

Теория надежности – раздел прикладной математики, в котором разрабатываются методы обеспечения эффективной работы изделий. Под надежностью в широком смысле слова понимается способность технического устройства к безотказной работе в течение заданного времени, обусловленного временем выполнения задачи.

Одним из основных в (Т.Н) является понятие **отказа**. В (Т.Н) изучаются процессы возникновения отказов, разрабатываются методы выявления предотказовых состояний. В теории надежности различают два типа отказов: **внезапные, постепенные**. Внезапный отказ – это мгновенный выход устройства из строя, возникающий в случайный момент времени (обрыв проводника, пробой конденсатора). Постепенный отказ – это отказ устройства, связанный с постепенным ухудшением его характеристик. Мы будем рассматривать только внезапные отказы. Надежность системы (технического устройства) зависит от состава, количества ее элементов, от способа объединения их в систему и от характеристик каждого ее элемента. Элементом будем называть техническое устройство, не подлежащее дальнейшему расчленению, надежность которого считается заданной или определяется экспериментально. Теория надежности занимается решением задач определения надежности системы по надежности ее элементов.

Так как **события**, определяющие надежность изделий (моменты отказов, длительности ремонта и др.) в (Т.Н) рассматриваются как случайные, то теоретической основой (Т.Н) являются теория вероятностей и математическая статистика.

§6.1. Надежность элемента, плотность отказов, среднее время безотказной работы

В теории надежности (Т.Н):

- 1) вводятся количественные показатели надежности;
- 2) разрабатываются рекомендации по обеспечению надежности на этапах: проектирования; производства; хранения; эксплуатации; ремонта изделий.

Рассмотрим некоторые характеристики надежности системы и элементов.

Надежностью элемента (системы) в узком смысле слова называется вероятность $p(t)$ того, что данный элемент будет работать безотказно в течение времени t ($p(0) = 1, p(\infty) = 0$).

Для определения $P(t)$ используется следующая статическая оценка:

$$P(t) = \frac{N - N_0}{N};$$

где N – число изделий, поставленных на испытание (эксплуатацию),
 N_0 – число изделий, отказавших в течении времени t .

Ненадежностью элемента (системы) называется вероятность $q(t)$ того, что элемент откажет в течение времени t , т.е.
 $q(t) = 1 - p(t)$.

Пусть T – случайная величина времени безотказной работы элемента. Тогда функция распределения T определяется как

$$F(t) = P(T < t),$$

т.е. $F(t)$ – вероятность того, что за время t элемент откажет, так что

$$F(t) = q(t), p(t) = 1 - F(t).$$

Таким образом, $q(t)$ обладает свойствами функции распределения неотрицательной случайной величины ($F(0) = 0, F(\infty) = 1$).

На практике вместо $F(t)$ пользуются плотностью распределения времени безотказной работы элемента

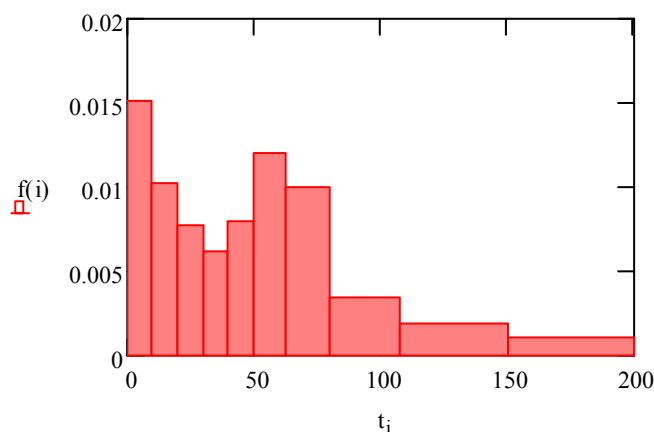
$$f(t) = F'(t) = q'(t) = -p'(t).$$

Согласно вероятностному смыслу плотности распределения величина $f(t)dt$ интерпретируется как вероятность того, что T примет значение, лежащее в пределах элементарного участка $(t, t + dt)$.

Пример. Было испытано $N = 1000$ микросхем на длительность безотказной работы. Результаты испытаний представлены в таблице.

Δx_i	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-80	80-100	100-150	150-200
v_i	151	102	77	61	79	120	200	69	91	50

Построить гистограмму, являющуюся графиком выборочной плотности $f_n(t_i) = \frac{v_i}{Nh}$.



Отметим, что выборочная плотность, изображенная на рисунке, имеет максимум при $t = 0$. Повышение плотности в точке $t = 0$ означает, что заметную долю элементов можно считать отказавшими точно в момент включения. При этом T превращается из непрерывной в смешанную случайную величину, у которой одно значение $t = 0$ обладает отличной от нуля вероятностью p_0 , а для других существует только какая-то плотность распределения. Функция распределения такой случайной величины в точке $t = 0$ имеет скачок, равный p_0 , а при $t > 0$ – непрерывна. При обработке экспериментальных данных в таком случае отбирают в отдельную группу элементы, отказавшие при включении, и отношение их числа m_0 к общему числу N испытанных элементов согласно теореме Бернулли принимают за приближенное значение p_0 :

$$p_0 \approx \frac{m_0}{N},$$

а для остальных данных строится обычная гистограмма (при этом частоты находятся делением числа наблюдений в разряде на общее число наблюдений N).

