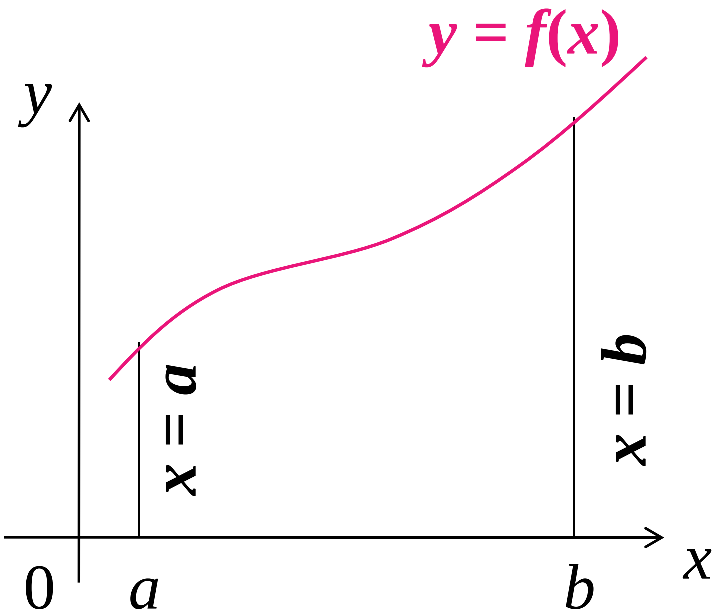
Определённый интеграл.

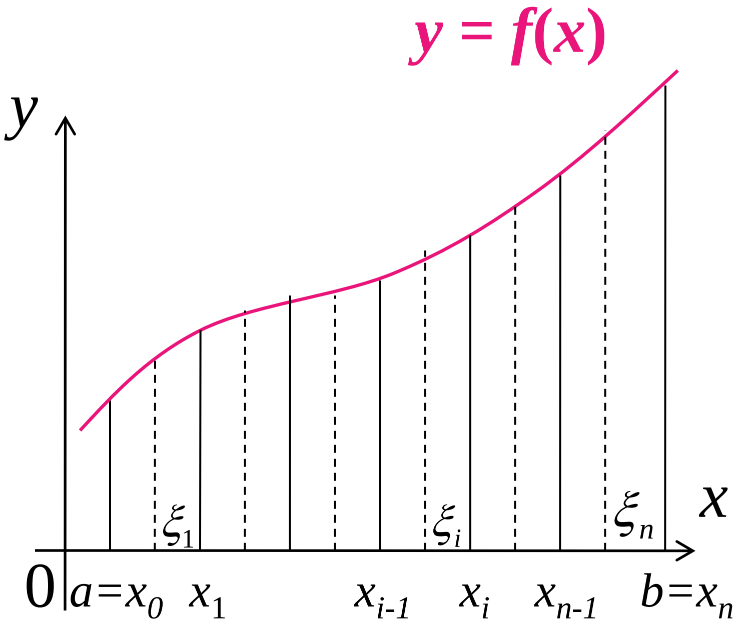
Криволинейная трапеция. Понятие определённого интеграла.



Пусть $y = f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a;b]$

Криволинейная трапеция- это фигура, ограниченная графиком непрерывной неотрицательной функции $f(x)$, $x \in [a;b]$, параллельными прямыми $x=a$ и $x=b$ и отрезком оси OX.

Найдём площадь криволинейной трапеции.



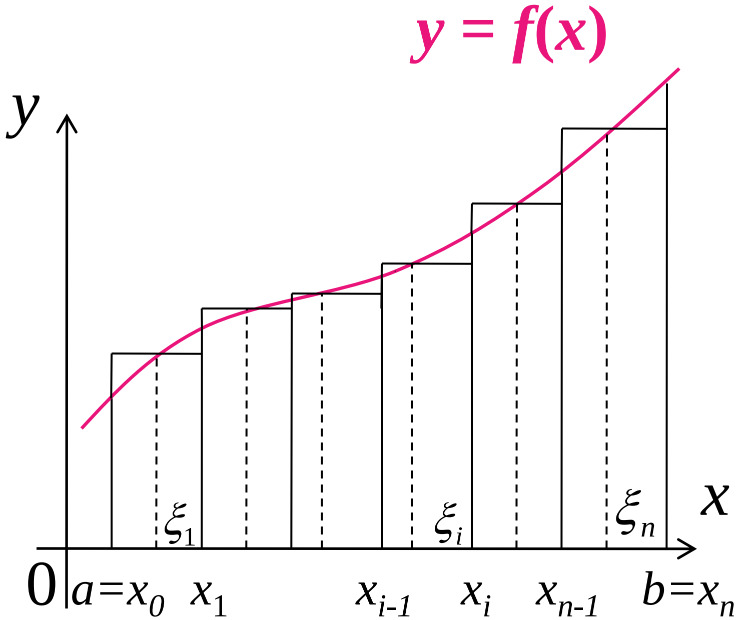
1) Разобъем отрезок $[a;b]$ точками x_i ($a = x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}< x_n= b$) на n отрезков $[a;x_1]$, $[x_1;x_2]$,…,$[x_{n-1};b]$

