

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**К.Б. Коротченко, Ю.П. Кунашенко,
Ю.Л. Пивоваров, Т.А. Тухфатуллин**

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Практикум по решению задач

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2013

УДК 537.8(076.5)

ББК 22.313я73

Э45

Коротченко К.Б.

Э45 Электродинамика. Практикум по решению задач: учебное пособие / К.Б. Коротченко, Ю.П. Кунашенко, Ю.Л. Пивоваров, Т.А. Тухфатуллин; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2013. – 104 с.

Практикум содержит 9 занятий. Задачи сгруппированы по темам и выделены в отдельные практические занятия (семинары), каждое из которых содержит, необходимые формулы, примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения. Практикум снабжен необходимым справочным материалом.

По уровню сложности курс находится между разделом «Электричество и магнетизм» курса общей физики в техническом университете и курсом теоретической физики и соответствует требованиям европейского стандарта EUR-ACE аккредитации инженерных образовательных программ к курсу повышенного уровня в рамках программ подготовки бакалавров.

УДК 537.8(076.5)

ББК 22.313я

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор ТГУ

В.А. Бордовицын

Доктор физико-математических наук, профессор ТГПУ

В.Я. Эпп

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2013

© Коротченко К.Б., Кунашенко Ю.П.,
Пивоваров Ю.Л., Тухфатуллин Т.А., 2013

© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2013

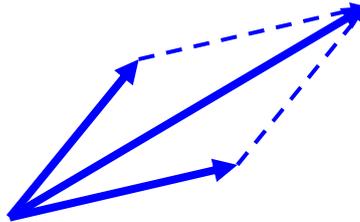
1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Векторная алгебра

Вектором будем называть направленный отрезок. Вектор обозначают либо буквой со стрелкой (над буквой) \vec{a} (либо жирным шрифтом \mathbf{a}). Соответственно, длину отрезка, изображающего вектор, называют модулем вектора \vec{a} и обозначают $|\vec{a}| = a$.

Вектора складывают по правилу параллелограмма

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



Любой вектор \vec{a} 3-мерного пространства может быть разложен по 3 линейно независимым векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \quad (1.1)$$

Здесь a_i – компоненты вектора \vec{a} , \vec{e}_i – базисные вектора. В декартовой системе координат базисные вектора обозначают $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) :

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} . \quad (1.2)$$

Здесь a_x, a_y и a_z – декартовы компоненты (координаты) вектора \vec{a} .

Используя разложение вектора сумму двух векторов можно записать:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k} .$$

Умножение вектора на скаляр:

$$c \cdot \vec{a} = c \cdot a_x\vec{i} + c \cdot a_y\vec{j} + c \cdot a_z\vec{k} .$$

Радиус вектором точки называется вектор, \vec{r} проведенный из начала координат в данную точку, и равный $\vec{r} = \{x, y, z\}$. Модуль радиус вектора \vec{r} равен $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Произведения векторов

Скалярным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называют скаляр

$$(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{b}\vec{a}) = ab \cos \varphi , \quad (1.3)$$

где φ – угол между векторами \vec{a} и \vec{b} . Или

$$(\vec{a}\vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z . \quad (1.4)$$

Очевидно, что два вектора перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю, и наоборот скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a}\vec{b}) = 0. \quad (1.5)$$

Модуль вектора равен:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{(\vec{a}\vec{a})} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Векторным произведением двух векторов \vec{a} и \vec{b} называют вектор \vec{c}

$$\begin{aligned} \vec{c} = [\vec{a}\vec{b}] &\equiv \vec{a} \times \vec{b} = -[\vec{b}\vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

модуль (длина) которого, равен

$$|(\vec{a}\vec{b})| = ab \sin \varphi, \quad (1.7)$$

где φ – угол между векторами \vec{a} и \vec{b} . Вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} образуют правую тройку векторов.

Если два вектора \vec{a} и \vec{b} параллельны, то их векторное произведение равно нулю $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$.

Двойным векторным произведением векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} называют вектор

$$[\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]]. \quad (1.8)$$

Двойное векторное произведение расписывается:

$$[\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \text{ (правило ВАС – САВ)}.$$

Смешанное произведение векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} :

$$(\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{b}[\vec{c}, \vec{a}]) = (\vec{c}[\vec{a}, \vec{b}]). \quad (1.9)$$

Примеры решения задач

Пример 1. Вычислить скалярное и векторное произведение векторов: $\vec{a} = \{1, 2, 3\}$, $\vec{b} = \{4, 5, 6\}$.

Решение. Находим:

$$1) (\vec{a}\vec{b}) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32.$$

$$2) [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5)\vec{i} + (3 \cdot 4 - 1 \cdot 6)\vec{j} + (1 \cdot 5 - 2 \cdot 4)\vec{k} = -3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$$

Пример 2. Вычислить двойное векторное произведение векторов:
 $\vec{a} = \{1, 2, 3\}$, $\vec{b} = \{4, 5, 6\}$, $\vec{c} = \{3, 5, 1\}$.

Решение.

Находим: 1) $\vec{d} = [\vec{b}, \vec{c}] = -25\vec{i} + 14\vec{j} + 5\vec{k}$

2) $[\vec{a}, \vec{d}] = -32\vec{i} - 80\vec{j} + 64\vec{k}$

Второй способ: воспользуемся правилом $\text{BAC} - \text{CAB}$.

1) $(\vec{a}\vec{c}) = 16$, $\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) = 16\vec{b} = 64\vec{i} + 80\vec{j} + 96\vec{k}$,

2) $(\vec{a}\vec{b}) = 32$, $\vec{c}(\vec{a}\vec{b}) = 32\vec{c} = 96\vec{i} + 160\vec{j} + 32\vec{k}$,

3) $\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) = -32\vec{i} - 80\vec{j} + 64\vec{k}$.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Вычислить скалярное и векторное произведение векторов:

$\vec{a} = \{5, -2, 3\}$, $\vec{b} = \{4, 1, 6\}$.

Ответ:

36, $\{-15, -18, 13\}$.

1.2. Вычислить скалярное и векторное произведение векторов:

$\vec{a} = \{5, 2, 11\}$, $\vec{b} = \{2, 2, 6\}$.

Ответ:

60, $\{-10, 52, -14\}$.

1.3. Вычислить скалярное и векторное произведение векторов:

$\vec{a} = \{-1, -2, 1\}$, $\vec{b} = \{3, -2, 9\}$.

Ответ:

10, $\{-16, 12, 8\}$.

1.4. Вычислить двойное векторное произведение векторов:

$\vec{a} = \{4, -3, 2\}$, $\vec{b} = \{5, 2, -7\}$, $\vec{c} = \{3, 5, 1\}$.

Ответ:

$\{-5, -2, 7\}$.

1.5. Вычислить двойное векторное произведение векторов:

$$\vec{a} = \{3, 1, -2\}, \quad \vec{b} = \{1, 4, 1\}, \quad \vec{c} = \{2, 3, 4\}.$$

Ответ:

$$\{-9, -11, -19\}.$$

1.6. Вычислить двойное векторное произведение векторов:

$$\vec{a} = \{5, 11, 0\}, \quad \vec{b} = \{2, 1, 1\}, \quad \vec{c} = \{3, 13, 4\}.$$

Ответ:

$$\{253, -115, 74\}.$$

1.7. Вычислить двойное векторное произведение векторов:

$$\vec{a} = \{15, 1, 3\}, \quad \vec{b} = \{2, 11, 2\}, \quad \vec{c} = \{1, 3, 2\}.$$

Ответ:

$$\{1, 123, -46\}.$$

1.8. Вычислить двойное векторное произведение векторов:

$$\vec{a} = \{1, 15, 13\}, \quad \vec{b} = \{3, 0, 1\}, \quad \vec{c} = \{0, 33, 22\}.$$

Ответ:

$$\{2343, -528, 429\}.$$

Скалярные и векторные поля

Скалярную функцию векторного аргумента

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(x, y, z),$$

называют скалярным полем.

Поверхности

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(x, y, z) = \text{const}.$$

называют эквипотенциальными – они позволяют представить поле геометрически.

Векторную функцию векторного аргумента

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$$

называют векторным полем.

Силовые линии векторного поля имеют направление вектора $\vec{F}(\vec{r})$, т. е. вектор $\vec{F}(\vec{r})$ направлен по касательной к силовым линиям. Плотность силовых линий в каждой точке пространства пропорциональна модулю $|\vec{F}(\vec{r})|$ – они позволяют представить поле геометрически.

Дифференциальные операторы

В декартовых координатах линейный оператор $\vec{\nabla}$ (набла) определяется:

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Его применение к скалярным и векторным полям формально соответствует некоммутативному умножению (т.е. нельзя менять порядок сомножителей) вектора $\vec{\nabla}$ на соответствующие функции полей. Исходя из основных математических операций с векторами, получаем:

Градиент (произведение вектора $\vec{\nabla}$ на скаляр):

$$\text{grad} \Phi = \vec{\nabla} \Phi = \vec{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Дивергенция (скалярное произведение вектора $\vec{\nabla}$ и вектора \vec{a}):

$$\text{div} \vec{a} \equiv \vec{\nabla} a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Ротор (векторное произведение вектора $\vec{\nabla}$ и вектора \vec{A}):

$$[\vec{\nabla}, \vec{A}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).$$

Для дифференциальных операторов градиента, дивергенции и ротора справедливы следующие формулы:

$$\text{div}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \text{div} \vec{a}_1 + \text{div} \vec{a}_2;$$

$$\text{div} c \vec{a} = c \cdot \text{div} \vec{a}, \quad c = \text{const};$$

$$\text{div} \vec{a}(u) = \frac{d\vec{a}}{du} \text{grad} u;$$

$$\text{grad} \varphi(r) = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \text{grad} r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{r};$$

$$\text{rot} \vec{a}(u) = \left[\text{grad} u, \frac{d\vec{a}(u)}{du} \right];$$

$$\text{grad} \varphi \psi = \psi \cdot \text{grad} \varphi + \varphi \cdot \text{grad} \psi;$$

$$\text{div} \psi \vec{a} = \vec{a} \cdot \text{grad} \psi + \psi \cdot \text{div} \vec{a};$$

$$\text{rot} \psi \vec{a} = [\text{grad} \psi, \vec{a}] + \psi \cdot \text{rot} \vec{a};$$

$$\text{div} [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b};$$

$$\text{rot} [\vec{a}, \vec{b}] = (\vec{b} \cdot \text{grad}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \text{grad}) \vec{b} + \vec{a} \cdot \text{div} \vec{b} - \vec{b} \cdot \text{div} \vec{a};$$

$$(\vec{a} \cdot \text{grad}) \equiv (\vec{a} \cdot \nabla) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\text{grad}(\vec{a} \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \text{grad}) \vec{a} + (\vec{a} \cdot \text{grad}) \vec{b} + [\vec{a}, \text{rot} \vec{b}] + [\vec{b}, \text{rot} \vec{a}];$$

$$\text{grad} \frac{a^2}{2} = (\vec{a} \cdot \text{grad}) \vec{a} + [\vec{a}, \text{rot} \vec{a}];$$

$$(\nabla \vec{a}) \vec{b} = \vec{b} \cdot \text{div} \vec{a} + (\vec{a} \text{grad}) \vec{b}.$$

Полный дифференциал $d\Phi(\vec{r}, t)$ скалярного поля определяется:

$$d\Phi(\vec{r}, t) = (d\vec{r} \vec{\nabla}) \Phi(\vec{r}, t) + \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

(сравни $df(x, t) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial t} dt$).

Оператор Лапласа (лапласиан) в декартовых координатах имеет вид

$$\nabla^2 = (\vec{\nabla} \vec{\nabla}) = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Отметим следующие правила:

- Дивергенция градиента скалярной функции

$$\text{div grad} \Phi = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \Phi) = \Delta \Phi.$$

- Градиент дивергенции векторной функции

$$\text{grad div} \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{F}) = \Delta \vec{F}.$$

- Ротор градиента скалярной функции

$$\text{rot grad} \Phi = [\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \Phi] = 0.$$

- Дивергенция ротора векторной функции

$$\text{div rot} \vec{F} = \vec{\nabla}[\vec{\nabla}, \vec{F}] = 0.$$

- Ротор ротора векторной функции

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{a}) = [\vec{\nabla}[\vec{\nabla}, \vec{a}]] = \text{grad}(\text{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}.$$

Примеры решения задач

Пример 3. Вычислить дивергенцию вектора \vec{r} .

Решение. Вектор \vec{r} имеет следующие координаты: $\vec{r} = \{x, y, z\}$. Следовательно

$$\text{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Пример 4. Вычислить дивергенцию вектора $\vec{A} = \{xyz, ay^2, a^2x\}$.

Решение.

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial xyz}{\partial x} + \frac{\partial ay^2}{\partial y} + \frac{\partial a^2x}{\partial z} = yz + 2ay + 0 = y(z + 2a).$$

Пример 5. Вычислить градиент модуля вектора \vec{r} .

Решение. Модуль вектора \vec{r} равен $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Следовательно

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} r &= \vec{i} \frac{\partial r}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial r}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial r}{\partial z} = \\ &= \vec{i} \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial z}.\end{aligned}$$

Вычислим производную

$$\frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r};$$

остальные производные вычисляются аналогично. В результате имеем:

$$\vec{\nabla} r = \vec{i} \frac{x}{r} + \vec{j} \frac{y}{r} + \vec{k} \frac{z}{r} = \frac{\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z}{r} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Пример 6. Вычислить градиент функции $\sin\left(\frac{r}{a}\right)$.

Решение. Модуль вектора \vec{r} равен $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Следовательно:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \sin \frac{r}{a} &= \vec{i} \frac{\partial \sin \frac{r}{a}}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \sin \frac{r}{a}}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \sin \frac{r}{a}}{\partial z} = \\ &= \vec{i} \frac{\partial \sin \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{a}}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \sin \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{a}}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \sin \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{a}}{\partial z}.\end{aligned}$$

Вычислим производную

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sin \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{a}}{\partial x} &= \frac{1}{a} \cos \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{a} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} 2x = \\ &= \frac{x \cos \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{a}}{a \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x \cos \frac{r}{a}}{ar};\end{aligned}$$

остальные производные вычисляются аналогично. В результате имеем:

$$\vec{\nabla} \sin \frac{r}{a} = \vec{i} \frac{x \cos \frac{r}{a}}{ar} + \vec{j} \frac{y \cos \frac{r}{a}}{ar} + \vec{k} \frac{z \cos \frac{r}{a}}{ar} = \frac{\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z}{ar} \cos \frac{r}{a} = \frac{\vec{r}}{ar} \cos \frac{r}{a}.$$

Второй способ: используем формулу $\text{grad } \varphi(r) = \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r}$ имеем:

$$\vec{\nabla} \sin \frac{r}{a} = \frac{1}{a} \cos \frac{r}{a} \frac{\vec{r}}{r}$$

Пример 7. Вычислить ротор вектора $\vec{a} = \{x^3, b \cdot x^2, z^3\}$.

Решение. Используя запись ротора вектора через определитель, находим:

$$\begin{aligned} [\vec{\nabla}, \vec{a}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3 & bx^2 & z^3 \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial z^3}{\partial y} - \frac{\partial bx^2}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial x^3}{\partial z} - \frac{\partial z^3}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial bx^2}{\partial x} - \frac{\partial x^3}{\partial y} \right) \\ &= \vec{i}(0 - 0) + \vec{j}(0 - 0) + \vec{k}(2bx - 0) = 2bx \vec{k}. \end{aligned}$$

Пример 8. Вычислить ротор вектора $\frac{\vec{r}}{r}$.

Решение. Вектор \vec{r} имеет следующие координаты: $\vec{r} = \left\{ \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right\}$,

здесь модуль вектора \vec{r} равен $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Теперь

$$\left[\vec{\nabla}, \frac{\vec{r}}{r} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial \frac{z}{r}}{\partial y} - \frac{\partial \frac{y}{r}}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial \frac{x}{r}}{\partial z} - \frac{\partial \frac{z}{r}}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial \frac{y}{r}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{x}{r}}{\partial y} \right).$$

Вычислим производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial \frac{z}{r}}{\partial y} &= \frac{z \partial (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}{\partial y} = z \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \frac{\partial y^2}{\partial y} = \\ &= z \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \cdot 2y = -\frac{zy}{r^3}. \end{aligned}$$

Остальные производные вычисляются аналогично. В результате имеем:

$$\left[\vec{\nabla}, \frac{\vec{r}}{r} \right] = \vec{i} \left(-\frac{zy}{r^3} + \frac{yz}{r^3} \right) + \vec{j} \left(-\frac{xz}{r^3} + \frac{zx}{r^3} \right) + \vec{k} \left(-\frac{yx}{r^3} + \frac{xy}{r^3} \right) = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.9. Вычислить градиент функции $1/r$.

Ответ:

$$-\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

1.10. Вычислить градиент функции r^2 .

Ответ:

$$2\vec{r}.$$

1.11. Вычислить градиент функции $\cos(r/a)$.

Ответ:

$$-\frac{\vec{r}}{ar} \sin \frac{r}{a}.$$

1.12. Вычислить градиент функции $\exp\left[-\left(\frac{r}{a}\right)\right]$.

Ответ:

$$-\frac{\vec{r}}{ar} \exp\left[-\left(\frac{r}{a}\right)\right].$$

1.13. Вычислить дивергенцию вектора $\vec{A} = \{x^3, y^3, z^3\}$.

Ответ:

$$3(x^2 + y^2 + z^2) = 3r^2.$$

1.14. Вычислить дивергенцию вектора $\vec{A} = \{x^2, y^2, z^2\}$.

Ответ:

$$2(x + y + z).$$

1.15. Вычислить дивергенцию вектора $\vec{A} = \left\{x, \frac{y^2}{b}, \frac{z^3}{b^2}\right\}$.

Ответ:

$$1 + \frac{2y}{b} + \frac{3z^2}{b^2}.$$

1.16. Вычислить дивергенцию вектора $\vec{A} = \left\{x, y - z, \frac{z^3 + x^3}{b^2}\right\}$.

Ответ:

$$2 + \frac{2z^2}{b^2}.$$

1.17. Вычислить дивергенцию вектора $\vec{A} = \left\{ \frac{x^3}{b^3}, \exp\left(-\frac{y^3}{b^3}\right), 23 \right\}$.

Ответ:

$$\frac{3 \left(x^2 - y^2 \exp\left[-\frac{y^3}{b^3}\right] \right)}{b^3}.$$

1.18. Вычислить ротор вектора $\vec{A} = \{y/x, x/y, 0\}$.

Ответ:

$$\left\{ 0, 0, -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right\}.$$

1.19. Вычислить ротор вектора $\vec{A} = \{x/y, y/x, 0\}$.

Ответ:

$$\left\{ 0, 0, \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2} \right\}.$$

1.20. Вычислить ротор вектора $\vec{A} = \{y/x, y/x, 0\}$.

Ответ:

$$\left\{ 0, 0, -\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} \right\}.$$

1.21. Вычислить ротор вектора $\frac{\vec{r}}{r^n}$, где $n = \text{const}$.

Ответ:

0.

Дельта-функция Дирака

Определение: $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака может быть определена, как функция переменной $x \in (-\infty, \infty)$ и равна:

$$\delta(x) = 0 \text{ при } x \neq 0,$$

$$\delta(x) = \infty \text{ при } x = 0.$$

Основные свойства дельта – функции:

$$\int_a^b \delta(x) dx = 1, \text{ где } a < 0 < b.$$

Так, что

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx = f(0), \text{ где } a < 0 < b.$$

$f(x)$ – произвольная непрерывная функция.

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0), \text{ где } a < x_0 < b,$$

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = 0, \begin{cases} x_0 > b, \\ x_0 < a. \end{cases}$$

Свойства δ -функции:

$$\delta(-x) = \delta(x),$$

$$x\delta(x) = 0,$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad a \neq 0,$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x-a) + \delta(x+a)].$$

Последние две формулы есть частный случай общей формулы:

$$\delta[f(x)] = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\left| \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} \right|} \delta(x - x_i),$$

где x_i – корни уравнения $f(x) = 0$, N – число корней.

$$\int \delta(a-x)\delta(b-x)dx = \delta(a-b),$$

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a).$$

δ -функция может быть представлена как производная от функции $\theta(x)$, где $\theta(x)$ - единичная функция, функция Хевисайда.

$$\delta(x) = \frac{d}{dx} \theta(x), \quad \theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Трёхмерная δ -функция

Трёхмерная δ -функция определяется

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z).$$

Свойство 3-мерной δ -функции:

$$\int_V F(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = F(\vec{r}_0),$$

(если точка с радиус вектором \vec{r}_0 находится в объеме интегрирования V). Для элементарного объёма вводятся следующие обозначения $d\vec{r} \equiv d^3\vec{r} \equiv dx dy dz \equiv dV$.

Оператор Лапласа и δ -функция связаны соотношением

$$\delta(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r}.$$

В соответствие с теоремой Гаусса это предполагает, что $\delta(\vec{r})$ - распределение заряда, ассоциированное с единичным точечным зарядом в начале координат.

Аппроксимации δ -функции.

Иногда удобно представить δ -функцию в виде следующих пределов:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\pi x} = \delta(x),$$

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{x^2 + a^2},$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{a \rightarrow 0} a e^{-\frac{x^2}{a^2}},$$

$$\delta(x) = -\lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{a}}}{a \left(e^{\frac{x}{a}} + 1 \right)^2}.$$

Интегральное представление δ -функции.

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx.$$

Примеры решения задач

Пример 9. Используя свойства δ -функции вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 x \delta(x - a) dx.$$

Решение. В данном случае $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = a$. В соответствии с основным свойством δ -функции, получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 x \delta(x - a) dx = \cos^2 a.$$

Пример 10. Доказать свойство δ - функции

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x - a) + \delta(x + a)].$$

Решение. Воспользуемся общей формулой для δ -функции от сложного аргумента: $\delta[f(x)] = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\left| \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} \right|} \delta(x - x_i)$, где x_i корни уравнения

$f(x) = 0$, N – число корней. В данном случае $f(x) = x^2 - a^2$. Решая уравнение $f(x) = x^2 - a^2 = 0$, находим $x_1 = a$, $x_2 = -a$, значит $N = 2$. Производная $f(x)$ равна $\frac{\partial(x^2 - a^2)}{\partial x} = 2x$ и $\frac{\partial f(x_1)}{\partial x} = 2a$, $\frac{\partial f(x_2)}{\partial x} = -2a$.

Откуда

$$\begin{aligned} \delta[(x^2 - a^2)] &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\left| \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} \right|} \delta(x - x_i) = \\ &= \frac{1}{2a} \delta(x - a) + \frac{1}{|-2a|} \delta(x - (-a)) = \frac{1}{2a} [\delta(x - a) + \delta(x + a)]. \end{aligned}$$

Пример 11. Используя свойства δ -функции вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x}{2}\right] \delta(\vec{r}) dx dy dz.$$

Решение. Трехмерная δ -функции определяется $\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$, соответственно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x}{2}\right] \delta(\vec{r}) dx dy dz = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x}{2}\right] \delta(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) dz$$

Теперь воспользуемся свойство δ -функции $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x}{2}\right] \delta(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{x}{2}\right] \delta(x) dx \cdot 1 \cdot 1 = \exp\left[-\frac{0}{2}\right] = 1.$$

Пример 12. Используя свойства δ -функции вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos[\vec{r} \cdot \vec{a}] \delta(\vec{r} - \vec{b}) d\vec{r}.$$

Решение. Трехмерная δ -функция определяется $\delta(\vec{r} - \vec{b}) = \delta(x - b_x)\delta(y - b_y)\delta(z - b_z)$, скалярное произведение $\vec{r} \cdot \vec{a} = xa_x + ya_y + za_z$ и $d\vec{r} = dxdydz$. В результате имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \cos[\vec{r} \cdot \vec{a}] \delta(\vec{r} - \vec{b}) d\vec{r} = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos[xa_x + ya_y + za_z] \delta(x - b_x) \delta(y - b_y) \delta(z - b_z) dxdydz = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos[xa_x + ya_y + b_z a_z] \delta(x - b_x) \delta(y - b_y) dxdy = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \cos[xa_x + b_y a_y + b_z a_z] \delta(x - b_x) dx = \cos[b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z] = \cos[\vec{b} \cdot \vec{a}] \end{aligned}$$

Пример 13. Используя свойства δ -функции вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(r)}{|\vec{r} - \vec{a}|} \delta(\vec{r} - \vec{b}) d\vec{r}$.

Решение. Трехмерная δ -функция определяется $\delta(\vec{r} - \vec{b}) = \delta(x - b_x)\delta(y - b_y)\delta(z - b_z)$, модуль вектора \vec{r} равен $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и модуль вектора $\vec{r} - \vec{a}$ равен $|\vec{r} - \vec{a}| = \sqrt{(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2 + (z - a_z)^2}$. Перепишем искомый интеграл в виде:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(r)}{|\vec{r} - \vec{a}|} \delta(\vec{r} - \vec{b}) d\vec{r} = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2 + (z - a_z)^2}} \delta(x - b_x) \delta(y - b_y) \delta(z - b_z) dxdydz. \end{aligned}$$

Далее, аналогично предыдущему примеру, находим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(r)}{|\vec{r} - \vec{a}|} \delta(\vec{r} - \vec{b}) d\vec{r} = \frac{F(\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2})}{\sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2}} = \frac{F(b)}{|\vec{b} - \vec{a}|}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.22. Используя свойства δ -функции, вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-4) \cos(kx) dx$.