В качестве характеристики надежности часто применяется *среднее время безотказной работы*, т.е. математическое ожидание

$$\bar{t} = M(T) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} p(t) dt.$$

В случае, когда T – смешанная случайная величина, кривая $p(t)$ начинается не от единицы, а от $1 - p_0$.

Надежность часто характеризуют функцией интенсивности отказов.

Интенсивностью отказов называется отношение плотности распределения безотказной работы элемента $f(t)$ к его надежности $p(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)} = -\frac{p'}{p},$$

так что надежность можно представить в виде

$$P(t) = \exp[-\Delta(t)]$$

где $\Delta(t) = \int_0^t \lambda(t) dt$ – **функция ресурса**. Найдем оценку интенсивности. Пусть одновременно испытывается большое число N однородных элементов – каждый до момента своего отказа; $n(t)$ – число элементов, оказавшихся исправными к моменту времени t ; $v(\Delta t)$ – число элементов, отказавших на интервале времени $(t, t + dt)$.

По теореме Бернулли $n(t) \approx Np(t)$, и с учетом теоремы о среднем плотность $f(t) \approx \frac{v(\Delta t)}{N\Delta t}$. Тогда

$$\frac{v(\Delta t)}{n(t)\Delta t} = \frac{v(\Delta t)}{Np(t)\Delta t} \approx \frac{f(t)}{p(t)}.$$

Следовательно, несмещенной оценкой интенсивности является среднее число отказов в единицу времени, приходящееся на один работающий элемент:

$$\lambda(t) \approx \frac{v(\Delta t)}{n(t)\Delta t}.$$

Если $\lambda(t)$ не убывает по t , то $P(t)$ называют *стареющей*; если $\frac{\lambda}{t}$ не убывает по t , то $P(t)$ называют *стареющей в среднем*. В (Т.Н) наряду с непараметрическими классами $P(t)$ (стареющими, стареющими в среднем и др.) широко используются параметрические $P(t)$, например экспоненциальные: $\lambda(t) = at$; Вейбулла–Гнеденко:

$$\lambda(t) = (at)^b, a > 0, b > 0, t > 0.$$

Если $P(t)$ является экспоненциальной, то несмещенная оценка λ находится следующим образом.

С целью получения данных о надежности производятся испытания. Например, при испытаниях по плану $[N, B, r]$ испытываются N однотипных изделий до момента t_r появления r -го отказа. Отказавшие изделия снимаются с испытаний. Статистические выводы о надежности часто делают на основе **числа отказов** и **суммарной наработки**, равной сумме времен безотказной работы всех испытывавшихся изделий. Для плана $[N, B, r]$ **суммарная наработка** равна

$$S_r = t_{(1)} + t_{(2)} + \dots + t_{(r-1)} + \dots + [N - (r - 1)]t_r,$$

где $t_{(1)} \leq \dots \leq t_{(r)}$ - последовательность моментов отказов. Таким образом, если $P(t)$ является экспоненциальной, то несмещенной оценкой λ при испытаниях по плану $[N, B, r]$ является величина, равная

$$\tilde{\lambda} = \frac{(r-1)}{S_r}.$$

Замечание. Показатели надежности существенно зависят от режима испытаний. Их пересчет с одних режимов испытаний на другие является одной из актуальных проблем (Т.Н).

Пример1. Интенсивность отказов меняется по закону

$$\lambda = \begin{cases} 3 - 2t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$

Найти закон надежности $p(t)$ и время безотказной работы.

На участке (0,1)

$$p(t) = \exp\left(-\int_0^t (3-2t)dt\right) = \exp(-(3t-t^2)).$$

При $t > 1$

$$\int_0^t \lambda dt = \int_0^1 (3-2t)dt + \int_1^t 1dt = 1+t,$$

так что

$$p(t) = \exp(-(1+t)).$$

Тогда время безотказной работы

$$\bar{t} = \int_0^1 \exp(-(3t-t^2))dt + \int_1^{\infty} \exp(-(1+t))dt = 0.505.$$

Пример2. Случайная величина времени безотказной работы распределена по равномерному закону на интервале (t_0, t_1) . Найти интенсивность отказов.

По определению

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)} = \frac{f(t)}{1-q(t)},$$

где

$$q(t) = \int_{t_0}^t \frac{1}{t_1-t_0} dt = \frac{t-t_0}{t_1-t_0},$$

откуда находим $\lambda(t) = \frac{1}{t_1-t}$.

§6.2. Надежность нерезервированной системы

Пусть некоторая техническая система S составлена из n элементов

$A_1, A_2, \dots, A_n$.