2) Пусть длина отрезка

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1,2,...,n$$

3) Проведём через точки x_i прямые, параллельные оси ОУ.

4) В каждом отрезке $[x_{i-1};x_i]$ возьмём произвольную точку ξ_i и вычислим значение функции в ней, т.е. $f(\xi_i)$



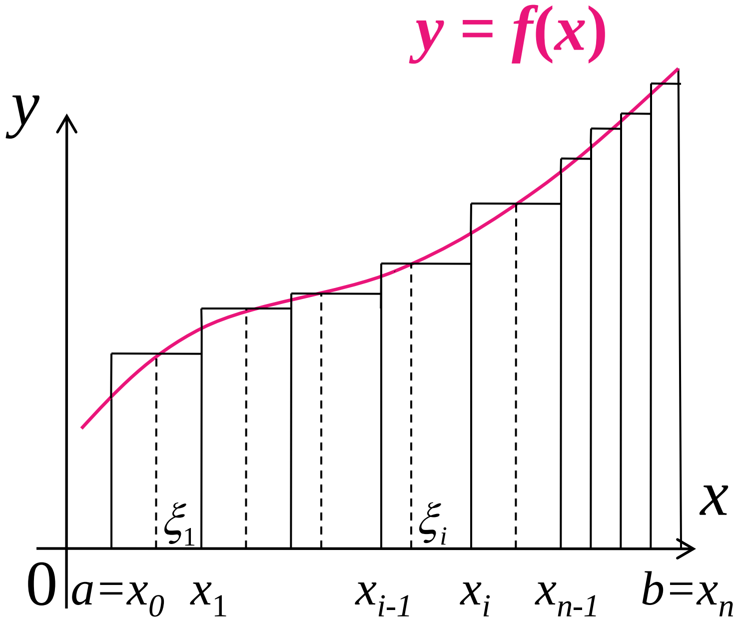
5) Произведение $f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$.

6) Составим сумму всех таких произведений (интегральная сумма):

$$f(\xi_1)\cdot\Delta x_1+f(\xi_2)\cdot\Delta x_2+\ldots+f(\xi_n)\cdot\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=S_n$$

7) Интегральная сумма приближенно равна площади криволинейной трапеции, т.е.

$$S\approx S_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

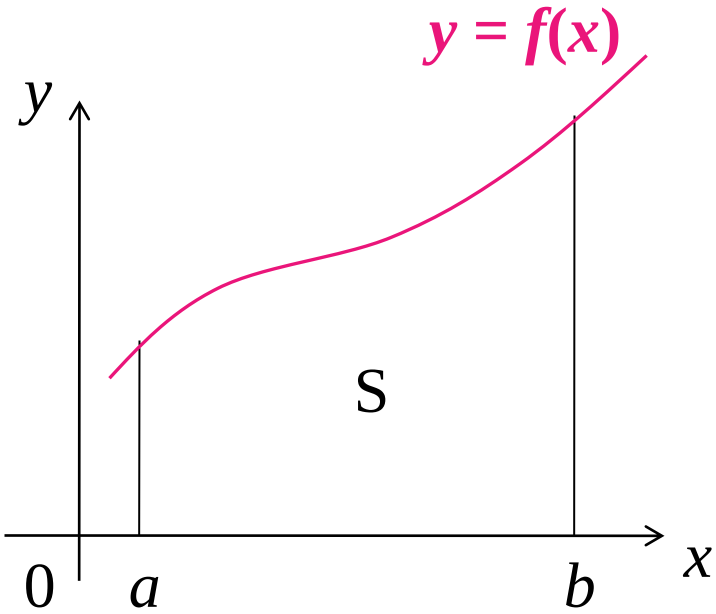


8) Пусть λ длина наибольшего из отрезков [x_{i-1};x_i]:

$$\lambda = \max \Delta x_i \ , \quad i = 1,2,\ldots,n$$

9) При $n \to \infty \left(\lambda = \max \Delta x_i \to 0\right)$ интегральная сумма имеет предел

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\substack{\lambda\to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$$



$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \underbrace{\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i}_{\text{определённый интеграл}}$$

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

Геометрический смысл определённого интеграла: определённый интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$ - определённый интеграл

$f(x)$ - подынтегральная функция

$f(x)\,dx$ - подынтегральное выражение

x – переменная интегрирования

a– нижний предел интегрирования

b– верхний предел интегрирования

пределы интегрирования

Свойства определённого интеграла.

- 1^0. Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла:

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx, \quad k = const$$

- 2^0. Определённый интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е

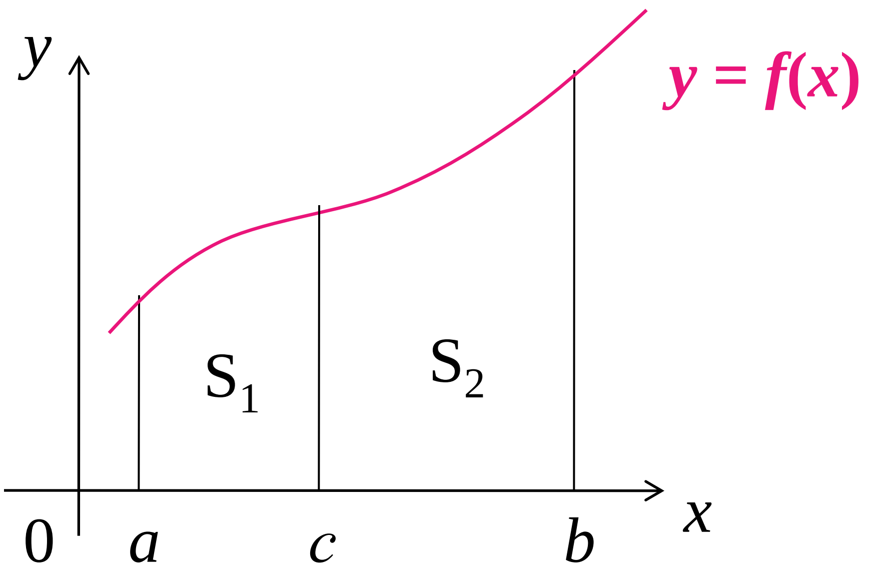
$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

- 3^0. При перестановке пределов интегрирования, знак интеграла меняется на противоположный, т.е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

- 4^0. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и $a<c<b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



- 5^0. Если функция $f(x)$ сохраняет знак на $[a;b]$, где $a<b$, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ имеет тот же знак, что и функция.

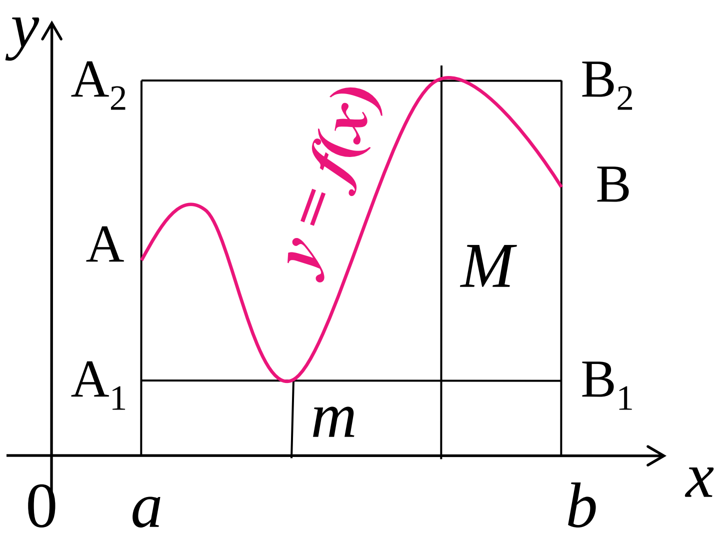
  Т.е. если $f(x) \geq 0$, $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

- 6^0. Если на отрезке $[a;b]$, где $a<b$, функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

- 7^0. Оценка интеграла. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функци $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и $a \leq b$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$



$$S_{aA_1B_1b} \leq S_{aABb} \leq S_{aA_2B_2b}$$

Формула Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

знак двойной подстановки

Метод непосредственного интегрирования.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{\pi} \sin x\,dx$

$$\int\limits_{0}^{\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{0}^{\pi} = \cos x\Big|_{\pi}^{0} = \cos 0 - \cos\pi = 1-(-1) = 2$$

Ответ. 2

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_1^8 \frac{x-\sqrt[3]{x}}{x}dx$

$$\int_1^8 \frac{x-\sqrt[3]{x}}{x}dx = \int_1^8 dx - \int_1^8 x^{-\frac{2}{3}}dx = x\Big|_1^8 - 3\sqrt[3]{x}\Big|_1^8 =$$

$$= (8-1) - 3(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1}) = 7 - 3(2-1) = 4$$

Ответ. 4

Метод подстановки (метод замены переменной).

Теорема.

Пусть дан интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a;b].

Введём новую переменную $x = \varphi(t)$

Если

1) $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$

2) $\varphi(t), \quad \varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$

3) $f\left(\varphi(t)\right)$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt$$

Доказательство:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta}\big[F\big(\varphi(t)\big)\big]'\,dt = F\big(\varphi(t)\big)\Big|_{\alpha}^{\beta} =$$

$$= F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Замечание.

1) При вычислении определённого интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется;

2) Часто вместо подстановки $x = \varphi(t)$ применяют подстановку $t = g(x)$;

3) Не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных!

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{2}\frac{2x\,dx}{\left(2x^2+1\right)^2}$

$$2x^2+1=t$$
$$d\left(2x^2+1\right)=dt$$
$$4x\,dx=dt$$
$$2x\,dx=\frac{1}{2}dt$$
$$\alpha=2\cdot(-1)^2+1=3$$
$$\beta=2\cdot 2^2+1=9$$

$$\int_{-1}^{2}\frac{2x\,dx}{\left(2x^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\int_{3}^{9}\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{2}\int_{3}^{9}t^{-2}dt=$$

$$=-\frac{1}{2t}\Bigg|_{3}^{9}=\frac{1}{2t}\Bigg|_{9}^{3}=\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{2\cdot 9}=\frac{1}{6}-\frac{1}{18}=\frac{1}{9}$$

Ответ. $\frac{1}{9}$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x\,(1 - \cos^2 x)}\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x \cdot \sin^2 x}\, dx =$$

$$\cos x = t$$

$$d\left(\cos x\right) = dt$$

$$-\sin x\, dx = dt$$

$$\alpha = \cos 0 = 1$$

$$\beta = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\, \sin x\, dx = -\int\limits_1^0 \sqrt{t}\, dt = \int\limits_0^1 t^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \frac{t^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3\sqrt{t^3}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Ответ. $\frac{2}{3}$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int\limits_1^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

$$x-1=t \quad \Rightarrow \quad x=t+1$$
$$d(x-1)=dt$$
$$dx=dt$$
$$\alpha=1-1=0$$
$$\beta=5-1=4$$

$$\int\limits_1^5 x\sqrt{x-1}\,dx=\int\limits_0^4 (t+1)\sqrt{t}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^4 t^{\frac{3}{2}}\,dt+\int\limits_0^4 t^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{2}{5}\sqrt{t^5}\Big|_0^4+\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Big|_0^4=$$

$$=\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}\Big|_0^4+\frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big|_0^4=\frac{2}{5}\cdot 16\cdot 2+\frac{2}{3}\cdot 4\cdot 2=\frac{272}{15}$$

Ответ. $\frac{272}{15}$

Метод интегрирования по частям.

Теорема.

Если функции $\boldsymbol{u = u(x)}$ и $\boldsymbol{v = v(x)}$ дифференцируемы на отрезке $[a;b]$, то имеет место формула

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int_1^e x\ln x\,dx$

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e \frac{x^2}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx =$$

$$\begin{bmatrix} u=\ln x & dv = x\,dx \\ du=\dfrac{dx}{x} & v=\dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \left(\frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1\right) - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+e^2}{4}$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx =$$

$$\begin{bmatrix} u = e^x & dv = \sin x\,dx \\ du = e^x dx & v = -\cos x \end{bmatrix}$$

$$= -e^x \cos x\Big|_0^{\pi} + e^x \sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx =$$

$$\begin{bmatrix} u = e^x & dv = \cos x\,dx \\ du = e^x dx & v = \sin x \end{bmatrix}$$

Пусть $F(x)=\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$

Тогда $F(x)=-e^x\cos x\Big|_0^{\pi}+e^x\sin x\Big|_0^{\pi}-F(x)$

$$2F(x)=e^x\cos x\Big|_{\pi}^{0}+e^x\sin x\Big|_0^{\pi}$$

$$2F(x)=e^0\cos 0-e^{\pi}\cos\pi+e^{\pi}\sin\pi-e^0\sin 0=1+e^{\pi}$$

$$F(x)=\frac{1+e^{\pi}}{2}$$

Ответ. $\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx=\frac{1+e^{\pi}}{2}$