Неопределенный интеграл

"В математике как и в жизни каждому действию есть противодействие"

Применение операции интегрирования при измерениях:

- **-площади плоских фигур и поверхности;**
- **-объема и массы тела;**
- **-статистическиих моментов и моментов инерции плоской фигуры, материальной кривой и пространственного тела;**
- -при отыскании **центра тяжести;**
- -при отыскании **силы, работы, электрического разряда, пути по известной скорости и скорости по ускорению,**
- -при решении **дифференциальных уравнений,**
- -при вычислении **вероятности случайного события и числовых характеристик случайных величин.**

Определения первообразной и неопределенного интеграла

- ***Определение 1:*** Пусть функция *f(x)* определена и непрерывна на интервале (a,b) и существует функция *F(x)* такая, что для ∀x∈(a,b) выполняется равенство $F'(x)=f(x)$. Тогда *F(x)* называется первообразной для функции *f(x)* на интервале (a,b).

Например: Для функции $f(x)=3x^2$ первообразной будет $F(x)= x^3$, т.к. $(x^3)'=3x^2$.

Свойства первообразных

- *Теорема 1: Если F(x) первообразная для функции f(x), то F(x)+C так же является первообразной для f(x).*
- *Доказательство*: $(F(x)+C)'=F'(x)+C'=F'(x)$
- *Теорема 2: Если F(x) и φ(x) две первообразных одной и той же функции, то они отличаются лишь на константу.*

- ***Следствие***: *Любые две первообразные одной и той же функции связаны соотношением:* $\varphi(x)=F(x)+C$.

- ***Определение 2***: *Совокупность всех первообразных называется неопределенным интегралом и обозначается* $\int f(x)dx=F(x)+C$, *где*
- $f(x)$ – *подынтегральная функция;*
- $f(x)dx$ – *подынтегральное выражение;*

Свойства неопределенных интегралов

- 1. $d(\int f(x)dx) = d(F(x)+C) = dF(x)+dC = F'(x)dx + C'dx = F'(x)dx = f(x)dx$.
- 2. $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x)+C$.
- 3. $\int af(x)dx = \int d(aF(x)+C) = aF(x)+C = a\int f(x)dx + C$.
- 4. $\int (f(x)\pm g(x))dx = \int d(F(x)\pm G(x)) = F(x)\pm G(x)+C = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.
- 5. $\int f[u(x)]u'(x)dx = \int f(u)du$, т.к. $u'(x)dx = du(x)$.

Таблица интегралов

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \;\; \alpha \neq -1$

2. $\int 0dx = C$

3. $\int 1dx = x + C$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

5. $\int e^{x}dx = e^{x} + C$

6. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$

7. $\int \sin xdx = -\cos x + C$

8. $\int \cos xdx = \sin x + C$

9. $\int \frac{dx}{\cos^{2} x} = \operatorname{tg} x + C$

10. $\int \frac{dx}{\sin^{2} x} = -\operatorname{ctg} x + C$

11. $\int \frac{dx}{1+x^{2}} = \operatorname{arctg} x + C$

12. $\int \frac{dx}{a^{2}+x^{2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \arcsin x + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

- *Вопрос 1. Всегда ли имеется первообразная у заданной функции f(x)?*
- *Ответ: у всякой непрерывной на (a,b) функции есть первообразная (следует из теоремы существования).*
- *Вопрос 2.Как отыскать для заданной непрерывной функции f(x) ее первообразную F(x)?*
- *Ответ: это очень сложный вопрос! Если под словом "отыскать" понимать "выразить через элементарные функции", то не всякая первообразная для непрерывной функции может быть найдена!*
- Неопределенные интегралы, которые не могут быть выражены через элементарные функции называются "*неберущимися*".
- Примеры некоторых

$$\int \frac{e^x}{x}dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int e^{-x^2}dx, \quad \int \sin x^2 dx,$$

$$\int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{\cos x}{x}dx, \quad \int \cos x^2 dx.$$

Методы интегрирования

- 1. Непосредственное интегрирование.
- 2. Метод подстановки.
- 3. Метод интегрирования по частям.
- 4. Интегрирование рациональных функций.
- 5. Интегрирование некоторых тригонометрических функций.
- 6. Интегрирование некоторых иррациональностей.