Допустим, что надежности элементов нам известны. Возникает задача определения надежности системы. Рассмотрим систему без резервирования, в которой отказ любого элемента равносителен отказу системы в целом. Выразим надежность такой системы через надежности ее элементов. Пусть имеется некоторый промежуток времени $(0, \tau)$, в течение которого требуется обеспечить безотказную работу системы. Для безотказной работы системы без резервирования в течение времени τ нужно, чтобы работал безотказно каждый из ее элементов. Пусть S – событие, состоящее в безотказной работе системы за время τ ; $A_1, A_2, \dots, A_n$ – события, состоящие в безотказной

работе соответствующих элементов; $p(t)$ – надежность системы; $p_i(t)$ – надежности элементов. Тогда

$$S = A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$$

и по теореме умножения для независимых событий

$$p(t) = \prod_{i=1}^n p(A_i) = \prod_{i=1}^n p_i(t).$$

Выразим интенсивность отказов системы без резервирования $\Lambda(t)$ через интенсивности отказов $\lambda_i(t)$ отдельных ее элементов. Так как

$$p(t) = e^{-\int_0^t \Lambda dt} = \prod_{i=1}^n p_i = e^{-\sum_{i=1}^n \int_0^t \lambda_i dt},$$

то $\Lambda(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

§6.3. Надежность резервированной системы

Одним из путей повышения надежности системы является введение в нее дублирующих элементов. Будем предполагать, что надежность каждого дублирующего элемента не зависит от того, когда включился в работу этот элемент (*горячий резерв*). При произвольном числе n дублирующих друг друга независимых элементов событие

$$S = A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

Тогда надежность резервированной системы вычисляется по формуле

$$p(S) = 1 - p(\bar{S}) = 1 - p(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i).$$

Если каждый из резервных элементов $A_2, \dots, A_n$ снабжен своим переключателем с надежностью соответственно $p_n^{(2)}, p_n^{(3)}, \dots, p_n^{(n)}$, то надежность системы равна

$$p = 1 - (1 - p_1) \prod_{i=2}^n (1 - p_i p_n^{(i)}).$$

Рассмотрим случай, когда резервный элемент до своего включения в работу вообще не может отказывать (*холодное резервирование*) или может отказывать, но с другой, меньшей плотностью вероятности, чем после включения (*облегченный резерв*).

При рассмотрении задач, связанных холодным или облегченным резервированием, недостаточно знания системы и элементов для одного, заранее фиксированного, значения времени t . Необходим анализ всего случайного процесса функционирования системы. Рассмотрим несколько задач, относящихся к холодному и облегченному резервированию.

I. Рассмотрим сначала общий случай расчета надежности системы с холодным или облегченным резервированием.

Пусть система состоит из одного основного A_1 и одного резервного элемента A_2 ; $\lambda_1(t)$ – интенсивность потока отказов элемента A_1 ; при отказе элемента A_1 происходит автоматическое и безотказное переключение на элемент A_2 ($p_n = 1$); $\lambda_2(t)$ – интенсивность потока отказов элемента A_2 до его включения в работу в облегченном режиме; после его включения в работу, в момент отказа первого элемента, интенсивность мгновенно становится равной $\bar{\lambda}_2\left(t/t_1\right)$, где t_1 – время, в течение которого элемент работал в облегченном режиме. Требуется найти надежность системы $P(t)$.

Пусть T_1 – случайная величина момента отказа элемента A_1 ; T_2 – случайная величина момента отказа элемента A_2 ; событие S – безотказная работа системы до момента t . Тогда

$$P(\bar{S}) = 1 - P(S) = P(T_1 < t, T_2 < t) = \int_0^t \int_0^t f(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

где двумерная плотность $f(t_1, t_2) = f_1(t_1)f(t_2|t_1)$, $f_1(t_1)$ – безусловная плотность распределения величины T_1 , $f(t_2|t_1)$ – условная плотность распределения величины T_2 при условии, что величина T_1 приняла значение t_1 . Из определения интенсивности следует, что

$$f_1(t_1) = \lambda_1(t_1)p_1(t_1) = \lambda_1(t_1)\exp\left(-\int_0^{t_1} \lambda_1(t) dt\right).$$

Так как

$$\lambda_2\left(t_2/t_1\right) = \begin{cases} \lambda_2(t_2), & t_2 < t_1, \\ \bar{\lambda}_2\left(t_2/t_1\right), & t_2 > t_1, \end{cases}$$

то условная плотность равна

$$f(t_2|t_1) = \begin{cases} \lambda_2(t_2)\exp\left(-\int_0^{t_2} \lambda_2(t) dt\right), & t_2 < t_1, \\ \bar{\lambda}_2\left(t_2/t_1\right)\exp\left\{-\int_0^{t_1} \lambda_2(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \bar{\lambda}_2\left(t_2/t_1\right) dt\right\}, & t_2 > t_1. \end{cases}$$

так что надежность системы

$$P(t) = 1 - \int_0^t \int_0^t f_1(t_1)f(t_2|t_1)dt_1dt_2.$$

При $\lambda_2(t) = 0$ найденное решение описывает случай холодного резерва. Из найденного решения видно, что если число резервных элементов более одного, то задача сильно усложняется.