Ответ:
 $\cos(4k)$.

1.23. Используя свойства δ -функции, вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-3) \exp(-kx) dx$.

Ответ:
 $\exp(-3k)$.

1.24. Используя свойства δ -функции, вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x+3) \exp(-kx) dx$.

Ответ:
 $\exp(3k)$.

1.25. Используя свойства δ -функции, вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-\pi) \sin(kx) dx$, $k = \pm 1, 2, 3, \dots$

Ответ:
 $\sin(\pi k) = 0$.

1.26. Используя свойства δ -функции, вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) \cos(x) x dx$.

Ответ:
0.

1.27. Используя свойства δ -функции, вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) \cos(x) \sin(x) dx$.

Ответ:
0.

1.28. Используя свойства δ -функции, вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - b^2) \ln(x-a)^3 dx$.

Ответ:
 $\frac{\ln(b-a)^3 + \ln(-b-a)^3}{2b}$.

1.29. Используя свойства δ -функции, вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^3 - b^3)(x - a) dx$

Ответ:

$$-\frac{a}{b^2}.$$

1.30. Используя свойства δ -функции, вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^3 - b^3)(x - b) dx$

Ответ:

$$-\frac{1}{b}.$$

1.31. Используя свойства δ -функции, вычислить

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^3 - b^3)(x - a)^3 dx.$$

Ответ:

$$\frac{b^3 - a^3}{b^2}.$$

1.32. Используя свойства δ -функции вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln(\vec{r} \cdot \vec{a}) \delta(\vec{r} - \vec{b}) d\vec{r}.$$

Ответ:

$$\ln(\vec{b} \cdot \vec{a}).$$

1.33. Используя свойства δ -функции вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\vec{r} \cdot \vec{a})^2 \delta(\vec{r} - \vec{b}) d\vec{r}.$$

Ответ:

$$(\vec{b} \cdot \vec{a})^2.$$

1.34. Используя свойства δ -функции вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(\vec{r} \cdot \vec{a})] \delta(\vec{r} - \vec{b}) d\vec{r}.$$

Ответ:

$$\exp[-i(\vec{b} \cdot \vec{a})].$$

1.35. Используя свойства δ -функции вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{tg(r)}{|\vec{r} - \vec{a}|} \delta(\vec{r} - \vec{b}) d\vec{r}.$$

Ответ:

$$\frac{tg(b)}{|\vec{b} - \vec{a}|}.$$

Преобразование Фурье

Преобразование Фурье позволяет рассмотреть зависимость (распределение) некоторого сигнала от времени, если известна зависимость сигнала от частоты, и, наоборот найти зависимость сигнала от частоты по известной зависимости от времени.

Прямое преобразование Фурье:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Обратное преобразование Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Пусть Δt ширина функции $f(t)$, $\Delta \omega$ ширина функции $f(\omega)$, тогда справедливо соотношение $\Delta \omega \Delta t \sim 1$.

Если $f(t)$ вещественная функция, то $F(\omega)$ – комплексная функция, причём

$$F^*(\omega) = F(-\omega).$$

Теорема Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Аналогично определяют и *многомерные* прямое и обратное преобразования Фурье, например, для скалярных функций от 3-мерных векторов

$$F(\vec{k}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} dt,$$

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} dt.$$

Дельта-функцию и её производную тоже можно представить интегралом Фурье

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega.$$

Примеры решения задач

Пример 14. Найти Фурье образ функции $f(t) = e^{-a|t|}$.

Решение. Фурье образ функции равен:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|-i\omega t} dt.$$

Разобьем интеграл от $-\infty$ до ∞ на сумму двух интегралов от $-\infty$ до 0 и от 0 до ∞ . Раскрывая модуль в показателе экспоненты имеем:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{at-i\omega t} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-at-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left. \frac{e^{at-i\omega t}}{a-i\omega} \right|_{-\infty}^0 + \left. \frac{e^{-at-i\omega t}}{-a-i\omega} \right|_0^{\infty} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a-i\omega} - \frac{1}{-a-i\omega} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

При вычислении интеграла было учтено $e^{-\infty} = 0$ и $i^2 = -1$.

Пример 15. Найти Фурье образ функции $f(t) = e^{-a|t|+i\omega_0 t}$.

Решение. Фурье образ функции равен:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|+i\omega_0 t} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t+i\omega_0 t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-i(\omega-\omega_0)t} dt.$$

Из последней формулы видно, что задача свелась к предыдущей, если в последней заменить $\omega \rightarrow \omega - \omega_0$. В результате имеем:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2}.$$

Пример 16. Найти Фурье образ функции $f(t) = \sin(\omega_0 t)$.

Решение. Прежде чем рассмотреть решение данного примера сделаем следующее замечание общего характера. Для вычисления Фурье функций содержащих синус или косинус нужно использовать формулы:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Запишем Фурье образ следующим образом:

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 t - i\omega t} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_0 t - i\omega t} dt \right) = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} (2\pi\delta(\omega_0 - \omega) - 2\pi\delta(-\omega_0 - \omega)) = \\
&= -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta(\omega_0 - \omega) - \delta(\omega_0 + \omega)).
\end{aligned}$$

При записи последней формулы были учтены следующие соотношения $\delta(\omega - \omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\omega - \omega')} dt$ и $\delta(-x) = \delta(x)$, а также очевидное соотношение $\frac{1}{i} = -i$.

Пример 17. Вычислить Фурье образа функции $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-t^2/2\tau}$.

Решение.

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-t^2/2\tau} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{t^2}{2\tau} - i\omega t\right] dt$$

Сделаем замену переменных: $\frac{t^2}{2\tau} = x^2$, тогда $x = t/\sqrt{2\tau}$, $dx = \sqrt{2\tau} dt$. В результате получим:

$$\begin{aligned}
f(\omega) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-x^2 - i\omega x\sqrt{2\tau}\right] \sqrt{2\tau} dx \\
&= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-x^2 - 2\frac{i\omega x\sqrt{2\tau}}{2} - \left(\frac{i\omega\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2 + \left(\frac{i\omega\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2\right] dx.
\end{aligned}$$

Перепишем аргумент экспоненты

$x^2 + 2\frac{i\omega x\sqrt{2\tau}}{2} + \left(\frac{i\omega\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{i\omega\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2 = \rho^2$. Тогда интеграл примет

вид:

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \exp\left(\frac{i\omega\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\tau\omega^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho.$$

Вместо вычисления интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho$ вычислим $I = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho\right)^2$:

$$I = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho \right).$$

Переобозначим переменные интегрирования:

$$I = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho \right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

В полученном двойном интеграле перейдем к полярным координатам ρ и φ по правилу: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, причем ρ меняется от 0 до ∞ , φ меняется от 0 до 2π и $dx dy = \rho d\rho d\varphi$. В результате имеем:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} d \frac{\rho^2}{2} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} e^{-\rho^2} \Big|_0^{\infty} = \pi.$$

Откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho = \sqrt{I} = \sqrt{\pi}.$$

В результате окончательно имеем:

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\tau\omega^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\rho^2} d\rho = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\tau\omega^2}{2}\right) \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tau\omega^2}{2}\right).$$

Пример 18. Проиллюстрировать соотношение $\Delta\omega\Delta t \sim 1$ на примере функции $f(t)=1$.

Решение. Очевидно, что ширина функции $f(t)=1$ равна бесконечности $\Delta t = \infty$. Фурье образ $f(t)$ равен

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} dx = \sqrt{2\pi} \delta(\omega).$$

В соответствии с определением $\delta(x)=0$ при $x \neq 0$ и $\delta(x)=\infty$ при $x=0$, следовательно ширина δ -функции равна нулю $\Delta\omega=0$. Таким образом:

$$\Delta\omega\Delta t = 0 \cdot \infty \sim 1.$$

Пример 19. Проиллюстрировать соотношение $\Delta\omega\Delta t \sim 1$ на примере функции $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-t^2/2\tau}$.

Решение. Функция $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-t^2/2\tau}$ описывает нормальное распределение случайной величины (распределение Гаусса). Параметр τ – называется дисперсией и определяет ширину распределения. Чем больше τ , тем больше ширина функции $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-t^2/2\tau}$.

Фурье образ $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-t^2/2\tau}$ равен (смотри пример 17):

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tau\omega^2}{2}\right).$$

Из последней формулы видно, что ширина функции $f(\omega)$ определяется величиной $\frac{1}{\tau}$. Таким образом $\Delta t \sim \tau$, $\Delta\omega \sim \frac{1}{\tau}$, $\Delta t \cdot \Delta\omega \sim \tau \cdot \frac{1}{\tau}$.

Для иллюстрации вышесказанного на рис. 1 показана функция $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-t^2/2\tau}$ для двух значений τ , $\tau = 5$ – сплошная линия, $\tau = 1$ – пунктирная линия.

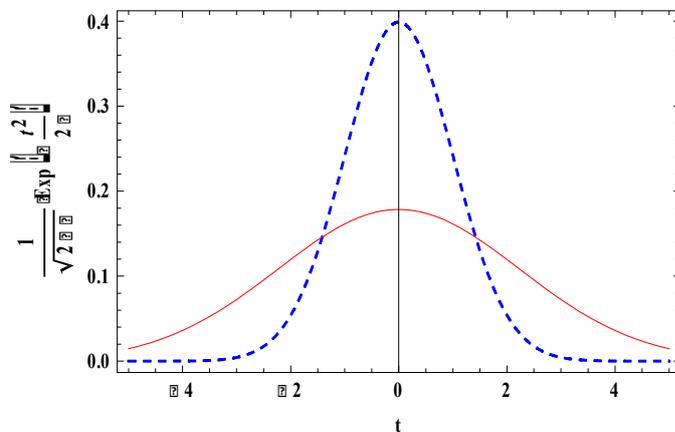


Рис. 1. График функции $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-t^2/2\tau}$: $\tau = 5$ – сплошная линия, $\tau = 1$ – пунктирная линия

На рис. 2 показана функции $f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tau\omega^2}{2}\right)$ для двух значений τ , $\tau = 5$ – сплошная линия, $\tau = 1$ – пунктирная линия.

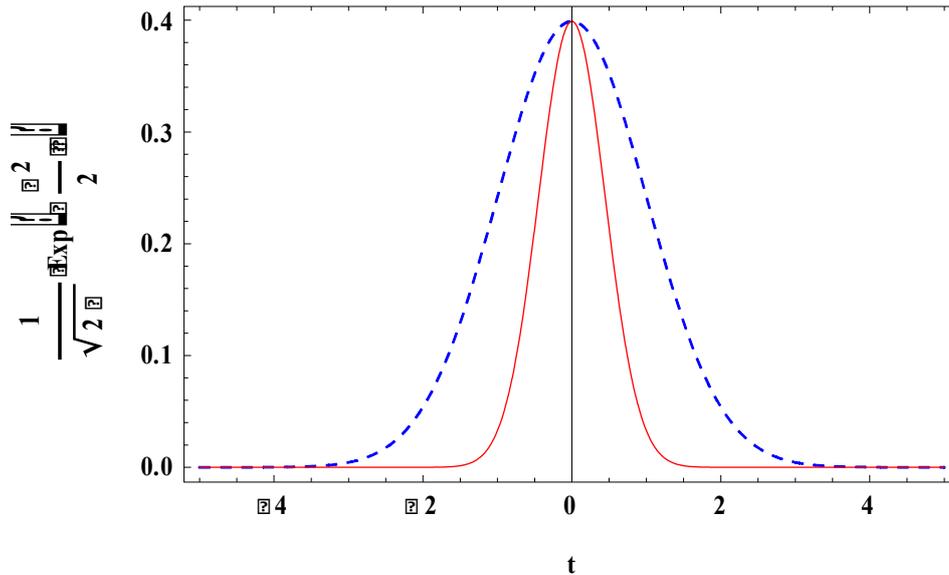


Рис. 2. График функции $f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tau\omega^2}{2}\right)$:
 $\tau = 5$ – сплошная линия, $\tau = 1$ – пунктирная линия.

Пример 20. Доказать теорему Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

Решение. Квадрат модуля равен $|f(t)|^2 = f(t) \cdot f^*(t)$. Представим $f(t)$ и $f^*(t)$ в виде интегралов Фурье

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega ;$$

$$f^*(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right)^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega ;$$

и подставим в формулу для теоремы Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega') e^{i\omega' t} d\omega' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega dt .$$

Поменяем порядок интегрирования

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega') e^{i\omega' t} d\omega' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega dt = \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega') F^*(\omega) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(\omega - \omega') t] dt}_{\delta(\omega - \omega')} d\omega d\omega' = \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega') F^*(\omega) \delta(\omega - \omega') d\omega d\omega' = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) F^*(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega
\end{aligned}$$

Здесь использовано интегральное представление

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-t')} d\omega ;$$

и основное свойство δ -функции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

Пример 21. Найдите Фурье образ функции $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ t, & a \leq t \leq b, \\ 0, & t > b. \end{cases}$

Решение. Запишем Фурье образ искомой функции в виде суммы трех интегралов:

$$\begin{aligned}
f(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^a 0 \cdot e^{-i\omega t} dt + \int_a^b t \cdot e^{-i\omega t} dt + \int_b^{+\infty} 0 \cdot e^{-i\omega t} dt = \\
&= \int_a^b t \cdot e^{-i\omega t} dt.
\end{aligned}$$

Для вычисления интеграла $\int_a^b t \cdot e^{-i\omega t} dt$ воспользуемся методом интегри-

рования по частям:

$$\begin{aligned}
\int_a^b t \cdot e^{-i\omega t} dt &= \int_a^b t \frac{de^{-i\omega t}}{-i\omega} = t \cdot \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} dt = \\
&= \frac{i}{\omega} (be^{-i\omega b} - ae^{-i\omega a}) - \frac{i}{\omega} (e^{-i\omega b} - e^{-i\omega a}).
\end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

1.36. Найти Фурье образ функции $\exp(|x|)$.

Ответ:

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1 + \omega^{-2}}.$$

1.37. Найти Фурье образ функции $\exp(-|x|)$.

Ответ:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1 + \omega^{-2}}.$$

1.38. Найти Фурье образ функции $\cos(kx) - \sin(kx)$.

Ответ:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} ((1 - i)\delta(\omega - k) + (1 + i)\delta(\omega + k)).$$

1.39. Найти Фурье образ функции $\cos(kx) + \sin(kx)$.

Ответ:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} ((1 + i)\delta(\omega - k) + (1 - i)\delta(\omega + k)).$$

1.40. Найти Фурье образ функции $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ \sin ct, & a \leq t \leq b, \\ 0, & t > b. \end{cases}$

Ответ:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\omega^2 - c^2)} [e^{-i\omega b}(c \cos(bc) + i\omega \sin(bc)) - e^{-i\omega a}(c \cos(ac) + i\omega \sin(ac))].$$

1.41. Найти Фурье образ функции $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ e^{-ct}, & a \leq t \leq b, \\ 0, & t > b. \end{cases}$

Ответ:

$$\frac{e^{-a(c+i\omega)} - e^{-b(c+i\omega)}}{\sqrt{2\pi}(c + i\omega)}$$

1.42. Найти Фурье образ функции $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ e^{ct}, & a \leq t \leq b, \\ 0, & t > b. \end{cases}$

Ответ:

$$\frac{e^{-5(c-i\omega)} - e^{a(c+i\omega)}}{\sqrt{2\pi}(c+i\omega)}.$$

1.43. Найти Фурье образ функции $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ c-t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > b. \end{cases}$

Ответ:

$$\frac{e^{-i\omega(a+b)}}{\sqrt{2\pi}} (e^{ib\omega}(1+i(a-c)\omega) - e^{ia\omega}(1+i(b-c)\omega)).$$

2. ЭЛЕКТРОСТАТИКА (ВАКУУМ)

Заряды неподвижны, магнитное поле отсутствует, уравнения Максвелла в вакууме имеют вид (система СИ):

$$\vec{\nabla} E = \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad [\vec{\nabla}, \vec{E}] = \text{rot} \vec{E} = 0, \quad (2.1)$$

где $\rho(\vec{r})$ – плотность зарядов, $\vec{E}(\vec{r})$ – напряженность электрического поля. Напряженность электрического поля \vec{E} связана с потенциалом $\varphi(\vec{r})$:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi = -\text{grad} \varphi. \quad (2.2)$$

Т. к. $\text{rot}(\text{grad} \varphi) = 0$, то второе уравнение в (2.1) выполняется автоматически, а первое приводится к виду

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi \equiv \vec{\nabla}^2 \varphi \equiv \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (2.3)$$

Оператор $\vec{\nabla}^2 \equiv \Delta$ – лапласиан, уравнение (2.3) – уравнение Пуассона. Потенциал определен не однозначно: если к $\varphi(\vec{r})$ прибавить функцию $f(\vec{r})$, причем $\vec{\nabla} f = \text{grad} f = 0$, то поле \vec{E} не изменится.

Решение уравнения Пуассона в вакууме при заданной плотности зарядов $\rho(\vec{r})$ имеет вид:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'. \quad (2.4)$$

Если заряды сосредоточены в ограниченной области пространства, а точка наблюдения – далеко от системы зарядов, то используется мультипольное разложение потенциалов. Часто достаточно ограничиться несколькими членами разложения – найти первый ненулевой член разложения, особенно для нейтральной системы зарядов – атом, молекула, и т. д. Для решения задач применяем формулы мультипольного разложения:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) = & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} \int \rho(\vec{r}') d\vec{r}' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \int (\vec{r} \cdot \vec{r}') \rho(\vec{r}') d\vec{r}' + \\ & + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \int \sum_{i,k=1}^3 (3x_i x'_k - r'^2) \rho(\vec{r}') d\vec{r}' + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

или

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} Q + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \vec{D} \cdot \vec{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^5} \sum_{i,k=1}^3 Q_{ik} x_{ik} + \dots \quad (2.6)$$

Монопольный момент = полный заряд системы:

$$Q_{ik} = \int \rho(\vec{r}') d\vec{r}' . \quad (2.7)$$

Дипольный момент:

$$\vec{D} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d\vec{r}' . \quad (2.8)$$

Тензор квадрупольного момента (компоненты тензора):

$$Q_{ik} = \int \sum_{i,k=1}^3 (3x_i x'_k - r'^2) \rho(\vec{r}') d\vec{r}' + \dots \quad (2.9)$$

Примеры решения задач

Пример 1. Найти потенциал, созданный системой N точечных зарядов, величиной q_n , расположенных в точках \vec{r}_n .

Решение. Плотность зарядов $\rho(\vec{r}) = \sum_n q_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n)$, где $\delta(\vec{r})$ – дельта-функция Дирака. С помощью (2.4) находим потенциал:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sum q_n \delta(\vec{r}' - \vec{r}_n)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|} .$$

Пример 2. Найти дипольный момент, созданный системой N точечных зарядов, величиной q_n , расположенных в точках \vec{r}_n .

Решение. плотность зарядов $\rho(\vec{r}) = \sum_n q_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n)$. С помощью (2.8) находим вектор дипольного момента:

$$\vec{D} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d\vec{r}' = \int \vec{r}' \sum_n q_n \delta(\vec{r}' - \vec{r}_n) d\vec{r}' = \sum_{n=1}^N q_n \cdot \vec{r}_n$$

Пример 3. Найти квадрупольный момент, созданный системой N точечных зарядов, величиной q_n , расположенных в точках \vec{r}_n .

Решение. Плотность зарядов $\rho(\vec{r}) = \sum_n q_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n)$. С помощью (2.9) находим тензор квадрупольного момента:

$$\begin{aligned} Q_{ik} &= \int \sum_{i,k=1}^3 (3x_i x'_k - r'^2) \rho(\vec{r}') d\vec{r}' = \sum_{i,k} \int d\vec{r}' (3x_i x'_k - r'^2) \sum_n q_n \delta(\vec{r}' - \vec{r}_n) = \\ &= \sum_n q_n \sum_{i,k} (3x'_{ni} x'_{nk} - r_n'^2) \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Найти плотность электрических зарядов ρ , создавших электрическое поле $\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \vec{r} e^{r^2/a^2}$; ($E_0 = const, a = const$).

Ответ:

$$\rho(\vec{r}) = E_0 e^{r^2/a^2} (3 + 2r^2/a^2).$$

2.2. Найти электрическое поле $\vec{E}(\vec{r})$, если скалярный потенциал $\varphi(\vec{r}) = \frac{U_0}{r^2}$, $r = |\vec{r}|$, $U_0 = const$.

Ответ:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{2U_0 \vec{r}}{r^4}.$$

2.3. Доказать, что электрическое поле \vec{E} , описываемое любым скалярным потенциалом φ , является безвихревым **Указание:** используйте связь \vec{E} и φ и докажите, что $rot \vec{E} = 0$.

2.4. Найти плотность электрических зарядов, создавших электрическое поле $\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \vec{r} / (a^2 + r^2)$; ($E_0 = const, a = const$).

Ответ:

$$\rho(\vec{r}) = E_0 \frac{(3a^2 + r^2)}{(a^2 + r^2)^2}.$$

2.5. Прямым вычислением доказать безвихревой характер электростатического поля вида $\vec{E} = E_0 \frac{\vec{r}}{r}$. **Указание:** определение безвихревого поля: $rot \vec{E} = 0$.

2.6. Найти плотность электрических зарядов ρ , создавших электрическое поле $\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \vec{r} e^{r^2/a^2}$; ($E_0 = const, a = const$).

Ответ:

$$\rho(\vec{r}) = E_0 e^{r^2/a^2} (3 + 2r^2/a^2).$$

2.7. Прямым вычислением доказать безвихревой характер электростатического поля вида $\vec{E} = E_0 \frac{\vec{r}}{r^2}$. **Указание:** определение безвихревого поля: $rot \vec{E} = 0$.

2.8. Найти электрическое поле $\vec{E}(\vec{r})$, если скалярный потенциал равен $\varphi(\vec{r}) = \varphi_0 / (a^2 + r^2)$; ($\varphi_0 = const, a = const$).

Ответ:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -2\varphi_0 \frac{\vec{r}}{(a^2 + r^2)^2}.$$

2.9. Найти электрическое поле $\vec{E}(\vec{r})$, если скалярный потенциал равен $\varphi(\vec{r}) = \varphi_0(a^2 + r^2)$; ($\varphi_0 = const, a = const$).

Ответ:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -2\varphi_0\vec{r}.$$

2.10. Найти электрическое поле $\vec{E}(\vec{r})$, если скалярный потенциал равен $\varphi(\vec{r}) = \varphi_0/(3a^2 + r^2)$; ($\varphi_0 = const, a = const$).

Ответ:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -2\varphi_0 \frac{\vec{r}}{(3a^2 + r^2)}.$$

2.11. Найти электрическое поле $\vec{E}(\vec{r})$, если скалярный потенциал равен $\varphi(\vec{r}) = \varphi_0/(a^2 + x^2 + y^2)$; ($\varphi_0 = const, a = const$).

Ответ:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -2\varphi_0 \frac{\vec{i}x + \vec{j}y}{(3a^2 + x^2 + y^2)}.$$

2.12. Найти электрическое поле $\vec{E}(\vec{r})$, если скалярный потенциал равен $\varphi(\vec{r}) = \varphi_0/(a^2 - r^2)$; ($\varphi_0 = const, a = const$).

Ответ:

$$\vec{E}(\vec{r}) = 2\varphi_0 \frac{\vec{r}}{(a^2 - r^2)}.$$

2.13. Найти плотность электрических зарядов, создавших электрический потенциал $\varphi(\vec{r}) = \varphi_0/(a^2 + r^2)$; ($\varphi_0 = const, a = const$).

Ответ:

$$\rho = 2\varphi_0 \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{r^2 - 3a^2}{(r^2 + a^2)}.$$

2.14. Найти плотность электрических зарядов, создавших электрический потенциал $\varphi(\vec{r}) = \varphi_0(a^2 + r^2)$; ($\varphi_0 = const, a = const$).

Ответ:

$$\rho = -6 \frac{1}{\varepsilon_0} \varphi_0.$$

2.15. Найти плотность электрических зарядов, создавших электрический потенциал $\varphi(\vec{r}) = \varphi_0/(a^2 + x^2 + y^2)$; ($\varphi_0 = const, a = const$).

Ответ:

$$\rho = 2 \frac{1}{\varepsilon_0} \varphi_0 \frac{x^2 + y^2 - 3a^2}{(x^2 + y^2 + a^2)}.$$

2.16. Найти плотность электрических зарядов, создавших электрический потенциал $\varphi(\vec{r}) = \varphi_0 / (r^2 - a^2)$; ($\varphi_0 = const, a = const$).

Ответ:

$$\rho = 2 \frac{1}{\varepsilon_0} \varphi_0 \frac{r^2 + 9a^2}{(r^2 + a^2)^2}.$$

2.17. Найти плотность электрических зарядов, создавших электрический потенциал $\varphi(\vec{r}) = \varphi_0 (a^2 - r^2)$; ($\varphi_0 = const, a = const$).

Ответ:

$$\rho = -6 \frac{1}{\varepsilon_0} \varphi_0.$$

2.18. Заряд q равномерно распределен по окружности радиуса a , лежащей в плоскости x, y . Центр окружности совпадает с началом координат. Найти потенциал $\varphi(z)$ и электрическое поле $E_z(z)$ на оси, z . В какой точке на оси z_m поле максимально.