Непосредственное интегрирование

Вычисление неопределённых интегралов производится сведением исходных интегралов к табличным с помощью эквивалентных преобразований с использованием свойств неопределённых интегралов.

Свойства дифференциалов

$$1.\ dx = \frac{1}{a} d(ax) \qquad 2.\ dx = \frac{1}{a} d(ax+b),$$

$$3.\ xdx = \frac{1}{2} dx^2, \qquad 4.\ x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3.$$

Пример. Вычислить $\int \left(x^2 + 3x^3 + x + 1\right)dx$.

Решение. Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\int \left(x^2 + 3x^3 + x + 1 \right) dx = \int x^2 dx + 3\int x^3 dx + \int x dx + \int dx =.$$

$$= \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C$$

Метод подстановки

- Метод основан на использовании формулы

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

- При проведении замены переменной в интеграле $\int f(x)dx$ необходимо:

1) выбрать подстановку $\phi(x) = t$ или замену $x = \varphi(t)$

2) преобразовать подынтегральную функцию $f(x)$ с учетом выбранной подстановки или замены переменной

3) Найти $dx = \varphi(t)dt$

4) подставить все в исходный интеграл и найти его

5) вернуться в ответе к старой переменной x.

Пример. Вычислить $\int x\sqrt{x-3}dx$.

Решение. Чтобы избавиться от квадратного корня, положим $\sqrt{x-3}=u$, тогда $x=u^2+3$ и, следовательно, $dx=2udu$. Делая подстановку, имеем:

$$\int x\sqrt{x-3}dx=\int(u^2+3)u2udu=\int(2u^4+6u^2)du=$$

$$=\frac{2u^5}{5}+2u^3+C=\frac{2(x-3)^{\frac{5}{2}}}{5}+2(x-3)^{\frac{3}{2}}+C$$

Метод интегрирования по частям.

Пусть $U(x)$ и $V(x)$ - дифференцируемые функции. Тогда

$$d(U(x)V(x)) = U(x)dV(x) + V(x)dU(x).$$

Поэтому $U(x)dV(x) = d(U(x)V(x)) - V(x)dU(x).$

Вычисляя интеграл от обеих частей, с учетом того, что

$\int d(U(x)V(x)) = U(x)V(x) + C$, получаем

$$\int U(x)dV(x) = UV - \int V(x)dU(x)$$

называемое формулой интегрирования по частям

Метод интегрирования по частям.

- Применяя метод, интегрирования по частям, следует руководствоваться следующим правилом:
- 1.*Если в подынтегральное выражение входит произведение многочлена на* ***показательную*** *или* ***тригонометрическую*** *функцию, то в качестве функции U берется многочлен.*
- *2. За U всегда берутся* ***логарифмическая*** *и* ***обратная тригонометрическая функции***.

Пример. Вычислить $\int x\cos x dx$.

Решение.

$$\int x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C \ .$$

***Пример*.** Вычислить $\int x\ln x dx$

***Решение*.** $\int x\ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x dx, v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| =$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C .$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

- Рациональной дробью называется функция R(x), представленная в виде

$$R(x)=P(x)/Q(x),$$

- где P(x) и Q(x) - многочлены с действительными коэффициентами.
- Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя.

- Всякая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы конечного числа простейших дробей следующих четырех типов:

1) $\dfrac{A}{x-a}$ 2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ 4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$

Где A, a, M, N, p, q - постоянные числа, k - натуральное.

