***Вычислим элементы ряда Тейлора для функции*** $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ ***(при условии*** $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}|$ )

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{|\vec{r}|} - (\vec{r}\,'\vec{\nabla})\frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{1}{2!}(\vec{r}\,'\vec{\nabla})^2\frac{1}{|\vec{r}|} - \ldots + \frac{1}{n!}(\vec{r}\,'\vec{\nabla})^n\frac{1}{|\vec{r}|} - \ldots$$

***При вычислении производных нам понадобятся формулы***

$$\left(\vec{a}\vec{\nabla}\right)\Phi = \vec{a}\left(\vec{\nabla}\Phi\right), \quad \vec{\nabla}|\vec{r}|^n = n|\vec{r}|^{n-2}\vec{r}\,, \quad \vec{\nabla}\left(\vec{a}\vec{r}\right) = \vec{a}$$

***Получим***

$$(\vec{r}\,'\vec{\nabla})\frac{1}{|\vec{r}|} = \left|\begin{matrix}\vec{a}=\vec{r}\,' \\ \Phi = |\vec{r}|^{-1}\end{matrix}\right\rangle = (\vec{r}\,'\vec{\nabla})\vec{r}\,'\left(\vec{\nabla}|\vec{r}|^{-1}\right) = \vec{r}\,'(-1)|\vec{r}|^{-3}\vec{r} = -\frac{\vec{r}\,'\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$(\vec{r}\,'\vec{\nabla})^2\frac{1}{|\vec{r}|} = (\vec{r}\,'\vec{\nabla})\left[(\vec{r}\,'\vec{\nabla})\frac{1}{|\vec{r}|}\right] = -(\vec{r}\,'\vec{\nabla})\frac{\vec{r}\,'\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -\vec{r}\,'\left(\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\,'\vec{r}}{|\vec{r}|^3}\right) =$$

$$= -\vec{r}\,'\left((\vec{r}\,'\vec{r})\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}|^3} + \frac{1}{|\vec{r}|^3}\vec{\nabla}(\vec{r}\,'\vec{r})\right) = -\vec{r}\,'\left((\vec{r}\,'\vec{r})(-3)|\vec{r}|^{-5}\vec{r} + \frac{1}{|\vec{r}|^3}\vec{r}\,'\right) =$$

$$= \frac{3(\vec{r}\,'\vec{r})^2}{|\vec{r}|^5} - \frac{|\vec{r}\,'|^2}{|\vec{r}|^3}$$

**Следовательно**

$$\frac{1}{|\vec r-\vec r\,'|}=\frac{1}{|\vec r|}+\frac{\vec r\vec r\,'}{|\vec r|^3}-\frac{1}{2|\vec r|^3}\left[|\vec r\,'|^2-\frac{3(\vec r\vec r\,')^2}{|\vec r|^2}\right]+\ldots$$