Ответ:

$$\varphi(z) = q(a^2 + z^2)^{-1/2}, E_z(z) = qz(a^2 + z^2)^{-3/2}, z_m = a/\sqrt{2}.$$

2.19. Заряд q распределен по окружности радиуса a , лежащей в плоскости x, y декартовой системы координат. Линейная плотность заряда λ является функцией азимутального угла θ : $\lambda = C \cos(n\theta)$, $C = const, n = 1, 2, 3, \dots$. Центр окружности совпадает с началом координат. Найти потенциал $\varphi(z)$ на оси z .

Ответ:

$$\varphi(z) = 0.$$

2.20. Заряд q распределен по окружности радиуса a , лежащей в плоскости x, y декартовой системы координат. Линейная плотность заряда λ является функцией азимутального угла θ : $\lambda = C\theta$, $C = const$. Центр окружности совпадает с началом координат. Найти потенциал $\varphi(z)$ и электрическое поле $E_z(z)$ на оси z .

Ответ:

$$\varphi(z) = 2\pi^2 Ca(z^2 + a^2)^{-1/2}, E_z(z) = 2\pi^2 Caz(a^2 + z^2)^{-3/2}.$$

2.21. Очень тонкий диск равномерно заряжен с поверхностной плотностью зарядов $\sigma > 0$. Найти напряженность \vec{E} электрического поля на оси этого диска в точке, из которой диск виден под телесным углом Ω .

2.22. Полубесконечная прямая равномерно заряженная нить имеет заряд λ на единицу длины. Найти модуль и направление напряженности поля в точке, которая отстоит от нити на расстоянии r и находится на перпендикуляре к нити, проходящем через ее конец.

Ответ:

$$E = \frac{\lambda\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

2.23. Имеется аксиально-симметричное поле, напряженность которого зависит только от расстояния r до его оси как $\vec{E} = a\vec{r}/r^2$, где a – постоянная. Найти заряд в объеме, ограниченном сферой радиусом R с центром на оси этого поля.

Ответ:

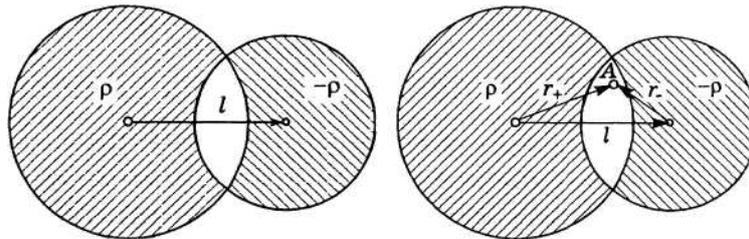
$$q = 4\pi\epsilon_0 R.$$

2.24. Система состоит из равномерно заряженной сферы радиусом R и окружающей среды, заполненной зарядом с объемной плотностью $\rho = \alpha/r$, где α – положительная постоянная, r – расстояние от центра сферы. Найти заряд сферы, при котором напряженность E электрического поля вне сферы не будет зависеть от r . Чему равно E ?

Ответ:

$$q = 2\pi\alpha^2 R, \quad E = \frac{\alpha}{2\epsilon_0}.$$

2.25. Найти напряженность \vec{E} электрического поля в области пересечения двух шаров, равномерно заряженных разноименными по знаку зарядами с объемной плотностью ρ и $-\rho$, если расстояние между центрами шаров определяется вектором \vec{l} .



Ответ:

$$\vec{E} = \rho\vec{l}/3\epsilon_0.$$

2.26. Потенциал некоторого электрического поля имеет вид $\varphi = \alpha(xy + z^2)$. Найти проекцию вектора \vec{E} на направление вектора $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k}$ в точке $M(2,1,-3)$.

Ответ:

$$E_a = -20\alpha.$$

2.27. Найти потенциал φ на краю тонкого диска, по одной стороне которого равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью σ . Радиус диска равен R .

Ответ:

$$\varphi = \frac{\sigma R}{\pi \varepsilon_0}.$$

2.28. Потенциал поля внутри заряженного шара зависит только от расстояния r до его центра по закону $\varphi = ar^2 + b$, где a и b – постоянные. Найти распределение объемного заряда $\rho(r)$ внутри шара.

Ответ:

$$\rho = -6\varepsilon_0 a.$$

2.29. Тонкое непроводящее кольцо радиусом R заряжено с линейной плотностью $\lambda = \lambda_0 \cos \theta$, где λ_0 – положительная постоянная, θ – азимутальный угол. Найти напряженность \vec{E} электрического поля в центре кольца.

Ответ:

$$E = \frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}$$

2.30. Доказать, что дипольный момент произвольного сферически симметричного распределения зарядов $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ равен нулю.

2.31. Доказать, что квадрупольный момент произвольного сферически симметричного распределения зарядов $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ равен нулю.

2.32. Доказать, что дипольный момент произвольного цилиндрически симметричного распределения зарядов $\rho(\vec{r}) = \rho(R, z)$ равен нулю.

2.33. Доказать, что квадрупольный момент произвольного цилиндрически симметричного распределения зарядов $\rho(\vec{r}) = \rho(R, z)$ не равен нулю.

2.34. Найти компоненты тензора квадрупольного момента для системы, заряд которой равномерно распределен с плотностью ρ_0 внутри эллипсоида вращения с полуосями a, b, c .

Ответ:

$$Q_{zz} = 3a^2 - (a^2 + b^2 + c^2), Q_{xx} = 0, Q_{yy} = 0, Q_{ik} = 0, i \neq k.$$

3. МАГНИТОСТАТИКА

Уравнения Максвелла для магнитостатики

Нет неподвижных зарядов: уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (3.2)$$

где \vec{j} – плотность тока, \vec{B} – вектор магнитной индукции. Т. к. $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, то \vec{B} можно представить в виде ротора от векторного потенциала \vec{A} :

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (3.3)$$

с компонентами:

$$\begin{aligned} B_x &= [\vec{\nabla}, \vec{A}]_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ B_y &= [\vec{\nabla}, \vec{A}]_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ B_z &= [\vec{\nabla}, \vec{A}]_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Вектор \vec{A} определён не однозначно: если к \vec{A} прибавить $\operatorname{grad} f$, где $f = f(\vec{r})$ – произвольная скалярная функция, то поле \vec{B} не изменится, т. к. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) \equiv 0$.

Для магнитостатики удобно выбрать векторный потенциал, удовлетворяющий условию (калибровка потенциалов для магнитостатики):

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (3.5)$$

В этом случае \vec{A} удовлетворяет уравнению:

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (3.6)$$

Векторное уравнение (3.6) эквивалентно трём скалярным:

$$\Delta A_x = -\mu_0 j_x, \quad \Delta A_y = -\mu_0 j_y, \quad \Delta A_z = -\mu_0 j_z.$$

Решение уравнения (3.6):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' \quad (3.7)$$

Закон Био–Савара–Лапласа:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{e}_r]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d\vec{r}', \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.8)$$

Примеры решения задач

Пример 1. Найти магнитное поле, описываемое векторными следующими векторными потенциалами:

$$\vec{A}_1 = \{0, A_0 \cdot x, 0\}, \quad \vec{A}_2 = \{-A_0 \cdot y, 0, 0\}, \quad \vec{A}_3 = \{-A_0 \cdot y/2, A_0 \cdot x/2, 0\}$$

Решение. Вектор магнитной индукции связан с векторным потенциалом следующим образом:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}.$$

Проводя вычисления, имеем:

$$\vec{B}_1 = \text{rot}\vec{A}_1 = A_0 \vec{k},$$

$$\vec{B}_2 = \text{rot}\vec{A}_2 = A_0 \vec{k}.$$

Так как вектор $\vec{A}_3 = \frac{1}{2}(\vec{A}_1 + \vec{A}_2)$ то $\vec{B}_3 = \text{rot}\vec{A}_3 = \frac{1}{2}(\text{rot}\vec{A}_1 + \text{rot}\vec{A}_2) = A_0 \vec{k}$.

Таким образом, все три векторных потенциала приводят к одному и тому же магнитному полю.

Пример 2. Доказать, что магнитное поле, описываемое векторным потенциалом $\vec{A} = \{B_0 z, y, z\}$, где $B_0 = \text{const}$, не имеет источников (докажите, что $\text{div}\vec{B} = 0$).

Решение. Вектор магнитной индукции связан с векторным потенциалом следующим образом:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} = -B_0 \vec{k},$$

$$\text{div}\vec{B} = 0.$$

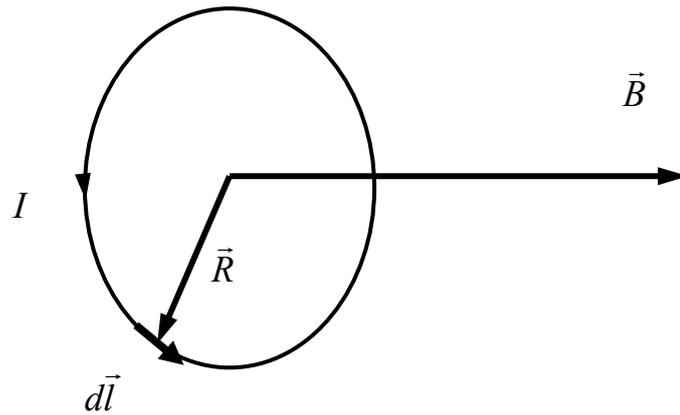
Что и требовалось доказать.

Пример 3. Найти магнитное поле в центре кругового витка с током. Радиус витка R сила тока I .

Решение. Согласно закону Био – Савара–Лапласа:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3},$$

здесь $d\vec{l}$ – участок с током создающий магнитное поле $d\vec{B}$, I – сила тока в проводнике, \vec{r} – вектор проведенный от участка $d\vec{l}$ (в нашем случае радиус \vec{R} проведенный из центра проводника до $d\vec{l}$) до точки наблюдения. В соответствии с правилами векторного произведения вектор \vec{B} выходит из центра витка с током и направлен перпендикулярно его плоскости (см. рис.)



Учитывая, что векторы \vec{R} и $d\vec{l}$ перпендикулярны, для модуля вектора магнитной индукции получаем

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{R^2}.$$

Проводя интегрирование по длине контура, находим:

$$\begin{aligned} B &= \int dB = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \int dl \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0}{4\pi} 2 \frac{I\pi R^2}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{R^3} \end{aligned}$$

Пример 4. Магнитное поле прямого провода. Найти векторный потенциал бесконечного прямого проводника, по которому течет ток I .

Решение. Используя векторный потенциал прямого тока,

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln b, \quad b = \sqrt{x^2 + y^2} -$$

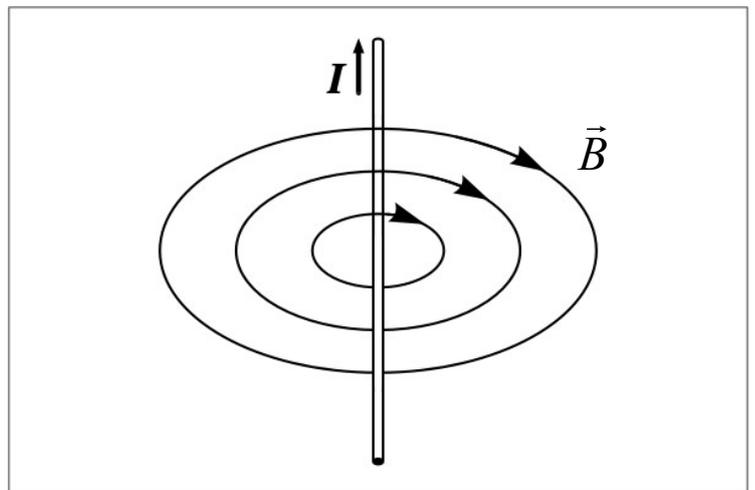
расстояние до проводника, вычисляем компоненты вектора \vec{B} по формулам (3.4):

$$B_x = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \ln b = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{y}{b^2};$$

$$B_y = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \ln b = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{x}{b^2}.$$

$$B_z = 0.$$

Модуль магнитной индукции



прямого тока:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{b}.$$

Силовые линии вектора магнитной индукции прямого тока представляют собой систему охватывающих проводник концентрических окружностей – поле \vec{B} обходит проводник по окружности.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Доказать, что магнитное поле, описываемое векторным потенциалом $\vec{A} = \{B_0 z, 0, 0\}$, где $B_0 = \text{const}$, не имеет источников (докажите, что $\text{div} \vec{B} = 0$).

3.2. Доказать, что магнитное поле, описываемое векторным потенциалом $\vec{A} = \{B_0 z^2, B_0 y, B_0 z\}$, где $B_0 = \text{const}$, не имеет источников (докажите, что $\text{div} \vec{B} = 0$).

3.3. Доказать, что магнитное поле, описываемое векторным потенциалом $\vec{A} = \{B_0 z^2, B_0 y^2, B_0 z^2\}$, где $B_0 = \text{const}$, не имеет источников (докажите, что $\text{div} \vec{B} = 0$).

3.4. Доказать, что магнитное поле, описываемое векторным потенциалом $\vec{A} = \{B_0 y^2, B_0 y^2, B_0 x^2\}$, где $B_0 = \text{const}$, не имеет источников (докажите, что $\text{div} \vec{B} = 0$).

3.5. Доказать, что магнитное поле, описываемое векторным потенциалом $\vec{A} = \{B_0 x^2, B_0 y, B_0 x\}$, где $B_0 = \text{const}$, не имеет источников (докажите, что $\text{div} \vec{B} = 0$).

3.6. Доказать, что магнитное поле, описываемое векторным потенциалом $\vec{A} = \{B_0 z^2, B_0 y^2, B_0 y^2\}$, где $B_0 = \text{const}$, не имеет источников (докажите, что $\text{div} \vec{B} = 0$).

3.7. Доказать, что магнитное поле, описываемое векторным потенциалом $\vec{A} = \{B_0 z^2, B_0 y^2, B_0\}$, где $B_0 = \text{const}$, не имеет источников (докажите, что $\text{div} \vec{B} = 0$).

3.8. Доказать, что магнитное поле прямолинейного проводника с током $B = \mu_0 I / (2\pi b)$, I – сила тока, b – расстояние от проводника с током до рассматриваемой точки, не имеет источников ($\text{div} \vec{B} = 0$).

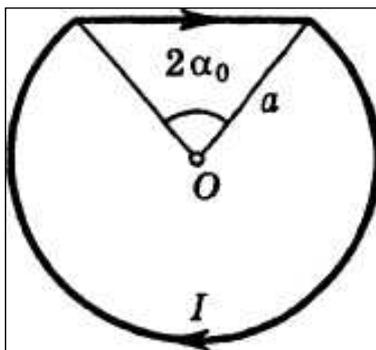
Указание: используя закон Био-Савара-Лапласа, запишите магнитную индукцию в векторной форме.

3.9. Найти магнитное поле создаваемое током плотностью $\vec{j} = \vec{e}_x j(y)$, $j(y) = j_0[1 + (y/L)^2]^{-1}$ ($j_0 = \text{const}$, $L = \text{const}$).

Ответ:

$$H_z = \frac{4\pi}{c} j_0 L \operatorname{arctg} \frac{y}{l}$$

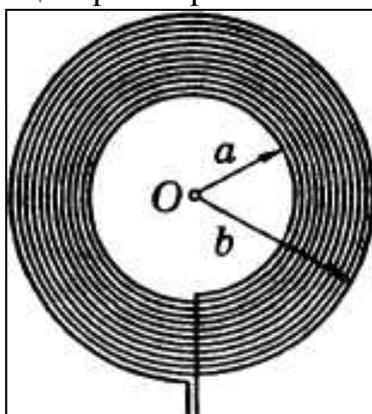
3.10. Ток I течет по тонкому проводнику, изогнутому, как показано на рис. Найти магнитную индукцию B в точке O . Необходимые данные указаны на рисунке.



Ответ:

$$B = (\pi - \alpha_0 + \operatorname{tg} \epsilon_0) \mu_0 I / 2\pi a.$$

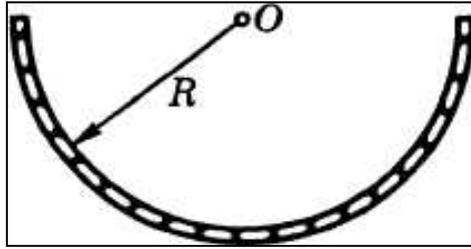
3.11. Тонкий провод с изоляцией образует плоскую спираль из большого числа N плотно расположенных витков, по которым течет постоянный ток I . Радиусы внутреннего и внешнего витков равны a и b . Найти магнитную индукцию B в центре спирали – точке O .



Ответ:

$$B = \frac{\pi I N}{3} (a^2 + ab + b^2).$$

3.12. Ток I течет по проводнику, имеющему форму желоба с поперечным сечением в виде тонкого полукольца радиусом R . Найти магнитную индукцию B на оси O .



Ответ:

$$B = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

3.13. Внутри однородного длинного прямого провода круглого сечения имеется круглая цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси провода и смещена относительно последней на расстояние \vec{l} . По проводу течет постоянный ток плотности \vec{j} . Найти магнитную индукцию B внутри полости.

Ответ:

$$\vec{B} = \mu_0 [\vec{j} \vec{l}] / 2.$$

3.14. Определить магнитную индукцию на оси кругового витка тока радиуса R , по которому течет ток I .

Ответ:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi^2} \frac{2\pi R^2 I}{(z^2 + R^2)^{3/2}},$$

z – расстояние от центра кругового витка до точки наблюдения.

3.15. Используя теорему о циркуляции вектора магнитной индукции, найти поле создаваемое бесконечно длинным проводником, по которому течет ток I .

Ответ:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r'},$$

r' – расстояние от проводника до точки наблюдения.

4. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ ВДОЛЬ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧ

Фазовая скорость электромагнитной волны:

$$v = c / \sqrt{\varepsilon\mu}, \quad (4.1)$$

где $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ – скорость света в вакууме, ε, μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные.

В бегущей электромагнитной волне напряженности электрического E и магнитного H полей связаны формулой:

$$E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0}. \quad (4.2)$$

Объемная плотность энергии электромагнитного поля:

$$w = \vec{E}\vec{D}/2 + \vec{B}\vec{H}/2, \quad (4.3)$$

где D, B – индукции электрического и магнитного полей.

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга:

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (4.4)$$

Примеры решения задач

Пример 1. Поток энергии в электромагнитной волне (в вакууме).

Вычислим энергию dW , проходящую за время dt через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

1-й вариант решения.

Величину dW можно представить через модуль вектора Пойнтинга:

$$dW = |\vec{S}|dt = |[\vec{E}, \vec{H}]|dt.$$

В плоской волне $\vec{E} \perp \vec{H}$, поэтому

$$dW = EHdt.$$

В бегущей волне $H = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}E$, поэтому

$$dW = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}E^2dt$$

2-й вариант решения.

Энергию, переносимую через площадку можно представить:

$$dW = wcdt,$$

где w – плотность энергии, $w = \varepsilon_0 E^2/2 + \mu_0 H^2/2$. Для электромагнитной волны $H^2 = E^2 \varepsilon_0/\mu_0$ и можно записать для плотности энергии

$$w = \varepsilon_0 E^2.$$

Тогда

$$dW = \varepsilon_0 E^2 c dt = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} E^2 dt.$$

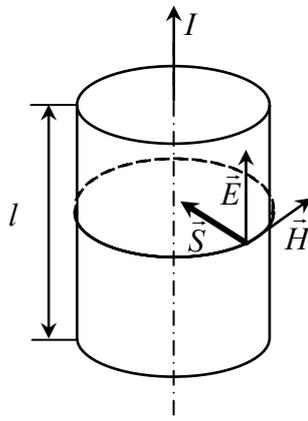
Таким образом, оба выражения – для w и \vec{S} – приводят к одинаковому результату.

Пример 2. Выделение теплоты в проводнике. Пусть по прямому проводу круглого сечения радиусом b течет ток I (рис.). Сопротивление участка проводника равно R . Определить поток электромагнитной энергии через боковую поверхность участка проводника длины l .

Решение. Так как провод обладает сопротивлением, то вдоль него действует электрическое поле \vec{E} .

$$E l = U,$$

где U – разность потенциалов на концах проводника.



Наличие тока порождает магнитное поле. По теореме о циркуляции вектора \vec{H} вблизи поверхности провода $2\pi b H = I$, $H = I/2\pi b$. Векторы \vec{E} и \vec{H} расположены так, что вектор Пойнтинга направлен внутрь провода нормально к его боковой поверхности (рис). Следовательно, электромагнитная энергия втекает внутрь провода из окружающего пространства. Согласуется ли это с количеством теплоты, выделяемым в проводнике? Подсчитаем поток электромагнитной энергии сквозь боковую поверхность участка провода длины l .

Модуль вектора Пойнтинга

$$S = \left| [\vec{E}, \vec{H}] \right| = EH = \frac{U}{l} \frac{I}{2\pi b} = \frac{I^2 R}{l 2\pi b},$$

где учтено, что U – это разность потенциалов на концах данного участка, R – его сопротивление.

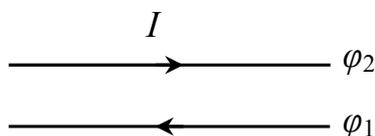
Модуль вектора Пойнтинга будет постоянным на поверхности проводника, поэтому поток энергии можно выразить как произведение S на площадь боковой поверхности проводника:

$$S \cdot l 2\pi b = \frac{I^2 R}{l 2\pi b} \cdot l 2\pi b = I^2 R$$

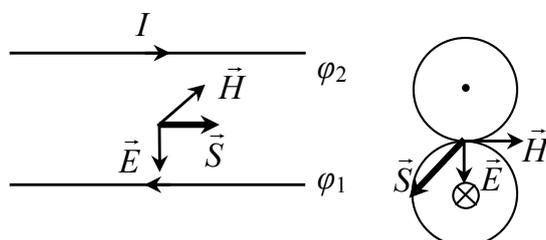
Таким образом, мы приходим к тому, что **поток электромагнитной энергии поступает в провод извне и целиком превращается в джоулеву теплоту.**

Заметим, что в источнике тока вектор \vec{E} направлен против тока I , поэтому в области источника вектор Пойнтинга направлен наружу: там электромагнитная энергия выходит в окружающее пространство. **Энергия от источника тока передается не вдоль проводов, а через окружающее проводник пространство в виде потока электромагнитной энергии – потока вектора \vec{S} .**

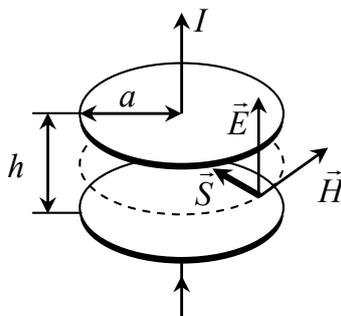
Пример 3. На рис. показан участок двухпроводной линии. Известны направление тока в проводах и тот факт, что потенциалы проводов $\varphi_1 < \varphi_2$. С помощью вектора Пойнтинга установить, где находится источник тока (генератор), слева или справа?



Решение. В нашем случае между проводами вектор \vec{E} направлен вниз (вектор \vec{E} направлен в сторону уменьшения потенциала). Вектор \vec{H} – за плоскость рисунка, поэтому вектор $\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$ направлен вправо, т. е. источник тока находится слева, потребитель – справа.



Пример 4. Зарядка конденсатора. Дан плоский конденсатор с круглыми обкладками радиусом a . Пренебрегая краевыми эффектами (рассеянием поля), найти поток электромагнитной энергии сквозь боковую «поверхность» конденсатора.



Решение. На боковой поверхности есть меняющееся электрическое поле \vec{E} и вызванное его изменением магнитное поле \vec{H} .

По теореме о циркуляции вектора \vec{H}

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I = \int \vec{j} d\vec{s},$$

где \vec{j} – вектор плотности тока. Контур, по которому проходит интегрирование показан на рисунке пунктиром. При зарядке конденсатора плотность тока равна плотности тока смещения $\vec{j} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (\vec{D} – индукция электрического поля). Поэтому получаем

$$2\pi a H = \pi a^2 \frac{\partial D}{\partial t}.$$

Отсюда

$$H = \frac{1}{2} a \frac{\partial D}{\partial t}.$$

Направление вектор Пойнтинга на боковой поверхности конденсатора показано на рисунке. Поток вектора \vec{S} сквозь боковую поверхность есть

$$\int_{\Sigma} \vec{S} d\vec{s} = \int_{\Sigma} S ds = S \int_{\Sigma} ds = EH \cdot 2\pi ha = E2\pi ha \frac{1}{2} a \frac{\partial D}{\partial t} = E\pi ha^2 \frac{\partial D}{\partial t} = EV \frac{\partial D}{\partial t}$$

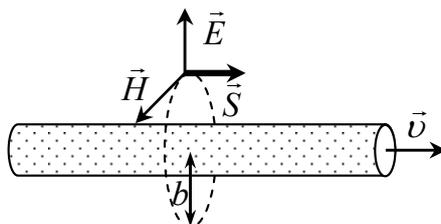
где $V = \pi a^2 h$ – объем конденсатора. Будем считать, что этот поток идет целиком на увеличение энергии конденсатора. Тогда, умножив поток на dt , получим приращение энергии конденсатора за время dt :

$$dW = VE dD; \quad dD = \varepsilon_0 dE; \quad dW = VE \varepsilon_0 dE = d\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V\right).$$

Проинтегрировав это выражение, найдем формулу для энергии электростатического поля в объеме конденсатора:

$$W = \int_0^T dW = \int_0^T d\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V\right) = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V.$$

Пример 5. Вектор Пойнтинга. Найти вектор Пойнтинга на расстоянии b от пучка протонов, движущихся со скоростью v и образующих ток I круглого сечения.