Схема разложения на простейшие слагаемые правильных рациональных дробей

N/N	Исходная дробь	Вид ее разложения на слагаемые
1	$\dfrac{3x+4}{x(x+5)(x-7)}$	$\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+5}+\dfrac{C}{x-7}$
2	$\dfrac{1}{(x-3)(x+2)^2}$	$\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{(x+2)^2}+\dfrac{D}{x+2}$
3	$\dfrac{x^2+3x}{(x^2-3x+5)(x^2+4)}$	$\dfrac{Ax+B}{x^2-3x+5}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4}$
4	$\dfrac{2x+3}{x^2(x+2)(x^2+3)}$	$\dfrac{A}{x^2}+\dfrac{B}{x}+\dfrac{C}{x+2}+\dfrac{Dx+E}{x^2+3}$
5	$\dfrac{x^2+4}{(x-1)(x^2+x+2)^2}$	$\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{(x^2+x+2)^2}+\dfrac{Dx+E}{x^2+x+2}$

ПРИМЕР

- Найти $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} dx$

- Корни знаменателя: $x_1 = -2$ кратности 1 и $x_2=1$ кратности 2. Поэтому $x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)^2$ и подынтегральная функция может быть представлена в виде
$$\frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2}.$$

- Приводя к общему знаменателю, получаем
$$\frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A_1(x-1)^2 + A_2(x-1)(x+2) + A_3(x+2)}{x^3 - 3x + 2} =$$
$$= \frac{(A_1 + A_2)x^2 + (-2A_1 + A_2 + A_3)x + (A_1 - 2A_2 + 2A_3)}{x^3 - 3x + 2}.$$

- Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях **x** в числителях правой и левой частей, получаем

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1, \\ -2A_1 + A_2 + A_3 = -1, \\ A_1 - 2A_2 + 2A_3 = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A_1 = \frac{7}{9},\ A_2 = \frac{2}{9},\ A_3 = \frac{1}{3}$

Таким образом,

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} dx = \frac{7}{9}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{7}{9}\ln|x+2| + \frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} + C.$$

Интегрирование простейших дробей первых двух типов.

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C.$$

Интегрирование простейших дробей третьего типа.

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, *где* $D=\dfrac{p^2}{4}-q<0$, *т.е. действительных корней в знаменателе нет (они мнимые).*

В знаменателе подынтегральной функции выделяют полный квадрат

$$x^2+px+q=x^2+2\frac{p}{2}x+q=x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\underbrace{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}_{\pm a^2},$$ *а затем подстановкой* $x+\dfrac{p}{2}=t$

приводят интеграл к виду $\displaystyle\int\frac{At+B}{t^2\pm a^2}dt=\int\frac{At}{t^2\pm a^2}dt+B\int\frac{dt}{t^2\pm a^2}$

(A и B - некоторые числа), легко сводимому к "табличным" интегралам.

Пример. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$

$$\boxed{\frac{p^2}{4}-q=\frac{(-1)^2}{4}-1=-\frac{3}{4}<0,}$$

следовательно, интегрируется простейшая дробь третьего типа. Так как

$$x^2-x+1=\underbrace{x^2-\boxed{2}\cdot\frac{1}{\boxed{2}}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\underbrace{x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{3}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4},$$

(этот прием "выделения полного квадрата" должен стать привычным инструментом)

Делаем подстановку; $\boxed{x-\frac{1}{2}=t}$, $\boxed{x=\frac{1}{2}+t}$, $\boxed{dx=dt}$, *тогда*

$$\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx=\int\frac{3\left(\frac{1}{2}+t\right)-1}{t^2+\frac{3}{4}}dt=\int\frac{3(t)-\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt=$$

$$3\int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}\int \frac{2t}{t^2+\frac{3}{4}}dt - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc}tg\frac{2x}{\sqrt{3}} =$$

$$\frac{3}{2}\int \frac{d\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc}tg\frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc}tg\frac{2x}{\sqrt{3}} + C.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

- К простейшим иррациональностям относятся функции, в которые входят радикалы различных степеней
- от x, или $(ax+b)$, или $\dfrac{ax+b}{cx+d}$.
- В подобных интегралах избавиться от иррациональности можно, введя вместо x, или $(ax+b)$, или $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ новую переменную t^s , причем степень ***s*** должна быть такой, чтобы извлекались корни всех степеней, входящих в данную подынтегральную функцию.
- **Пример.**
-
- 1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x}}dx$ 2) $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$

Интегрирование дифференциальных биномов

- Интегрирование дифференциальных биномов, т.е. интегралов вида
$$\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$$
- возможно только в трех случаях.
- Если числа m, n, p и их указанные комбинации не удовлетворяют ни одному из случаев, то интеграл от данного дифференциального бинома является неберущимся, т.е. не выражается в элементарных функциях.

