Числовые ряды

Пусть задана бесконечная последовательность чисел $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$

Бесконечным числовым рядом называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$ называются *членами (элементами) числового ряда*,

a_n – *общим членом*.

Сумма конечного числа первых *n* членов ряда называется *n-й частичной суммой ряда*:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Тогда $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$ и т.д.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, ряд называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Если ряд сходится, то число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется *суммой ряда*.

Пример 1. Записать первые пять членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n^2-1}$ по общему члену.

$$n=1 \quad a_1 = \frac{3\cdot 1+1}{2\cdot 1^2-1} = 4$$

$$n=2 \quad a_2 = \frac{3\cdot 2+1}{2\cdot 2^2-1} = 1$$

$$n=3 \quad a_3 = \frac{3\cdot 3+1}{2\cdot 3^2-1} = \frac{10}{17}$$

$$n=4 \quad a_4 = \frac{3\cdot 4+1}{2\cdot 4^2-1} = \frac{13}{31}$$

$$n=5 \quad a_5 = \frac{3\cdot 5+1}{2\cdot 5^2-1} = \frac{16}{49}$$

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots$ и найти его сумму.

Решение. Обозначим $\frac{1}{n(n+1)}=a_n$ – общий член ряда. Тогда частичная сумма ряда $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$. Так как $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, то $S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$, т.е. ряд сходится и его сумма $S=1$.

Необходимый признак сходимости рядов

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, тогда его общий член a_n стремится к 0 (при $n \to \infty$) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (обратное не всегда верно).

Доказательство. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S, то для его частичных сумм S_n, S_{n-1} имеют место равенства $a_n = S_n - S_{n-1}$;

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$. Что и требовалось доказать.

Ряд Дирихле

Числовой ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ называется *рядом Дирихле* с показателем p, $p \in R$.

Заметим, что при $p = 1$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который называется *гармоническим*.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится, если $p > 1$

, и расходится, если $p \le 1$

Признак сравнения рядов с положительными членами

Пусть даны 2 ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Если, начиная с некоторого номера N, для всех $n \geq N$ выполняется неравенство $a_n \leq b_n$, тогда

1) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

2) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$.

Решение. Обозначим $\frac{1}{\sqrt{n}} = b_n$. Сравним ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с гармоническим рядом

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. При $n \geq 2$ $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} = a_n$, а так как гармонический ряд

расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \ldots$.

Решение. Обозначим $\frac{1}{k \cdot 2^k} = a_k$. Сравним данный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ с рядом

геометрической прогрессии $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1} = 1$, который

сходится, так как знаменатель прогрессии $q = \frac{1}{2}$, то первые члены ряда

равны, а при $k \geq 2$, $a_k < b_k$, значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k}$ сходится по I признаку

сравнения.

Ответ: ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k}$ сходится.

Предельный признак сравнения рядов с положительными членами

Даны 2 ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и пусть существует $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C,\ C \neq 0,\ C \neq \infty$,

тогда эти два ряда либо сходятся, либо расходятся **одновременно**.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}$.

Решение. Обозначим $\frac{1}{n^2+3n} = a_n$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Так как

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+3n} = 1 \neq 0$ и $\neq \infty$, то эти два ряда одновременно сходятся,

или расходятся. Поскольку $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – ряд Дирихле с $p = 2 > 1$

сходится, следовательно, исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}$ тоже сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}$ сходится.

Признак Даламбера

Пусть дан ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n > 0)$, и существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, тогда:

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $l < 1$,

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, если $l > 1$,

3) если $l = 1$, то для выяснения сходимости ряда признак Даламбера не применим.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Решение. Обозначим $\frac{n}{2^n} = a_n$, $a_n > 0$; найдём $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$. Составим предел

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^n \cdot 2 \cdot n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} < 1$, т.е. по признаку Даламбера

ряд сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ сходится.

Радикальный признак Коши

Пусть дан ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$ и пусть существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Тогда:

1) если $l < 1$, ряд сходится,
2) если $l > 1$, ряд расходится,
3) если $l = 1$, то для выяснения сходимости ряда радикальный признак Коши не применим.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

Решение. Обозначим $\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = a_n$, $a_n > 0$. Составим предел:

$l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$, т.е. по радикальному признаку Коши ряд сходится.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ сходится.

Знакочередующиеся ряды.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$, где $a_n > 0$, называется *знакочередующимся рядом.*

Для установления сходимости таких рядов существует достаточный признак сходимости, называемый признаком Лейбница.

Признак Лейбница

Пусть числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ удовлетворяет условиям:

1) $u_n = (-1)^{n-1} \cdot a_n, \ a_n > 0$, т.е. этот ряд знакочередующийся;

2) члены этого ряда монотонно убывают по абсолютной величине:

$|u_1| > |u_2| > |u_3| > \ldots$ т.е. $a_n > a_{n+1}, \ n = 1, 2, \ldots;$

3) общий член ряда a_n стремится к 0, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и его сумма $S \le a_1$.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots.$

Решение. Обозначим $\frac{(-1)^{n-1}}{n}=u_n$. К данному ряду применим признак Лейбница. Проверим выполнение условий теоремы: условие 1) ряд знакочередующийся $a_n=\frac{1}{n}$, $u_n=(-1)^{n-1}\cdot a_n$, $a_n>0$; условие 2) выполнено: $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots$; условие 3) также выполнено: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Следовательно, по признаку Лейбница данный ряд сходится, причем его сумма $S\le a_1=1$.

Ответ: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится.

Абсолютная и условная сходимость

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *сходящимся абсолютно*, если сходится ряд,

составленный из абсолютных величин его членов $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, составленный из

абсолютных величин его членов, расходится, то исходный ряд называется

условно (неабсолютно) сходящимся.