Решение. Вектор \vec{E} перпендикулярен оси проводника (пучок частиц подобен бесконечной заряженной нити). Вектор \vec{H} направлен по касательной к окружности, центр которой совпадает с центром пучка. Поэтому вектор Пойнтинга $\vec{S} \uparrow\uparrow \vec{v}$. Модуль вектора \vec{S} : $S = E H$. По теореме Гаусса

$$2\pi b l E = q / \varepsilon_0$$

где q – заряд на участке пучка длиной l , $q = \lambda l$, λ – линейная плотность заряда,

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 b}.$$

По теореме о циркуляции для вектора \vec{H}

$$2\pi b H = I.$$

Силу тока можно представить в виде $I = \lambda v$. Тогда получим

$$S = EH = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 b} \frac{I}{2\pi b} = \left(\frac{I}{2\pi b}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon_0 v}.$$

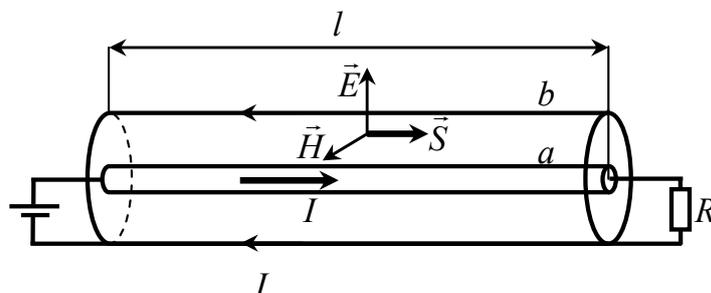
Пример 6. Движение электромагнитной энергии вдоль коаксиальной линии. Энергия от источника постоянного напряжения U передается к потребителю по длинному коаксиальному кабелю с пренебрежимо малым сопротивлением. Ток в кабеле равен I . Найти поток энергии через поперечное сечение кабеля. Внешняя проводящая оболочка кабеля тонкостенная.

Решение. Поток энергии определяется формулой

$$\Phi = \int_a^b S \cdot 2\pi r dr,$$

где, a и b – радиусы внутреннего провода и внешней оболочки кабеля (рис.), $2\pi r dr$ – элементарное кольцо шириной dr , в пределах которого S постоянен.

$$S = E(r) H(r)$$



С помощью теоремы Гаусса находим $E(r)$.

$$2\pi r l E(r) = q / \varepsilon_0,$$

$q = \lambda l$, где λ – заряд провода на единицу длины.

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Далее, по теореме о циркуляции

$$2\pi r H(r) = I.$$

После подстановки E и H в выражение для S получим

$$S(r) = E(r)H(r) = \frac{1}{(2\pi r)^2} \frac{I\lambda}{\varepsilon_0}.$$

Интегрируем

$$\Phi = \int_a^b \frac{1}{(2\pi r)^2} \frac{I\lambda}{\varepsilon_0} \cdot 2\pi r dr = \frac{I\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{I\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

Найдем связь между величинами U , λ , a и b . По определению

$$U = \int_a^b E(r) dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

Из сравнения формул для U и Φ находим

$$\Phi = UI.$$

Это выражение совпадает с мощностью, выделяемой на нагрузке. **Поток энергии ЭМП через поперечное сечение коаксиального кабеля равно мощности, выделяемой на нагрузке.**

Пример 7. Конденсатор в цепи переменного тока. Плоский воздушный конденсатор, пластины которого имеют форму дисков подключен к источнику напряжения $U = U_m \cos \omega t$. Найти отношение максимальных значений магнитной и электрической энергии внутри конденсатора. Радиус обкладок $a = b$ см, частота источника 1000 с^{-1} .

Решение. Пусть расстояние между обкладками конденсатора равно h . Энергия электрического поля в конденсаторе

$$W_{\text{э}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \pi a^2 h = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2 h}{2} \left(\frac{U}{h}\right)^2 = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{2h} U_m^2 \cos^2 \omega t.$$

Магнитная энергия: $W_M = \int \frac{B^2}{2\mu_0} dV$.

В найдем из теоремы о циркуляции вектора \vec{H} : $2\pi r H = \pi r^2 \frac{\partial D}{\partial t}$.

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0}{h} \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\varepsilon_0 \omega}{h} U_m \sin \omega t,$$

$$B = \mu_0 H = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \mu_0 \frac{r \omega U_m}{h} \sin \omega t.$$

При интегрировании W_M в качестве элементарного объема dV нужно взять кольцо радиусом r : $dV = 2\pi r dr h$.

$$W_M = \frac{1}{2\mu_0} \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\omega U_m}{2h} \sin \omega t \right)^2 2\pi h \int_0^a r^3 dr = \frac{1}{2\mu_0} \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\omega U_m}{2h} \sin \omega t \right)^2 2\pi h \frac{a^4}{4},$$

$$W_M = \frac{\pi \mu_0 \varepsilon_0^2 \omega^2 a^4 U_m^2 \sin^2 \omega t}{16 h}.$$

Отношение максимальных значений магнитной энергии и электрической

$$\eta = \frac{(W_M)_{\max}}{(W_E)_{\max}} = \frac{\frac{\pi \mu_0 \varepsilon_0^2 \omega^2 a^4 U_m^2}{16 h}}{\frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{2h} U_m^2} = \frac{1}{8} (\mu_0 \varepsilon_0) a^2 \omega^2.$$

Численное значение $\eta = 5 \cdot 10^{-15}$.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Плоская гармоническая электромагнитная волна падает по нормали на абсолютно поглощающую площадку площадью $0,70 \text{ м}^2$. Вычислите амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей в волне, если на площадке превращается во внутреннюю энергию в единицу времени $0,42 \text{ Дж/с}$.

Ответ:

$$E_m = 15 \text{ В/м}; H_m = 4,0 \cdot 10^{-2} \text{ А/м}.$$

4.2. Плоская монохроматическая электромагнитная волна, распространяющаяся в вакууме с амплитудным значением напряженности электрического поля $2 \cdot 10^{-4} \text{ В/м}$, падает на площадку площадью $0,4 \text{ м}^2$. Угол падения 60° . Вычислите модуль вектора Пойнтинга для этой волны и поток энергии через площадку.

Ответ:

$$S = 50 \text{ нВт/м}^2; \Phi = 10 \text{ нВт}.$$

4.3. Выразите модуль напряженности E электрического поля плоской электромагнитной волны через модуль S вектора Пойнтинга. Параметры среды (ε, μ) известны.

Ответ:

$$E = S^{1/2} (\mu \mu_0 / \varepsilon \varepsilon_0)^{1/4}.$$

4.4. Пучок электронов, двигающихся с постоянной скоростью v , имеет круглое сечение. Пучок движущихся заряженных частиц можно характеризовать силой тока I . Определите направление и модуль вектора Пойнтинга вне пучка на расстоянии r от оси пучка.

Ответ:

Вектор \vec{S} направлен по току. $S = I^2 / (4 \pi^2 \epsilon_0 v r^2)$.

4.5. Частица с зарядом Q движется в вакууме равномерно со скоростью v , значительно меньшей скорости света. Определите модуль и направление вектора Пойнтинга на расстоянии r от частицы.

Ответ:

$$S = (Q^2 v \sin \varphi) / (16 \pi^2 r^4 \epsilon_0).$$

Здесь φ – угол между направлением движения частицы и радиус-вектором \vec{r} .

4.6. Электрический диполь, с моментом p , движется равномерно со скоростью v вдоль линии, совпадающей с осью диполя. Определите модуль вектора Пойнтинга в любой точке на расстоянии r от середины оси диполя.

Ответ:

$$E = p (3 \cos^2 \varphi + 1)^{1/2} / (4 \pi \epsilon_0 r^3);$$

$$H = (p v \sin 2\varphi) / (4 \pi r^3);$$

$$S = [p^2 v (3 \cos^2 \varphi + 1)^{1/2} \sin 2\varphi] / (16 \pi^2 \epsilon_0 r^6).$$

Здесь φ – угол между осью диполя и направлением в точку наблюдения.

4.7. Заряженная частица движется вдоль оси Y по закону $y = a \sin \omega t$. Точка наблюдения находится на оси X на расстоянии l от частицы ($l \gg a$). Найти отношение плотностей потока электромагнитного излучения S_1 / S_2 в точке P в моменты, когда координата частицы равна 0, a . Вычислить это соотношение, если $\omega = 1,01 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ и $l = 100 \text{ м}$.

Ответ:

$$S_1 / S_2 = \text{tg}^2 (\omega l / c) = 3,1.$$

4.8. Протоны, имеющие одинаковую скорость v , образуют пучок круглого сечения с током I . Найти направление и модуль вектора Пойнтинга \vec{S} вне пучка на расстоянии r от его оси.

Ответ:

$$S = I^2 / 4 \pi^2 \epsilon_0 r^2 v.$$

4.9. Нерелятивистские протоны, ускоренные разностью потенциалов U , образуют пучок круглого сечения с током I . Найти модуль и направление вектора Пойнтинга вне пучка на расстоянии r от его оси.

Ответ:

$$S = \sqrt{m / 2eU} (I^2 / 4 \pi^2 \epsilon_0 r^2).$$

4.10. Цилиндрический электронный пучок с концентрацией n_e и продольной скоростью электронов v проходит сквозь газ положительных неподвижных ионов с концентрацией, подобранной таким образом, чтобы скомпенсировать силы взаимодействия электронов в поперечном направлении. Найти величину и направление вектора Пойнтинга внутри пучка, а также концентрацию ионов n_i .

Ответ:

$$n_i = n_e \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right); S = \pi (n_e e r)^2 \frac{v^3}{c^2}.$$

4.11. Цилиндрический электронный пучок радиусом R распространяется в свободном пространстве. Электроны пучка летят параллельно, их энергия W , а концентрация n . Найти величину и направление вектора Пойнтинга в любой точке пространства.

Ответ:

$$\text{Вне пучка } S_{ex} = \frac{\pi R^4 (ne)^2}{r^2} \sqrt{\frac{2W}{m}}; \text{ внутри пучка } S_{in} = \pi r^2 (ne)^2 \sqrt{\frac{2W}{m}}.$$

4.12. В свободном пространстве распространяется электронный пучок «ножевой» геометрии, т. е. имеющий вид тонкого плоского слоя; скорость электронов лежит в плоскости слоя. Толщина пучка $2a$, энергия электронов W , концентрация их n . Считая, что все электроны летят параллельно, найти вектор Пойнтинга в произвольной точке пространства.

Ответ:

$$\text{Вне плоского слоя } S_{ex} = 4\pi (nea)^2 \sqrt{\frac{2W}{m}};$$

внутри плоского слоя на расстоянии x от центрального сечения

$$S_{in} = 4\pi (ne)^2 \sqrt{\frac{2W}{m}} x^2.$$

4.13. Энергия от источника постоянного напряжения U передается потребителю по длинному коаксиальному кабелю с сопротивлением нагрузки R . Сила тока в кабеле I , a и b – радиусы внутренней и наружной жил коаксиального кабеля, соответственно. Определите максимальную S_{\max} и минимальную S_{\min} плотности потока энергии в кабеле. Сопротивлением кабеля пренебречь. Приняв $a = 0,75$ см, $b = 2,0$ см, $U = 35$ кВ, $I = 4,0 \cdot 10^2$ А, рассчитайте максимальную плотность потока энергии в кабеле.

Ответ:

На расстоянии $a < r < b$ от оси внутренней жилы $S = UI / [2\pi r^2 \ln(b/a)]$.

Обычно $b/a = e$, тогда $S_{\max} = UI / (2\pi a^2)$; $S_{\min} = UI / (2\pi b^2)$;

$$S_{\max} / S_{\min} = (b/a)^2 = e^2 \approx 7,4;$$

$$S_{\max} \approx 4,0 \cdot 10^3 \text{ кВт/см}^2.$$

4.14. Двухпроводная линия образована двумя параллельными проводниками круглого сечения. Диаметр проводников $2r$, расстояние между их осями $2h$. Потребителю по линии передается мощность $P = UI$. Определите плотность потока энергии электромагнитного поля в точках между проводниками на линии, проходящей через центры проводников. Определите также максимальную и минимальную плотности потока энергии. Сопротивлением проводников можно пренебречь.

4.15. Двухпроводная линия представляет собой две параллельные шины прямоугольного сечения. Расстояние между шинами a , ширина шин b , причем $b \gg a$. Покажите, что передаваемая потребителю мощность $P = UI$ равна потоку электромагнитной энергии в пространстве между шинами. Замечание: электрическим и магнитным полями вне шин можно пренебречь.

4.16. По прямому проводу, обладающему сопротивлением, идет постоянный ток. 1) Указать для произвольной точки боковой поверхности провода направление составляющей вектора Пойнтинга \vec{S} , обусловленной тангенциальной составляющей \vec{E} . 2) Показать, что произведение модуля вектора Пойнтинга на величину боковой поверхности провода равно мощности, выделяемой током в проводе.

4.17. Имеется двухпроводная линия из идеального проводника (без тепловых потерь). Одна пара концов линии присоединена к генератору постоянного тока, другая – к некоторому сопротивлению (нагрузке). Показать, что если падение напряжения в проводах не учитывать, то вектор потока энергии (вектор Пойнтинга) \vec{S} в пространстве между проводами направлен вдоль проводов от генератора к нагрузке. Как изменится картина, если учесть сопротивление проводов?

4.18. Двухпроводная линия из задачи 4.17 присоединена с одного конца к генератору синусоидального тока. Напряжение и сила тока в линии находятся в одной и той же фазе. Показать, что вектор Пойнтинга \vec{S} в пространстве между проводами всегда направлен от генератора к нагрузке.

4.19. В двухпроводной линии из задачи 4.17 ток отстает по фазе от напряжения на $\pi/2$. Показать, что вектор Пойнтинга \vec{S} через каждую четверть периода меняет свое направление на обратное и, следовательно, поток энергии за период равен нулю (стоячая волна).

4.20. Показать, что на границе раздела двух сред нормальные составляющие вектора Пойнтинга не терпят разрыва, т.е. $S_{1n} = S_{2n}$.

4.21. Найти средний вектор Пойнтинга $\langle \vec{S} \rangle$ для плоской электромагнитной волны $\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$, если волна распространяется в вакууме.

Ответ:

$$\langle \vec{S} \rangle = \vec{k} \varepsilon_0 c^2 E_m^2 / 2\omega.$$

4.22. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, частота которой $\nu=100$ МГц и амплитуда электрической составляющей $E_m=50$ мВ/м. Найти среднее за период значение плотности потока энергии.

Ответ:

$$\langle S \rangle = \varepsilon_0 c E_m^2 / 2 = 3,3 \text{ мкВт/м}^2.$$

4.23. В вакууме распространяются две одинаково поляризованные электромагнитные волны, электрические составляющие которых изменяются по закону

$$E_1 = E_0 \cos(\omega t - kx) \text{ и } E_2 = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi).$$

Найти среднее значение плотности потока энергии.

Ответ:

$$\langle S \rangle = \varepsilon_0 c E_0^2 (1 + \cos \varphi).$$

4.24. В вакууме распространяются две плоские электромагнитные волны, одна вдоль оси X другая вдоль оси Y :

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx) \text{ и } \vec{E}_2 = \vec{E}_0 \cos(\omega t - ky),$$

где вектор \vec{E}_0 направлен параллельно оси Z . Найти среднее значение плотности потока энергии в точках плоскости $y=x$.

Ответ:

$$\langle S \rangle = \sqrt{2} \varepsilon_0 c E_0^2.$$

4.25. В вакууме вдоль оси X установилась стоячая электромагнитная волна $\vec{E} = \vec{E}_m \cos kx \cdot \cos \omega t$. Найти проекцию вектора Пойнтинга на ось X $S_x(x, t)$ и ее среднее за период колебаний значение.

Ответ:

$$S_x = (\varepsilon_0 c E_m^2 / 4) \sin 2kx \cdot \sin 2\omega t; \langle S_x \rangle = 0.$$

4.26. Ток, протекающий по обмотке длинного прямого соленоида, достаточно медленно увеличивают. Показать, что скорость возрастания энергии магнитного поля в соленоиде равна потоку вектора Пойнтинга через его боковую поверхность.

4.27. По участку с сопротивлением R прямого проводника цилиндрической формы течет (вдоль оси цилиндра) ток силой I . Найти поток электромагнитной энергии внутрь проводника.

Ответ:

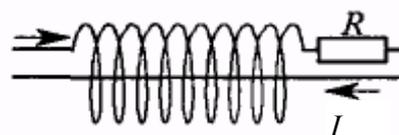
$$\Phi = I^2 R.$$

Генератор переменного напряжения $U=U_0\cos\omega t$ передает энергию потребителю по длинному прямому коаксиальному кабелю с пренебрежимо малым активным сопротивлением. Ток в цепи изменяется по закону $I=I_0\cos(\omega t-\varphi)$. Найти средний по времени поток энергии через поперечное сечение кабеля. Внешняя оболочка кабеля тонкостенная.

Ответ:

$$\langle \Phi \rangle = (U_0 I_0 / 2) \cos \varphi.$$

4.29. Постоянный ток I течет по цепи, состоящей из резистора сопротивлением R и длинной катушки радиусом r_2 и плотностью намотки витков n [см⁻¹] и соосного с катушкой прямого провода радиусом r_1 (рис.). Пренебрегая сопротивлением катушки и провода, найти аксиальную S_z и азимутальную S_φ компоненты вектора Пойнтинга внутри катушки вдали от ее торцов. Вычислить поток энергии через сечение катушки.



Ответ:

$$S_z = \frac{I^2 R}{2\pi r^2 \ln(r_2/r_1)}; \quad S_\varphi = \frac{I^2 R n}{r \ln(r_2/r_1)};$$

поток энергии через сечение катушки направлен в сторону резистора и равен $W=I^2 R$.

4.30. Длинный соленоид (длина l , радиус r , число витков N) подключается к источнику постоянной ЭДС \mathcal{E} через сопротивление R (сопротивлением соленоида можно пренебречь). Найти электромагнитную энергию, втекающую в соленоид за время установления тока, и сравнить ее с магнитной энергией соленоида $LI^2/2$ (L – индуктивность соленоида).

Ответ:

$$W = \frac{\mu_0 N^2 \varepsilon^2 \pi r^2}{2lR^2}.$$

4.31. *Конденсатор, состоящий из двух одинаковых дисков радиусом a , расположенных на расстоянии d друг от друга, заполнен диэлектриком с проницаемостью ε и заряжен до напряжения U_0 . Затем конденсатор начинает разряжаться через внешнее сопротивление R . Пренебрегая краевыми эффектами, найти вектор Пойнтинга в конденсаторе как функцию расстояния r от оси и времени t . Найти полную электромагнитную энергию W , вытекающую через боковую поверхность конденсатора за все время разряда.

Ответ:

$$S(r, t) = \frac{U_0^2 r}{2\pi a^2 d R} e^{-2t/RC}; \quad W = \frac{C U_0^2}{2}, \text{ где } C \text{ – емкость конденсатора.}$$

4.32. Плоский конденсатор, состоящий из двух одинаковых соосных дисков, подключен к источнику постоянной ЭДС \mathcal{E} . В момент $t = 0$ расстояние d_0 между дисками начинает увеличиваться по некоторому закону $d(t)$. Найти вектор Пойнтинга \vec{S} и электромагнитную энергию $W(r, t)$, переносимую через цилиндрическую поверхность радиусом r , расположенную внутри конденсатора вокруг оси, как функцию времени. Расстояние d между пластинами конденсатора остается все время малым по сравнению с радиусом пластины.

Ответ:

$$S = \frac{\varepsilon^2 r}{8\pi} \frac{\dot{d}}{d^3}; \quad W(r, t) = \frac{\varepsilon^2 r^2}{4} \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d(t)} \right).$$

4.33. По проводнику, имеющему форму плоской ленты, течет ток с плотностью j . Носителями тока являются электроны с концентрацией n . Найти величину и направление вектора Пойнтинга в произвольной точке внутри проводника. Считать толщину ленты много меньше ее ширины, сопротивление не учитывать ($\mu \approx 1$).

Ответ:

$$\vec{S} = -\frac{4\pi}{nc^2} j^2 y^2 \vec{j}, \quad \text{где } y - \text{расстояние от центрального}$$

сечения до точки наблюдения.

4.34. В соленоиде индуктивностью L ток возрастает по закону $I = \alpha t$, где α – известная константа. Определить вектор Пойнтинга внутри соленоида. Определить полный поток Φ_S вектора Пойнтинга \vec{S} через сферическую поверхность, центр которой лежит на оси соленоида вдали от его торцов, через время $t = 1$ с после начала процесса. Радиус R поверхности меньше радиуса соленоида. Рассеянием поля на торцах соленоида пренебречь, $\varepsilon = \mu = 1$.

Ответ:

$$S = \frac{L}{2c^2 V} r \alpha^2 t; \quad \Phi_S = \frac{4\pi}{3c^2} R^3 \frac{L}{V} \alpha^2,$$

V – объем соленоида.

4.35. Внутри плоского конденсатора, образованного двумя круглыми дисками, расположенными на расстоянии d друг от друга, мысленно выделена замкнутая цилиндрическая поверхность радиусом R ($2R < d$) и длиной L (L меньше диаметра пластин конденсатора). Ось цилиндра перпендикулярна оси симметрии конденсатора. Напряжение на конденсаторе изменяется по линейному закону $U = At$, где A – известная константа. Определить вектор Пойнтинга внутри конденсатора. Определить полный поток Φ_S вектора Пойнтинга \vec{S} через цилиндрическую поверхность через время $t = 1$ с после начала процесса.

Ответ:

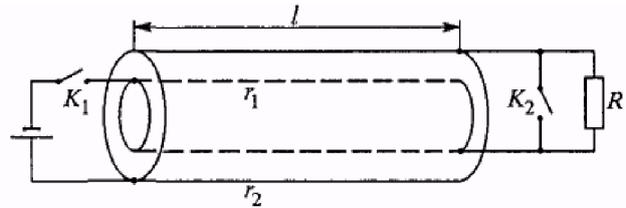
$$S = \frac{A^2 r}{8\pi d^2} t; \Phi_S = \frac{R^2 L}{4d^2} A^2.$$

4.36. Оболочка и центральный проводник длинного отрезка коаксиального кабеля, замкнутого с торцов, изготовлены из разных сверхпроводников. Вначале по кабелю циркулирует ток I_0 . Затем температуру повышают так, что внутренний сверхпроводник переходит в нормальное состояние. Сверхпроводимость же оболочки при этом сохраняется. Определить вектор Пойнтинга и электромагнитную энергию, перенесенную за время затухания тока, на единицу длины кабеля. Радиус оболочки R_0 , центрального проводника r_0 . Считать скорость изменения тока dI/dt известной.

Ответ:

$$S = \frac{I}{\pi c^2 r} \frac{dI}{dt} \ln(R_0 / r); W(r_0) = \frac{I_0^2}{c^2} \ln(R_0 / r_0).$$

4.37. *Источник постоянного тока нагружен на сопротивление $R = 60$ Ом. Сопротивление и источник соединены через коаксиальную линию, длина которой $l \gg r_1, r_2$. В некоторый момент времени ключ K_1 отключает линию от источника и одновременно K_2 замыкает накоротко нагрузку (рис.). Полагая все сопротивления, кроме R , пренебрежимо малыми, а величины ЭДС, l, r_1 заданными, определить, при какой величине r_2 энергия, излученная линией после срабатывания ключей, будет минимальной.



Ответ:

Энергия минимальна при $r_2 / r_1 = e = 2,718$.

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОЛЕЙ. ИНВАРИАНТЫ

Законы преобразования полей при переходе из инерциальной системы K в K'

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & B'_x &= B_x, \\ E'_y &= \gamma(E_y - vB_z), & B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right), \\ E'_z &= \gamma(E_z + vB_y), & B'_z &= \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где E_i – составляющая вектора напряженности электрического поля в системе K , B_i – составляющая вектора индукции магнитного поля в системе K , $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, v – скорость движения системы K' относительно

K (предполагается, что оси координат X и X' параллельны вектору \vec{v} , оси Y и Y' параллельны друг другу).

Запись, использующая продольные и поперечные (по отношению к вектору \vec{v}) составляющие векторов \vec{E} и \vec{B}

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, & \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel}, \\ \vec{E}'_{\perp} &= \gamma\left\{\vec{E}_{\perp} + [\vec{v}, \vec{B}_{\perp}]\right\}_{\perp}, & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma\left\{\vec{B}_{\perp} - \frac{[\vec{v}, \vec{E}_{\perp}]}{c^2}\right\}_{\perp}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Нерелятивистский случай, $v \ll c$

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}], & \vec{B}' &= \vec{B} - \frac{[\vec{v}, \vec{E}]}{c^2}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Инварианты электромагнитного поля

$$\begin{aligned} (\vec{E}, \vec{B}) &= inv, \\ E^2 - c^2 B^2 &= inv. \end{aligned}$$

Примеры решения задач

Пример 1. Доказать равенство

$$(\vec{E}, \vec{B}) = inv.$$

Решение. Разложим векторы на составляющие, перпендикулярные и параллельные вектору скорости \vec{v} .