Однако задача может быть сильно упрощена, если потоки неисправностей, действующие на основной и резервные, являются пуассоновскими, интенсивность каждого из которых постоянна. При таком предположении надежность системы может быть найдена путем решения колмогоровских дифференциальных уравнений для вероятностей ее состояний.

II. Рассмотрим систему с холодным резервом и пуассоновскими потоками отказов.

Пусть система состоит из основного элемента A_1 и двух резервных: A_2, A_3 . При отказе элемента A_1 в работу включается A_2 , при отказе $A_2 - A_3$. До включения каждый из резервных элементов находится в холодном резерве и отказать не может. Интенсивность потока отказов основного элемента λ_1 ; $\lambda_2 = \lambda_3$. Все потоки отказов пуассоновские. Требуется определить надежность системы.

Представим процесс, протекающий в системе, как марковский случайный процесс с непрерывным временем и с дискретными состояниями:

S_1 – работает элемент A_1 ,

S_2 – работает элемент A_2 ,

S_3 – работает элемент A_3 ,

S_4 – не работает ни один элемент.

Система уравнений Колмогорова для таких состояний имеет вид

$$\frac{dp_1}{dt} = -\lambda_1 p_1,$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\lambda_2 p_2 + \lambda_1 p_1,$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -\lambda_2 p_3 + \lambda_2 p_2,$$

$$\frac{dp_4}{dt} = \lambda_2 p_3,$$

причем, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. При начальном условии $p_1(0) = 1$ из первого уравнения находим

$$p_1 = \exp(-\lambda_1 t).$$

Интегрирование второго уравнения с начальным условием $p_2(0) = 0$ дает

$$p_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(-\lambda_1 t) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(-\lambda_2 t).$$

Аналогично,

$$p_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2 t}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}.$$

Из условия полноты находим

$$p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3.$$

Тогда надежность системы равна сумме соответствующих вероятностей:

$$P(t) = p_1 + p_2 + p_3.$$

III. Рассмотрим систему с облегченным резервом и пуассоновскими потоками отказов.

Пусть система состоит из основного элемента A_1 и трех резервных элементов A_2, A_3, A_4 . Основной элемент подвергается пуассоновскому потоку отказов с интенсивностью λ_1 ; каждый из резервных до своего включения подвергается потоку с интенсивностью λ_2 ; после включения резервного элемента интенсивность мгновенно подскакивает до значения λ_2 ; при отказе основного элемента включается в работу резервный элемент A_2 , при отказе $A_2 - A_3$ и т.д. Требуется определить надежность системы. Для этого введем состояния системы:

S_{13} – основной элемент работает, все 3 резервных исправны;

S_{12} – основной элемент работает, из 3 резервных 2 исправны, 1 отказал;

S_{11} – основной элемент работает, из 3 резервных 1 исправен, 2 отказал;

S_{10} – основной элемент работает, все 3 резервных отказали;

S_{03} – основной элемент отказал, работает 1 из резервных, остальные 2 исправны;

S_{02} – основной элемент отказал, работает 1 из резервных, из остальных резервных 1 исправен, другой отказал;

S_{01} – основной элемент отказал, работает 1 из резервных, остальные 2 резервных отказали;

S_{00} – все элементы отказали.

Система уравнений Колмогорова для вероятностей этих состояний имеет вид:

$$\frac{dp_{13}}{dt} = -(3\lambda_2 + \lambda_1)p_{13},$$

$$\frac{dp_{12}}{dt} = -(2\lambda_2 + \lambda_1)p_{12} + 3\lambda_2 p_{13},$$

$$\frac{dp_{11}}{dt} = -(\lambda_2 + \lambda_1)p_{11} + 2\lambda_2 p_{12},$$

$$\frac{dp_{10}}{dt} = -\lambda_1 p_{10} + \lambda_2 p_{11}.$$

$$\frac{dp_{03}}{dt} = -(\lambda_2 + 2\lambda_2) p_{03} + \lambda_1 p_{13},$$

$$\frac{dp_{02}}{dt} = -(\lambda_2 + \lambda_2) p_{02} + \lambda_1 p_{12} + (\lambda_2 + 2\lambda_2) p_{03}.$$

$$\frac{dp_{01}}{dt} = -\lambda_2 p_{01} + \lambda_1 p_{11} + (\lambda_2 + 2\lambda_2) p_{02},$$

$$\frac{dp_{00}}{dt} = -\lambda_1 p_{10} + \lambda_2 p_{01}.$$

$$p_{13} + p_{12} + p_{11} + p_{10} + p_{03} + p_{02} + p_{01} + p_{00} = 1.$$

Интегрирование системы может быть осуществлено в следующем порядке: из первого уравнения находим

$$p_{13} = \exp[(3\lambda_2 + \lambda_1)t]$$

Затем это выражение подставим во второе уравнение и находим p_{12} , подставляем p_{12} в третье уравнение, и так далее. Тогда надежность системы равна сумме соответствующих вероятностей:

$$P(t) = p_{13} + p_{12} + p_{11} + p_{10} + p_{03} + p_{02} + p_{01}.$$

§6.4 Надежность системы с восстановлением

Ранее мы исследовали надежность системы в предположении, что отказавшие элементы не восстанавливаются. В данном разделе исследуем надежность системы в предположении, что отказавшие элементы восстанавливаются – мгновенно заменяются новыми или ремонтируются. При этом будем предполагать, что все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, – пуассоновские.