	Случаи	Подстановка
1	***p***- *целое число*	$x = t^S$, *где* **S** –*общий знаменатель дробей* **m** *и* **n**
2	$\dfrac{m+1}{n}$ – *целое число*	$a + bx^n = t^S$ **S** – *знаменатель дроби* **p**
3	$\dfrac{m+1}{n} + p$ – *целое число*	$ax^{-n} + b = t^S$ *или* $\dfrac{a+bx^n}{x^n} = t^s$ **S** – *знаменатель дроби* **p**

Таблица интегрирования иррациональных выражений

N/N	Интеграл	Подстановка	Пример
1	$\int R\{\left(\frac{ax+b}{cx+l}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\dots\left(\frac{ax+b}{cx+l}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\}dx$ $\frac{m_1}{n_1},\dots\frac{m_k}{n_k}$ – *числовые дроби*	S – *общ. знаменатель дробей* $\frac{m_1}{n_1},\dots\frac{m_k}{n_k}$ $\frac{ax+b}{cx+l}=t^S$	$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x}}dx$
2	$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $a\neq 0$	$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}+\frac{c}{a})=$ $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$
3	$\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$(ax^2+bx+c)'=2ax+b$ $Ax+B=\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)$	$\int\frac{(x+1dx}{\sqrt{x^2-3x+1}}$
4	$\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$x-\alpha=\frac{1}{t}$	$\int\frac{dx}{x\sqrt{-x^2+x-2}}$
5 *А)*	$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ *Интегрирование дифференциального бинома* *p- целое*	S – *знаменатель дробей m и n* $x=t^S$	$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}$
Б)	$\frac{m+1}{n}$ – *целое*	S – *знаменатель дроби p* $a+bx^n=t^S$	$\int\frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}dx$
В)	$\frac{m+1}{n}+p$ – *целое*	S – *знаменатель дроби p* $ax^{-n}+b=t^S$	$\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

№	Интеграл	Подстановка	Пример
1	$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$	$tg\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2arctgt \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\int dx/(\cos x + \sin x)$
2 а)	$\int R(\sin x, \cos x)dx$ $R(-\sin x, \cos x) =$ $= -R(\sin x, \cos x)$ т.е. R – нечётно относительно sin x	$\cos x = t$	$\int \cos^2 x/\sin x\ dx$
б)	$R(\sin x, -\cos x) =$ $= -R(\sin x, \cos x)$ т.е. R нечётно относительно cos x	$\sin x = t$	$\int \cos^3 x/\sin^2 x\ dx$
в)	$R(\sin x, \cos x) =$ $= R(-\sin x, -\cos x)$ R – чётно относительно sin x, cos x	$tg\,x = t \Rightarrow x = arctg\,x \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$ $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$	$\int \sin^2 x/3+\cos^2 x\ dx$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

3 а)	$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ m>0, n>0 m и n – чётные	$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$	$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$ $\int \cos^6 x\, dx$
б)	m и n – нечётные	cos x = t, sin x = t	$\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$ $\int \sin^2 x \cos^5 x\, dx$
4	$\int tg^m x\, dx$ $\int ctg^m x\, dx$	$tg^2 x = sec^2 x - 1 = (1/\cos^2 x) - 1$ $ctg^2 x = cosec^2 x - 1 = (1/\sin^2 x) - 1$	$\int tg^7 x\, dx$ $\int ctg^9 x\, dx$
5	$\int \sin mx \cdot \sin nx dx$ $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$ $\int \cos mx \cdot \sin nx dx$ $m \neq n$	$\sin\alpha \sin\beta = ½ [-\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha \cos\beta = ½ [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$ $\sin\alpha \cos\beta = ½ [\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$	$\int \sin 6x \sin 5x\, dx$ $\int \cos 6x \cos 12x\, dx$ $\int \sin 8x \cos 10x\, dx$