Система K : $(\vec{E}, \vec{B}) = (\vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp})(\vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}) = (\vec{E}_{\parallel}, \vec{B}_{\parallel}) + (\vec{E}_{\perp}, \vec{B}_{\perp})$.

Система K' : $(\vec{E}', \vec{B}') = (\vec{E}'_{\parallel} + \vec{E}'_{\perp})(\vec{B}'_{\parallel} + \vec{B}'_{\perp}) = (\vec{E}'_{\parallel}, \vec{B}'_{\parallel}) + (\vec{E}'_{\perp}, \vec{B}'_{\perp})$.

Согласно формулам преобразования полей

$$\begin{aligned}
 (\vec{E}'_{\parallel}, \vec{B}'_{\parallel}) &= (\vec{E}_{\parallel}, \vec{B}_{\parallel}). \\
 (\vec{E}'_{\perp}, \vec{B}'_{\perp}) &= \gamma \left\{ \vec{E}_{\perp} + [\vec{v}, \vec{B}_{\perp}] \right\} \gamma \left\{ \vec{B}_{\perp} - \frac{[\vec{v}, \vec{E}_{\perp}]}{c^2} \right\} = \\
 &= \gamma^2 \left\{ \vec{E}_{\perp} \vec{B}_{\perp} - \cancel{\vec{E}_{\perp} \frac{[\vec{v}, \vec{E}_{\perp}]}{c^2}} + \cancel{[\vec{v}, \vec{B}_{\perp}] \vec{B}_{\perp}} - \frac{[\vec{v}, \vec{B}_{\perp}][\vec{v}, \vec{E}_{\perp}]}{c^2} \right\} = \\
 &= \gamma^2 \left\{ \vec{E}_{\perp} \vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{E}_{\perp} \vec{B}_{\perp} v^2}{c^2} \right\} = \gamma^2 \vec{E}_{\perp} \vec{B}_{\perp} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = (\vec{E}_{\perp}, \vec{B}_{\perp}).
 \end{aligned}$$

Из этого следует, что $(\vec{E}, \vec{B}) = inv$.

Пример 2. Доказать равенство

$$E^2 - c^2 B^2 = inv.$$

Решение. Разложим векторы на составляющие, перпендикулярные и параллельные вектору скорости \vec{v} .

$$\text{Система } K: E^2 = E_{\perp}^2 + E_{\parallel}^2, \quad B^2 = B_{\perp}^2 + B_{\parallel}^2.$$

$$E^2 - c^2 B^2 = (E_{\perp}^2 - c^2 B_{\perp}^2) + (E_{\parallel}^2 - c^2 B_{\parallel}^2).$$

$$\text{Система } K': E'^2 - c^2 B'^2 = (E'_{\perp}{}^2 - c^2 B'_{\perp}{}^2) + (E'_{\parallel}{}^2 - c^2 B'_{\parallel}{}^2).$$

Второе слагаемое равенства можно записать в виде:

$$E'_{\parallel}{}^2 - c^2 B'_{\parallel}{}^2 = E_{\parallel}^2 - c^2 B_{\parallel}^2.$$

$$\begin{aligned}
 E'_{\perp}{}^2 &= \gamma^2 \{ \vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}] \}_{\perp}^2 = \gamma^2 \{ E^2 + 2\vec{E}[\vec{v}, \vec{B}] + [\vec{v}, \vec{B}]^2 \}_{\perp} = \\
 &= \gamma^2 \{ E_{\perp}^2 + 2\vec{E}_{\perp}[\vec{v}, \vec{B}_{\perp}] + v^2 B_{\perp}^2 \}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B'_{\perp}{}^2 &= \gamma^2 \left\{ \vec{B} - \frac{[\vec{v}, \vec{E}]}{c^2} \right\}_{\perp}^2 = \gamma^2 \left\{ B^2 - 2\vec{B} \frac{[\vec{v}, \vec{E}]}{c^2} + \left(\frac{[\vec{v}, \vec{E}]}{c^2} \right)^2 \right\}_{\perp} = \\
 &= \gamma^2 \left\{ B_{\perp}^2 - 2 \frac{\vec{B}_{\perp}[\vec{v}, \vec{E}_{\perp}]}{c^2} + \frac{v^2 E_{\perp}^2}{c^4} \right\}.
 \end{aligned}$$

$$E'_{\perp}{}^2 - c^2 B'_{\perp}{}^2 = \gamma^2 \left\{ E_{\perp}^2 + 2\vec{E}_{\perp}[\vec{v}, \vec{B}_{\perp}] + v^2 B_{\perp}^2 - c^2 B_{\perp}^2 + 2\vec{B}_{\perp}[\vec{v}, \vec{E}_{\perp}] - \frac{v^2 E_{\perp}^2}{c^2} \right\}.$$

Используем свойства векторного произведения $\vec{a}[\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}]\vec{c}$,

$$\vec{E}_{\perp}[\vec{v}, \vec{B}_{\perp}] = [\vec{E}_{\perp}, \vec{v}]\vec{B}_{\perp} = -[\vec{v}, \vec{E}_{\perp}]\vec{B}_{\perp} = -\vec{B}_{\perp}[\vec{v}, \vec{E}_{\perp}].$$

Тогда после подстановки получим

$$\begin{aligned}
E_{\perp}'^2 - c^2 B_{\perp}'^2 &= \gamma^2 \left\{ E_{\perp}^2 + v^2 B_{\perp}^2 - c^2 B_{\perp}^2 - \frac{v^2 E_{\perp}^2}{c^2} \right\} = \\
&= \gamma^2 \left\{ E_{\perp}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - c^2 B_{\perp}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right\} = \\
&= \left| \text{т.к.} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{1}{\gamma^2} \right| = E_{\perp}^2 - c^2 B_{\perp}^2.
\end{aligned}$$

Из этого следует, что $E^2 - c^2 B^2 = \text{inv}$.

Пример 3. В инерциальной системе K есть только электрическое поле напряженностью $\vec{E} = a \frac{(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)}{x^2 + y^2}$, $a = \text{const}$. Найдите \vec{B}' в K' системе, если она движется с нерелятивистской скоростью $\vec{v} = v\vec{e}_z$ относительно K . Оси Z и Z' совпадают. Какой вид имеет поле \vec{B}' ?

Решение. Используем формулу преобразования полей в нерелятивистском случае (5.3)

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{[\vec{v}, \vec{E}]}{c^2} = -\frac{[\vec{v}, \vec{E}]}{c^2} \quad (\vec{B} = 0).$$

$$\vec{E} = a \frac{\vec{r}}{r^2}. \text{ Подставляем и получаем } \vec{B}' = -a \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{c^2 r^2} = a \frac{[\vec{r}, \vec{v}]}{c^2 r^2}.$$

Пример 4. Доказать, что из общих формул преобразований полей следуют формулы $\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]$, $\vec{B}' = \vec{B} - \frac{[\vec{v}, \vec{E}]}{c^2}$ при условии $v \ll c$.

Решение. При условии $v \ll c$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1$.

Тогда

$$\begin{aligned}
\vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, & \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel}, \\
\vec{E}'_{\perp} &= \left\{ \vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}] \right\}_{\perp}, & \vec{B}'_{\perp} &= \left\{ \vec{B} - \frac{[\vec{v}, \vec{E}]}{c^2} \right\}_{\perp}.
\end{aligned}$$

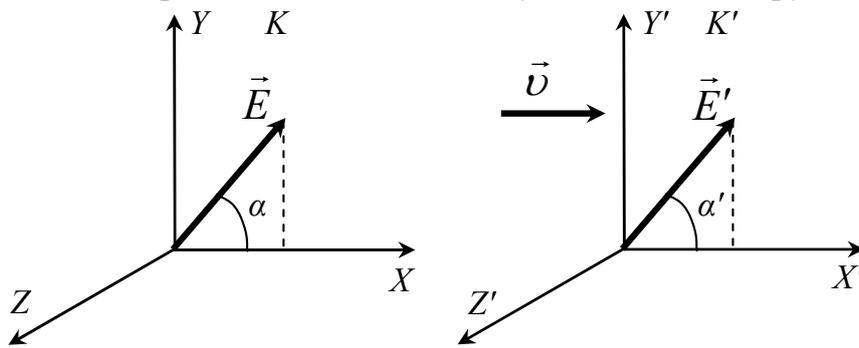
Складываем уравнения попарно

$$\underbrace{\vec{E}'_{\parallel} + \vec{E}'_{\perp}}_{\vec{E}'} = \underbrace{\vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}}_{\vec{E}} + [\vec{v}, \vec{B}_{\perp}],$$

$$\underbrace{\vec{B}'_{\parallel} + \vec{B}'_{\perp}}_{\vec{B}'} = \underbrace{\vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}}_{\vec{B}} - \frac{[\vec{v}, \vec{E}_{\perp}]}{c^2}.$$

Откуда следуют формулы $\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]$, $\vec{B}' = \vec{B} - \frac{[\vec{v}, \vec{E}]}{c^2}$.

Пример 5. В инерциальной системе K есть только однородное электрическое поле напряженностью \vec{E} . Найти модуль и направление: а) вектора \vec{E}' , б) вектора \vec{B}' в системе K' , которая движется по отношению к K со скоростью $\vec{v} = \text{const}$ под углом α к вектору \vec{E} ?



Решение. Напишем поля в системах K и K'

Система K : $E_{\parallel} = E \cos \alpha$, $B_{\parallel} = 0$,

$$E_{\perp} = E \sin \alpha, \quad B_{\perp} = 0.$$

Система K' : $E'_{\parallel} = E_{\parallel} = E \cos \alpha$,

$$E'_{\perp} = \gamma E \sin \alpha = \frac{E \sin \alpha}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

$$E' = \sqrt{E'^2_{\parallel} + E'^2_{\perp}} = \sqrt{E^2 \cos^2 \alpha + E^2 \gamma^2 \sin^2 \alpha} = E \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \beta^2}} =$$

$$= E \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha - \beta^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{1 - \beta^2}} = E \sqrt{\frac{1 - \beta^2 \sin^2 \alpha}{1 - \beta^2}},$$

$$E' = E \gamma \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \alpha}.$$

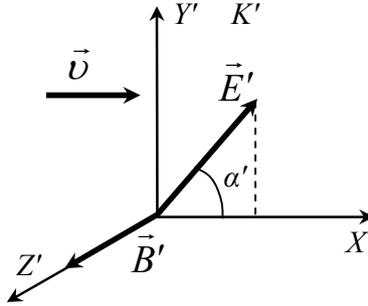
Найдем угол в системе K' :

$$\text{tg } \alpha' = \frac{E'_{\perp}}{E'_{\parallel}} = \frac{\gamma E \sin \alpha}{E \cos \alpha} = \gamma \text{tg } \alpha.$$

Магнитное поле в системе K' :

$$B'_{\parallel} = B_{\parallel} = 0, |\vec{B}'_{\perp}| = \left| -\frac{\gamma[\vec{v}, \vec{E}_{\perp}]}{c^2} \right| = \frac{\gamma v E \sin \alpha}{c^2}.$$

Расположение векторов в системе K' :



В K' системе векторы \vec{E}' и \vec{B}' взаимно перпендикулярны. Ультрарелятивистский предел $v \rightarrow c$ ($\beta \approx 1, \gamma \gg 1$):

$$E' \approx E\gamma\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = E\gamma \sin \alpha, B' \approx \frac{E\gamma}{c} \sin \alpha.$$

Пример 6. В инерциальной системе K есть однородные электрические и магнитные поля, причем $\vec{E} \perp \vec{B}$. Найти \vec{E}' и \vec{B}' в той системе, где наблюдается только одно поле (электрическое или магнитное).

Решение. Используем инварианты электромагнитного поля

$$E^2 - c^2 B^2 = E'^2 - c^2 B'^2 = \text{inv}.$$

Пусть в K' системе есть только электрическое поле ($\vec{B}' = 0$). Тогда $E'^2 = E^2 - c^2 B^2$,

$$E' = E\sqrt{1 - (cB/E)^2}.$$

Аналогично, если в K' системе есть только магнитное поле ($\vec{E}' = 0$). $c^2 B'^2 = E^2 - c^2 B^2$.

$$B'^2 = B\sqrt{(E/cB)^2 - 1}.$$

Задачи для самостоятельного решения

5.1. В лабораторной системе отсчета электрическое поле направлено по оси X и равно E . Найти отношение продольной и поперечной компоненты магнитного поля в системе отсчета движущейся со скоростью \vec{v} под углом 45° к оси X .

5.2. В лабораторной системе отсчета электрическое поле направлено по оси X и равно E . Найти отношение продольной и поперечной компоненты электрического поля в системе отсчета движущейся со скоростью \vec{v} под углом 45° к оси X .

5.3. В лабораторной системе отсчета магнитное поле направлено по оси X и равно B . Найти отношение продольной и поперечной компоненты магнитного поля в системе отсчета движущейся со скоростью \vec{v} под углом 45° к оси X .

5.4. В лабораторной системе отсчета магнитное поле направлено по оси X и равно B . Найти продольную компоненту магнитного поля в системе отсчета движущейся со скоростью \vec{v} под углом 45° к оси X .

5.5. В лабораторной системе отсчета магнитное поле направлено по оси X и равно B . Найти поперечную компоненту магнитного поля в системе отсчета движущейся со скоростью \vec{v} под углом 45° к оси X .

5.6. В лабораторной системе отсчета магнитное поле направлено по оси X и равно B . Найти продольную компоненту электрического поля в системе отсчета движущейся со скоростью \vec{v} под углом 45° к оси X .

5.7. В лабораторной системе отсчета магнитное поле направлено по оси X и равно B . Найти поперечную компоненту электрического поля в системе отсчета движущейся со скоростью v под углом 45° к оси X .

5.8. Доказать, что если в некоторой инерциальной системе отсчета вектор напряжённости электрического поля перпендикулярен вектору магнитной индукции, то это свойство сохраняется в любой другой инерциальной системе отсчёта.

5.9. Доказать, что если в некоторой инерциальной системе отсчета вектор напряжённости электрического поля не перпендикулярен вектору магнитной индукции, то это свойство сохраняется в любой другой инерциальной системе отсчёта.

5.10. Доказать, что если в некоторой инерциальной системе отсчета $E^2 = c^2 B^2$, то это свойство сохраняется в любой другой инерциальной системе отсчёта.

5.11. Доказать, что если в некоторой инерциальной системе отсчета $E^2 \neq c^2 B^2$, то это свойство сохраняется в любой другой инерциальной системе отсчёта.

5.12. Покажите, что электрическое и магнитное поля заряда, движущегося с постоянной скоростью, могут быть представлены в виде

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1-v^2}{(1-v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}},$$

$$\vec{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} \frac{1-v^2}{(1-v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}},$$

где \vec{r} – радиус-вектор, проведенный из точки, где в данный момент находится заряд, в точку наблюдения, а θ – угол между векторами \vec{r} и \vec{v} .

5.13. В неподвижной инерциальной системе отсчета имеется электрическое поле с напряженностью $E = 50$ кВ/м. Найти угол между \vec{E}' и

\vec{B}' в инерциальной системе отсчета движущейся со скоростью $v = 0.137c$ (c – скорость света).

5.14. В неподвижной инерциальной системе отсчета имеется магнитное поле с индукцией $B = 0,20$ мТл. Найти угол между \vec{E}' и \vec{B}' в инерциальной системе отсчета движущейся со скоростью $v = 0.137c$ (c – скорость света).

5.15. * В K -системе отсчета имеется узкий пучок протонов, движущихся с релятивистской скоростью \vec{v} . На некотором расстоянии от пучка напряженность электрического поля равна \vec{E} . Найти индукцию \vec{B}' магнитного поля на том же расстоянии от пучка в K' -системе отсчета, перемещающейся со скоростью \vec{v}_0 относительно K -системы в направлении движения протонов.

5.16. * Релятивистская заряженная частица движется в пространстве со скоростью \vec{v} , где имеются однородные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля \vec{E} и \vec{B} . Частица движется прямолинейно по направлению, перпендикулярному векторам \vec{E} и \vec{B} . Найти \vec{E}' и \vec{B}' в системе отсчета, перемещающейся поступательно вместе с частицей.

5.17. * Показать что, если в инерциальной K -системе отсчета имеется только электрическое то в любой другой инерциальной K' – системе будут существовать как электрическое, так и магнитное поле одновременно, причем $\vec{E}' \perp \vec{B}'$.

5.18. * Показать что, если в инерциальной K -системе отсчета имеется только магнитное то в любой другой инерциальной K' – системе будут существовать как электрическое, так и магнитное поле одновременно, причем $\vec{E}' \perp \vec{B}'$.

5.19. * В инерциальной K -системе отсчета имеются два однородных взаимно перпендикулярных поля: электрическое напряженностью $E = 40$ кВ/м и магнитное с индукцией $B = 0,20$ мТл. Найти напряженность E' поля в той K' – системе отсчета, где наблюдается только электрическое поле.

5.20. * В инерциальной K -системе отсчета имеются два однородных взаимно перпендикулярных поля: электрическое напряженностью $E = 40$ кВ/м и магнитное с индукцией $B = 0,20$ мТл. Найти напряженность индукцию B' поля в той K' - системе отсчета, где наблюдается только одно магнитное поле.

5.21. По очень длинному прямому проводу течет ток I , создаваемый электронами, движущимися со скоростью \vec{v} . Полная плотность зарядов

в каждой точке провода равна нулю благодаря наличию положительно заряженных ионов.

- а) Найдите поля вне провода в системе координат, где провод покоится.
 б) Найдите те же поля в системе координат, движущейся вместе с электронами.

Ответ:

$$\text{а) } \vec{E} = 0, \quad \vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2[\vec{I}, \vec{e}_r]}{r},$$

где \vec{I} – вектор силы тока.

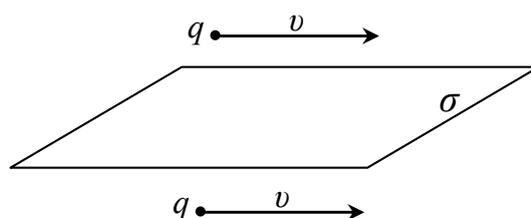
Если ось X направить вдоль вектора \vec{I} , то $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ и

$$B_x = 0, \quad B_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2Iz}{r}, \quad B_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2Iy}{r};$$

$$\text{б) } \vec{B}' = \frac{\vec{B}}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \vec{E}' = \frac{[\vec{v}, \vec{B}]}{\sqrt{1-v^2}}.$$

5.22. Два электрона с одинаковой скоростью \vec{v} движутся параллельно друг другу по обе стороны от бесконечной положительно заряженной плоскости на расстоянии a от нее; плотность покоящихся поверхностных зарядов равна σ .

- а) При какой величине σ расстояние между электронами будет оставаться равным $2a$?
 б) Сравните величину σ , которая получается для электронов с энергией 500 МэВ, с σ_0 , которая будет в случае медленно движущихся электронов.



Ответ:

$$\text{а) } \sigma = \frac{q}{2\pi a^2} \sqrt{1-v^2};$$

$$\text{б) } \sigma / \sigma_0 = \sqrt{1-v^2} = 10^{-3}.$$

6. СИЛА ЛОРЕНЦА. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Уравнение движения релятивистской заряженной частицы в электромагнитном поле (СИ):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = q \cdot \vec{E} + q \cdot [\vec{v}, \vec{B}], \quad (6.1)$$

где \vec{F} – сила Лоренца, \vec{E} – напряженность электрического поля, \vec{B} – индукция магнитного поля, q, m, \vec{v} – заряд, масса и скорость частицы, \vec{p} – релятивистский импульс

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m\vec{v}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (6.2)$$

связан с полной энергией

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma mc^2 \quad (6.3)$$

соотношениями:

$$\vec{p} = \frac{\vec{v} \cdot \mathcal{E}}{c^2}, \quad (6.4)$$

$$\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 = \mathcal{E}^2. \quad (6.5)$$

Примеры решения задач

Пример 1. Написать релятивистское уравнение движения частицы под действием силы \vec{F} , выразив импульс \vec{p} явным образом через скорость частицы \vec{v} . Проследить переход к нерелятивистскому пределу, $\vec{v} \ll c$.

Решение. Запишем уравнение движения и цепочку преобразований

$$\begin{aligned} \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right] = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \\ &+ m\vec{v} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \left(-\frac{2v}{c^2} \right) \frac{dv}{dt}. \end{aligned}$$

После очевидной алгебры:

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m\vec{v}v/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt} = \vec{F}.$$

Помним: релятивистский фактор $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, поэтому окончательно

$$\gamma m \cdot \left[\frac{d\vec{v}}{dt} + \gamma^2 \frac{v\vec{v}}{c^2} \cdot \frac{dv}{dt} \right] = \vec{F}. \quad (6.6)$$

В нерелятивистском случае, $\vec{v} \ll c$, можем положить $\gamma \cong 1$, $v^2/c^2 \cong 0$, поэтому уравнение движения принимает привычный ньютоновский вид:

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

Пример 2. Рассмотрим частный случай предыдущей задачи, считая, что скорость \vec{v} меняется только по величине.

Решение. Можем написать: $\vec{v} = \vec{e}_v \cdot v$ (\vec{e}_v - единичный постоянный вектор). Поэтому $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{e}_v \cdot \frac{dv}{dt}$. Смотрим на уравнение движения: векторы \vec{v} и $\dot{\vec{v}} = \vec{e}_v \cdot \dot{v}$ могут быть направлены только по направлению \vec{F} , поэтому $\vec{e}_v = \vec{F}/F$. Преобразуем [...] в (6.6):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \gamma^2 \frac{v\vec{v}}{c^2} \cdot \frac{dv}{dt} = \vec{e}_v \left[\frac{dv}{dt} + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{dv}{dt} \right] = \vec{e}_v \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \left[1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right] = \vec{e}_v \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \gamma^2.$$

Использовано $\left[1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right] = 1 + \frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2} \equiv \gamma^2$. Уравнение (6.6) примет вид:

$$\gamma^3 m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_v = \vec{F}.$$

Или, с учетом $\frac{d\vec{e}_v}{dt} = 0$

$$\gamma^3 m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

Полученный результат полезно сравнить с решением задачи о движении релятивистской частицы в постоянном электрическом поле (Пример 4).

Пример 3. Рассмотрим частный случай предыдущей задачи (Пример 1), считая, что скорость \vec{v} меняется только по направлению.

Решение. Из уравнения движения в форме (6.6), с учетом $\frac{dv}{dt} = 0$ (модуль скорости не меняется) получаем:

$$\gamma m \cdot \left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right] = \vec{F}.$$

Полученный результат полезно сравнить с решением задачи о движении релятивистской частицы в постоянном однородном магнитном поле (Пример 6).

Пример 4. Получить формулу, описывающую изменение во времени полной энергии заряженной частицы в электромагнитном поле

Решение. Дифференцируем по времени полную энергию:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = \gamma^3 m \cdot v \cdot \left(\frac{dv}{dt} \right).$$

Дифференцируем по времени импульс $\vec{p}^2 = (\mathcal{E}^2 - m^2 c^4) / c^2$:

$$\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \cdot \frac{d\mathcal{E}}{dt}.$$

С учетом (6.4) получаем:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Поэтому

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{v} \cdot \{ q \cdot \vec{E} + q \cdot [\vec{v}, \vec{B}] \} = q \cdot (\vec{v} \cdot \vec{E}) + q \cdot \vec{v} \cdot [\vec{v}, \vec{B}] \equiv q(\vec{v} \cdot \vec{E}).$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q(\vec{v} \cdot \vec{E}). \quad (6.7)$$

Полная энергия релятивистской частицы изменяется только под действием электрического поля.

В нерелятивистском пределе $v/c \ll 1$

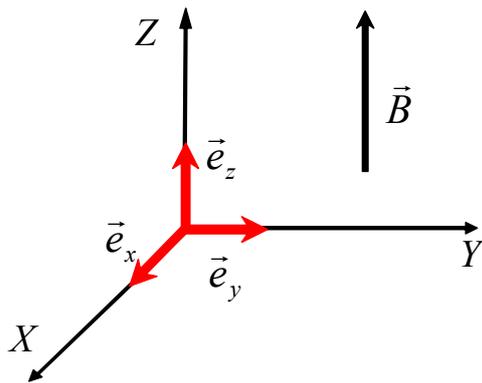
$$\mathcal{E} \rightarrow mc^2 + \frac{mv^2}{2} = mc^2 + T.$$

Поэтому (6.7) переходит в

$$\frac{dT}{dt} = q(\vec{v} \cdot \vec{E}).$$

Кинетическая энергия заряженной частицы T , движущейся в электромагнитном поле, изменяется только под действием электрического поля.

Пример 5. В однородное магнитное поле $\vec{B} \parallel OZ$ влетает частица (заряд Q , масса m) со скоростью \vec{v} ($v \ll c$). Найти траекторию движения частицы.



Решение. Уравнение движения ($v \ll c$):

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q[\vec{v}, \vec{B}].$$

Правая часть – сила Лоренца.

Раскроем векторное произведение:

$$[\vec{v}, \vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix},$$

$[\vec{v}, \vec{B}] = \vec{e}_x \cdot (v_y B - 0) - \vec{e}_y \cdot (v_x B - 0) + \vec{e}_z \cdot (0 - 0)$, $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – единичные векторы декартовой системы координат

Сила Лоренца:

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}] = \vec{e}_x \cdot qv_y B - \vec{e}_y \cdot qv_x B$$

Следствие: $m \frac{dv_z}{dt} = 0 \Rightarrow v_z = const$ – компонента скорости частицы, параллельная \vec{B} , остается постоянной.