1. Рассмотрим систему с мгновенным восстановлением, состоящую из нескольких элементов; среди них

n_1 элементов 1 группы,

n_2 элементов 2 группы,

.....

n_k элементов k группы.

Каждый элемент любой группы, независимо от других, может отказывать; интенсивность потока отказов для элементов разных групп равна соответственно: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$; все потоки – пуассоновские; отказавший элемент мгновенно заменяется новым; в запасе имеется $N_1, N_2, \dots, N_k$ соответствующих групп; отсутствие запасного элемента при очередном отказе означает отказ системы. Требуется определить надежность системы.

Так как отсутствие запасного элемента любой группы равносильно отказу системы, то надежность системы будет равна произведению надежностей всех групп.

Надежность i – ой группы $P^{(i)}(t)$ есть вероятность того, что к моменту t группа будет работать. Для этого нужно, чтобы на участке $(0, t)$ отказало не более N_i элементов i – ой группы. Число отказов пуассоновского потока, попадающих на участок длиной t , определяется формулой Пуассона

$$P_m^{(i)}(t) = \frac{(\lambda_i t)^m e^{-\lambda_i t}}{m!}.$$

Найдем вероятность того, что число отказов, попадающих на участок $(0, t)$, будет не больше N_i . Эта вероятность и будет надежностью i – ой группы

$$P^{(i)}(t) = e^{-\lambda_i t} \sum_{m=0}^{N_i} \frac{(\lambda_i t)^m}{m!}.$$

Перемножая эти вероятности, получим надежность системы:

$$P(t) = \sum_{i=1}^k P^{(i)}(t).$$

II. Рассмотрим систему с задержанным восстановлением, состоящую из нескольких элементов.

Пусть система состоит из n элементов, каждый из которых находится под действием пуассоновского потока отказов с интенсивностью λ ; при отказе любого элемента система выключается и начинается восстановление элемента; при неработающей системе элементы отказывать не могут; интенсивность пуассоновского потока восстановлений равна μ . Требуется найти: 1) обобщенную надежность системы $P(t)$; 2) предельную обобщенную надежность системы $p = P(\infty)$; 3) вероятность $\bar{P}(t)$ того, что до момента t отказов вообще не будет.

Система может быть только в двух состояниях:

A_0 – система работает;

A_1 – система выключена, восстанавливается один элемент (одновременный выход из строя 2 и более элементов не рассматривается в силу ординарности пуассоновского потока).

Для такой системы интенсивность потока отказов равна сумме потоков $n\lambda$. Из теории массового обслуживания известно, что вероятность системы остаться в состоянии A_0 равна

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\mu + n\lambda} + \frac{\lambda n}{\mu + n\lambda} \exp(-[n\lambda + \mu]t),$$

$$p_1(t) = 1 - p_0(t),$$

так что обобщенная, предельная надежности системы и вероятность $\bar{P}(t)$ равны:

$$P(t) = p_0(t),$$

$$p = P(\infty) = \frac{\mu}{\mu + n\lambda},$$

$$\bar{P}(t) = \frac{(n\lambda t)^0}{0!} \exp(-n\lambda t) = \exp(-n\lambda t).$$

III. Рассмотрим случай, когда во время восстановления одного элемента другие продолжают работать и могут выходить из строя.

Пусть система состоит из n элементов, каждый из которых находится под действием пуассоновского потока отказов с интенсивностью λ ; при отказе элемента он немедленно начинает восстанавливаться, остальные же элементы продолжают работать; интенсивность потока восстановлений элемента (независимо от числа одновременно восстанавливаемых элементов) равна μ .

Требуется найти: 1) обобщенную надежность системы $P(t)$; 2) предельную обобщенную надежность системы $p = P(\infty)$; 3) среднее число работающих элементов для предельного режима.

Система может быть в следующих состояниях:

A_0 – все элементы исправны;

A_1 – 1 элемент восстанавливается, остальные исправны;

.....

A_k – k элементов восстанавливаются, остальные исправны;

.....

A_n – все элементы восстанавливаются.

Дифференциальные уравнения для вероятностей таких состояний имеют вид:

$$\frac{dp_0}{dt} = -n\lambda p_0 + \mu p_1,$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -[(n-1)\lambda + \mu]p_1 + n\lambda p_0 + 2\mu p_2,$$

.....

$$\frac{dp_k}{dt} = -[(n-k)\lambda + k\mu]p_k + (n-k+1)\lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1},$$

.....

$$\frac{dp_n}{dt} = -n\mu p_n + \lambda p_{n-1},$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1.$$

Искомая надежность $P(t) = p_0(t)$, которую можно найти интегрируя систему уравнений Колмогорова при начальном условии $t = 0, p_0 = 1, p_1 = \dots = p_n = 0$.

Предельные вероятности находим по формулам теории массового обслуживания

$$p_0(\infty) = \frac{1}{(1+q)^n},$$

$$p_m = C_n^m q^m p_0, \quad m = 1, 2 \dots n.$$

Среднее число исправно работающих элементов $\bar{n}$ равно числу элементов n , умноженному на вероятность того, что отдельный элемент работает исправно $\frac{1}{1+q}$:

$$\bar{n} = \frac{n}{1+q}.$$

§6.5. Надежность системы с учетом зависимости отказов

Исследуем надежность системы, составленной из элементов, отказы которых могут быть зависимыми. Зависимость между отказами может быть двух типов:

- 1) отказ какого-либо элемента меняет режим работы системы;
- 2) на всю совокупность элементов действует один случайный фактор.

Рассмотрим способы учета обоих типов зависимости.

I. Рассмотрим случай, когда зависимость между отказами обусловлена случайными факторами.

Будем считать, что эти факторы определяют тот или иной режим работы системы. Сначала рассмотрим случай, когда режим работы системы не меняется в ходе ее эксплуатации. Пусть имеется система, надежность которой зависит от режима, при котором она работает. Пусть возможны несколько режимов работы: $R_1, R_2, \dots, R_k$ с вероятностями, равными соответственно $P(R_1), P(R_2), \dots, P(R_k)$. Пусть $P(t/R_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) – условная надежность системы при i -ом режиме R_i . Тогда надежность системы вычисляется по формуле полной вероятности:

$$P(t) = \sum_{i=1}^k P(R_i)P(t/R_i).$$

Если режим работы характеризуется непрерывной случайной величиной X с плотностью распределения $f(x)$, то надежность системы равна

$$P(t) = \int P(t/x)f(x)dx,$$

где $P(t/x)$ – условная надежность системы при условии, что $X = x$.

Пример 1. Нерезервированная система состоит из двух элементов A_1, A_2 и может работать в одном из трех режимов R_1, R_2, R_3 , вероятности которых $P(R_1) = 0.4, P(R_2) = P(R_3) = 0.3$. При режиме R_1 интенсивности потоков отказов элементов A_1, A_2 равны 0.1 и 0.2, при R_2 – 0.3 и 0.4, при R_3 – 0.4 и 0.5. Требуется определить надежность системы и вычислить ее для $t = 2$ часа.

Так как система нерезервированная, то интенсивности складываются, так что условные надежности системы при 3 режимах:

$$P(t/R_1) = \exp(-(0.1 + 0.2)t) = \exp(-0.3t),$$

$$P(t/R_2) = \exp(-0.7t),$$

$$P(t/R_3) = \exp(-0.9t).$$

Откуда находим надежность системы

$$P(t) = 0.4\exp(-0.3t) + 0.3\exp(-0.7t) + 0.3\exp(-0.9t),$$

так что при $t = 2$

$$P(2) = 0.343.$$

Пример 2. Резервированная система состоит из двух элементов A_1, A_2 ; резервный элемент A_2 находится в горячем резерве. Интенсивность потока отказов каждого элемента постоянна во времени, но зависит от режима работы – температуры Θ :

$$\lambda(\vartheta) = \lambda_0 + \alpha\vartheta,$$

температура распределена по равномерному закону $f(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta_2 - \vartheta_1}$.

Требуется определить надежность системы.

Так как условная надежность

$$P(t/\vartheta) = 1 - (1 - e^{-(\lambda_0 + \alpha\vartheta)t})^2,$$

то надежность системы равна

$$P(t) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} [1 - (1 - e^{-(\lambda_0 + \alpha\vartheta)t})^2] \frac{1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} d\vartheta.$$

Теперь рассмотрим случай, когда в процессе работы режим системы может меняться случайным образом.

Пример 3. Нерезервированная система состоит из двух элементов A_1, A_2 и может работать в одном из двух режимов R_1, R_2 . Переход системы из режима R_1 в режим R_2 происходит под действием

пуассоновского потока событий с интенсивностью $\lambda_{12} = 1$; обратный переход – с интенсивностью $\lambda_{21} = 3$. В режиме R_1 интенсивность пуассоновского потока отказов элемента A_1 равна $\lambda_1^{(1)} = 1$, второго – $\lambda_2^{(1)} = 2$; в режиме R_2 эти интенсивности равны $\lambda_1^{(2)} = 2, \lambda_2^{(2)} = 4$. Требуется определить надежность системы.

Система может находиться в следующих состояниях:

$S_{1н}$ – режим R_1 , оба элемента исправны;

$S_{1н}$ – режим R_1 , хотя бы один элемент неисправен;

$S_{2н}$ – режим R_2 , оба элемента исправны;

$S_{2н}$ – режим R_2 , хотя бы один элемент неисправен.

Уравнения Колмогорова для интересующих нас вероятностей таких состояний имеют вид:

$$\frac{dp_{1н}}{dt} = -(\lambda_1^{(1)} + \lambda_2^{(1)} + \lambda_{12})p_{1н} + \lambda_{21}p_{2н},$$

$$\frac{dp_{2н}}{dt} = -(\lambda_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)} + \lambda_{21})p_{2н} + \lambda_{12}p_{1н}.$$

Пусть система начинает работу в режиме R_1 с начальными условиями $t = 0, p_{1н} = 1, p_{2н} = 0$.

Решение будем искать в виде $Ce^{-\lambda t}, De^{-\lambda t}$. Подстановка такой пары функций в уравнения Колмогорова дает систему однородных алгебраических уравнений:

$$(\lambda - 4)C + 3D = 0,$$

$$C + (\lambda - 9)D = 0.$$

Из условия обращения в нуль определителя алгебраической системы $\lambda^2 - 13\lambda + 33 = 0$

находим

$$\lambda_1 = 3.459, \quad \lambda_2 = 9.541,$$

так что при $\lambda = \lambda_1$ решение системы алгебраических уравнений равно

$$D^{(1)} = \frac{4 - \lambda_1}{3} C^{(1)} = 0.180 C^{(1)},$$

а при $\lambda = \lambda_2$

$$D^{(2)} = \frac{4 - \lambda_2}{3} C^{(2)} = -1.847 C^{(2)}.$$

Отсюда следует, что решение системы дифференциальных уравнений имеет вид:

$$p_{1н} = C^{(1)} e^{-3.459t} + C^{(2)} e^{-9.541t},$$

$$p_{2н} = 0.180 C^{(1)} e^{-3.459t} - 1.847 C^{(2)} e^{-9.541t}.$$

Из начальных условий $t = 0, p_{1н} = 1, p_{2н} = 0$ находим

$$C^{(1)} = 0.912, \quad C^{(2)} = 0.088,$$

так что окончательно

$$p_{1н} = 0.912e^{-3.459t} + 0.088e^{-9.541t},$$

$$p_{2н} = 0.164e^{-3.459t} - 0.164e^{-9.541t}.$$

Тогда надежность системы для начального режима R_1 равна:

$$P^{(1)}(t) = p_{1н}^{(1)} + p_{2н}^{(1)}.$$

Аналогично, для начального режима R_2 :

$$p_{1н}^{(2)} = 0.493e^{-3.459t} - 0.493e^{-9.541t},$$

$$p_{2н}^{(2)} = 0.089e^{-3.459t} + 0.911e^{-9.541t},$$

$$P^{(2)}(t) = p_{1н}^{(2)} + p_{2н}^{(2)}.$$

Если начальный режим в точности не известен, а известны только их вероятности, то надежность системы находится по формуле полной вероятности

$$P(t) = P(R_1)p^{(1)}(t) + P(R_2)p^{(2)}(t).$$

II. Рассмотрим случай зависимости отказов первого типа.

Пример1. Пусть система состоит из основного элемента A_1 и резервного A_2 , работающего в горячем резерве. При отказе A_1 система автоматически переключается на A_2 . Интенсивность пуассоновского потока отказов обоих элементов в нормальном рабочем состоянии одинакова и равна λ . Выход из строя A_1 влияет на режим работы A_2 так, что интенсивность отказов увеличивается на величину $\Delta(t - t_1)$, где t_1 – момент отказа A_1 . Таким образом, условная интенсивность отказов

$$\lambda_2(t/t_1) = \begin{cases} \lambda, & t < t_1, \\ \lambda + \Delta(t - t_1), & t > t_1. \end{cases}$$

Требуется определить надежность системы. Данная задача сводится к уже решенной ранее при условии, что $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \lambda, \lambda_2 = \lambda + \Delta(t - t_1)$, так что надежность системы равна

$$P(t) = 1 - \int_0^t \int_0^t f_1(t_1)f(t_2|t_1)dt_1dt_2,$$

где

$$f_1(t_1) = \lambda \exp(-\lambda t_1),$$

$$f(t_2|t_1) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda t_2), & t_2 < t_1, \\ \lambda_2 \left(t_2/t_1 \right) \exp \left\{ -2\lambda t_2 - \lambda t_1 - \int_{t_1}^{t_2} \Delta(t_2 - t_1) dt \right\}, & t_2 > t_1. \end{cases}$$

Первый тип зависимости отказов имеет место и тогда, когда некоторые элементы – регуляторы предназначены для поддержания нормального режима работы других элементов. Рассмотрим такой пример.

Пример1. Пусть система состоит из основного элемента A_1 и резервного A_2 , работающего в облегченном резерве. Регулятор A_p предназначен для того, чтобы поддерживать нормальный режим работы обоих элементов A_1, A_2 . В нормальном режиме интенсивности пуассоновских потоков отказов элементов A_1 и A_2 равны соответственно λ_1, λ_2 . При отказе A_p эти интенсивности мгновенно увеличиваются и становятся равными $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$. Интенсивность пуассоновского потока отказов A_p равна λ_p . Требуется определить надежность системы.

