равномерным в круге $x^2 + y^2 \le 1$?

   Ответ: Да

6. Длина изготовленных изделий представляет случайную величину, среднее значение которой равно 90 см. Дисперсия этой величины равна 0.0225. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что длина изделия выразится числом, заключенным между 89.7 и 90.3 см.

   Ответ: $P \ge 0.75$.

Вариант №15

1. Производится испытание трех элементов, работающих независимо. Длительность времени безотказной работы элементов для 1 элемента распределена по закону $F_1(t)=1-\exp(-0.1t)$, для второго – $F_2(t)=1-\exp(-0.2t)$, для третьего – $F_3(t)=1-\exp(-0.3t)$. Найти вероятность того, что в интервале времени $(0,5)$ч. откажет только один элемент.

   Ответ: 0.292

2. Точка случайно попадает на окружность радиуса 1 см (распределение вероятности предполагается равномерным по длине окружности). Найти распределение вероятности проекции этой точки на диаметр.

   Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{\pi\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$ при |x|<1 , f(x)=0 при |x|>1

3. Вычислить математической ожидание и дисперсию определителя второго порядка, элементы которого x_{ij} - независимые случайные величины с $M(X)=0,\ D(X)=4$.

   Ответ: M=0, $D=32$.

4. Функция случайной величины X задана формулой $F(x)=A+B\,\mathrm{arctg}(x),\ -\infty<x<\infty$. Найти $M(X),\ D(X)$.

   Ответ: Не существует.

5. Будут ли независимы случайные величины X и Y, если их совместное распределение является равномерным в треугольнике $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x$?

   Ответ: Да

6. Длина изготовленных изделий представляет случайную величину, среднее значение которой равно 100 см. Дисперсия этой величины равна 0.0056. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что отклонение длины от ее среднего значения по абсолютной величине не превзойдет 0.4.

   Ответ: $P\ge 0.86$.

Вариант №16

1. Случайная величина X принимает ряд значений -2,-1,0,1,2 с вероятностями, равными соответственно 0.1, 0.2, 0.2, 0.4, 0.1. Найти вероятность того, что величина X примет значение, не превосходящее по абсолютной величине 1.
   Ответ: 0.8

2. В прямоугольной системе координат XOУ из точки A(4,0) наугад под произвольным углом проведен луч, пересекающий отрицательную полуось оси OУ. Найти плотность распределения ординаты точки пересечения проведенного луча с указанной полуосью.
   Ответ: $g(y) = \dfrac{8}{\pi\left(16+y^2\right)}, 0 < y < \infty$

3. Найти среднеквадратичное отклонение случайной величины X, принимающей ряд значений 3,5,7,9 с вероятностями, равными соответственно 0.4, 0.3, 0.2, 0.1.
   Ответ: 2

4. Плотность распределения случайной величины X имеет вид
   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{25}x, \ x \in (0,5) \\ 0, \ x \notin (0,5) \end{cases}.$$
   Найти $D(X)$.
   Ответ: D=25/18

5. Совместное распределение вероятностей величин X и У является нормальным с плотностью распределения $f(x,y) = \dfrac{1}{3\pi}\exp\left[-\dfrac{\left(x^2+4y^2\right)}{6}\right]$.
   Найти вероятность попадания точки (X,У) в прямоугольник -1<x<1, -2<y<2.
   Ответ: P=0.427

6. В последовательности независимых случайных величин каждая случайная величина принимает ряд значений $nd, 0, -nd$ с вероятностями, равными соответственно $e^{-n}, 1-2^{1-n}, e^{-n}$. Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?
   Ответ: Да.

Вариант №17

1. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого элемента имеет функцию распределения $F_1(t) = 1 - \exp(-0.02t)$, второго – $F_2(t) = 1 - \exp(-0.05t)$. Найти вероятность того, что за время длительностью 6 часов только один элемент откажет.
   Ответ: 0.31
2. Случайная величина X принимает ряд значений 2, 4, 6, 8 с вероятностями, равными соответственно 0.4, 0.3, 0.2, 0.1. Найти математическое ожидание и дисперсию.
   Ответ: 4; 20
3. Плотность распределения величины X имеет вид $f(x) = \begin{cases} 0,\ x \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos(x),\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

   Найти дисперсию величины $Y = X^2$.

   Ответ: $D = 20 - 2\pi^2$

4. Плотность распределения величины X имеет вид $f(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ \frac{3}{2}x^2,\ 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{2}(2-x)^2,\ 1 \le x \le 2 \\ 0,\ x > 2 \end{cases}$. Найти математическое ожидание и дисперсию величины X.
   Ответ: 1; 11

5. Будут ли независимы случайные величины X и Y, если их совместное распределение является равномерным в прямоугольнике $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$?
   Ответ: Нет

6. Устройство состоит из 40 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время t равна 0.05. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом отказов за время t окажется меньше 4.
   Ответ: $P \ge 0.88$.

Вариант №18

1. В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули 1 шар. Случайная величина X – случайная величина числа вынутых белых шаров. Построить ряд распределения и функцию распределения этой величины.

   Ответ: $F(x) = \{\ 0,\ при\ \ x < 0\ ;\ \ 5/6\ ,\ при\ \ 0 \le x \le 1\ ;\ \ 1\ \ при\ \ \ x > 1$

2. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 3\xi$, если случайная величина имеет плотность распределения $f_{\xi}(x)$.

   Ответ: $f_{\eta}(y) = 1/3 f_{\xi}\left(\frac{y}{3}\right)$

3. Найти среднее число лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 40 билетов, причем вероятность выигрыша равна 0.05.

   Ответ: 2

4. Определить плотность распределения системы двух положительных случайных величин по заданной функции распределения $F(x, y) = [1 - \exp(-\alpha x)][1 - \exp(-\beta y)]$.

   Ответ: $f(x,y) = \alpha\beta\, exp[-(\alpha x + \beta y)]$

5. Найти математическое ожидание и дисперсию: а) числа очков, выпадающих при бросании игральной кости; б) суммы очков, выпадающих при бросании N игральных костей.

   Ответ: а) 7/2, 35/12 б) 3.5N, 17.5N/6.

6. Каждая из случайных величин последовательности независимых величин $\{\xi_i\}$ может принимать только три значения $-\sqrt{n}, 0, \sqrt{n}$ с вероятностями, равными соответственно $\frac{1}{n}, 1 - \frac{2}{n}, \frac{1}{n}$. Применима ли к этой последовательности теорема Чебышева?

   Ответ: Применима.

Вариант №19

1. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту равно 5. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит 2 вызова.
   Ответ: 0.000025

2. Случайная величина Х принимает значения 1 и 2 с соответствующими вероятностями 0.2 и 0.8, а случайная величина У принимает значения 0.5 и 1 с соответствующими вероятностями 0.3 и 0.7. Найти математическое ожидание произведения ХУ.
   Ответ: 1.53

3. Стрелок стреляет в цель до тех пор, пока поразит ее. Вероятность попадания при отдельном выстреле равна p, результаты выстрелов можно считать независимыми. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение числа выстрелов.
   Ответ: $\frac{1}{p};\frac{1-p}{p^2};\sigma=\frac{\sqrt{1-p}}{p}$

4. Плотность случайной величины Х имеет вид
$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{1}{2}\sin(x), & 0<x\le\pi\\ 0, & x>\pi\end{cases}.$$
   Найти вероятность того, что в результате испытания величина Х примет значение, заключенное в интервале $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.
   Ответ: $\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}$

5. Дискретная случайная величина Х принимает значения -2,-1,0,1,2 с соответствующими вероятностями 0.1, 0.2, 0.3, 0.3, 0.1. Построить ряд распределения случайной величины $Y=|X|$.
   Ответ:

6. Дана случайная величина Х с плотностью распределения $f(x)=A\exp\left(-x^2\right)$ и случайная величина $Y=X^2$. Определить коэффициент корреляции случайных величин Х и У.

   Ответ: $\rho=0$.

Вариант №20

1. Имеются три независимые случайные величины X,Y и Z. Величина X распределена по нормальному закону $f(x) = \frac{`1}{4\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(x-3)^2}{32}\right)$. Величина Y распределена равномерно в интервале $[1,3]$. Величина Z распределена по показательному закону
$f(z) = \begin{cases} 0, z < 0, \\ 0.5exp(-0.5z), z \geq 0 \end{cases}$. Найти $M(X+Y+Z)$.

   Ответ:7.

2. Случайная величина задана функцией распределения
$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{3}, & 0 < x < 3 \\ 1, & 3 \leq x \end{cases}$ Найти $M(X)$, $D(X)$, $P(1 < X < 2)$.

   Ответ:1.5, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$.

3. Вероятность обнаружения затонувшего судна за время поиска t задается формулой $P(t) = 1 - exp(-\lambda t)$. Определить среднее время поиска, необходимое для обнаружения судна.

   Ответ: $\frac{1}{\lambda}$

4. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 40, D = 200$. Написать выражение для плотности распределения и функции распределения этой случайной величины. Построить их графики. Определить вероятность $P(30 \leq X < 80)$.

   Ответ: $f(x) = \frac{1}{20\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x-40)^2}{400}\right)$, $P=$

5. Имеются две независимые случайные величины X,Y. Величина Y распределена равномерно в интервале $[0,4]$. Величина X распределена по показательному закону
$f(x) - \begin{cases} 0, x < 0, \\ 0.25exp(-0.25x), x \geq 0 \end{cases}$. Найти $M(X+Y)$, $D(X-Y)$.

   Ответ: $M(X+Y) = 6$, $D(X-Y) = 14$

6. Случайная величина распределена равномерно. Найти плотность вероятности этой случайной величины, функцию распределения и вероятность $P(1 \le x < 3)$, если $M(X) = 5, D(X) = 3$.

Ответ: $f(x)=\begin{cases}0, & x \le 2\\ \frac{1}{6}, & 2 < x \le 8\\ 0, & x > 8\end{cases}$, $F(x)=\begin{cases}0, & x \le 2\\ \frac{x-2}{6}, & 2 < x \le 8\\ 1, & x > 8\end{cases}$, $P=\frac{1}{3}$.