Движение в плоскости XOY : система описывается системой 2-х уравнений

$$m \frac{dv_x}{dt} = qv_y B, \quad (6.8)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B. \quad (6.9)$$

Решение: из (6.8) $v_y = \frac{m}{qB} \frac{dv_x}{dt}$, подстановка в (6.9)

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{qB} \frac{dv_x}{dt} \right) = -qv_x B,$$

$$\frac{m^2}{qB} \frac{d^2 v_x}{dt^2} = -qv_x B, \quad \frac{d^2 v_x}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m} \right)^2 v_x = 0,$$

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega^2 v_x = 0. \quad (6.10)$$

Уравнение (6.10) – уравнение гармонических колебаний, $\omega = qB/m$ – циклотронная частота.

Решение: $v_x = C \cdot \sin(\omega t + \alpha)$, константы C и α определяются начальными условиями. Очевидно,

$$v_x(t) = v_0 \cdot \sin(\omega t + \alpha),$$

где v_0 – начальная скорость частицы (перед влетом в магнитное поле или перед включением магнитного поля). Фаза α – определяет направление вектора скорости \vec{v}_0 .

Находим $v_y(t)$:

$$v_y = \frac{m}{qB} \frac{dv_x}{dt} = \frac{m}{qB} \cdot v_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \alpha).$$

Итак, решение системы уравнений для компонент скорости:

$$v_x(t) = v_0 \cdot \sin(\omega t + \alpha), \quad v_y(t) = v_0 \cdot \cos(\omega t + \alpha).$$

Следствие:

$$v_x^2(t) + v_y^2(t) = v_0^2 \cdot [\sin^2(\omega t + \alpha) + \cos^2(\omega t + \alpha)] = v_0^2 = const!$$

Сила Лоренца не меняет величину скорости и кинетическую энергию частицы, в полном соответствии с предыдущим результатом (**Пример 1**). Зная $\vec{v}(t)$, находим траекторию заряженной частицы в однородном магнитном поле \vec{B} :

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 \cdot \sin(\omega t + \alpha), \quad \longrightarrow \quad x(t) = -\frac{v_0}{\omega} \cdot \cos(\omega t + \alpha) + c_1,$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = v_0 \cdot \cos(\omega t + \alpha), \quad \longrightarrow \quad y(t) = +\frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega t + \alpha) + c_2.$$

Выберем $c_1 = 0, c_2 = 0$. Следствие:

$$x^2(t) + y^2(t) = \frac{v_0^2}{\omega^2} \cdot [\sin^2(\omega t + \alpha) + \cos^2(\omega t + \alpha)] = R^2 = const.$$

Это – уравнение окружности радиуса R – радиус Лармора (ларморов радиус):

$$R = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0 \cdot m}{|q| \cdot B}, \quad \text{т. к. } \omega = \frac{qB}{m}.$$

Эквивалентная запись: вводим поперечный (к направлению \vec{B}) импульс

$$p_{\perp} = m \cdot v_0, \quad \text{тогда } R = \frac{p_{\perp}}{|q| \cdot B}.$$

Вывод: В однородном магнитном поле \vec{B} заряженная частица движется с постоянной скоростью вдоль поля и одновременно – по окружности ларморова радиуса R с угловой скоростью (циклотронной частотой) $\omega = qB/m$, траектория – винтовая линия (спираль). Т. к. период обращения

ния по окружности $T = 2\pi/\omega = 2\pi/|q|B$, то шаг спирали:
 $h = v_{\parallel} \cdot T = 2\pi m v_{\parallel} / |q|B = 2\pi p_{\parallel} / |q|B$.

Примечание: величина $B \cdot R$ – магнитная жесткость системы, характеризует анализирующую способность магнитной системы разделять пучки заряженных частиц по импульсам или заряду.

Пример 6. Релятивистская частица с импульсом \vec{p}_0 , лежащем в плоскости XOY влетает в постоянное и однородное электрическое поле $\vec{E} \parallel OX$. Найти траекторию движения частицы.

Решение. Движение происходит в плоскости \vec{E}, \vec{p}_0 . Уравнение движения:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q \cdot \vec{E},$$

$$\frac{dp_x}{dt} = qE, \quad \frac{dp_y}{dt} = \frac{dp_z}{dt} = 0,$$

$$p_x = qEt + p_{0x}, \quad p_y = \text{const} = p_{0y}, \quad p_z = 0,$$

p_{0x}, p_{0y} – начальные значения проекций импульса частицы. Для простоты положим $p_{0x} = 0$.

Как энергия частицы зависит от времени? Можно использовать результат примера 3, но проще так:

$$\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 = \mathcal{E}^2 \Rightarrow \mathcal{E} = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} = c \sqrt{m^2 c^2 + (qEt)^2 + p_0^2}.$$

Энергия \mathcal{E} растет со временем: электрическое поле ускоряет заряженные частицы. При этом скорость частицы зависит от t :

$$p_x = \frac{m v_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\mathcal{E} v_x}{c^2}, \quad p_y = \frac{m v_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\mathcal{E} v_y}{c^2}.$$

Поэтому

$$v_x = \frac{p_x c^2}{\mathcal{E}} = \frac{cqEt}{\sqrt{m^2 c^2 + (qEt)^2 + p_0^2}}, \quad v_y = \frac{p_y c^2}{\mathcal{E}} = \frac{cp_0}{\sqrt{m^2 c^2 + (qEt)^2 + p_0^2}}.$$

При $t \rightarrow \infty$, $v_x \rightarrow c$, $v_y \rightarrow 0$.

Траектория определена в **параметрическом виде**:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Интегрируя, находим:

$$x(t) = \frac{1}{qE} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (cqEt)^2}, \quad y(t) = \frac{p_0 c}{qE} \operatorname{Arsh} \left(\frac{cqEt}{\mathcal{E}_0} \right),$$

$$\mathcal{E}_0^2 = m^2 c^4 + p_0^2 c^2, \quad \mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (cqEt)^2}.$$

Исключив время t , можно найти траекторию в явном виде: как $y = f(x)$ или как $x = \varphi(y)$. Порядок действий в нашем случае:

- $sh \left(y \cdot \frac{qE}{p_0 c} \right) = \frac{cqEt}{\mathcal{E}_0},$
- $(cqEt)^2 = (xqE)^2 - \mathcal{E}_0^2 \rightarrow \left(\frac{cqEt}{\mathcal{E}_0^2} \right)^2 = \left(\frac{xqE}{\mathcal{E}_0^2} \right)^2 - 1^2,$
- $x^2 = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{qE} \right)^2 \left[1 + sh^2 \left(\frac{qEy}{p_0 c} \right) \right],$ вспоминаем $1 + sh^2 z = ch^2 z,$
- $x = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{qE} \right) ch \left(\frac{qE}{p_0 c} y \right)$ – траектория в явном виде, в плоскости (x, y) .

Пример 7. Найти пробег (до остановки) релятивистской заряженной частицы с зарядом q , массой m и начальной полной энергией \mathcal{E} в тормозящем постоянном однородном электрическом поле \vec{E} , направленном противоположно начальной скорости частицы \vec{v}_0 .

Решение. Рассмотрим варианты решения:

1. Взять скорость $v(t)$ из точного решения задачи (Пример 6) и найти время τ , при котором $v(\tau) = 0$, затем найти точку поворота по формуле для координаты $x(\tau)$.
2. Взять формулу для энергии частицы из точного решения задачи, из баланса $\mathcal{E}(\tau) = \mathcal{E}_0 - mc^2$ определить τ , а затем – пробег до остановки.
3. Придумать более короткий (менее громоздкий) путь.

Выбираем последний вариант: используем связь энергии и импульса в СТО:

$$\mathcal{E} = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

Дифференцируя по времени, получим скорость изменения энергии частицы

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\vec{p}c^2 \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}}{\sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}} = c^2 \cdot \frac{\vec{p}}{\mathcal{E}} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Уравнение движения $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ позволяет записать

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = c^2 \cdot \left(\frac{\vec{p}}{\mathcal{E}} \right) \cdot \vec{F}.$$

Учитывая связь: $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$, $\mathcal{E} = \gamma mc^2 \Rightarrow \vec{p}/\mathcal{E} = \vec{v}/c^2$, пишем: $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F}$.

По смыслу, нам нужно определить пробег в энергетическом пространстве: за время τ частица должна потерять всю кинетическую энергию, т. е.

$$\left| \int_0^\tau \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt} \right) dt \right| = \mathcal{E}_0 - mc^2.$$

В задаче $\vec{v} \cdot \vec{F} = -q\vec{v}E$, поэтому

$$\int_0^\tau \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt} \right) dt = qE \int_0^\tau v(t) dt = qE \cdot l = \mathcal{E}_0 - mc^2,$$

где l – искомый пробег. Находим:

$$l = \frac{\mathcal{E}_0 - mc^2}{qE} = \frac{mc^2(\gamma - 1)}{qE} = \frac{T}{qE}.$$

Нерелятивистский случай: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cong 1 + \frac{v^2}{2c^2}$, поэтому пробег

$$l = \frac{\mathcal{E}_0 - mc^2}{qE} = \frac{mc^2}{qE} \frac{v^2}{2c^2} = \frac{mv^2/2}{qE} = \frac{T}{qE}.$$

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Показать, что траекторию релятивистской заряженной частицы в однородном магнитном поле можно получить заменой $mv \rightarrow p = \gamma mv_\perp$, (обобщить Пример 1 на релятивистский случай).

6.2. Используя точную формулу для траектории частицы в однородном электрическом поле (Пример б), показать, что при малых значениях параметра $qEy/p_0c \ll 1$ траектория – парабола.

6.3. Частица начинает двигаться в однородном электрическом поле напряженностью $E = 220$ В/м. При каком t релятивистский фактор частицы достигнет значения $\gamma = 2$?

6.4. Две частицы, с зарядами q_1 и $q_2 = 2q_1$, и одинаковыми массами, находившиеся в покое, в точках с равной координатой x начинают двигаться в однородном электрическом поле напряженностью $\vec{E} \parallel OX$

1) при каком t частицы разойдутся на заданное расстояние Δx ? 2) какое поле нужно приложить, чтобы за время Δt частицы разошлись на заданное расстояние Δx ?

6.5. Атом водорода внезапно ионизован. Определить, на какое расстояние разойдутся электрон и протон через 2 с после ионизации, если напряженность электрического поля $E = 220$ В/м.

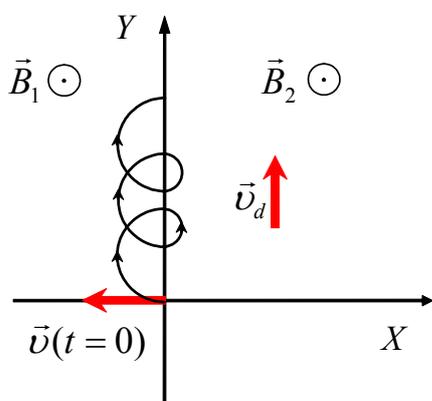
6.6. Ион, попав в магнитное поле ($B=0,01$ Тл), стал двигаться по окружности. Определить кинетическую энергию T (в эВ) иона, если магнитный момент эквивалентного кругового тока равен $p_m = 1,6 \cdot 10^{-14}$ А м².

6.7. В скрещенные под прямым углом однородные магнитное ($H = 1$ МА/м) и электрическое ($E = 50$ кВ/м) поля влетел ион. При какой скорости v иона (по модулю и направлению) он будет двигаться в скрещенных полях прямолинейно? Считать, что $v \ll c$.

6.8. В телевизионном кинескопе ускоряющее анодное напряжение равно 16 кВ, а расстояние от анода до экрана составляет 30 см. За какое время электроны проходят это расстояние?

6.9. В однородное магнитное поле с индукцией $B = 10$ мТл перпендикулярно линиям индукции влетает электрон с кинетической энергией $T = 30$ кэВ. Каков радиус кривизны траектории движения электрона в поле?

6.10. Электрон влетает в плоский конденсатор параллельно его пластинам на расстоянии $d = 4$ см от положительно заряженной пластины; длина пластины $l = 15$ см. Через какое время t электрон упадет на эту



пластину, если напряженность поля конденсатора равна $E = 500$ В/м? С какой минимальной скоростью v_0 должен влететь электрон, чтобы не упасть на пластину? Масса электрона $m = 9 \cdot 10^{-28}$ г, заряд $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

6.11. Частица с зарядом $q > 0$ и массой m влетает в магнитное поле (см. рис.) Слева от плоскости $ZOY = 0$ индукция магнитного поля равна B_1 справа $B_2 > 2B_1$ (\vec{B}_2 и $\vec{B}_1 \perp$ плоскости XOY). Найти скорость дрейфа частицы

вольт плоскости скачка магнитного поля (вдоль оси OY). Вычислить скорость дрейфа для случая $B_2 = 2B_1$.

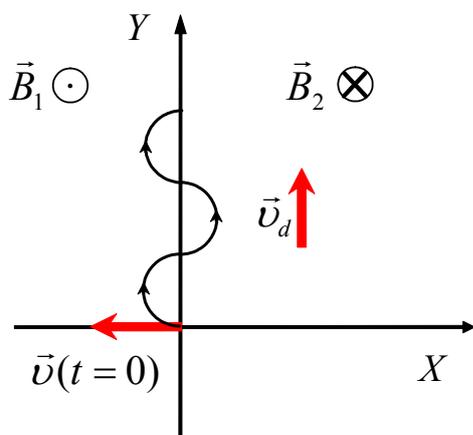
Ответ:

$$v_d = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{2v}{\pi} \left(\frac{B_2 - B_1}{B_2 + B_1} \right); v_{d1} = \frac{2v}{3\pi}.$$

6.12. Найти скорость дрейфа вдоль оси OY (см. рис. предыдущей задачи), если начальная скорость частицы направлена под углом θ к оси OX .

Ответ:

$$v_d = \frac{2v \sin \theta}{3\pi} + v \cos \theta.$$



6.13. Найти скорость дрейфа вдоль оси OY (см. рис.), если слева и справа от плоскости $ZOY=0$ $|\vec{B}_2| = |\vec{B}_1|$, но $\vec{B}_2 = -\vec{B}_1$ (магнитная конфигурация такого типа возникает в т.н. «токовых слоях»).

Ответ:

$$v_d = \frac{2v}{\pi}.$$

6.14. Найти скорость дрейфа вдоль оси OY (см. предыдущую задачу), если $B_2=2B_1$.

Ответ:

$$v_d = \frac{2v}{\pi}.$$

6.15. Найти скорость дрейфа вдоль оси OY (см. рис. задачи 6.15), если начальная скорость частицы направлена под углом θ к оси OX .

Ответ:

$$v_d = \frac{2v}{\pi} \sin \theta.$$

6.16. Релятивистский электрон с энергией E влетает в однородное магнитное поле с индукцией B перпендикулярно его силовым линиям. Получить дифференциальное уравнение, описывающее движение электрона.

6.17. Релятивистский электрон движется с постоянной по величине скоростью v по окружности в однородном магнитном поле с индукцией B . Найти зависимость периода обращения электрона от его скорости.

6.18. Релятивистский электрон с энергией E движется по окружности в однородном магнитном поле с индукцией B . Найти радиус окружности, по которой движется электрон.

6.19. Релятивистская частица с массой m , зарядом q и начальным импульсом \vec{p} влетает в статические однородные электрическое и магнитное поля, причем поле \vec{E} направлено вдоль оси X , а поле \vec{B} – вдоль оси Y . Найти уравнение траектории (в декартовой системе координат).

7. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ И МАГНИТНОЕ ПОЛЯ ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА. ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ И КОНВЕКТИВНОЕ ПОЛЕ

Электрическое \vec{E} и магнитное \vec{B} поля произвольно движущегося заряда определяются формулами:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 K^3} \left\{ \frac{\vec{n} - \vec{v}/c}{R^2} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{[\vec{n}, [(\vec{n} - \vec{v}/c), \vec{a}]]}{c^2 \cdot R} \right\} \right]_{ret}, \quad (7.1)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 K^3} \left[\vec{n}, \left\{ -\frac{\vec{v}}{c \cdot R^2} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{[\vec{n}, [(\vec{n} - \vec{v}/c), \vec{a}]]}{c^2 \cdot R} \right\} \right] \right]_{ret}. \quad (7.2)$$

Здесь

$$K = 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}(t')}{c} = 1 - \beta(t') \cdot \cos(\vec{R}(t'), \vec{v}(t')). \quad (7.3)$$

Индекс ‘ret’ означает, что t' – это запаздывающее время, выраженное через \vec{r} и t с помощью уравнения

$$t = t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} \equiv t' + \frac{|\vec{R}(t')|}{c}. \quad (7.4)$$

Векторы:

- \vec{r} – радиус-вектор точки, в которой наблюдается поле в момент времени t ;
- $\vec{r}_0(t')$ – радиус-вектор движущегося заряда в запаздывающий момент t' ;
- $\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{r}_0(t')$;
- $\vec{n} \equiv \vec{n}(t') = \vec{R}(t')/R(t')$ – единичный вектор в направлении \vec{R} ;
- $\vec{a} = \dot{\vec{v}}' = d\vec{r}'/dt$ ускорение заряда.

Электрическое (7.1) и магнитное (7.2) поля заряда, движущегося с ускорением, состоят из 2-х компонент.

$$\vec{E} = \vec{E}_{conv} + \vec{E}_{rad}; \quad \vec{B} = \vec{B}_{conv} + \vec{B}_{rad}.$$

- Первые **не содержат ускорения заряда**, обратно пропорциональны квадрату расстояния между зарядом и точкой наблюдения R^{-2} и называются связанными или **конвективными полями (convective fields)**.

$$\vec{E}_{conv}(\vec{r}, t) = \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 K^3} \left\{ \frac{\vec{n} - \vec{v}/c}{R^2} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right\} \right]_{ret}, \quad (7.5)$$

$$\vec{B}_{conv}(\vec{r}, t) = \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 K^3} \left[\vec{n}, -\frac{\vec{v}}{c \cdot R^2} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] \right]_{ret}. \quad (7.6)$$

- Вторые **содержат ускорение заряда**, пропорциональны R^{-1} и поэтому доминируют («выживают») на далеких расстояниях от заряда и называются **полями излучения (radiation fields)**.

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}, t) = \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 K^3} \left\{ \frac{[\vec{n}, [(\vec{n} - \vec{v}/c), \vec{a}]]}{c^2 \cdot R} \right\} \right]_{ret}, \quad (7.7)$$

$$\vec{B}_{rad}(\vec{r}, t) = \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 K^3} \left[\vec{n}, \frac{[\vec{n}, [(\vec{n} - \vec{v}/c), \vec{a}]]}{c^2 \cdot R} \right] \right]_{ret}. \quad (7.8)$$

Свойства полей излучения: $\vec{E}_{rad} \perp \vec{n}$, кроме того, электрическое (7.7) и магнитное (7.8) поля излучения связаны:

$$c\vec{B}_{rad} = [\vec{n}, \vec{E}_{rad}]. \quad (7.9)$$

Т. е., как и в случае плоских электромагнитных волн в свободном пространстве, $\vec{E}_{rad}, \vec{B}_{rad}, \vec{n}$ образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов.

Примеры решения задач

Пример 1. Заряд q движется по окружности радиуса R с постоянной скоростью v . Сравнить электрические составляющие конвективного поля и поля излучения в центре окружности.

Решение. Сравнить – значит определить отношение одной величины к другой. В нашем случае, определяем

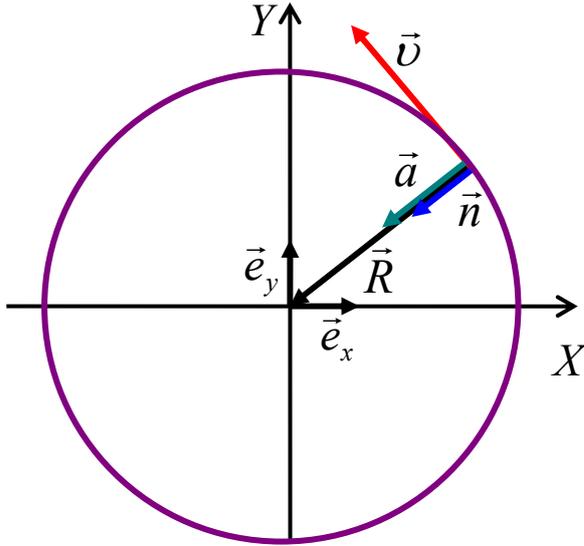
$$\xi = \left| \frac{\vec{E}_{rad}}{\vec{E}_{conv}} \right|.$$

Чтобы определить векторы, входящие в (7.1-7.2), в общем случае полезно написать уравнение траектории (иногда – уравнение движения). В случае плоского движения по окружности уравнение траектории:

$$\vec{r}_0(t') = \vec{e}_x R \cos \omega t' + \vec{e}_y R \sin \omega t', \quad \omega = 2\pi/T = R/v.$$

Дифференцирование по времени дает вектор скорости, а повторное дифференцирование – вектор ускорения.

Сделаем рисунок.



Точка наблюдения находится в центре окружности, поэтому в *любой момент времени* $|\vec{r}| = R$. Векторы ускорения \vec{a} , единичный вектор \vec{n} – направлены к центру окружности, поэтому $\vec{a} = a \cdot \vec{n}$, а модуль ускорения $a = v^2 / R$. Вектор скорости \vec{v} при движении по окружности: $\vec{v} \perp \vec{a}$ и $\vec{v} \perp \vec{n}$.

Из (7.5) и (7.7) получаем:

$$\xi = \left| \frac{\vec{E}_{rad}}{\vec{E}_{conv}} \right| = \gamma^2 R \frac{[\vec{n}, [(\vec{n} - \vec{v}/c), \vec{a}]]}{c^2 |(\vec{n} - \vec{v}/c)|}, \quad (7.10)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ – релятивистский фактор (Лоренц-фактор).

Находим:

$$[(\vec{n} - \vec{v}/c), \vec{a}] = [\vec{n}, \vec{a}] - \frac{[\vec{v}, \vec{a}]}{c} = \vec{e}_z \frac{va}{c}, \text{ т. к. } [\vec{n}, \vec{a}] = 0.$$

Поэтому в числителе (7.10)

$$[\vec{n}, [(\vec{n} - \vec{v}/c), \vec{a}]] = |[\vec{n}, \vec{e}_z]| \frac{va}{c} = \frac{va}{c}.$$

В знаменателе:

$$|(\vec{n} - \vec{v}/c)| = \sqrt{(\vec{n} - \vec{v}/c)^2} = \sqrt{\vec{n}^2 - 2\frac{\vec{n}\vec{v}}{c} + \frac{\vec{v}^2}{c^2}} = \sqrt{1 + v^2/c^2},$$

т. к. $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ по условию задачи.

Поэтому

$$\xi = \left| \frac{\vec{E}_{rad}}{\vec{E}_{conv}} \right| = \frac{\gamma^2}{\sqrt{1 + v^2/c^2}} \cdot \left(\frac{v}{c} \right) \cdot \left(\frac{aR}{c^2} \right) = \frac{\gamma^2}{\sqrt{1 + v^2/c^2}} \cdot \left(\frac{v}{c} \right)^3.$$

Где учтено, что для кругового движения $a = v^2 / R$.

Следствия:

- При $v/c \rightarrow 1, \gamma \gg 1$, $\xi = \left| \frac{\vec{E}_{rad}}{\vec{E}_{conv}} \right| = \frac{\gamma^2}{\sqrt{2}} \gg 1$, т.е. поле излучения в центре окружности доминирует и тем сильнее, чем быстрее заряд

движется по окружности.

- При $v/c \ll 1, \gamma \approx 1$, $\xi = |\vec{E}_{rad}|/|\vec{E}_{conv}| = \left(\frac{v}{c}\right)^3 \ll 1$. В нерелятивистском случае в центре окружности доминирует конвективное поле.
- Полученный результат не содержит радиус окружности.

Пример 2. Используя решение предыдущей задачи, найти скорость заряда, при которой электрические составляющие конвективного поля и поля излучения в центре окружности равны по модулю.