Система может находиться в следующих состояниях:

S_{000} – все три элемента исправны;

S_{010} – регулятор исправен, A_1 вышел из строя, A_2 работает;

S_{001} – регулятор исправен, A_1 работает, A_2 вышел из строя;

S_{011} – регулятор исправен, A_1 и A_2 вышли из строя;

S_{100} – регулятор вышел из строя, A_1 и A_2 , из них A_1 работает;

S_{110} – регулятор вышел из строя, A_1 вышел из строя, A_2 работает;

S_{101} – регулятор вышел из строя, A_1 работает, A_2 вышел из строя;

S_{111} – все три элемента вышли из строя.

Уравнения Колмогорова для интересующих нас вероятностей таких состояний имеют вид:

$$\frac{dP_{000}}{dt} = -(\lambda_p + \lambda_1 + \lambda_2)P_{000},$$

$$\frac{dP_{010}}{dt} = -(\lambda_p + \lambda_2)P_{010} + \lambda_1 P_{000},$$

$$\frac{dP_{001}}{dt} = -(\lambda_p + \lambda_1)P_{001} + \lambda_2 P_{000},$$

$$\frac{dP_{100}}{dt} = -(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2)P_{100} + \lambda_p P_{000},$$

$$\frac{dP_{101}}{dt} = -\tilde{\lambda}_1 P_{101} + \lambda_p P_{001} + \tilde{\lambda}_2 P_{100},$$

$$\frac{dP_{110}}{dt} = -\tilde{\lambda}_2 P_{110} + \lambda_p P_{010} + \tilde{\lambda}_1 P_{100}.$$

$$\frac{dP_{011}}{dt} = -\lambda_p P_{011} + \lambda_1 P_{001} + \lambda_2 P_{010},$$

$$\frac{dP_{111}}{dt} = \lambda_p P_{011} + \tilde{\lambda}_1 P_{101} + \tilde{\lambda}_2 P_{110}.$$

Решим уравнения Колмогорова при начальных условиях

$$t = 0, p_{000} = 1, P_{010} = P_{001} = \dots = P_{111} = 0.$$

Из первого уравнения следует

$$P_{000} = e^{-(\lambda_p + \lambda_1 + \lambda_2)t}.$$

С учетом решения P_{000} из 2, 3 и 4 уравнений находим

$$P_{010} = e^{-(\lambda_p + \lambda_2)t} - e^{-(\lambda_p + \lambda_1 + \lambda_2)t},$$

$$P_{001} = e^{-(\lambda_p + \lambda_1)t} - e^{-(\lambda_p + \lambda_1 + \lambda_2)t},$$

$$P_{100} = e^{-(\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2)t} - e^{-(\lambda_p + \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2)t}.$$

Подставляя решения P_{010}, P_{001} в 7 уравнение, получим

$$P_{011} = e^{-\lambda_p t} + e^{-(\lambda_p + \lambda_1 + \lambda_2)t} - e^{-(\lambda_p + \lambda_1)t} - e^{-(\lambda_p + \lambda_2)t}.$$

Подставляя решения P_{100}, P_{001} в 5 уравнение, получим

$$P_{101} = e^{-\tilde{\lambda}_1 t} \left[\frac{\lambda_p (1 - e^{-(\lambda_p + \lambda_2 + \tilde{\lambda}_1)t})}{\lambda_p + \lambda_2 - \tilde{\lambda}_1} + \frac{\lambda_p (e^{-(\lambda_p + \lambda_1 + \lambda_2 + \tilde{\lambda}_1)t} - 1)}{\lambda_p + \lambda_2 + \lambda_1 - \tilde{\lambda}_1} + \frac{\tilde{\lambda}_2 (e^{-(\lambda_p + \lambda_2)t} - 1)}{\lambda_p + \tilde{\lambda}_2} - e^{-\tilde{\lambda}_1 t} + 1 \right].$$

Аналогично, подставляя решения P_{100}, P_{010} в 6 уравнение, находим

$$P_{110} = e^{-\tilde{\lambda}_2 t} \left[\frac{\lambda_p (1 - e^{-(\lambda_p + \lambda_1 + \tilde{\lambda}_2)t})}{\lambda_p + \lambda_1 - \tilde{\lambda}_2} + \frac{\lambda_p (e^{-(\lambda_p + \lambda_2 + \lambda_1 + \tilde{\lambda}_2)t} - 1)}{\lambda_p + \lambda_2 + \lambda_1 - \tilde{\lambda}_2} + \frac{\tilde{\lambda}_1 (e^{-(\lambda_p + \lambda_1)t} - 1)}{\lambda_p + \tilde{\lambda}_1} - e^{-\tilde{\lambda}_2 t} + 1 \right].$$

Учитывая решения P_{101}, P_{011} и P_{110} из восьмого уравнения можно получить

$$P_{111} = \lambda_p \int P_{011} dt + \tilde{\lambda}_1 \int P_{101} dt + \tilde{\lambda}_2 \int P_{110} dt.$$

Таким образом, надежность системы

$$P(t) = 1 - P_{011} - P_{111}.$$