Решение. Из предыдущей задачи: отношение модулей полей излучения и конвективного поля

$$\xi = |\vec{E}_{rad}|/|\vec{E}_{conv}| = \frac{\gamma^2}{\sqrt{1+v^2/c^2}} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^3 = 1.$$

Учитывая, что $\gamma^2 = \frac{1}{1-v^2/c^2}$ и вводя $\beta = v/c$, получаем алгебраическое уравнение

$$\frac{1}{1-\beta^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \cdot \beta^3 = 1.$$

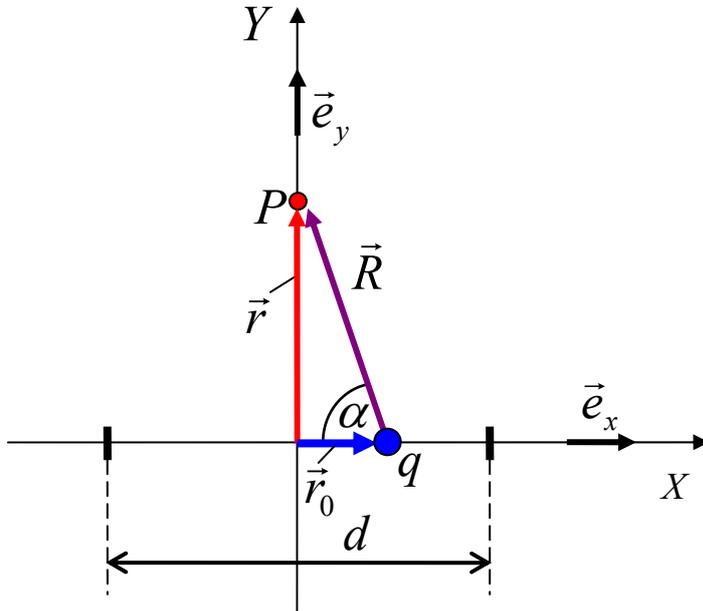
В результате решения этого уравнения получим: $\beta^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Пример 3. Заряд q совершает колебания по закону $\vec{r}_0(t) = d \cdot \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_x$, где \vec{e}_x – единичный вектор, задающий направление оси OX . Сравнить созданные диполем электрические составляющие конвективного поля и поля излучения в точке P , расположенной на оси OY на расстоянии $r=3d$ от центра диполя, в запаздывающие моменты времени $t' = 0, T/4, T/2, 3T/4$.

Решение. При решении такого рода задач всегда полезно нарисовать схему расположения векторов, систему координат и точку наблюдения.

Формулы, определяющие поле излучения и конвективное поле, содержат: вектор скорости \vec{v} , вектор ускорения \vec{a} и единичный вектор нормали \vec{n} , проведенный от заряда q до точки наблюдения P . Кроме того, в (7.1–7.2) входит расстояние R от заряда q к точке наблюдения P . Если эти величины известны в запаздывающий момент времени t' , то можно вычислить поля, которые возникнут в точке наблюдения P в более поздний момент времени

$$t = t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} \equiv t' + \frac{|\vec{R}(t')|}{c}.$$



Здесь $\vec{r}_0(t') = \vec{e}_x \cdot d \cos \omega t'$, $\vec{r} = \vec{e}_y \cdot 3d$.

Находим векторы:

$$\vec{v}(t') = \frac{d\vec{r}_0}{dt} = -\omega d \cdot \sin(\omega t') \cdot \vec{e}_x;$$

$$\vec{a}(t') = -\omega^2 d \cdot \cos(\omega t') \cdot \vec{e}_x.$$

Далее рассматриваем по отдельности моменты запаздывающего времени:

1. $t' = 0$.

$$\vec{r}_0(t') = d \cdot \vec{e}_x;$$

$$\vec{v}(t') = \frac{d\vec{r}_0}{dt} = 0 \rightarrow \gamma(t') = 1;$$

$$\vec{a}(t') = -\omega^2 d \cdot \vec{e}_x.$$

В этот момент времени (точка поворота) скорость заряда обращается в нуль, а ускорение максимально.

Находим интересующее нас отношение (см. пример 1):

$$\xi(t') = \frac{|\vec{E}_{rad}|}{|\vec{E}_{conv}|} = R \frac{|\vec{n}, [(\vec{n} - \vec{v}/c), \vec{a}]|}{c^2 |(\vec{n} - \vec{v}/c)|}.$$

$$R \frac{|\vec{n}, [\vec{n}, \vec{a}]|}{c^2} = R \frac{1}{c^2} \omega^2 d \cdot \sin \alpha = R \frac{1}{c^2} \omega^2 d \cdot \frac{d/2}{R} = \frac{\omega^2 d^2}{2c^2}.$$

Ответ: $\xi(t' = 0) = \frac{\omega^2 d^2}{2c^2}.$

2. $t' = T/2$.

Очевидно, результат совпадает с предыдущим и

$$\xi(t' = T) = \frac{\omega^2 d^2}{2c^2}.$$

3. $t' = T/4$.

Находим:

$$r_0(t') = 0;$$

$$\vec{v}(t') = \frac{d\vec{r}_0}{dt} = -\omega d \cdot \vec{e}_x;$$

$$\vec{a}(t') = 0.$$

Ускорение в этой точке траектории заряда обращается в нуль, излучение отсутствует, поэтому

$$\xi(t' = T/2) = 0.$$

3. $t' = 3T/4$.

Очевидно, как и при $t' = T/4$

$$\xi(t' = 3T/4) = 0.$$

Пример 4. Система зарядов: 2 одинаковых заряда q движутся равномерно по окружности радиуса R с постоянной скоростью v , оставаясь при этом на противоположных концах диаметра. Исследовать влияние интерференции на электрические поля, создаваемые этой системой зарядов в центре окружности.

Решение. Согласно принципу суперпозиции, суммарное электрическое поле системы зарядов определяется векторной суммой электрических полей зарядов, каждый из которых совершает заданное движение. Используем далее формулу (7.1):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t),$$

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 K_i^3} \left\{ \frac{\vec{n}_i - \vec{v}_i/c}{R_i^2} \cdot \left(1 - \frac{v_i^2}{c^2} \right) + \frac{[\vec{n}_i, [(\vec{n}_i - \vec{v}_i/c), \vec{a}_i]]}{c^2 \cdot R_i} \right\} \right]_{ret}.$$

Если в общем случае точка наблюдения \vec{r} расположена произвольно, анализ конечно же сложен. Упрощения возникают: для нерелятивистского случая, для случая, когда точка наблюдения – далеко от системы зарядов или когда заряды совершают периодическое движение в ограниченной области пространства, либо для специальной геометрии, либо для систем зарядов с определенной симметрией.

В задаче: 2 **одинаковых** заряда, по условию расположены симметрично относительно центра окружности в любой момент времени, точка наблюдения – в центре окружности, $\vec{r} = 0$

Очевидно, для любого запаздывающего момента времени

$$\vec{n}_1 = -\vec{n}_2, \vec{v}_1 = -\vec{v}_2, R_1 = R_2, K_1 = K_2, \vec{a}_1 = -\vec{a}_2$$

Поэтому из (7.1) следует:

$$\vec{E}_1(0, t) = -\vec{E}_2(0, t), \vec{E}(0, t) = 0.$$

Причем обращаются в нуль как конвективное поле, так и поле излучения, $\vec{E}_{conv}(0, t) = 0, \vec{E}_{rad}(0, t) = 0.$

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Доказать, что электрическое (7.1) и магнитное поле (7.2) движущегося заряда связаны соотношением

$$c\vec{B} = [\vec{n}, \vec{E}]$$

т.е., как и в случае плоских электромагнитных волн в свободном пространстве, магнитное поле произвольно движущегося заряда всегда перпендикулярно электрическому полю и перпендикулярно направлению (запаздывающего) наблюдения.

7.2. Доказать, что в случае полей, созданных движущимся зарядом, модуль магнитного поля всегда меньше или равен модулю электрического поля, т.е.

$$|\vec{B}| \leq |E|.$$

7.3. Доказать, что поле излучения доминирует над конвективным полем на расстояниях $R > c^2 / a$, где $a = |\vec{a}|$ – модуль ускорения заряда.

7.4. Заряд q движется по окружности радиуса R с постоянной скоростью v . Сравнить магнитные составляющие конвективного поля и поля излучения в центре окружности.

7.5. Используя решение предыдущей задачи, найти скорость заряда, при которой магнитные составляющие конвективного поля и поля излучения в центре окружности равны по модулю.

7.6. Заряд q движется по окружности в постоянном магнитном поле \vec{B} , со скоростью $\vec{v} \perp \vec{B}$. Как изменится поле излучения и конвективное поле в центре окружности, если магнитное поле увеличить в 10 раз?

7.7. Осциллирующий электрический диполь: заряд q совершает колебания по закону $\vec{r}_0(t) = d \cdot \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_x$, где \vec{e}_x – единичный вектор, задающий направление оси OX . Сравнить созданные диполем магнитные составляющие конвективного поля и поля излучения в точке P , распо-

ложенной на оси OY на расстоянии $r = 3d$ от центра диполя, в запаздывающие моменты времени $t' = 0, T/4, T/2, 3T/4, T$.

7.8. Заряд q совершает колебания по закону $\vec{r}_0(t) = d \cdot \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_x$, где \vec{e}_x – единичный вектор, задающий направление оси OX . Сравнить созданные диполем электрические составляющие конвективного поля и поля излучения в точке P , расположенной на оси OX на расстоянии $r = 3d$ от центра диполя, в запаздывающие моменты времени $t' = 0, T/4, T/2, 3T/4, T$.

7.9. Осциллирующий электрический диполь: заряд q совершает колебания по закону $\vec{r}_0(t) = d \cdot \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_x$, где \vec{e}_x – единичный вектор, задающий направление оси OX . Сравнить созданные диполем магнитные составляющие конвективного поля и поля излучения в точке P , расположенной на оси OX на расстоянии $r = 3d$ от центра диполя, в запаздывающие моменты времени $t' = 0, T/4, T/2, 3T/4, T$.

7.10. Заряд q движется по окружности радиуса R с постоянной скоростью v . Показать, с ростом скорости величина поля излучения в направлении $\vec{n} \parallel \vec{v}$ возрастает пропорционально γ^4 . Указание: используйте формулу (7.1) и формулу для двойного векторного произведения.

7.11. Заряд q движется по окружности радиуса R с постоянной скоростью v . Показать, что с ростом скорости величина поля излучения в направлении $\vec{n} \perp \vec{v}$, возрастает пропорционально v^3 . Указание: используйте формулу (1) и формулу для двойного векторного произведения.

7.12. Заряд q движется прямолинейно и равномерно со скоростью v по траектории $\vec{r}_0(t') = \vec{e}_y b + \vec{e}_x vt$. Сравнить величину электрического поля в направлении скорости и направлении, перпендикулярном скорости, в точке P , находящейся в начале координат, в различные моменты времени (построить схематичный график), когда $vt = \pm 10b, \pm 3b, 0$ при $v/c = 0.1; 0.5; 0.9$. Указание: использовать формулу (7.2).

7.13. Система зарядов: 2 одинаковых заряда q движутся равномерно по окружности радиуса R с постоянной скоростью v , оставаясь при этом на противоположных концах диаметра. Исследовать влияние интерференции на магнитные поля, создаваемые этой системой зарядов в центре окружности.

7.14. Система зарядов: 2 разноименных заряда, $+q$ и $-q$, движутся равномерно по окружности радиуса R с постоянной скоростью v , оставаясь при этом на противоположных концах диаметра. Исследовать влияние интерференции на электрические поля, создаваемые этой системой зарядов в центре окружности.

7.15. Система зарядов: 2 разноименных заряда, $+q$ и $-q$, движутся равномерно по окружности радиуса R с постоянной скоростью v , оставаясь при этом на противоположных концах диаметра. Исследовать влияние интерференции на магнитные поля, создаваемые этой системой зарядов в центре окружности.

8. ИЗЛУЧЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛ ЛАРМОРА И ЛЬЕНАРА

Общие формулы

Угловое распределение интенсивности излучения **нерелятивистского** ($v/c \ll 1$) заряда в единицу телесного угла в направлении наблюдения \vec{n} , определяется выражением :

$$\frac{dI}{dt d\Omega} = \frac{q^2 a^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c^3} \cdot \sin^2 \theta, \quad \mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2, \quad (8.1)$$

где θ – угол между вектором мгновенного ускорения \vec{a} и направлением наблюдения излучения \vec{n} . Следствия формулы (8.1):

- Нерелятивистский **ускоренный** заряд излучает в телесный угол 4π – по всем направлениям.
- Угловое распределение интенсивности излучения нерелятивистского заряда симметрично относительно направления \vec{a} .
- Излучение сконцентрировано в направлениях, перпендикулярных направлению вектора \vec{a} (сравнить с полями излучения диполя).
- Излучение в направлении \vec{a} отсутствует.

Формула Лармора – определяет полную (интеграл по всем углам наблюдения) интенсивность электромагнитного излучения **нерелятивистского** заряда:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{6} \cdot \frac{q^2 a^2}{(\pi \varepsilon_0) c^3}. \quad (8.2)$$

Формула Льенара для интенсивности излучения **релятивистского** заряда

$$\frac{dI}{dt} = Q \cdot \frac{\vec{a}^2 - [\vec{v}, \vec{a}]^2 / c^2}{(1 - v^2 / c^2)^3}, \quad Q = \frac{q^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3}. \quad (8.3)$$

Полная излученная энергия – интеграл по времени:

$$\Delta E = Q \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{a}^2 - [\vec{v}, \vec{a}]^2 / c^2}{(1 - v^2 / c^2)^3} dt. \quad (8.4)$$

Ускорение частицы, движущейся в электрическом и магнитном полях (СИ)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \cdot \sqrt{1 - v^2 / c^2} \cdot \left\{ \vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}] - \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{E}) \right\}. \quad (8.5)$$

Поэтому полная излученная энергия за все время движения

$$\Delta E = Q \left(\frac{q}{m} \right)^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \vec{E}^2 + [\vec{v}, \vec{B}]^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{E} \cdot \vec{v})^2 \right\} \cdot \frac{dt}{(1 - v^2/c^2)}. \quad (8.6)$$

Значения полей в (8.5) нужно брать в точках траектории, соответствующих времени t . Формулы (8.4) или (8.5) используют для определения потерь энергии на излучение релятивистских частиц, ускоряемых в линейных и циклических ускорителях.

Примеры решения задач

Пример 1. Выразить интенсивность электромагнитного излучения нерелятивистского заряда через классический радиус электрона

Решение. В задачах о движении и излучении заряженных частиц (особенно в ускорителях) часто удобно пользоваться внесистемными единицами:

Исходно имеем

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}, \quad 1\text{H} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2},$$

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad m_e = 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ кг}.$$

1 электронвольт = работа по перемещению элементарного электрического заряда в электрическом поле напряженностью 1В/м на расстояние 1 м.

$$1 \text{ эВ} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл В} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$$

Массу электрона измеряем в энергетических единицах: $m_e c^2 = 0.511$ МэВ

В формулы для интенсивности излучения входит тот же коэффициент, что и в формулу для закона Кулона:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{6} \cdot \frac{q^2 a^2}{(\pi\epsilon_0)c^3} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2a^2}{3c^3}$$

Удобно сделать так:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{m_e c^2}{m_e c^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot m_e c^2} \cdot m_e c^2 = r_e \cdot m_e c^2,$$

где $r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot m_e c^2} = 2.82 \cdot 10^{-15} \text{ м}$ – величина, имеющая размерность дли-

ны, которая носит название – **классический радиус электрона** и входит во многие формулы классической электродинамики.

Таким образом, если заряд частицы $q=Ze$, формула Лармора для быстрых численных расчетов принимает вид (Интенсивность выражена в МэВ/сек):

$$\frac{dI}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{q^2 a^2}{(4\pi\epsilon_0)c^3} = r_e \cdot m_e c^2 \cdot \frac{2Z^2 a^2}{3c^3}.$$

Пример 2. Оценить время жизни атома в планетарной модели Резерфорда (проблема устойчивости атома в классической электродинамике).

Решение. Если в атоме электрон движется по окружности, он теряет энергию на излучение, т. к. движется с ускорением. Пусть R – радиус окружности, Ze – заряд ядра атома. Сила, действующая на электрон, согласно закону Кулона:

$$\vec{F} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \vec{e}_R$$

Уравнение движения электрона – 2-й закон Ньютона:

$$\vec{F} = m_e \vec{a} \quad , \quad |\vec{F}| = F = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2}.$$

Находим ускорение

$$a = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{m_e} \cdot \frac{1}{R^2} = Z \cdot r_e \cdot (m_e c^2) \cdot \frac{1}{m_e} \cdot \frac{1}{R^2} \Rightarrow a = Z \cdot r_e \cdot \frac{c^2}{R^2}.$$

По формуле Лармора находим интенсивность излучения:

$$\frac{dI}{dt} = r_e \cdot m_e c^2 \cdot \frac{2a^2}{3c^3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{r_e \cdot m_e c^2}{c^3} \cdot \frac{Z^2 r_e^2 c^4}{R^4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{Z^2 r_e^3 c^3 m_e}{R^4}.$$

Энергия электрона в атоме – сумма потенциальной и кинетической

$$E = T + U = \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{R}.$$

Здесь v – скорость равномерного движения по окружности, при котором

$$a = \frac{v^2}{R} \Rightarrow v^2 = a \cdot R.$$

С другой стороны, из

$$F = ma = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \Rightarrow \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R} = maR$$

для энергии получаем:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{R^2} = \frac{1}{2}maR - maR = -\frac{1}{2}maR$$

Оцениваем: если скорость уменьшения энергии вращающегося по круговой орбите электрона определяется интенсивностью излучения, то время, за которое излучится вся энергия (электрон упадет на ядро)

$$\tau \approx \frac{|E|}{|dI/dt|} = \frac{3aRm}{2 \cdot 2} \frac{c}{a^2 r_e m_e} = \frac{3}{4} \cdot \frac{Rc}{r_e} \cdot \frac{1}{a} = \frac{3}{4} \cdot \frac{Rc}{r_e} \cdot \frac{R}{Zr_e c^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{R}{Zc} \cdot \left(\frac{R}{r_e}\right)^2.$$

Проверка размерности: $[R/c] = \text{м/м/сек} = \text{сек}$

Таким образом, через время τ – «время жизни» атома в классической электродинамике электрон упадет на ядро (проблема устойчивости классического атома Резерфорда). В классической планетарной модели атома: атом водорода $Z = 1$, $R \approx 10^{-10} \text{ м}$. И его время жизни :

$$\tau \approx \frac{3}{4} \cdot \frac{R}{Zc} \cdot \left(\frac{R}{r_e}\right)^2 \approx 10^{-9} \text{ сек}$$

Таким образом, в рамках классической физики (механика Ньютона и электродинамика Максвелла), излучение электромагнитных волн атомными электронами приводит к тому, что атом неустойчив. Проблема была решена в рамках новой – квантовой механики (Н. Бор, 1913 г.).

Пример 3. Точечный заряд q вращается с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса R . Найти среднюю за период интенсивность излучения, если линейная скорость $v \ll c$. Ответ записать с использованием R и v .

Решение. Алгоритм решения задач на нахождение интенсивности излучения:

- найти траекторию заряда;
- найти ускорение;
- подставить ускорение в формулу Лармора или Льенара.

Простейший пример применения алгоритма – заряд вращается по окружности с постоянной угловой скоростью. Пусть траектория лежит в плоскости XU :

$$\vec{r}(t) = \vec{e}_x R \cos \omega t + \vec{e}_y R \sin \omega t.$$

Скорость:
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega R [-\vec{e}_x \sin \omega t + \vec{e}_y \cos \omega t].$$

Ускорение: $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2[\vec{e}_x R \cos \omega t + \vec{e}_y R \sin \omega t] = -\omega^2\vec{r}$.

Квадрат ускорения: $\vec{a}^2 = (\omega^2 R)^2 [\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t] = \omega^4 R^2$.

Мгновенная интенсивность излучения от времени не зависит (одинакова в любой точке орбиты):

$$\frac{dI}{dt} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2a^2}{3c^3} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} q^2 \cdot R^2 \cdot \omega^4.$$

Запись с использованием скорости:

$$\vec{v}^2(t) = (\omega R [-\vec{e}_x \sin \omega t + \vec{e}_y \cos \omega t])^2 \equiv \omega^2 R^2,$$

и получаем другую форму записи:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} q^2 \cdot \frac{v^4}{R^2}.$$

Еще раз подчеркнем: при выводе этих двух формул мы не интересовались причиной, вызвавшей круговое движение, считая R , ω заданными параметрами. Важен алгоритм: траектория \rightarrow ускорение \rightarrow характеристики излучения.

Задачи для самостоятельного решения

8.1. Используя общее выражение (8.5) для ускорения релятивистской частицы, из формулы (8.4) получить формулу (8.6).

8.2. Из формулы Льенара для интенсивности излучения релятивистского заряда, полагая ($v/c \ll 1$), получить формулу Лармора для интенсивности излучения нерелятивистского заряда.

8.3. Уравнение движения нерелятивистской заряженной частицы (с зарядом q) имеет вид $y = y_0 \cos \omega t$. Найти среднюю за период движения интенсивность излучения $\langle dI/dt \rangle$.

8.4. Уравнение движения нерелятивистской заряженной частицы (с зарядом q) имеет вид $x = x_0 \cos 2\omega t$. Найти среднюю за период движения интенсивность излучения $\langle dI/dt \rangle$.

8.5. Уравнение движения нерелятивистской заряженной частицы (с зарядом q) имеет вид $y = y_0 + a \cdot t^2/\tau^2$ (y_0, a, τ – постоянные). Найти интенсивность излучения dI/dt и энергию, излученную за время $\Delta t = 0 \div \tau$.

8.6. Уравнение движения нерелятивистской заряженной частицы (с зарядом q) имеет вид $y = y_0 + vt + a \cdot t^2/\tau^2$ (y_0, v, a, τ – постоянные).

Найти интенсивность излучения dI/dt и энергию, излученную за время $\Delta t = 0 \div 2\tau$.

8.7. Уравнение движения нерелятивистской заряженной частицы (с зарядом q) имеет вид $y = y_0 + vt$ (y_0, v – постоянные).. Найти интенсивность излучения dI/dt .

8.8. Найти среднюю интенсивность излучения $\langle dI/dt \rangle$ электрона, совершающего гармонические колебания с амплитудой, $A = 0.1$ нм и частотой $\omega = 6.5 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$.

8.9. Найти интенсивность излучения нерелятивистской частицы с зарядом e и массой m , движущейся по круговой орбите радиуса R в кулоновском поле неподвижного точечного заряда q .

8.10. Нерелятивистский протон влетел в полупространство с поперечным его скорости \vec{v} однородным магнитным полем, индукция которого равна \vec{B} . Найти отношение энергии, потерянной протоном на излучение за время движения в поле, к его первоначальной кинетической энергии.

8.11. Нерелятивистская заряженная частица движется в однородном поперечном магнитном поле с индукцией \vec{B} . Найти закон убывания (за счет излучения) кинетической энергии частицы во времени. Указание: написать дифференциальное уравнение (потери энергии в единицу времени = интенсивность излучения) и решить его. Ускорение найдите, используя результаты решения задачи 8.1

8.12. Уравнение движения нерелятивистской частицы с зарядом q имеет вид $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$, где $x(t) = x_0 \cos \omega t$, $y(t) = -y_0 \cdot t^2 / \tau^2$, $z(t) = z_0$. Найти интенсивность излучения dI/dt .

8.13. Определить интенсивность излучения релятивистской заряженной частицы (с зарядом q), движущейся по траектории $\vec{r}(t) = \vec{e}_x A \sin(\omega t) + \vec{e}_y A \sin(\omega t + \pi/2)$.

8.14. Релятивистская заряженная частица с импульсом \vec{p} влетает в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} . Угол между векторами \vec{p} и \vec{B} равен 30° . Определить потери энергии на излучение за один шаг спирали.

8.15. Определить потери энергии на излучение релятивистской заряженной частицы (с зарядом q), движущейся по траектории $\vec{r}(t) = \vec{e}_x X_0 \exp(-5t/\tau) + \vec{e}_y Y_0 \exp(-5t/\tau)$, в единицу времени.

9. ПРОХОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ПЛАЗМУ

Показатель преломления электромагнитных волн (ЭМВ) при их прохождении через плазму

$$n^2 = 1 - \frac{N_0 \cdot e^2}{m_e \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (9.1)$$

где N_0 – концентрация свободных электронов в плазме, e , m_e – заряд и масса электрона, ω – частота ЭМВ, ε_0 – электрическая постоянная, ω_p – плазменная частота

$$\omega_p = \sqrt{\frac{N_0 \cdot e^2}{m_e \cdot \varepsilon_0}}. \quad (9.2)$$

Примеры решения задач

Пример 1. *Определить концентрацию свободных электронов в плазме, через которую радиоволны с частотой $\nu=900$ МГц не проходят.*

Решение. Радиоволны не проходят через плазму когда, показатель преломления мнимый: $\text{Re } n(\omega)=0$.

$$n^2(\omega) = \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость.

Так как показатель преломления должен быть мнимым, то $\varepsilon(\omega) \leq 0$.

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \leq 0, \quad 1 \leq \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega^2 \leq \omega_p^2 = \frac{N_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e},$$

где m_e – масса покоя электрона, e – заряд электрона. Следовательно,

$$\omega = 2\pi\nu = \omega_p, \quad 4\pi^2\nu^2 = \frac{N_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e},$$

$$N_0 = \frac{4\pi^2 \varepsilon_0 \nu^2 m_e}{e^2}.$$

Используем формулу для классического радиуса электрона

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2},$$

где c – скорость света, тогда

$$N_0 = \pi v^2 \frac{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}{e^2 c^2} = \frac{\pi}{r_e} \left(\frac{v}{c} \right)^2.$$

Учитывая $r_e = 2,82 \cdot 10^{-15}$ м, $v = 900$ МГц, получаем искомую концентрацию электронов плазмы:

$$N_0 = \frac{\pi}{r_e} \left(\frac{v}{c} \right)^2 = \frac{3,14}{2,82 \cdot 10^{-15}} \left(\frac{900 \cdot 10^6}{2,99 \cdot 10^8} \right)^2 = 3,34 \cdot 10^{15} \text{ 1/м}^3.$$

Пример 2. Определить концентрацию свободных электронов ионосферы, если для радиоволны с частотой $\nu = 100$ МГц показатель преломления $n = 0,9$.

Решение. Показатель преломления плазмы в высокочастотном приближении:

$$n^2(\omega) = \epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Здесь плазменная частота

$$\omega_p^2 = \frac{N_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}, \quad \omega = 2\pi\nu.$$

Исходное уравнение имеет вид:

$$1 - n^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p^2 = (1 - n^2)\omega^2 = (1 - n^2)4\pi^2\nu^2.$$

После цепочки элементарных преобразований

$$\frac{N_0 e^2}{\epsilon_0 m_e} = (1 - n^2)4\pi^2\nu^2, \quad N_0 r_e c^2 = (1 - n^2)\pi\nu^2,$$

$$N_0 = (1 - n^2) \frac{\pi\nu^2}{r_e c^2} = (1 - n^2) \frac{\pi}{r_e} \left(\frac{\nu}{c} \right)^2,$$

где r_e – классический радиус электрона. Окончательно:

$$N_0 = (1 - 0,9^2) \frac{3,14}{2,82 \cdot 10^{-15}} \left(\frac{100 \cdot 10^6}{2,99 \cdot 10^8} \right)^2 = 7 \cdot 10^{13} \text{ 1/м}^3.$$

Пример 3. Доказать, что для волн, распространяющихся в разреженной плазме с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, произведение фазовой и групповой скоростей $v(\omega) \cdot u(\omega) = c^2$.

Решение. По определению, фазовая скорость

$$v(\omega) = c/n = c/\sqrt{\varepsilon} = c/\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}.$$

Групповая скорость $u(\omega) = d\omega/dk \equiv (dk/d\omega)^{-1}$, где $k = \omega n/c$ – волновое число.

Найдем производную:

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega n}{c} \right) = \frac{1}{c} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right).$$

Следовательно, $u = \frac{c}{\left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right)}$.

Продолжая вычисления, получаем:

$$n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}, \quad \frac{dn}{d\omega} = \frac{\omega_p^2/\omega^3}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} = \frac{\omega_p^2}{\omega^3 \sqrt{\varepsilon}}.$$

$$u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon} + \omega \frac{\omega_p^2}{\omega^3 \sqrt{\varepsilon}}} = \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}.$$

Подставляем ε :

$$u = \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = c\sqrt{\varepsilon}.$$

Поэтому $v(\omega) \cdot u(\omega) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} c\sqrt{\varepsilon} = c^2$, что и требовалось доказать.

Пример 4. Исследовать зависимости вещественной $\varepsilon'(\omega)$ и мнимой $\varepsilon''(\omega)$ частей диэлектрической проницаемости одноатомной разреженной плазмы от частоты ω . Результаты представить графически.

Решение. Диэлектрическая проницаемость определяется формулой

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega},$$

где ω_p – плазменная частота, ω – частота электромагнитной волны, ω_0 – собственная частота колебаний электронов в атоме.

Выделим вещественную и мнимую части диэлектрической проницаемости.

$$\varepsilon = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega).$$

$$\text{Вещественная часть: } \varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}.$$

$$\text{Мнимая часть: } \varepsilon''(\omega) = \frac{\gamma\omega\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}.$$

Исследуем поведение действительной части $\varepsilon'(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$ и при $\omega \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varepsilon'(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2)}{(\omega_0^2)^2} \right) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}.$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varepsilon'(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \right) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\omega^2\omega_p^2(\omega_0^2/\omega^2 - 1)}{\omega^4[(\omega_0^2/\omega^2 + 1)^2 + \gamma^2/\omega^2]} \right) = 1.$$

$$\varepsilon'(\omega_0) = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega_0^2)}{(\omega_0^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega_0^2} = 1.$$

Найдем экстремумы функции $\varepsilon'(\omega)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega}(\varepsilon'(\omega)) &= \omega_p^2 \frac{d}{d\omega} \left(\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \right) = \\ &= \omega_p^2 \left(\frac{-2\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} - \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\{2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + \gamma^2 2\omega\}}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)^2} \right) = \\ &= \omega_p^2 \frac{-2\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \left(1 + \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\{-2(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2\}}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)} \right) = 0. \end{aligned}$$

Приравниваем скобку к нулю

$$\begin{aligned} 1 + \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\{-2(\omega_0^2 - \omega^2) + \gamma^2\}}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)} &= 0 \\ -(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2 + \gamma^2\omega_0^2 - \gamma^2\omega^2 &= 0. \\ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 &= \gamma^2\omega_0^2, \quad (\omega_0^2 - \omega^2) = \gamma\omega_0. \\ \omega_{\pm} &= \pm\omega_0\sqrt{1 - \gamma/\omega_0}. \end{aligned}$$

Исследуем поведение мнимой части $\varepsilon''(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$ и при $\omega \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varepsilon''(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{\gamma\omega\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \right) = 0.$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varepsilon''(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\frac{\gamma \omega \omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right) = 0.$$

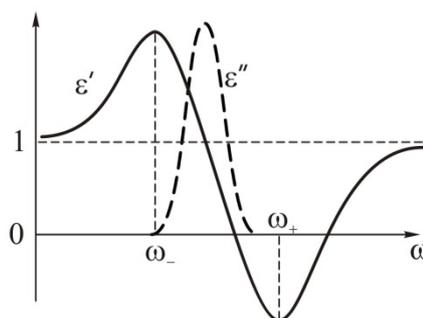
Найдем экстремумы функции $\varepsilon''(\omega)$.

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{\gamma \omega \omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon''(\omega)}{d\omega} &= \gamma \omega_p^2 \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right) = \\ &= \gamma \omega_p^2 \left[\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega(4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma^2 \omega)}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2)^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{-\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 - 4\gamma^2 \omega_0^2 + 16\omega_0^4} + 2\omega_0^2}.$$

Графики зависимостей ε' и ε'' представлены на рисунке.



Задачи для самостоятельного решения

9.1. Электромагнитная волна с частотой ω распространяется в разреженной плазме. Концентрация свободных электронов в плазме равна N_0 . Пренебрегая взаимодействием волны с ионами плазмы, найти зависимость:

- диэлектрической проницаемости плазмы от частоты ω ;
- фазовой скорости от длины волны в плазме.

Ответ:

$$\text{а) } \varepsilon = 1 - \frac{N_0 e^2}{m \varepsilon_0 \omega^2};$$

$$\text{б) } v = c \sqrt{1 + \left(\frac{N_0 e^2}{4\pi^2 m \varepsilon_0 c^2} \right) \lambda^2}.$$

9.2. Определить концентрацию свободных электронов ионосферы, если для радиоволн с частотой $\nu=1000$ МГц её показатель преломления равен $n=0,9$.

Ответ:

$$N_0 = \left(\frac{4\pi^2 \nu^2 m \varepsilon_0}{e^2} \right) (1 - n^2) = 2,4 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}.$$

9.3. При зондировании разреженной плазмы радиоволнами различных частот обнаружили, что радиоволны с $\lambda > \lambda_0 = 0,75$ м испытывают полное внутреннее отражение. Найти концентрацию свободных электронов в этой плазме.

Ответ:

$$N_0 = \left(\frac{4\pi^2 m c^2 \varepsilon_0}{e^2 \lambda^2} \right) = 2,0 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}.$$

9.4. Найти зависимость между групповой u и фазовой v скоростями для следующих законов дисперсии:

а) $v \sim 1/\sqrt{\lambda}$; б) $v \sim k$; в) $v \sim 1/\omega^2$.

Ответ:

а) $u=3v/2$; б) $u=2v$; в) $u=v/3$.

9.5. В некоторой среде связь между групповой и фазовой скоростями электромагнитной волны имеет вид $v(\omega) \cdot u(\omega) = c^2$. Найти зависимость диэлектрической проницаемости этой среды от частоты волны.

Ответ:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{A}{\omega^2}, \text{ где } A - \text{положительная постоянная.}$$

9.6. Показатель преломления кристалла LiF для света с длинами волн 404,7 486,1 и 589,3 нм равен соответственно 1,3985, 1,3984 и 1,3920. Вычислить фазовую и групповую u скорости света вблизи $\lambda=486,1$ нм.

Ответ:

$$v=c/n=0,715 \text{ с}, \quad u=[1+(\lambda/n)(dn/d\lambda)]c/n=0,706 \text{ с}.$$

9.7. Показатель преломления сапфира (Al_2O_3) для света с длинами волн 589,3 и 1000 нм равен соответственно 1,5678 и 1,7566. Во сколько раз отличаются фазовая и групповая скорости для длины волны $\lambda=1000$ нм.

Ответ:

$$v/u=[1+(\lambda/n)(dn/d\lambda)]=0,79 \text{ с}.$$

9.8. Показатель преломления воды для света с длинами волн 441,6 589,3 нм равен соответственно 1,341 и 1,334. Найти (приближенно) фазовую и групповую скорость для синей области спектра (450 нм).

Ответ:

$$v=c/n=c/1.3406, u=[1+(\lambda/n)(dn/d\lambda)]c/n=0,7340 c.$$

9.9. Соотношение между групповой и фазовой скоростями

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

называется формулой Рэлея. Используя эту формулу, показать, что на графике $v = v(\lambda)$ касательная к этой кривой при любом λ^* отсекает на оси v отрезок, длина которого равна $u(\lambda^*)$ (построение Эренфеста).

9.10. Фазовая скорость ЭМВ в ионосфере определяется формулой $v = \sqrt{c^2 + b\lambda^2}$, $b = const$. Найти групповую скорость u .

Ответ:

$$u=c^2/u.$$

9.11. Для некоторых прозрачных веществ достаточно хорошо работает формула для показателя преломления $n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$. Константы a и b – табулируются. Пусть для длин волн 759 и 486 нм показатели преломления вещества равны 1.510 и 1.521 соответственно. Найти константы a и b .

Ответ:

$$a=1,502, b=4404 \text{ нм}^2.$$

9.12. Фазовая скорость ЭМВ для $\lambda=500$ нм в воздухе $v=299713$ км/с. Если $n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$, $a=1.000273$, $b=1.54 \text{ нм}^2$. Найти скорость света в вакууме.

Ответ:

$$c=299797 \text{ км/с.}$$

9.13. Для прозрачной среды $n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$. Найти фазовую v и групповую скорости u ЭМВ в среде.

Ответ:

$$v=c/n, u = \frac{c(a - b/\lambda^2)}{(a + b/\lambda^2)^2}.$$

9.14. Пусть в среде с нормальной дисперсией фазовая скорость ЭМВ $v=\alpha\omega^\alpha$, $\alpha<0$. Найти групповую скорость.

Ответ:

$$v = \alpha\omega^\alpha(1+\alpha).$$

9.15. Пусть для показателя преломления справедлива формула

$$n^2 = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)},$$

где ω_0 – резонансная частота. Для воздуха $\omega_0 = 7,5 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. Вычислить показатель преломления n_2 воздуха для УФ излучения с длиной волны $\lambda = 300 \text{ нм}$, если известно, что при $\omega_1 = 3,109 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. Показатель преломления $n_1 = 1,00838$.

Ответ:

$$n_2 = \sqrt{\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2 + n_1^2 (\omega_0^2 - \omega_1^2)}{\omega_0^2 - \omega_2^2}} = 1.023.$$

9.16. Общая формула классической теории дисперсии для показателя преломления имеет вид

$$n = 1 + \frac{e^2 N}{2\varepsilon_0 m} \sum_k \frac{f_k (\omega_k^2 - \omega^2)}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + \gamma_k^2 \omega^2},$$

где f_k – силы осцилляторов, ω_k – частоты собственных колебаний атомных электронов и γ_k – коэффициенты затухания. Показать, что вдали от резонансов, в области $\omega \ll \omega_k$

$$n \cong 1 + \frac{e^2 N}{2\varepsilon_0 m} \left(\sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2} \right) + \omega^2 \left(\frac{e^2 N}{2\varepsilon_0 m} \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^4} \right) \quad (9.3).$$

9.17. Преобразовать полученную в предыдущей задаче формулу (9.3) к виду:

$$n \cong 1 + A \left(1 + \frac{B}{\lambda} \right) \quad (9.4),$$

где: $\lambda = 2\pi c / \omega$, A – коэффициент преломления и B – коэффициент дисперсии. **Примечание:** формула (9.4) называется формулой Коши (Cauchy's formula) и хорошо работает для газов, если λ лежит в оптическом диапазоне, а также прозрачных диэлектриков, для которых резонансы расположены в ультрафиолетовом диапазоне спектра ($\omega \ll \omega_k$). Формула (9.4) используется в предыдущих задачах.

9.18. В СТО скорость распространения сигналов $\leq c = 3 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$. В среде с $\mu = 1$ и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ скорость распространения сигнала (ЭМВ) – это групповая скорость u . Пусть $\varepsilon(\omega) > 0$ (положительна) для всех ω . Сформулировать условие (неравенство) на возможную зависимость показателя преломления n от ω .

Указание: групповая скорость $u = \frac{d\omega}{dk}$ и закон дисперсии

$$k^2 = \frac{\omega^2 \cdot \varepsilon(\omega)}{c^2} = \frac{\omega^2 \cdot n^2(\omega)}{c^2}.$$

Ответ:

$$\omega \cdot \frac{dn(\omega)}{d\omega} + [n(\omega) - 1] \geq 1.$$

9.19. Дисперсионную формулу Коши для видимой и ИК областей спектра в случае газа записывают в виде (см. задачи 9.16-9.17):

$$n - 1 = A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2} \right), \quad A = 2\pi N \cdot \alpha_0, \quad \alpha_0 = \frac{e^2}{m\omega_0^2 \varepsilon_0}, \quad B = \lambda_0^2, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}.$$

Здесь: N – число атомов в единице объема, α_0 – поляризуемость атома водорода на нулевой частоте ($\omega = 0$), ω_0 – собственная частота колебаний электрона в атоме водорода. Найдите параметры A и B для водорода. **Указание:** в атоме водорода (модель Бора) $\hbar\omega_0 = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6$ эВ и \hbar – постоянная Планка.

9.20. Показать, что дисперсионную формулу Коши (см. задачу 9.19) можно получить, исходя из соотношения Лорентц-Лоренца для показателя преломления для прозрачного материала

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi N e^2}{3m\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

в пределе низких частот $\omega \ll \omega_0$ (видимая и ИК области) и при условии разреженности среды ($(n - 1) \ll 1$).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

ЕДИНИЦЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Таблица 1

Обозначения и названия некоторых единиц

А – ампер	Гц – герц	Мкс – максвелл
Å – ангстрем	дин – дина	Н – ньютон
а.е.м. – атомная единица массы	Дж – джоуль	П – пуаз
б – барн	дптр – диоптрия	Па – паскаль
Бк – беккерель	К – кельвин	рад – радиан
В – вольт	кал – калория	с – секунда
Вб – вебер	кд – кандела	См – сименс
Вт – ватт	Кл – кулон	ср – стерadian
Гн – генри	л – литр	Тл – тесла
г – грамм	лк – люкс	Ф – фарад
Гс – гаус	лм – люмен	ч – час
	м – метр	Э – эрстед
	мин – минута	эВ – электронвольт

Таблица 2

Десятичные приставки к названиям единиц

Э – экса, 10^{18}	к – кило, 10^3	мк – микро, 10^{-6}
П – пета, 10^{15}	г – гекто, 10^2	н – нано, 10^{-9}
Т – тера, 10^{12}	д – деци, 10^{-1}	п – пико, 10^{-12}
Г – гига, 10^9	с – санти, 10^{-2}	ф – фемто, 10^{-15}
М – мега, 10^6	м – милли, 10^{-3}	а – атто, 10^{-18}

Таблица 3

Единицы величин в СИ и СГС

Величина	Единица величины		Отношение ед. СИ ед. СГС
	СИ	СГС	
Длина	м	см	10^2
Время	с	с	1
Скорость	м/с	см/с	10^2
Ускорение	м/с ²	см/с ²	10^2
Частота колебаний	Гц	Гц	1
Круговая частота	с ⁻¹	с ⁻¹	1
Угловая скорость	рад/с	рад/с	1
Угловое ускорение	рад/с ²	рад/с ²	1
Масса	кг	г	10^3
Плотность	кг/м ³	г/см ³	10^{-3}
Сила	Н	дин	10^5
Давление, напряжение	Па	дин/см ²	10
Импульс	кг м/с	г см/с	10^5
Момент силы	Н м	дин см	10^7
Энергия, работа	Дж	эрг	10^7
Мощность	Вт	эрг/с	10^7
Плотность потока энергии	Вт/м ²	эрг/(с см ²)	10^3
Момент импульса	кг м ² /с	г см ² /с	10^7
Момент инерции	кг м ²	г см ²	10^7
Вязкость	Па с	П	10
Температура	К	К	1
Теплоемкость, энтропия	Дж/К	эрг/К	10^7
Количество электричества	Кл	СГСЭ–ед.	$3 \cdot 10^9$
Потенциал	В	СГСЭ–ед.	1/300
Напряженность электрического поля	В/м	СГСЭ–ед.	1/(3000)
Электрическое смещение	Кл/м ²	СГСЭ–ед.	$12\pi \cdot 10^5$
Электрический момент диполя	Кл–м	СГСЭ–ед.	$3 \cdot 10^{11}$
Поляризованность	Кл/м ²	СГСЭ–ед.	$3 \cdot 10^5$
Емкость	Ф	см	$9 \cdot 10^{11}$
Сила тока	А	СГСЭ–ед.	$3 \cdot 10^9$
Плотность тока	А/м ²	СГСЭ–ед.	$3 \cdot 10^5$
Сопротивление	Ом	СГСЭ–ед.	$1/(9 \cdot 10^{11})$

Величина	Единица величины		Отношение ед. СИ ед. СГС
	СИ	СГС	
Удельное сопротивление	Ом м	СГСЭ–ед.	$1/(9 \cdot 10^9)$
Проводимость	См	СГСЭ–ед.	$9 \cdot 10^{11}$
Магнитная индукция	Тл	Гс	10^4
Магнитный поток	Вб	Мкс	10^8
Напряженность магнитного поля	А/м	Э	$4\pi \cdot 10^{-3}$
Магнитный момент	А м ²	СГСЭ–ед.	10^3
Намагниченность	А/м	СГСЭ–ед.	10^{-3}
Индуктивность	Гн	см	10^9
Сила света	кд	кд	1
Световой поток	лм	лм	1
Освещенность	лк		
Светимость	лм/м ²		
Яркость	кд/м ²		

Примечание. Электрические и магнитные единицы в СГС даны здесь в гауссовой системе.

Таблица 4

Некоторые внесистемные единицы

Время	1 г (год) = $3,1 \cdot 10^7$ с
	1 сут (сутки) = 86 400 с
Длина	1 А (ангстрем) = 10^{-10} м
	1 а. е. (астрономическая единица) = $1,456 \cdot 10^{11}$ м
	1 дюйм = 2,54 см (точно)
	1 кабельтов = 185,2 м
	1 миля морская = 1852 м
	1 миля сухопутная = 1609,3 м
	1 пк (парсек) = $3,1 \cdot 10^{16}$ м
	1 св. год (световой год) = $0,95 \cdot 10^{11}$ м
	1 ферми = 10^{-15} м = 1 фм
	1 фут = 30,48 см (точно)
1 ярд = 91,44 см (точно)	
Масса	1 а. е. м. (атомная единица массы) = $1,66 \cdot 10^{-27}$ кг
	1 т (тонна) = 10^3 кг

Давление	1 атм = 101,3 кПа = 760 мм. рт. ст. 1 бар = 100 кПа (точно) 1 кгс/см ² = 98,07 кПа 1 мм. рт. ст. = 133,3 Па 1 торр = 133,3 Па
Энергия	1 Вт ч (ватт час) = 3,6 кДж 1 кал (калория) = 4,187 Дж 1 эВ (электронвольт) = 1,60·10 ⁻¹⁹ Дж

Таблица 5

Фундаментальные физические константы

Скорость света в вакууме	$c = 2,998 \cdot 10^8$ м/с
Гравитационная постоянная	$\gamma = 6,672 \cdot 10^{-11}$ м ³ /(кг с ²)
Стандартное ускорение свободного падения	$g = 9,807$ м/с ²
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Стандартный объем моля газа	$V_0 = 22,41$ л/моль
Молярная газовая постоянная	$R = 8,314$ Дж/(К моль)
Постоянная Больцмана	$k = 1,3807 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная Фарадея	$F = 0,965 \cdot 10^5$ Кл/моль
Элементарный заряд	$e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл $e = 4,803 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ
Масса электрона	$m_e = 0,911 \cdot 10^{-30}$ кг $m_e = 0,511$ МэВ
Удельный заряд электрона	$e/m_e = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг $e/m_e = 5,27 \cdot 10^{11}$ СГСЭ/г
Масса протона	$m_p = 1,672 \cdot 10^{-27}$ кг
Удельный заряд протона	$e/m_p = 0,959 \cdot 10^8$ Кл/кг $e/m_p = 2,87 \cdot 10^{14}$ СГСЭ/г
Постоянная Планка	$h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж с $\hbar = \frac{h}{2\pi} \begin{cases} 1,0546 \cdot 10^{-34} \text{ Дж с} \\ 0,659 \cdot 10^{-15} \text{ Эв с} \end{cases}$
Постоянная Стефана – Больцмана	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м ² К ⁴)
Постоянная закона смещения Вина	$b = 0,29$ см К
Постоянная Ридберга	$R = 2,07 \cdot 10^{16}$ с ⁻¹ $R' = R/2\pi c = 1,097 \cdot 10^5$ см ⁻¹
Первый борковский радиус	$r_1 = 0,529 \cdot 10^{-10}$ м

Энергия связи электрона в атоме водорода	$E=13,56$ эВ
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_c = 2,426 \cdot 10^{-12}$ м $\tilde{\lambda}_c = \lambda_c/2\pi = 3,86 \cdot 10^{-13}$ м
Классический радиус электрона	$r_e = 2,82 \cdot 10^{-15}$ м
Магнетон Бора	$\mu_b = 0,9274 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл $\mu_b = 0,9274 \cdot 10^{-20}$ эрг/Гс
Ядерный магнетон	$\mu_N = 5,051 \cdot 10^{-27}$ Дж/Тл $\mu_N = 5,051 \cdot 10^{-24}$ эрг/Гс
Магнитный момент протона	$\mu_p = 2,7928 \mu_N$
Магнитный момент нейтрона	$\mu_n = -1,913 \mu_N$
Атомная единица массы	1 а.е.м. = $1,660 \cdot 10^{-27}$ кг 1 а.е.м. = 931,5 МэВ
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11}$ Ф/м $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ Гн/м

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фейман Р. Феймановские лекции по физике. – М.: Мир, 1967. – Т. 5–7.
2. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма. – М.: Наука. 2001.
3. Джексон Д. Классическая электродинамика. – М.: Мир. 1965.
4. Ахиезер А.И., Ахиезер И.А. Электромагнетизм и электромагнитные волны. – М.: Высшая Школа. 1985.
5. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2002.
6. Гильденбург В.Б., Миллер М.А. Сборник задач по электродинамике. – М.: 2001.
7. Штыков В.В. Квантовая радиофизика. – М.: Издательский центр «Академия». 2009.
8. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Горячая линия – Телеком. 2003.
9. David J. Griffiths. Introduction to Electrodynamics. 3rd Edition. Pearson Education, Inc. 1999. 6th Indian Reprint, 2005.
10. Grant I.S, & W.R.Philips. Electromagnetism. 2nd Ed., John Wiley & Sons Ltd. 1998.
11. Жданов С.А., Курнаев В.А., Романовский М.К., Цветков И.В. Основы физических процессов в плазме и плазменных установках. – Изд-во МИФИ. 2000.
12. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. – М.: Высшая Школа. 1978.
13. Крауфорд Ф. Волны (Берклеевский Курс Физики, т. III). – М.: Наука, ГРФМЛ. 1984.
14. Ильинский Ю.А., Келдыш Л.В. Взаимодействие электромагнитного излучения с веществом. – М.: Изд-во Моск. ун-та. 1989.
15. Ахманов С.А., Никитин С.Ю. Физическая оптика. – М.: Изд-во МГУ, Наука. 2004.
16. Herbert P. Neff, Jr. Introductory Electromagnetics. John Wiley & Sons, 1991.

СОДЕРЖАНИЕ

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ	3
2. ЭЛЕКТРОСТАТИКА (ВАКУУМ).....	28
3. МАГНИТОСТАТИКА	35
4. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ ВДОЛЬ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧ	41
5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОЛЕЙ. ИНВАРИАНТЫ	55
6. СИЛА ЛОРЕНЦА. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ	63
7. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ И МАГНИТНОЕ ПОЛЯ ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА. ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ И КОНВЕКТИВНОЕ ПОЛЕ	73
8. ИЗЛУЧЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛ ЛАРМОРА И ЛЬЕНАРА	82
9. ПРОХОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ПЛАЗМУ ..	88
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ЕДИНИЦЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН	97
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	102

Учебное издание

КОРОТЧЕНКО Константин Борисович
КУНАШЕНКО Юрий Петрович
ПИВОВАРОВ Юрий Леонидович
ТУХФАТУЛЛИН Тимур Ахатович

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Практикум по решению задач

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Компьютерная верстка *В.П. Аршинова*
Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 23.12.2013. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 5,99. Уч.-изд. л. 5,42.
Заказ 1467-13. Тираж 100 экз.

ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ . 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru