МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

К.Б. Коротченко, Е.А. Синицын

ФИЗИКА
КРАТКИЙ КУРС

МЕХАНИКА

Учебное пособие

Издательство
Томского политехнического университета
2011

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73
К687

Коротченко К.Б., Синицын Е.А.
Физика. Краткий курс. Механика: учебное пособие / К.Б. Коротченко, Е.А. Синицын. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 95 с.

Учебное пособие является подробным конспективным изложением разделов «Кинематика», «Динамика» и «Релятивистская механика» курса «Общая физика». Пособие подготовлено сотрудниками кафедры теоретической и экспериментальной физики Томского политехнического университета и предназначено для студентов всех специальностей негуманитарного профиля технических университетов.

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским советом Томского политехнического университета.

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор ТГПУ
Ю.П. Кунашенко

Оглавление

Глава 1

КИНЕМАТИКА

Любые перемещения *реальных тел*, существующих в Природе, из одной точки пространства в другую называют **механическим** движением. Задачей классической механики является изучение именно механических движений тел. Эта задача состоит из двух частей:

- математическое описание всех возможных механических движений изучаемого тела;

- объяснение причин движений в самых различных ситуациях, сопровождающих механические движения тела.

Первую задачу решает раздел механики, называемый **кинематикой**. Вторую – раздел механики, называемый **динамикой**.

1.1 Физическая реальность и её моделирование

Математическое описание движения *реальных тел*, существующих в Природе, *невозможно* (по крайней мере с помощью той математики, которую Человек построил до настоящего времени). Современная математика способна описать только *математическую модель* реального тела. И естественно, чем проще модель, тем проще её описание.

Самой простой моделью тела, способного двигаться, является **материальная точка**. Как известно, *материальной точкой обычно называют физическое тело,* **размерами** *которого можно пренебречь по сравнению с* **расстояниями** до тех объектов, с которыми изучаемое тело находится во **взаимодействии**.

Такое определение материальной точки позволяет создать достаточно наглядное представление об этом этом физическом объекте, однако математически *неконструктивно* (т.е. не содержит в себе элементов математической модели, указывающих, как описывать такой физический объект на языке математики).

Мы введём несколько иное определение материальной точки. Прежде всего, подчеркнём, что **материальная точка** — это *математическая абстракция* реального тела Природы. И соответственно, **материальной точкой** *будем называть любую точку пространства, которой приписаны* **все** *физические параметры данного тела.*

Из такого определения материальной точки ясно, что на языке математики описание положения материальной точки в пространстве эквивалентно описанию положения любой точки пространства. Но для описания положения точки в пространстве прежде всего необходимо задать **систему координат** (сокращенно – СК).

Системой координат *будем называть правило, по которому каждой точке пространства можно поставить в соответствие n чисел, называемых* **координатами точки**. *Минимальное число* координат, необходимое для описания положения точки в пространстве, называют **размерностью пространства**.

Опыт показывает, что *физическое пространство* **трехмерно** (т.е. $n = 3$). Простейшим примером СК является **декартова** система: три взаимно перпендикулярные числовые оси, проведенные из одной точки пространства, называемой **началом системы**. Причём, каждой числовой оси присваивают некоторое обозначение (для декартовой СК — это обычно: X, Y, и Z). На рисунке для примера представлена декартова СК (с началом в точке O и осями X, Y и Z) для которой качественно изображена процедура отыскания координат (x, y, z) некоторой материальной точки M в этой системе.

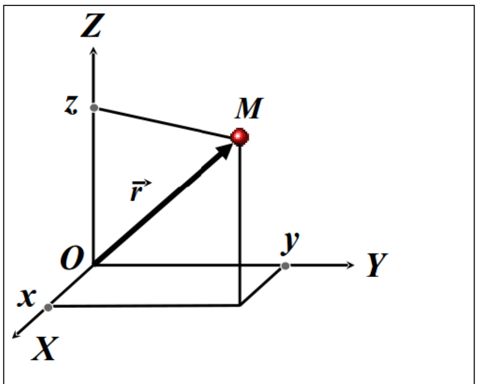


Рис. 1.1.

Однако, чтобы описывать не просто положение точки, а именно её движение — необходимо иметь возможность учитывать изменение положения изучаемой материальной точки в пространстве с течением времени. В физике процедура, позволяющая определить и систему координат, и способ измерения времени называется заданием системы отсчёта (сокращенно – СО).

Более точно, **системой отсчёта** *будем называть совокупность* **базиса** *и* **градуировки**. При этом:

- **базисом** *будем называть множество физических лабораторий (реальных, или воображаемых), расположенных во всех точках пространства и снабжённых приборами для измерения промежутков времени и отрезков длины;*

- **градуировкой** *будем называть правило, по которому каждому событию в физическом пространстве, можно поставить в соответствие* 4 *(четыре) числа,* 3 *(три) из которых определяют координаты этого события (т.е. задают СК), а четвёртое – момент времени, в который это событие произошло.*

В соответствии с данным определением, систему отсчёта обычно изображают в двух видах:

- СК одна из осей которой является осью времени (это возможно, если изучается движение материальной точки на плоскости, или вдоль прямой);

- СК с дополнительным обозначением, указывающим на возможность измерения времени (обычно – буква K).

Рассмотрим движение материальной точки относительно некоторой СО K. Пусть за промежуток времени от момента t_1 до момента t_2 материальная точка переместилась из точки M_1 пространства в точку M_2 вдоль линии L (называемой, как известно, **траекторией**). Соединим начало СК (совмещенной с выбранной СО) с точками M_1 и M_2 отрезками, направленными к точкам (отрезки OM_1 и OM_2). Каждый из этих отрезков является, очевидно, вектором и называется **радиус-вектором** материальной точки. Таким образом

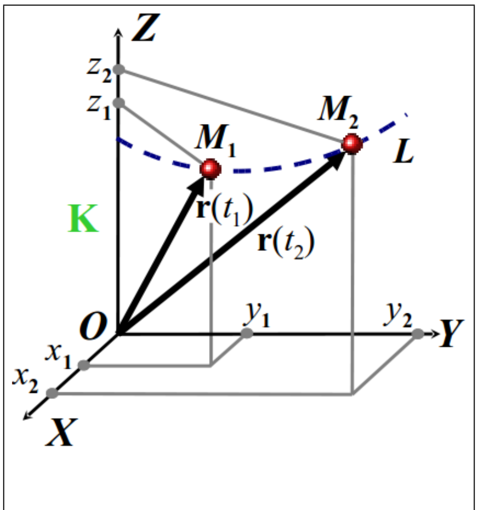


Рис. 1.2.

$$OM_1 \, : \, \vec{r}_1 \, = \, (x_1, y_1, z_1), \qquad OM_2 \, : \, \vec{r}_2 \, = \, (x_2, y_2, z_2),$$

Следовательно, задание радиус-вектора материальной точки в какой-либо момент времени эквивалентно заданию её координат в этот момент времени и, таким образом, *полностью определяет положение точки относительно выбранной СК*.

При движении материальной точки вдоль траектории положение её радиус вектора меняется. Уравнение, описывающее положение радиус вектора относительно выбранной СО, можно записать в векторном виде, или в координатной форме

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \iff \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Эти уравнения называют **уравнениями движения** *материальной точки.* Напомним, что уравнения (1.1.1) являются уравнениями линии в пространстве, записанными в параметрической форме. Причём роль параметра играет время t. Сама же линия — это траектория материальной точки. Уравнения (1.1.1) можно также записать в виде $f(x, y, z) = 0$, то есть исключить из этих уравнений параметр (время t) и найти зависимость между пространственными координатами изучаемой материальной точки при её движении вдоль траектории. Уравнения движения, записанные в такой форме, в физике называют **уравнением фазовой траектории**.

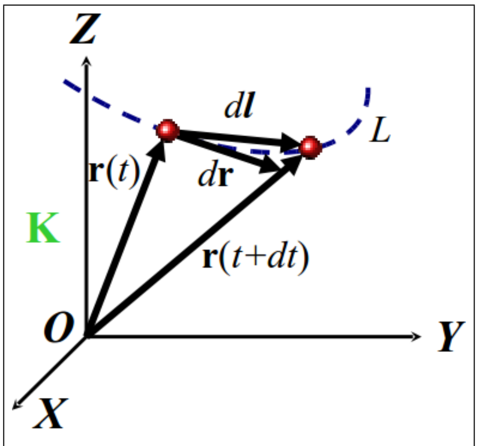


Рис. 1.3.

Рассмотрим *элементарное* (или, как говорят математики, *бесконечно-малое*) перемещение $d\vec{l}$ материальной точки вдоль траектории, происшедшее за элементарное время dt. Элементарный отрезок $|d\vec{l}|$, соединяющий начальное и конечное положения материальной точки в этом случае, должен быть линейным приближением соответствующего криволинейного отрезка траектории $d\breve{l}$.

Тогда, согласно геометрическому смыслу дифференциала, отрезок $|d\vec{l}|$ должен лежать на касательной к траектории в точке, соответствующей начальному положению. Поэтому, вектор $d\vec{r}$, направленный вдоль касательной к траектории материальной точки, называют **век-**

тором элементарного перемещения, а его длину — **элементарным путём** dS

$$|d\vec{r}| \;=\; dS\,. \tag{1.1.2}$$

Сумма элементарных путей вдоль траектории даст, очевидно, *длину траектории*, то есть **путь**, *пройденный материальной точкой.* По определению, сумма бесконечно-малых (т.е. элементарных) есть интеграл. Таким образом

$$S \;=\; \int\limits_L |d\vec{r}|\,, \tag{1.1.3}$$

где S — *путь*, пройденный материальной точкой, $\int\limits_L$ - обозначение контурного интеграла вдоль траектории L этой точки.

Заметим, что определение (1.1.3) представляет путь, как сумму модулей (т.е. положительных величин) и следовательно *путь, пройденный материальной точкой может* **только возрастать**.

Производную радиус-вектора по времени в любой данной точке траектории называют **вектором скорости** *материальной точки*

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \iff \begin{cases} v_x = dx(t)/dt, \\ v_y = dy(t)/dt, \\ v_z = dz(t)/dt. \end{cases} \tag{1.1.4}$$

Согласно только что введённому определению (и с учетом смысла производной), скорость измеряет быстроту изменения положения радиус-вектора при движении материальной точки в пространстве. Очевидно, что вектор скорости (как и $d\vec{r}$) направлен по касательной к траектории.

Величина скорости *есть модуль* (длина) *вектора скорости* и следовательно по определению (1.1.4)

$$|\vec{v}(t)| \;=\; |d\vec{r}(t)/dt| \;\overset{\nearrow\, dt>0}{=}\; |d\vec{r}(t)|/dt \;\underset{\searrow\,\text{согласно (1.1.2)}}{=}\; dS/dt\,. \tag{1.1.5}$$

Таким образом, ***величина скорости*** *есть производная пути по времени* и показывает быстроту возрастания пути, пройденного материальной точкой, со временем.

Далее, *производную вектора скорости по времени* в любой данной точке траектории называют **вектором ускорения** *материальной точки*

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \iff \begin{cases} a_x = dv_x(t)/dt = d^2x(t)/dt^2, \\ a_y = dv_y(t)/dt = d^2y(t)/dt^2, \\ a_z = dv_z(t)/dt = d^2z(t)/dt^2. \end{cases} \tag{1.1.6}$$

Аналогично скорости, ускорение измеряет быстроту изменения вектора скорости при движении материальной точки в пространстве.

В отличие от вектора скорости, который всегда направлен по касательной к траектории, вектор ускорения не зависит от направления движения материальной точки.

1.2 Скорость при произвольном движении

Будем изучать свойства кинематических характеристик движения – скорости и ускорения – в каждый данный момент времени. Для этого нам понадобится понятие «моментальной» системы координат: *моментальной будем называть такую систему координат, которая задана только для данного момента времени* t. В любой другой момент времени нужно будет, в общем случае, выбрать другую СК.

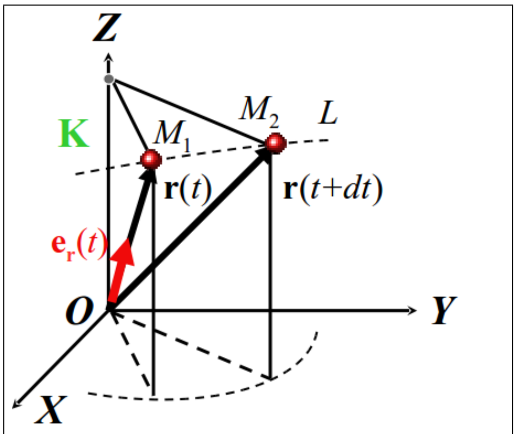


Рис. 1.4.

Как обычно, рассмотрим движение материальной точки относительно системы отсчёта K. Пусть за элементарное время dt от интересующего нас момента t материальная точка переместилась из точки пространства M_1 в точку пространства M_2. Выберем направление оси OZ моментальной декартовой системы координат (связанной с системой отсчёта K) таким образом, чтобы точки M_1 и M_2 лежали в плоскости, параллельной координатной плоскости XY. Представим радиус-вектор материальной точки в виде произведения единичного вектора $\vec{e}_r(t)$, направленного вдоль радиус-вектора (в любой момент времени), и модуля (длины) радиус-вектора

$$\vec{r}(t) = \vec{e}_r(t)|\vec{r}|. \tag{1.2.1}$$

Тогда вектор скорости примет вид

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{e}_r(t)\frac{|d\vec{r}(t)|}{dt} + |\vec{r}(t)|\frac{d\vec{e}_r(t)}{dt}. \tag{1.2.2}$$

Таким образом, вектор скорости материальной точки при любом её движении может быть представлен в виде суммы двух компонент. Одна компонента направлена вдоль радиус-вектора

$$\vec{v}_r(t) = \vec{e}_r(t)\frac{|d\vec{r}(t)|}{dt} \tag{1.2.3}$$

и называется **скоростью прямолинейного движения** материальной точки. Другая, очевидно, перпендикулярна радиус-вектору

$$\vec{v}_n(t) = |\vec{r}(t)|\frac{d\vec{e}_r(t)}{dt}. \tag{1.2.4}$$

Название компоненты $\vec{v}_n$ мы введём после выяснения смысла производной единичного вектора $\vec{e}_r$ по времени.

Для того, чтобы найти эту производную сделаем дополнительные построения: проведём единичные вектора вдоль первоначального положения радиус-вектора частицы (т.е. вдоль вектора $\vec{OM}_1$ – $\vec{e}_r(t)$) и вдоль его положения через элементарный промежуток времени dt (т.е. вдоль вектора $\vec{OM}_2$ – $\vec{e}_r(t+dt)$). Угол между осью OZ и радиус-вектором частицы обозначим за θ.

Далее проведём перпендикуляры к оси OZ из концов единичных векторов. В силу того, что концы единичных векторов (как и точки M_1, M_2) лежат в плоскости, параллельной плоскости XY, перпендикуляры из этих точек попадут в одну точку оси OZ — точку z_1. Соответственно, сами перпендикуляры образуют отрезки z_1a и z_1b, а треугольник z_1ab параллелен плоскости XY. Тогда $e_1 = |\vec{e}_r(t)|\sin\theta$ — есть величина проекции первоначального положения единичного вектора на отрезок z_1a, а $e_2 = |\vec{e}_r(t+dt)|\sin\theta$ — величина проекции этого вектора через элементарный промежуток времени dt на отрезок z_1b.

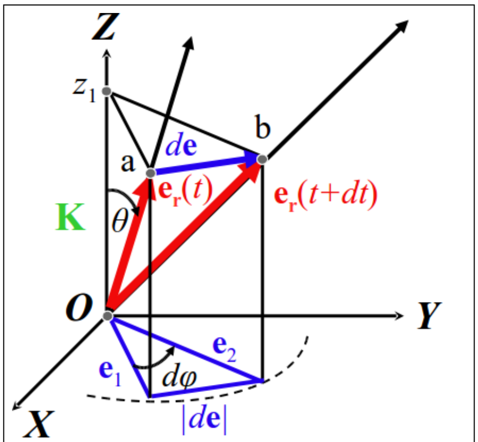


Рис. 1.5.

Обозначим элементарный угол между первоначальным и конечным положениями материальной точки в плоскости XY (т.е. между отрезками e_1 и e_2) за $d\varphi$. Тогда длина элементарного отрезка $d|\vec{e}|$, соединяющего концы отрезков e_1 и e_2, будет равна

$$d|\vec{e}| \; = \; e_1 d\varphi \; = \; |\vec{e}_r| \sin\theta d\varphi. \tag{1.2.5}$$

Напомним, что производную угла поворота частицы по времени называют *угловой скоростью* частицы

$$\omega \; = \; \frac{d\varphi}{dt}. \tag{1.2.6}$$

Следовательно, из равенства (1.2.5) получаем, что

$$\frac{d|\vec{e_r}|}{dt} \; = \; |\vec{e_r}|\omega \sin\theta. \tag{1.2.7}$$

По определению, величина векторного произведения любых двух векторов, например $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| \; = \; |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) \tag{1.2.8}$$

Таким образом, принимая, что **вектор угловой скорости** *направлен* **вдоль оси вращения** (т.е. по оси Z), получаем

$$\frac{d\vec{e_r}}{dt} \; = \; [\vec{\omega}, \vec{e_r}]. \tag{1.2.9}$$

Согласно определению (1.2.4), компоненту скорости, перпендикулярную радиус-вектору материальной точки, можем записать теперь в виде

$$\boxed{\vec{v}_n(t) \; = \; [\vec{\omega}, \vec{r}].} \tag{1.2.10}$$

Откуда ясно, что эта скорость является характеристикой вращательного движения материальной точки (показывает скорость вращения радиус-вектора материальной точки вокруг оси вращения – в нашем случае оси Z) и называется, соответственно, **скоростью вращательного движения**.

Итак, мы получили, что

любое движение материальной точки
можно разложить на **два движения:**
прямолинейное – *вдоль радиус-вектора*
(со скоростью $\vec{v}_r$)
и **вращательное** – *относительно начала системы отсчёта*
(со скоростью $\vec{v}_n$)

Соответственно, **вектор скорости** частицы, *в любой точке её траектории* можно разложить на **две компоненты:**

- скорость $\vec{v}_r$ *прямолинейного движения* (формула (1.2.3)
- и скорость $\vec{v}_n$ *вращательного движения* (формула (1.2.10).

То есть, можно написать

$$\boxed{\vec{v}(t) \ = \ \vec{e}_r(t)\frac{d|\vec{r}(t)|}{dt} \ + \ [\vec{\omega}(t), \vec{r}(t)].} \tag{1.2.11}$$

Уточним, что изменение направления вектора $\vec{\omega}(t)$ с течением времени эквивалентно изменению направления оси Z (как и осей X, Y) «моментальной» декартовой СК.

1.3 Ускорение при произвольном движении

Как и в предыдущем пункте, будем изучать движение материальной точки относительно системы отсчёта K. Пусть, как и прежде, за элементарное время dt материальная точка переместилась из точки пространства M_1 в точку пространства M_2.

Представим теперь вектор скорости материальной точки $\vec{v}$ в виде произведения единичного вектора $\vec{e}_\tau(t)$, направленного вдоль вектора скорости (в любой момент времени), и модуля (длины) вектора скорости

$$\vec{v}(t) \ = \ \vec{e}_\tau(t)|\vec{v}|. \tag{1.3.1}$$

Тогда вектор ускорения примет вид

$$\vec{a}(t) \ = \ \frac{d}{dt}\left(\vec{e}_\tau(t)|\vec{v}|\right) \ = \ \vec{e}_\tau(t)\frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} \ + \ |\vec{v}(t)|\frac{d\vec{e}_\tau(t)}{dt}. \tag{1.3.2}$$

В последнем слагаемом в формуле (1.3.2) сделаем замену переменных:

$$\frac{d\vec{e}_\tau(t)}{dt} = \frac{d\vec{e}_\tau}{dS}\underbrace{\frac{dS}{dt}}_{\text{согласно (1.1.5) это } |\vec{v}|} = |\vec{v}(t)|\frac{d\vec{e}_\tau}{dS} \tag{1.3.3}$$

и введём обозначение

$$\mathcal{R} = 1 \Bigg/ \left|\frac{d\vec{e}_\tau}{dS}\right|. \tag{1.3.4}$$

Тогда для ускорения получим

$$\boxed{\vec{a}(t) = \vec{e}_\tau\frac{d|\vec{v}(t)|}{dt} + \frac{|\vec{v}|^2}{\mathcal{R}}\vec{e}_n,} \tag{1.3.5}$$

где $\vec{e}_n$ — единичный вектор, перпендикулярный вектору скорости (т.е. перпендикулярный единичному вектору $\vec{e}_\tau$). Первое слагаемое в этой формуле обозначают символом a_τ и называют **тангенциальным** (т.е. касательным к вектору скорости) **ускорением**. Соответственно, второе слагаемое обозначают символом a_n и называют **нормальным** (к скорости) **ускорением**.

Выясним смысл величины $\mathcal{R}$, введённой равенством (1.3.4). Для этого рассмотрим движение материальной точки по окружности с постоянной по величине скоростью (т.е. с постоянным по времени вектором угловой скорости $\vec{\omega} = const$ и радиус-вектором $|\vec{r}\,| = const$). В этом случае $\vec{v} = \vec{v}_n$ и для ускорения получим

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}_n}{dt} \underset{\text{см. (1.2.10)}}{=} \frac{d}{dt}\left[\vec{\omega}, \vec{r}\right] \overset{\omega = const}{=} \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \Big[\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}]\Big]. \tag{1.3.6}$$

Последнее выражение в этой формуле содержит двойное векторное произведение, которое можно преобразовать по формуле

$$\Big[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]\Big] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}). \tag{1.3.7}$$

Последнее соотношение легко запомнить по мнемоническому правилу: **bac-cab** (читается «бац-цаб»).

Следовательно, $\vec{a}(t) = \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{r}) - \vec{r}\omega^2$. Но, при движении материальной точки по окружности вектор её угловой скорости $\vec{\omega}$ перпендикулярен радиус-вектору $\vec{r}$. То есть, скалярное произведение этих векторов равно нулю $(\vec{\omega}, \vec{r}) = 0$. И мы получаем

$$\vec{a}(t) = -\vec{r}\omega^2 \tag{1.3.8}$$

Величина этого ускорения равна $|\vec{a}| = |\vec{r}|\omega^2$. Тогда вспоминая, что величина угловой скорости $\omega = |\vec{v}|/R$, (здесь буквой R мы обозначили длину радиус-вектора $|\vec{r}|$, т.е. радиус окружности) приходим к известному выражению

$$|\vec{a}(t)| = \frac{|\vec{v}|^2}{R} = |\vec{a}_{\text{ц}}|. \tag{1.3.9}$$

Следовательно при движении по окружности с постоянной скоростью нормальное ускорение материальной точки является *центростремительным ускорением* $|\vec{a}_{\text{ц}}|$.

Сравнивая формулу для нормального ускорения (второй член в формуле (1.3.5)) с последней формулой, видим, что при движении материальной точки по окружности величина $\mathcal{R}$ совпадает с радиусом окружности R.

Очевидно при произвольном движении материальной точки величина $\mathcal{R}$ тоже будет равна радиусу некоторой **моментальной** (т.е. соответствующей данному моменту времени) окружности. Другими словами результат, полученный в формуле (1.3.5), означает, что

> в любой точке траектории
> **движение материальной точки**
> можно рассматривать как
> **вращательное движение по моментальной окружности**,
> *радиус которой* равен $\mathcal{R}$
> (с касательным $\vec{a}_\tau$ и нормальным $\vec{a}_n$ ускорениями).

Саму величину $\mathcal{R}$ называют **радиусом кривизны траектории** в данной точке.

На рисунке приведён пример разложения полного ускорения материальной точки (находящейся в данный момент времени в точке пространства M) на его составляющие: *нормальное* и *тангенциальное* ускорения. Для этой же точки M построена моментальная окружность с центром в точке O, радиус которой равен радиусу кривизны траектории $\mathcal{R}$ в точке M и численно равен отрезку OM.

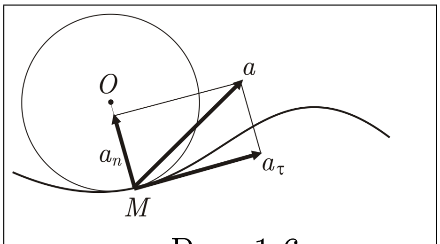


Рис. 1.6.

1.3.1 Радиус кривизны

Выясним теперь, как же вычислять радиус кривизны, если известно уравнение движения материальной точки. Для упрощения выкладок, будем рассматривать только **плоские** траектории частиц (т.е. такие, при движении по которым, частица всегда остается в одной плоскости).

Очевидно для описания плоской траектории достаточно двух независимых координат. Поэтому выберем в качестве СК декартову (X, Y), совмещённую с системой отсчёта K. По определению (1.3.4) радиус кривизны есть

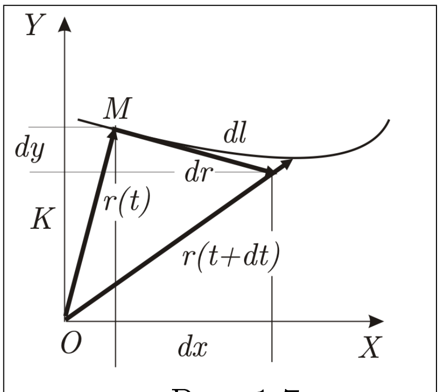


Рис. 1.7.

$$\mathcal{R} = 1 \Big/ \left|\frac{d\vec{e}_\tau}{dS}\right|.$$

Следовательно требуется найти производную единичного вектора $\vec{e}_\tau$ по пути, пройденному материальной точкой.

Согласно определению (1.1.2), элементарный путь dS, есть $dS = |d\vec{r}|$. Учитывая, что траектория частицы плоская, получим

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2}, \tag{1.3.10}$$

где штрих означает производную по координате x: $y' = dy/dx$. Тогда производную единичного вектора $\vec{e}_\tau$ можно представить следующим образом:

$$\frac{d\vec{e}_\tau}{dS} = \frac{d\vec{e}_\tau}{\sqrt{1 + y'^2}dx}. \tag{1.3.11}$$

Единичный вектор вдоль скорости можно, очевидно, представить в виде отношения собственно вектора скорости $\vec{v}$ к его длине $|\vec{v}|$. Если же вспомнить, что согласно формуле (1.1.5) $|\vec{v}(t)| = dS/dt$, то получим для единичного вектора

$$\vec{e}_\tau(t) = \frac{d\vec{r}}{dS}. \tag{1.3.12}$$

Тогда (1.3.11) принимает вид:

$$\frac{d\vec{e}_\tau}{dS} = \frac{d}{\sqrt{1+y'^2}dx}\left(\frac{d\vec{r}}{\sqrt{1+y'^2}dx}\right). \tag{1.3.13}$$

Если расписать радиус-вектор покомпонентно: $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y$, то несложно найти его производную $d\vec{r}/dx$. Именно

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = \vec{i} + \vec{j}y'. \tag{1.3.14}$$

Следовательно для производной единичного вектора получаем

$$\frac{d\vec{e}_\tau}{dS} = \frac{d}{\sqrt{1+y'^2}dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}(\vec{i} + \vec{j}y')\right). \tag{1.3.15}$$

Производную в этом выражении будем брать как производную произведения двух функций: $(1+y'^2)^{-1/2}$ и $(\vec{i} + \vec{j}y')$. Тогда

$$\frac{d\vec{e}_\tau}{dS} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\left[-\frac{1}{2}(1+y'^2)^{-3/2}(2y'y'')(\vec{i} + \vec{j}y') + \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\vec{j}y''\right]. \tag{1.3.16}$$

Вынесем (из выражения в квадратных скобках) член $(1+y'^2)$ и сгруппируем внутри скобок множители перед единичными векторами $\vec{i}$ и $\vec{j}$

$$\frac{d\vec{e}_\tau}{dS} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}^{\,3}}\left[\left(y''\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2y''}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\vec{j} - \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}\vec{i}\right]. \tag{1.3.17}$$

Преобразуем теперь выражение в круглых скобках (приведем к общему знаменателю и раскроем скобки в числителе)

$$\left(y''\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2y''}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = \frac{y''\sqrt{1+y'^2}^{\,2} - y'^2y''}{\sqrt{1+y'^2}} =$$

$$= \frac{y'' + y''y'^2 - y'^2y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}}. \qquad (1.3.18)$$

Таким образом, для производной единичного вектора $\vec{e}_\tau$ получаем

$$\frac{d\vec{e}_\tau}{dS} = \frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}^{\,3}}\left[\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}}\vec{j} - \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\vec{i}\right]. \qquad (1.3.19)$$

Модуль этой производной, как и любого вектора, равен корню из *суммы квадратов её компонент*

$$\left|\frac{d\vec{e}_\tau}{dS}\right| = \left|\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}^{\,3}}\right|\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}^{\,2}} + \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}^{\,2}}}\,. \qquad (1.3.20)$$

Легко убедиться, что выражение под корнем равно 1 (еденице). Следовательно радиус кривизны плоской траектории частицы можно вычислить по формуле

$$\boxed{\mathcal{R} = \left|\frac{d\vec{e}_\tau}{dS}\right|^{-1} = \left|\frac{\sqrt{1+y'^2}^{\,3}}{y''}\right|.} \qquad (1.3.21)$$

Заметим, что полученную формулу имеет смысл применять в тех случаях, когда уравнение траектории задано в виде уравнения *фазовой траектории* $y = y(x)$ (или его можно привести к такому виду). Если же уравнение траектории задано в параметрической форме (т.е. $y = y(t)$ и $x = x(t)$), то нужно пользоваться другой формулой (которую приведем без вывода)

$$\boxed{\mathcal{R} = \left|\frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}^{\,3}}{\ddot{y}\dot{x}+\dot{y}\ddot{x}}\right|,} \qquad (1.3.22)$$

где $\dot{x}$ и $\dot{y}$ - обозначение производной переменных x и y по времени t.

1.4 Типы ускорений

В пункте 1.2 было установлено, что любое движение материальной точки можно разложить на два типа движений: прямолинейное (вдоль радиус-вектора) и вращательное (относительно начала СО). Соответственно, вектор скорости частицы допускает представление в виде векторной суммы скоростей, характеризующих эти движения (скорости $\vec{v}_r$ и $\vec{v}_n$).

Очевидно, такое представление о движении сказывается и на ускорении. Выясним, какие *типы ускорений* должны характеризовать движение материальной точки, чтобы быть согласованными с возможностью разложения этого движения на прямолинейное и вращательное.

Согласно определению (1.1.6)

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}.$$

Если вспомнить здесь выражение для скорости (1.2.11), то для ускорения получим

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(\vec{e}(t)\frac{d|\vec{r}(t)|}{dt} + [\vec{\omega}(t), \vec{r}(t)]\right) \tag{1.4.1}$$

Из этого выражения, используя правило для производной произведения, несложно найти, что (указание зависимости от времени для краткости опускаем)

$$\vec{a}(t) = \vec{e}\,\frac{d^2|\vec{r}|}{dt^2} + \frac{d\vec{e}}{dt}\frac{d|\vec{r}|}{dt} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right]. \tag{1.4.2}$$

Напомним, что производную угловой скорости частицы по времени называют *угловым ускорением* частицы

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.} \tag{1.4.3}$$

Воспользуемся ещё формулой (1.2.9) для производной единичного вектора $\vec{e}$ по времени t. Тогда

$$\vec{a} = \vec{e}\,\frac{d^2|\vec{r}|}{dt^2} + \frac{d|\vec{r}|}{dt}[\vec{\omega},\vec{e}\,] + [\vec{\varepsilon},\vec{r}\,] + \left[\vec{\omega}, \underbrace{\left(\vec{e}\,\frac{d|\vec{r}|}{dt} + [\vec{\omega},\vec{r}\,]\right)}_{\text{скорость } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}\right] \quad (1.4.4)$$

Если теперь раскрыть скобки в последнем векторном произведении, то получим

$$\vec{a} = \vec{e}\,\frac{d^2|\vec{r}|}{dt^2} + 2\left[\vec{\omega}, \vec{e}\,\frac{d|\vec{r}|}{dt}\right] + [\vec{\varepsilon},\vec{r}\,] + \Big[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}\,]\Big]. \quad (1.4.5)$$

В пункте 1.2, величину $d|\vec{r}|/dt$ мы назвали скоростью прямолинейного движения материальной точки и обозначили $\vec{v}_r(t)$. Соотвественно, величину $\vec{a}_r$

$$\vec{a}_r = \vec{e}\,\frac{d^2|\vec{r}|}{dt^2}, \quad (1.4.6)$$

будем называть **ускорением прямолинейного** (вдоль радиус-вектора) **движения** материальной точки.

С помощью этих обозначений, выражение для ускорения материальной точки принимает вид

$$\vec{a} = \vec{a}_r + 2\,[\vec{\omega},\vec{v}_r] + [\vec{\varepsilon},\vec{r}\,] + \Big[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}\,]\Big]. \quad (1.4.7)$$

В полученном выражении только первый член (т.е. $\vec{a}_r$) характеризует *движение* частицы *вдоль радиус вектора.* Следовательно остальные три члена характеризуют *вращательное движение* материальной точки *относительно начала* системы отсчёта. Исторически эти три составляющие ускорения частицы разбивают на два

$$\boxed{\vec{a}_\xi = [\vec{\varepsilon},\vec{r}\,] + \Big[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}\,]\Big],} \quad (1.4.8)$$

$$\boxed{\vec{a}_k = 2\,[\vec{\omega},\vec{v}_r].} \quad (1.4.9)$$

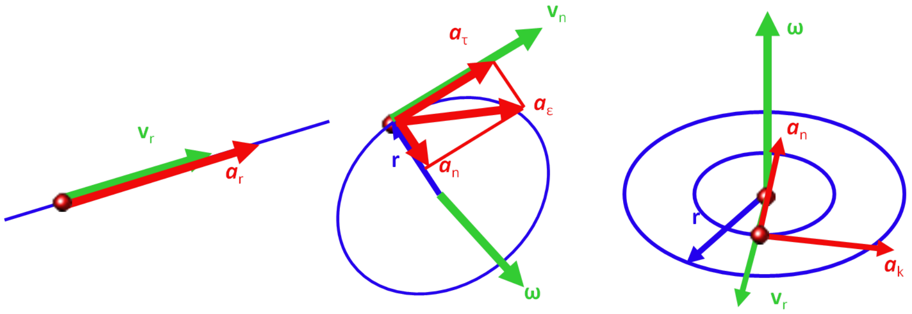
Составляющую ускорения $\vec{a}_\xi$ называют **переносным ускорением**. Оно *характеризует изменение скорости* при движении материальной точки *по дуге моментальной окружности.*

Составляющую ускорения $\vec{a}_k$ называют **кориолисовым ускорением** (по имени французского ученого Кориолиса, изучавшего движения с таким ускорением). Это ускорение *характеризует изменение скорости* при движении материальной точки *вдоль радиуса* **вращающейся** *моментальной окружности.*

Чтобы более наглядно представить свойства введённых составляющих полного ускорения, рассмотрим примеры движений частицы, при которых эти составляющие возникают.

а) Частица движется *прямолинейно.* Тогда

Кинематические условия движения	Кинематические характеристики движения (рис. 1.8а)
$\vec{\omega} = 0$ $(\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt = 0)$	$\vec{a} = \vec{a}_r = \vec{e}\, d^2|\vec{r}|/dt^2$ $\vec{v} = \vec{v}_r = \vec{e}\, d|\vec{r}|/dt$



а) б) в)

Рис. 1.8.

б) Частица движется *по дуге окружности.* Тогда

Кинематические условия движения	Кинематические характеристики движения (рис. 1.8б)
$r = const$ $\vec{\omega} \perp \vec{r}$	$\vec{a} = \vec{a}_\xi = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}\,] + [\vec{\omega}, [\vec{\omega}, \vec{r}\,]\,] =$ $= \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{r}) - \vec{r}\omega^2 + [\vec{\varepsilon}, \vec{r}\,] =$ $= \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$ $\vec{v} = \vec{v}_n = [\vec{\omega}, \vec{r}\,].$

Здесь, при получении выражения для ускорения, мы воспользовались формулой (1.3.7) для вычисления двойного векторного произведения.

в) Частица движется *по радиусу вращающегося круга* (диска). Тогда

Кинематические условия движения	Кинематические характеристики движения (рис. 1.8в)
$\vec{\omega} = const$ $\vec{v}_r = const$ $\vec{\omega} \perp \vec{r}$	$\vec{a} = 2\,[\vec{\omega}, \vec{v}_r] - \vec{r}\omega^2 =$ $= \vec{a}_k + \vec{a}_n$ $\vec{v} = \vec{v}_r + [\vec{\omega}, \vec{r}\,] = \vec{v}_r + \vec{v}_n.$

Следует обратить внимание на то, что **невозможно** построить движение при котором ускорение материальной точки сводилось бы *только к кориолисову ускорению.*

1.5 Восстановление уравнения движения

Зная уравнение движения, то есть зависимость радиус-вектора от времени $\vec{r} = \vec{r}(t)$, можно найти скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ материальной точки в каждый момент времени. Это так называемая **прямая задача**. Возникает вопрос: можно ли найти уравнение траектории $\vec{r} = \vec{r}(t)$, зная зависимость от времени скорости $\vec{v}(t)$ или ускорения $\vec{a}(t)$? Решение этой проблемы называют **обратной задачей**.

1.5.1 По заданной скорости

Пусть нам задан вектор скорости материальной точки как функция времени

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\,. \tag{1.5.1}$$

И требуется найти уравнение траектории, то есть зависимость $\vec{r} = \vec{r}(t)$, по этому вектору. Очевидно из (1.5.1) можно получить, что $d\vec{r}(t) = \vec{v}(t)dt$. Интегритруя это уравнение в пределах от начального момента времени t_0 до любого текущего t, получим

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt\,, \tag{1.5.2}$$

или

$$\boxed{\vec{r}(t) \;=\; \vec{r}(t_0) \;+\; \int\limits_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt\,,} \tag{1.5.3}$$

где $\vec{r}(t_0)$ - радиус вектор точки в начальный момент времени. Таким образом мы видим, что

> для **восстановления уравнения движения**
> по **заданной скорости**
> необходимо знать
> **начальное положение** материальной точки.

Рассмотрим для примера частицу, движущуюся таким образом, что вектор её скорости остается неизменным и по величине и по направлению (т.е. материальная точка движется **равномерно и прямолинейно**)

$$\vec{v}(t) \;=\; const \;= \vec{v}_0 \tag{1.5.4}$$

Подставим это выражение для скорости в уравнение (1.5.3)

$$\vec{r}(t) \;=\; \vec{r}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{v}_0 dt \;=\; \vec{r}(t_0) + \vec{v}_0 \int\limits_{t_0}^{t} dt \;=\; \vec{r}(t_0) + \vec{v}_0(t-t_0)\,. \tag{1.5.5}$$

Получили уравнение прямолинейного движения материальной точки с постоянной скоростью из начального положения, задаваемого радиус-вектором $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$. Если принять, что в начальный момент времени $t_0 = 0$ частица находилась в начале системы отсчёта, то это уравнение примет наиболее простой вид:

$$\vec{r}(t) \;=\; \vec{v}_0 t\,. \tag{1.5.6}$$

1.5.2 По заданному ускорению

Пусть нам задан вектор ускорения материальной точки как функция времени

$$\vec{a} \;=\; \vec{a}(t) \;=\; \frac{d\vec{v}(t)}{dt}\,. \tag{1.5.7}$$

Требуется найти уравнение траектории, то есть зависимость $\vec{r} = \vec{r}(t)$, по этому вектору. Очевидно, из (1.5.7) можно получить, что $d\vec{v}(t) \;=$

$\vec{a}(t)dt$. Интегритруя это уравнение в пределах от начального момента времени t_0 до любого текущего t, получим

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) \;=\; \int\limits_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt\,, \tag{1.5.8}$$

или

$$\vec{v}(t) \;=\; \vec{v}(t_0) \;+\; \int\limits_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt\,, \tag{1.5.9}$$

где $\vec{v}(t_0)$ – вектор скорости точки в начальный момент времени.

Уравнение (1.5.9) определяет вектор скорости, как функцию времени. Теперь, для восстановления уравнения траектории мы можем воспользоваться результатом предыдущего пункта – получить уравнение траектории по заданной скорости. Для чего подставим правую часть последнего выражения в уравнение (1.5.3) . Тогда

$$\vec{r}(t) \;=\; \vec{r}(t_0) \;+\; \int\limits_{t_0}^{t} \left(\vec{v}(t_0) \;+\; \int\limits_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt \right) dt. \tag{1.5.10}$$

Или

$$\boxed{\vec{r}(t) \;=\; \vec{r}(t_0) \;+ \vec{v}(t_0)\,(t - t_0) \;+\; \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt^2} \tag{1.5.11}$$

где $\vec{r}(t_0)$ – радиус вектор, а $\vec{v}(t_0)$ – вектор скорости точки в начальный момент времени.

Таким образом мы видим, что

для **восстановления уравнения движения** по **заданному ускорению** необходимо знать **два параметра:** **начальное положение** материальной точки и **скорость** этой точки в **начальный момент времени.**

Рассмотрим частицу, движущуюся таким образом, что вектор её ускорения остаётся неизменным и по величине и по направлению (т.е. материальная точка движется **равноускоренно**): $\vec{a}(t) = const = \vec{a}_0$. Тогда уравнение (1.5.11) примет вид:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{\vec{a}_0(t - t_0)^2}{2}. \tag{1.5.12}$$

Получили уравнение движения материальной точки с постоянным ускорением из начального положения, задаваемого радиус-вектором $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ с начальной скоростью $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$. Если считать, что в начальный момент времени частица находилась в начале системы отсчёта и принять $t_0 = 0$, то это уравнение примет наиболее простой вид

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0\, t + \frac{\vec{a}_0 t^2}{2}. \tag{1.5.13}$$

1.6 Преобразования Галилея

Во всех предыдущих пунктах данного параграфа была рассмотрена процедура математического описания любых возможных механических движений материальной точки (т.е. **кинематика материальной точки**) относительно произвольной системы отсчёта.

Это означает, что если в **заданной** системе отсчёта были проведены необходимые измерения (например, измерены координаты частицы, соответствующие различным моментам времени), то по этим измерениям можно получить любые другие кинематические параметры (скорости, ускорения и т.д.) этой частицы.

Однако, возникает вопрос: *как, получить описание движения частицы в* системе отсчёта K, *имея результаты измерений, проведённых из* системы отсчёта K', *движущейся относительно системы* K *с известной скоростью* $\vec{v}_0(t)$?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим движение некоторой материальной точки из двух систем отсчёта — K и K'. Радиус-вектор, соединяющий начала этих систем отсчёта (точки O и O'), обозначим как $\vec{r}_o$. Пусть в данный момент времени t частица находится в точке пространства M. Тогда радиус-вектор частицы относительно системы отсчёта K – есть $\vec{r}(t)$, а относительно системы отсчёта K' – $\vec{r}\,'(t')$ (t' - момент времени, измеренный в системе отсчёта K').

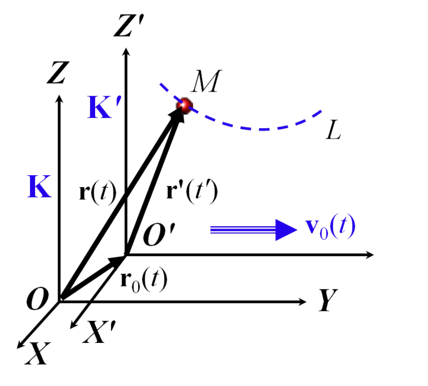


Рис. 1.9.

Эти три вектора образуют треугольник и следовательно

$$\vec{r}(t) \;=\; \vec{r}_o(t) + \vec{r}\,'(t'). \tag{1.6.1}$$

По определению, $\vec{v}\,'(t') = \dfrac{d\vec{r}\,'(t')}{dt'}$ – скорость материальной точки относительно системы отсчёта K'. Соответственно, $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$ - скорость материальной точки относительно системы отсчёта K, а $\vec{v}_o(t) = \dfrac{d\vec{r}_o(t)}{dt}$ - скорость самой системы K' относительно K.

Возьмём производную по времени t системы отсчёта K от выражения (1.6.1). Получим

$$\vec{v}(t) \;=\; \frac{d\vec{r}_o(t)}{dt} \;+\; \frac{d\vec{r}\,'(t')}{dt'}\frac{dt'}{dt} \;=$$

$$=\; \vec{v}_o(t) + \vec{v}\,'(t')\frac{dt'}{dt}. \tag{1.6.2}$$

Таким образом видим, что **для однозначного определения кинематических параметров, описывающих движение материальной точки относительно системы отсчёта** K, **по измерениям, проведённым в системе отсчёта** K', **необходимо знать связь моментов времени** t и t'.

В классической механике проблема взаимосвязи моментов времени в различных системах отсчёта решается **постулатом Галилея**:

Моменты времени в различных системах отсчёта совпадают
с точностью до постоянной величины,
определяемой процедурой синхронизации часов

то есть

$$t \;= t' \,+\, const. \tag{1.6.3}$$

Обычно считают часы синхронизированными таким образом, что $t = t'$, то есть $const\, =\, 0$. При таком способе синхронизации уравнение (1.6.1) принимает вид

$$\vec{r} \,=\, \vec{r}_o \,+\, \vec{r}\,' \tag{1.6.4}$$

(моменты времени не указаны, так как они одинаковы). Это уравнение называют **преобразованием Галилея для координат**, измеренных из **произвольных СО**.

Уравнение (1.6.2) не зависит от способа синхронизации (т.е. от выбора константы в (1.6.3)):

$$\vec{v} \,=\, \vec{v}_o \,+\, \vec{v}\,' \tag{1.6.5}$$

и называется **законом сложения скоростей**.

Если взять производную по времени от этого уравнения, то получим *связь ускорений* в произвольных СО

$$\vec{a} \,=\, \vec{a}_o \,+\, \vec{a}\,'\,. \tag{1.6.6}$$

Здесь $\vec{a}_o$ — **ускорение** самой **системы** K' относительно системы K.

Совокупность всех трех уравнений (1.6.4 – 1.6.6) называют **преобразованиями Галилея для произвольных систем отсчёта**.

Среди всех возможных систем отсчёта особое место занимает множество таких систем отсчёта, которые относительно друг друга движутся с постоянными скоростями (т.е. их относительные ускорения равны нулю). Такие системы отсчёта называют **инерциальными системами отсчета (ИСО)**.[1]

Найдем *преобразования Галилея для ИСО*. Если скорость ИСО K' ($\vec{v}_o = const$) известна, то положение начала ИСО K' можно найти как уравнение движения, восстановленное по известной скорости

$$\vec{r}_o(t) \;=\; \vec{r}_o(t_o) \,+\, \vec{v}_o\,(t - t_o), \tag{1.6.7}$$

[1] Сформулированная фраза **не является** определением ИСО (определение будет введено позже), но даёт разумное логическое представление об этих системах.

где $\vec{r}_o(t_o)$ — радиус-вектор, описывающий положение начала ИСО K' (т.е. точки O') в начальный момент времени t_o.

Примем начальный момент времени за нуль: $t_o = 0$ и будем считать, что в этот момент точки O и O' совпадают, то есть $\vec{r}_o(t_o) = 0$. Тогда **преобразования Галилея для ИСО** принимают вид

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{v}_o\, t + \vec{r}\,'(t), \\ \vec{v}(t) &= \vec{v}_o + \vec{v}\,'(t), \\ \vec{a}(t) &= \vec{a}\,'(t), \end{aligned}} \qquad (1.6.8)$$

Обратим особо внимание на последнее уравнение в преобразованиях Галилея для ИСО, которое означает, что **ускорение материальной точки во всех ИСО одинаково**.

Этот результат достаточно ясно свидетельствует об исключительности свойств инерциальных систем отсчёта, в силу которых именно эти системы должны, как правило, использоваться при изучении механических явлений. Везде ниже, где обратное не оговорено особо, будет подразумеваться такой выбор системы отсчёта.

Глава 2

ДИНАМИКА

Кинематика даёт описание движения тел, не затрагивая вопроса о том, почему тело движется по определённой траектории (например, равномерно по окружности, или равноускоренно по прямой).

Динамика изучает причины движения тел — то есть взаимодействия между телами, которые и определяют характер движения. В основе классической (ньютоновской) механики лежат три закона динамики, сформулированные Ньютоном в конце семнадцатого века.

В начале данной главы последовательно изложены динамика материальной точки и системы материальных точек. На основе этого излагаются основные законы динамики твёрдого тела, которое моделируется системой материальных точек (что и позволяет использовать весь предыдущий материал). Далее вводятся понятия работы и энергии и излагаются соответствующие законы сохранения. Особое внимание уделено понятиям потенциального поля, потенциальной энергии и их свойствам. На основе сформулированных законов сохранения рассматриваются некоторые важные виды взаимодействия — удар частиц, движение тела переменной массы, законы Кеплера.

2.1 Динамика материальной точки

Законы физики, как и любой другой науки, — это законы, описывающие абстрактные модели реальных объектов Природы. Соответственно, прежде чем сформулировать какой-либо закон для интересующего нас объекта в выбранной СО, необходимо построить для него модель, достаточно точно отражающую свойства объекта *именно в этой* СО. Понятно, что при таком способе описания мы будем вынуждены строить заново **все** законы *для каждой новой СО* — задача заведомо невыполнимая. Потому, для построения законов, описывающих *абстрактные* модели реальных объектов, нужно построить такие *абстрактные* СО, в которых законы (по карйней мере механики) будут иметь неизменную форму. Другими словами, наши законы должны быть справедливы во всех (правильно построенных) абстрактных СО. В частности, для задач механики можно предположить, что существует такая система отсчёта, в которой ускорение материальной точки целиком обусловлено только взаимодействием её с другими телами. Тогда, свободная частица, не подверженная действию никаких других тел, должна двигаться относительно такой системы отсчета прямолинейно и равномерно, или, как говорят, по инерции. Такие СО называют инерциальными системами отсчёта, качественное понятие о которых уже было дано в параграфе 1.6. Утверждение, что *инерциальные системы отсчета существуют*, составляет содержание первого закона классической механики — закона инерции Галилея-Ньютона. В следующем параграфе дано строгое определение инерциальной системы отсчёта и сформулированы законы Ньютона для таких СО.

2.1.1 Законы Ньютона

Законы Ньютона возникли в результате теоретического обобщения большого количества опытных фактов. Правильность этих законов, как и любых других, подтверждается согласием теоретических результатов описания абстрактных моделей с наблюдаемым поведением реальных объектов.

Соответственно, если в каких-то условиях поведение реальных объектов начинает отличаться от предсказываемого поведения моделей этих объектов, то это означает, что для этих условий наш закон не выполняется и необходимо либо уточнять существующий закон, либо (если предсказания закона принципиально отличаются от поведения реальных объектов) – строить новые. Но, для построения нового закона нужно, естественно, сначала накопить достаточно большое количество опытных фактов чтобы было что обобщать.

Первый Закон Ньютона

Дадим строгое определение инерциальных систем отсчёта: **инерциальными системами отсчёта** (ИСО) будем называть такие **системы отсчёта**, в которых **закон (уравнения) движения** материальной точки $\vec{r} = \vec{r}(t)$ однозначно определён, если заданы:

- начальные условия: начальное положение $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ и начальная скорость $\vec{v}_0 = \vec{v}(t_0)$ материальной точки,
- функция $\vec{F}(\vec{r}, t)$, описывающая взаимодействие изучаемой материальной точки с окружающей средой.

Функцию координат и времени $\vec{F}(\vec{r}, t)$, описывающую взаимодействие материальной точки с окружающей средой называют **силой**. Задача законов Ньютона — выяснить причины движения и, как будет показано далее, эта задача в каждом конкретном случае сводится к установлению вида функции $\vec{F}(\vec{r}, t)$.

Определив понятие ИСО, можно сформулировать первый закон Ньютона:

Инерциальные системы отсчёта существуют,
как *математическая абстракция*
реальных систем отсчета.

Второй Закон Ньютона

Как уже было сказано выше, задача законов Ньютона – выяснить причины движения. Сравним способы получения уравнений движения в кинематике и динамике:

Кинематика		Динамика	
$\vec{r}_0,\ \vec{v}_0$	$\vec{r} = \vec{r}(t)$	$\vec{r}_0,\ \vec{v}_0$	$\vec{r} = \vec{r}(t)$
$\vec{a}(t)$		$\vec{F}(\vec{r}, t)$	

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}(t) \Longleftrightarrow \vec{F}(\vec{r}, t)}$$

С точки зрения кинематики, для восстановления **уравнения движения** по заданному *ускорению* необходимо знать **два параметра**: *начальное положение* материальной точки и *скорость* этой точки в *начальный момент времени.*

С точки зрения динамики, **уравнение движения** может быть однозначно определено если известна функция $\vec{F}(\vec{r}, t)$ – сила. При этом снова необходимо знать **два параметра:** *начальное положение* материальной точки и *скорость* этой точки в *начальный момент времени.*

Таким образом, ускорение и сила выполняют аналогичные функции в двух разделах механики. Как следствие, мы можем сформулировать второй закон Ньютона:

в *инерциальных системах отсчёта*   **взаимодействие объекта с окружающей средой (сила) вызывает ускорение объекта.**

Исторически, конкретная математическая форма связи ускорения и силы была выбрана в наиболее простом виде:

$$\vec{a}(t) = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r}(t), t), \qquad (2.1.1)$$

где m – коэффициент пропорциональности между ускорением и силой. Он характеризует способность тела получать ускорение под действием силы, т.е. является мерой инертности тела и, соответственно, называется *инертной* **массой** тела.

По сути, уравнение (2.1.1) является определением понятия силы.

Третий Закон Ньютона

Третий закон Ньютона в общем случае является универсальным законом **взаимодействий**: *всякое действие вызывает равное по величине противодействие.* Формулировка третьего закона Ньютона для физики:

при **любом физическом взаимодействии,**   **действие** *одного тела на другое*   **вызывает** *равное по величине и противоположно направленное* **действие** *второго тела на первое.*

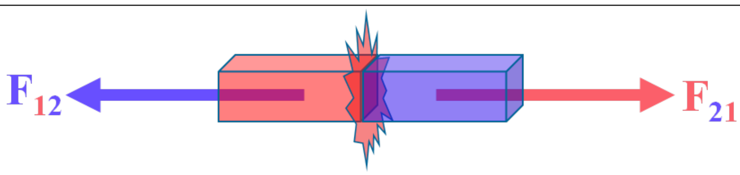


Рис. 2.1.

Подчеркнем, что силы, связанные по третьему закону Ньютона, приложены к *различным* телам и, следовательно, никогда не могут начинаться в одной точке (рисунок 2.1).

Эта особенность сил, связанных по третьему закону Ньютона (невозможность сведения в одну точку), накладывает определённые ограничения на запись самого закона. Дело в том, что

- *в одном векторном уравнении не могут присутствовать вектора, которые приложены к различным точкам пространства.*

Поэтому *третий* закон Ньютона **невозможно** записать в векторной форме. Но мы можем записать его в виде:

$$|\vec{F}_{12}| = -|\vec{F}_{21}|, \tag{2.1.2}$$

где знак минус — это так называемый «физический» минус, который показывает только то, что силы $|\vec{F}_{12}|$ и $|\vec{F}_{21}|$ направлены противоположно.

2.1.2 Виды сил в механике точки

Подчеркнём, что при моделировании физического тела материальной точкой, все силы, приложенные к данному телу, должны быть приложены именно к этой точке (которая, как мы увидим, для произвольного тела является центром масс). В механике материальной точки выделяют **четыре** вида сил.

1. Заданные силы (обозначение - $\vec{F}$). Это специально оговоренные силы, величина и направление которых *заданы apriori* (рис. 2.2).

2. Сила тяжести (обозначение - $\vec{F}_g$). Это сила гравитационного взаимодействия данного тела с Землей. Направлена всегда к центру тяжести Земли (или вертикально вниз, если в заданных условиях возможно введение понятия вертикали). Величина силы: $F_g = mg$, где g – ускорение свободного падения (рис. 2.2).

3. Силы реакций. Силы, возникающие при *непосредственном контакте* данного тела с другими телами. Соответственно, количество сил реакций равно количеству тел, с которым изучаемое находится в непосредственном механическом контакте. Различают два вида сил реакций:

а) сила реакции опоры (обозначение - $\vec{N}$), направлена перпендикулярно к плоскости опоры (или к касательной плоскости) от опоры (рис. 2.3);

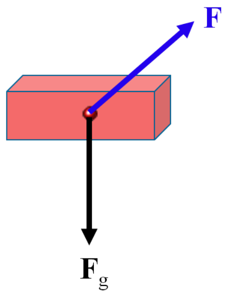


Рис. 2.2.

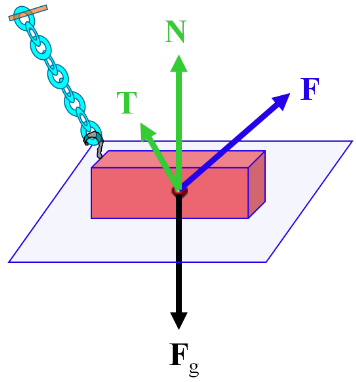


Рис. 2.3.

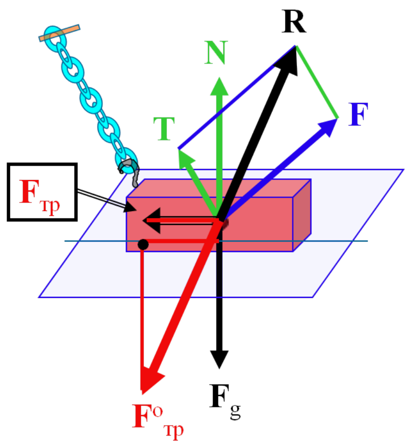


Рис. 2.4

б) сила реакции «нити» (обозначение - $\vec{T}$), направлена из центра масс вдоль нити (на рисунке 2.3 изображена в виде цепи). Величина сил реакций определяется законами Ньютона.

4. Силы трения (обозначение - $\vec{F}_{тр}$) Это силы, возникающие при реальном (или возможном) движении данного тела по поверхности других тел. Различают два вида сил трения: **сила трения покоя** $(\vec{F}_{\text{тр}})_{\text{пок}}$ и **сила трения скольжения** $(\vec{F}_{\text{тр}})_{\text{ск}}$.

Вектор силы трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$ является силой, *уравновешивающей* равнодействующую $\vec{R}$ всех остальных сил. Собственно, силой трения покоя называют **проекцию** вектора $\vec{F}_{\text{тр}}$ на плоскость движения (рис. 2.4). Максимальное значение силы трения покоя (достигается, когда тело начинает двигаться) называют силой трения скольжения:

$$\left|(\vec{F}_{\text{тр}})_{\text{ск}}\right| = \left|\max\left((\vec{F}_{\text{тр}})_{\text{пок}}\right)\right| \approx k\left|\vec{N}\right| \tag{2.1.3}$$

где k – коэффициент трения (определяется механическими свойствами соприкасающихся поверхностей). Последнее равенство в соотношении (2.1.3) является приближённым и выполняется для достаточно небольших значений коэффициента трения (обычно для $k < 0.6$). При больших значениях силы трения скольжения её связь с величиной силы реакции опоры $|\vec{N}|$ становится нелинейной.

2.2 Система взаимодействующих частиц

2.2.1 Центр масс

Начнём с определения: ограниченное (в пространстве) множество материальных точек, произвольно движущихся в пространстве называют *механической системой.*

Рассмотрим такую систему относительно некоторой инерциальной системы отсчёта К (рисунок 2.5). Для любой механической системы частиц можно определить некоторую воображаемую точку, называемую **центром масс**. Эта точка обладает важными свойствами необходимыми при описании движения системы частиц. Положение **центра масс** относительно начала данной системы отсчёта характеризуется **радиус-вектором** $\vec{r}_c$, определяемым следующим образом:

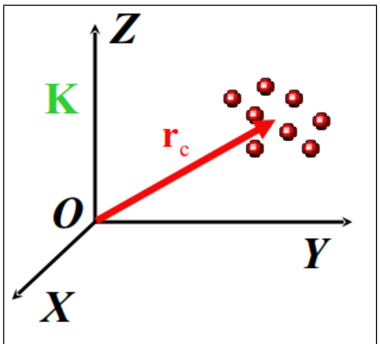


Рис. 2.5.

$$\vec{r}_c = \frac{\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2 + ... + \vec{r}_n m_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i, \tag{2.2.3}$$

где i – номер материальной точки в механической системе, n – количество точек, m_i – масса i-ой материальной точки и M – масса всей системы материальных точек. Тогда, по определению, производная радиус-вектора $\vec{r}_c(t)$ по времени есть **скорость центра масс**

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i. \tag{2.2.4}$$

В кинематике мы имели дело с *кинематическими параметрами* движения материальной точки (скорость и ускорение). При описании причин движения, то есть в динамике, вводят новые параметры движения – *динамические параметры.* Эти параметры получаются из кинематических параметров умножением на основную динамическую характеристику материальной точки – её массу инерции. Величина $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ является *первым динамическим параметром* частицы и называется **импульсом**. Соответственно, величину

$$\vec{P}_c = M\vec{v}_c = \sum_i m_i \vec{v}_i \tag{2.2.5}$$

называют **импульсом центра масс**.

Таким образом видим, что связь импульса $\vec{P}_c$ со скоростью $\vec{v}_c$ такая же, как для материальной точки с массой M (масса системы).

Другими словами, понятие центра масс представляет *строгую математическую* процедуру сопоставления произвольной механической системе математически точной модели – центра масс.

2.2.2 Теорема о движении центра масс

Найдем теперь **ускорение центра масс**. По определению, вектор ускорения есть первая производная вектора скорости по времени:

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i. \tag{2.2.6}$$

Величина $\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$ является *вторым динамическим параметром* и, согласно второму закону Ньютона, является силой, действующей на частицу. Таким образом:

$$\boxed{\vec{a}_c = \frac{1}{M}\sum_{i}^{n} \vec{F}_i}. \tag{2.2.7}$$

Следует уточнить, что эта формула имеет смысл только для *однородного* и *стационарного* поля сил, т.е.:

$$\vec{F}_i \neq \vec{F}_i(\vec{r}, t). \tag{2.2.8}$$

Формула (2.2.7) является аналитической формой первой **теоремы о движении центра масс**: *при любых взаимодействиях каждой из частиц механической системы с окружающей средой, центр масс системы движется таким образом, как будто все силы, действующие на отдельные частицы системы, приложены к одной точке — центру масс*[1].

Рассмотрим теперь подробнее силы, действующие на частицы механической системы. Силы, действующие на каждую точку системы, разобьем на два типа:

---

[1] с поправкой на страционарность и однородность, см. уравнение (2.2.8).

1. силы со стороны всех остальных частиц системы (*внутренние силы*);

2. результирующая всех *внешних сил*.

Таким образом, в общем виде силу, действующую на частицу с номером i запишем в виде

$$\vec{F}_i = \sum_{k \neq i}^{n} \vec{F}_{ik} + \left(\vec{F}_i\right)_{\text{вш}} \qquad (2.2.9)$$

где $\vec{F}_i$ – результирующая всех сил, действующих на i-ую материальную точку, $\vec{F}_{ik}$ сила со стороны частицы с номером k, приложенная к i-ой частице (внутренняя сила) и $\left(\vec{F}_i\right)_{\text{вш}}$ – сумма всех внешних сил, действующих на i-ую частицу (рисунок 2.6). Подставим это выражение в теорему о движении центра масс (2.2.7):

$$\vec{a}_c = \frac{1}{M}\left(\sum_{i,k \neq i}^{n} \vec{F}_{ik} + \sum_{i}^{n} \left(\vec{F}_i\right)_{\text{вш}}\right).$$

Рассмотрим подробнее первую сумму в этом уравнении. Для упрощения рассуждений будем считать, что наша система частиц состоит из трёх материальных точек.

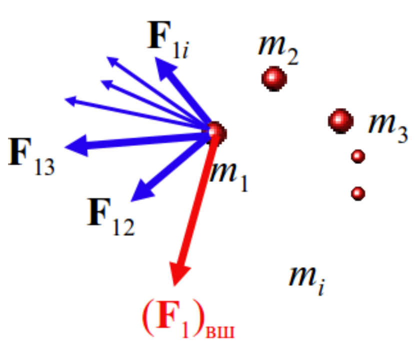


Рис. 2.6

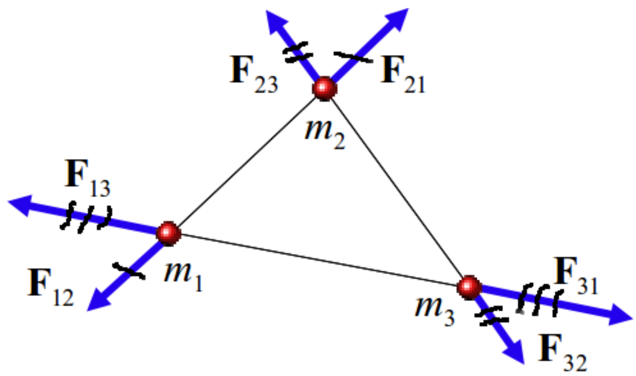


Рис. 2.7

Расставим все силы, действующие **между** точками: F_{12} и F_{13} – силы, действующие на первую точку со стороны второй и третьей точек соответственно. Аналогично для точек с номерами 2 и 3. Но, это силы *взаимодействия*, то есть они подчиняются третьему закону Ньютона.

На рисунке пары сил, связанные по третьему закону Ньютона отмечены одним, двумя и тремя штрихами соответственно. Суммы этих пар сил, очевидно, равны нулю. Следовательно, по третьему закону Ньютона при суммировании все вектора внутренних сил попарно обнуляются и $\sum_{ik} \vec{F}_{ik} = 0$. Тогда вторая **теорема о движении центра масс** принимает вид:

$$\boxed{\vec{a}_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i\right)_{\text{вш}}.} \tag{2.2.10}$$

Такой вид теоремы означает, что *если система находится во внешнем стационарном и однородном поле, то никакими действиями внутри системы невозможно изменить движение центра масс системы.*

2.2.3 Движение тела с переменной массой

Очень часто, в реальных ситуациях, тело движется таким образом, что масса тела непрерывно изменяется в процессе движения (ракета, реактивный самолет, платформа, нагружаемая на ходу, и др.). Найдём уравнение движения такого тела.

Будем моделировать изучаемое тело системой материальных точек при условии, что масса m этой системы может меняться (частицы могут входить или выходить из системы).

Пусть за бесконечно малое время dt масса системы изменилась на бесконечно малую величину dm (рис. 2.8). Если скорость $\vec{u}$ относительно системы (относительная скорость) вылетевшей частицы массой dm не равна нулю, то в результате, импульс системы тоже изменится (скорость увеличится на $d\vec{v}$). Но, по теореме о движении центра масс, импульс системы может измениться еще и под действием внешней силы:

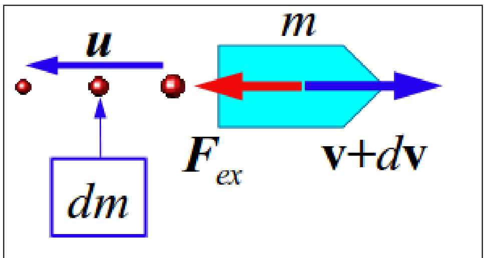


Рис. 2.8.

$$d\vec{P} = \vec{F}_{ext} dt. \tag{2.2.11}$$

Таким образом, полное изменение импульса системы за время dt равно:

$$m d\vec{v} = \vec{F}_{ext} dt + \vec{u} dm \tag{2.2.12}$$

и мы получаем *уравнение динамики тела с переменной массой*

$$\boxed{m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{u}\frac{dm(t)}{dt}.} \tag{2.2.13}$$

Его называют **уравнением Мещерского** (это уравнение впервые было получено российским учёным В.М. Мещерским в 1904 году).

Рассмотрим частные случаи.

Уравнение Циолковского

Будем считать, что внешних сил нет ($\vec{F}_{ext} = 0$). Тогда полное изменение импульса системы за время dt равно:

$$m(t)d\vec{v} = \vec{u}dm(t). \tag{2.2.14}$$

Если скорость $\vec{u}$ вылетающих частиц относительно системы (относительная скорость) постоянна, то для скорости системы $\vec{v}$ мы получаем

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{u}\ln\frac{m(t)}{m_0} \tag{2.2.15}$$

уравнение реактивного движения (**уравнение Циолковского**). В выражении 2.2.15 вектор $\vec{v}_0$ и m_0 – начальные (в момент времени t =0) скорость и масса системы.

Обычно, при реактивном движении скорости $\vec{v}$ (тела) и $\vec{u}$ («топлива») противоположны, потому

$$v(t) = v_0 + u\ln\frac{m_0}{m(t)}. \tag{2.2.16}$$

Это уравнение было получено советским (независимо от В.М. Мещерского) учёным К.Э. Циолковским в 1897 г.

Реактивный снаряд

Будем считать, что снаряд движется в атмосфере – тогда моделью внешних сил может служить сила сопротивления, пропорциональная вектору скорости $\vec{F}_{ext} = -k\vec{v}$. В этом случае полное изменение импульса снаряда за время dt будет равно:

$$m(t)d\vec{v} = -k\vec{v}dt + \vec{u}dm. \tag{2.2.17}$$

Если скорость $\vec{u}$ вылетающих частиц относительно снаряда (относительная скорость) постоянна во времени и α секундный расход топлива (за счёт сгорания), то закон изменения массы ракеты со временем можно записать следующим образом:

$$\frac{dm(t)}{dt} = -\alpha(m(t) - m_0), \tag{2.2.18}$$

где m_0 – масса снаряда без топлива, $(m(t) - m_0)$ – масса топлива в момент времени t.

В уравнении (2.2.17) поделим левую и правую часть равенства на dt, получим:

$$m(t)\frac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{v} + \vec{u}\,\frac{dm(t)}{dt}. \tag{2.2.19}$$

Для решения системы уравнений (2.2.18, 2.2.19) выберем следующие значения параметров: m_0 =10 кг, $m_т$ =100 кг (начальная масса топлива), k =0.1 кг/с^2, $\alpha = 0.2$с$^{-1}$, u =500 м/с, $v_0 = 0$ м/с. Численное решение такой системы дифференциальных уравнений при выбранных значениях параметров приводит к следующей зависимости скорости снаряда от времени:

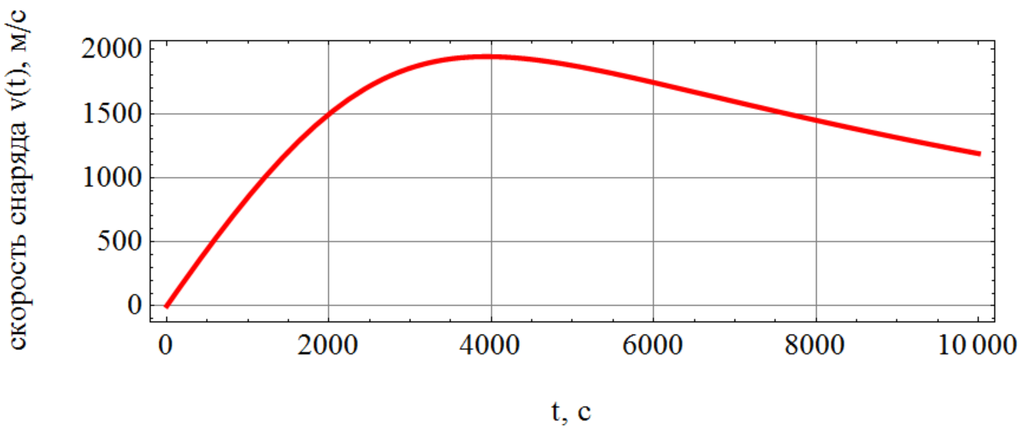


Рис. 2.9.

2.2.4 Закон сохранения импульса

Механическую систему называют **замкнутой**, если результирующая всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю:

$$\vec{F}_{вш} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i\right)_{вш} = 0, \tag{2.2.20}$$

Следовательно, для замкнутой системы $\vec{a}_c = 0$. С другой стороны, если система замкнута, то из уравнения (2.2.6) получим:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = 0, \tag{2.2.21}$$

что по определению (2.2.5) можно записать в виде

$$\frac{d\vec{P}_c}{dt} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{P}_c = const \tag{2.2.22}$$

или $\vec{v}_c = const$. Таким образом, получили закон называемый *законом сохранения импульса*:

импульс центра масс замкнутой механической системы сохраняется.

Это означает, что *центр масс замкнутой механической системы движется равномерно и прямолинейно, либо покоится.*

Из последнего равенства уравнения (2.2.21) можно получить *закон сохранения импульса* в фомулировке более привычной для курса средней шолы:

$$\vec{P}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = const, \tag{2.2.23}$$

то есть, *векторная сумма импульсов частиц в замкнутой системе сохраняется.*

2.3 Описание движения твёрдого тела

Следуя стандартной схеме любого научного описания реальных объектов Природы, мы должны построить модель твёрдого тела. При описании движения твёрдого тела мы ограничимся изучением только **абсолютно твёрдого тела** — такого тела, расстояние между любыми двумя точками которого неизменно при любых движениях и взаимодействиях тела с окружающей средой. Это, естественно, качественное определение.

При моделировании поведения абсолютно твёрдого тела, будем разбивать (мысленно) изучаемое тело на сколь угодно большое число достаточно малых частей – т.е. будем *моделировать* абсолютно твёрдое тело *механической системой.*

Тогда, очевидно, что произвольное движение абсолютно твёрдого тела можно свести к сумме прямолинейного и вращательного движений точек этого тела.

В следующих параграфах мы дадим строгие определения прямолинейного и вращательного движений абсолютно твёрдого тела и введём новые динамические параметры, необходимые для описания вращательного движения абсолютно твёрдого тела.

2.3.1 Прямолинейное движение

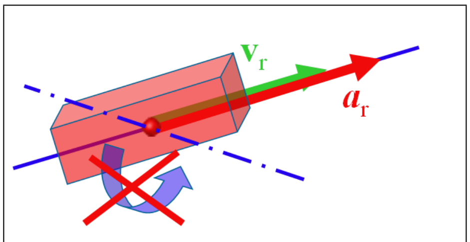


Рис. 2.10.

Прямолинейным движением абсолютно твёрдого тела будем называть такое движение *системы* его материальных точек, при котором *скорости* прямолинейного движения этих точек относительно любой инерциальной системы отсчёта *одинаковы*, а *угловые скорости* относительно оси, проходящей через центр масс, *равны нулю* (рисунок 2.10).

Из этого определения следует, что *кинематические условия* прямолинейного движения имеют следующий вид:

$$\vec{v}_i = \vec{e}_{r_i}\frac{d|\vec{r}_i|}{dt} = \vec{v}_r = const \qquad \vec{\omega}_i = \vec{\omega} = 0, \tag{2.3.1}$$

где i – номер частицы, $\vec{v}_r$ – скорость поступательного движения тела. Тогда *кинематические характеристики* движения:

$$\vec{v}_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \vec{v}_r; \qquad \vec{a}_r = \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{\vec{F}_{\text{вш}}}{M}, \tag{2.3.2}$$

где $\vec{v}_c$ –скорость центра масс (2.2.4) и $\vec{a}_r$ – ускорение поступательного движения тела, $M = \sum_i m_i$ –масса тела.

Следовательно, для описания прямолинейного движения абсолютно твёрдого тела достаточно описать движение единственной точки этого тела — центра масс. Все остальные точки движутся точно так же.

2.3.2 Вращательное движение

Вращательным движением абсолютно твёрдого тела будем называть такое движение системы составляющих его материальных точек, при котором скорости прямолинейного движения этих точек относительно заданной инерциальной системы отсчёта равны нулю, а *угловые скорости* относительно заданной оси, *одинаковы*.

Из этого определения следует, что кинематические условия вращательного движения имеют следующий вид:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_r = 0; \qquad \vec{\omega}_i = \vec{\omega} = const, \tag{2.3.3}$$

где $\vec{v}_r$ – скорость вращательного движения данной точки (1.2.10) и $\vec{\omega}$ – вектор угловойскорости точек тела. Тогда кинематические характеристики движения получаются подстановкой кинематических условий (2.3.3) в выражения (1.2.11) и (1.4.7):

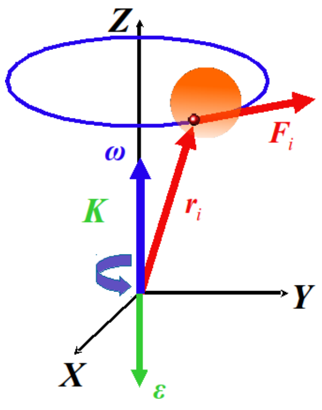


Рис. 2.11.

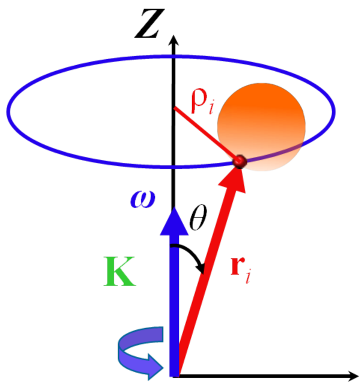


Рис. 2.12.

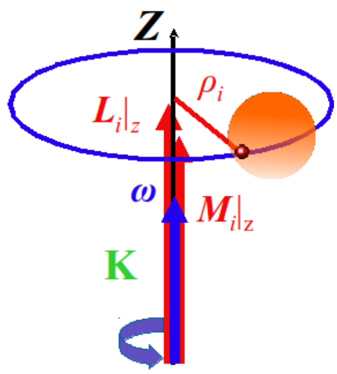


Рис. 2.13.

$$\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]; \qquad \vec{a}_i = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}_i] - \vec{r}_i\,\omega^2. \tag{2.3.4}$$

Соответственно, второй закон Ньютона для любой точки абсолютно твёрдого тела при вращательном движении принимает вид:

$$\vec{F}_i = m_i\vec{a}_i, \quad \Longleftrightarrow \quad m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}_i] - \vec{r}_i\,\omega^2. \tag{2.3.5}$$

Найти из этого уравнения закон движения $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$, по меньшей мере очень сложно. Поэтому возникает необходимость построения какого-то *нового уравнения динамики*, описывающего именно вращательное движеие материальной точки.

Для этого введём *новые динамические параметры:* момент импульса и момент силы.

Моментом импульса *материальной точки* относительно некоторой инерциальной системы отсчёта будем называть вектор $\vec{L}_i$, равный векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}_i$ рассматриваемой материальной точки (см. рисунок 2.11) на импульс $\vec{p}_i$:

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = m_i[\vec{r}_i, \vec{v}_i]. \tag{2.3.6}$$

Моментом силы *материальной точки* $\vec{M}_i$ относительно произвольной инерциальной системы отсчёта будем называть *векторное произведение* радиус-вектора $\vec{r}_i$ материальной точки на вектор силы $\vec{F}_i$ (сила приложена к точке, см. рисунок 2.11):

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i] = m_i[\vec{r}_i, \vec{a}_i]. \tag{2.3.7}$$

Найдём проекции выражений (2.3.6) и (2.3.7) на ось вращения (ось Z). Используя кинематические условия вращательного движения задаваемые выражениями (2.3.3) получим:

$$[\vec{r}_i, \vec{v}_i] = [\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]] = \vec{\omega}|\vec{r}_i|^2 - \vec{r}_i(\vec{\omega}, \vec{r}_i), \tag{2.3.8}$$

где в последнем равенстве мы воспользовались правилом вычисления двойного векторного произведения (1.3.7) (правило bac-cab). В результате, мы получили сумму векторов, первый из которых направлен вдоль оси вращения Z, а второй по радиус-вектору точки. Проекция этого выражения на ось вращения (ось Z) равна:

$$\begin{split}\big(\vec{\omega}|\vec{r}_i|^2 - \vec{r}_i(\vec{\omega}, \vec{r}_i)\big)\Big|_z = \omega|\vec{r}_i|^2 - |\vec{r}_i|\cos\theta\,(\omega|\vec{r}_i|\cos\theta) = \\ \omega|\vec{r}_i|^2(1-\cos^2\theta) = \omega\rho_i^2,\end{split} \tag{2.3.9}$$

где ρ_i – расстояние от оси вращения до рассматриваемой точки (см. рис. 2.12). Аналогично для векторного произведения $[\vec{r}_i, \vec{a}_i]$:

$$[\vec{r}_i, \vec{a}_i] = \big[\vec{r}_i, \big([\vec{\varepsilon}, \vec{r}_i] - \vec{r}_i\omega^2\big)\big] = \vec{\varepsilon}\,|\vec{r}_i|^2 - \vec{r}_i(\vec{\varepsilon}, \vec{r}_i) - [\vec{r}_i, \vec{r}_i]\,\omega^2. \tag{2.3.10}$$

Векторное произведение вектора самого на себя даёт ноль, то есть $[\vec{r}_i, \vec{r}_i] \equiv 0$ и, следовательно:

$$[\vec{r}_i, \vec{a}_i] = \vec{\varepsilon}\,|\vec{r}_i|^2 - \vec{r}_i(\vec{\varepsilon}, \vec{r}_i). \tag{2.3.11}$$

Полученное выражение отличается от (2.3.8) только заменой вектора $\vec{\omega}$ на вектор $\vec{\varepsilon}$, причём оба вектора направлены вдоль одной оси (оси вращения). Следовательно, в проекции на ось вращения векторное произведение $[\vec{r}_i, \vec{a}_i]$ будет равно $\varepsilon\rho_i^2$. Тогда для проекций моментов импульса и силы на ось вращения получаем (см. рис. 2.13):

$$\vec{L}_i\Big|_z = m_i\rho_i^2\,\omega \tag{2.3.12}$$

и

$$\boxed{\vec{M}_i\Big|_z = m_i\rho_i^2\,\varepsilon = J_{iz}\,\varepsilon}. \tag{2.3.13}$$

Здесь обозначено:

$$J_{iz} = m_i\rho_i^2. \tag{2.3.14}$$

Будем называть величину J_{iz} **моментом инерции** материальной точки относительно оси Z. Уравнение (2.3.13) есть искомый **закон динамики вращательного движения материальной точки:** *проекция вектора момента силы (действующей на материальную точку)* $\vec{M}_i\Big|_z$ *на ось вращения равна произведению момента инерции материальной точки, измеренного относительно оси вращения, на вектор углового ускорения точки.*

Замечание: в силу того, что вектора углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ и угловой скорости $\vec{\omega}$ параллельны оси вращения, их величины $|\vec{\varepsilon}|$ и $|\vec{\omega}|$ равны проекциям векторов $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{\omega}$ на ось вращения:

$$\varepsilon = \pm|\vec{\varepsilon}\,| = \vec{\varepsilon}\,|_z, \qquad \omega = \pm|\vec{\omega}\,| = \vec{\omega}\,|_z \tag{2.3.15}$$

Но, в отличие от длины вектора, проекция может иметь разные знаки.

Формулы (2.3.12, 2.3.13) получены для одной произвольной точки (вращающегося) твёрдого тела. Суммируя по всему объёму абсолютно твёрдого тела, получим

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i\Big|_z = J_z\omega \tag{2.3.16}$$

$$\boxed{M_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i\Big|_z = J_z\varepsilon,} \tag{2.3.17}$$

где $J_z = \sum_{i=1}^{n} J_{iz}$ – момент инерции абсолютно твёрдого тела.

Моментом инерции абсолютно твёрдого тела относительно оси называется величина, равная сумме произведений массы каждой частицы тела на квадрат её расстояния до оси вращения.

Таблица 1: Соотношения между кинематическими и динамическими параметрами.

Прямолинейное движение	Вращательное движение
$\vec{r}$	$\vec{\varphi}$
$\vec{v} = d\vec{r}/dt$	$\vec{\omega} = d\vec{\varphi}/dt$
$\vec{a} = d\vec{v}/dt$	$\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt$
m	J_z
$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}], \qquad L_z = J_z\omega$
$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}], \qquad M_z = J_z\varepsilon$

Момент инерции абсолютно твёрдого тела является *мерой инертности тела* при вращательном движении.

Уравнение (2.3.17) есть **основной закон динамики вращательного движения абсолютно твёрдого тела:** *проекция результирующего вектора момента силы M_z (действующего на всё тело) на ось вращения равна произведению момента инерции абсолютно твёрдого тела, измеренного относительно оси вращения, на проекцию (на ось вращения) вектора углового ускорения ε абсолютно твёрдого тела.*

Здесь тоже нужно иметь ввиду замечание (2.3.15) к закону динамики вращательного движения.

Из Таблицы 1 видно, что формулы, описывающие вращательное движение вокруг неподвижной оси аналогичны по форме выражениям для прямолинейного движения. Достаточно заменить величины $(m, \vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, \ ...)$ на соответствующие угловые величины $(J, \vec{\varphi}, \vec{\omega}, \vec{\varepsilon}, \ ...)$ и мы получим все закономерности и соотношения для вращательного движения.

Например, для элементарной работы силы $\vec{F}$ на элементарном перемещении $d\vec{r}$ мы имеем:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r}.$$

Тогда для элементарной работы момента силы $\vec{M}$ на элементарном угловом перемещении $d\vec{\varphi}$, пользуясь данными таблицы, получим:

$$\delta A = \vec{M} d\vec{\varphi}.$$

Кинетическая энергия T при прямолинейном движении равна

$$T = (mv^2)/2,$$

тогда при вращательном движении:

$$T = (J\omega^2)/2.$$

2.3.3 Основной закон динамики вращательного движения твёрдого тела в дифференциальной форме

Рассмотрим более подробно основной закон динамики вращательного движения твёрдого тела: $M_z = J_z\varepsilon$. Найдем производную момента импульса по времени (считая, что $J_z =$const)

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(J_z\omega) = J_z\frac{d\omega}{dt} = J_z\varepsilon. \tag{2.3.18}$$

Если сравнить полученное выражение с формулой (2.3.17), то легко понять, что основной закон динамики вращательного движения твёрдого тела можно переписать в дифференциальной форме:

$$\boxed{M_z = \frac{dL_z}{dt}}. \tag{2.3.19}$$

Как и прежде, силы, действующие на каждую точку твёрдого тела, разобьём на внутренние и внешние силы:

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i, \vec{F}_i]\Big|_z = \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i, \sum_{k\neq i}^{n}\vec{F}_{ik} + \left(\vec{F}_i\right)_{\text{вш}}\right]\Bigg|_z = \\ = M_{\text{вн}_z} + M_{\text{вш}_z}. \tag{2.3.20}$$

По третьему закону Ньютона (как и в формуле (2.2.10))

$$M_{\text{вн}_z} = \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i, \sum_{k\neq i}^{n}\vec{F}_{ik}\right]\Bigg|_z = 0. \tag{2.3.21}$$

Как следствие, *основной закон динамики вращательного движения абсолютно твёрдого тела* (называемый иногда *уравнением моментов*) принимает вид:

$$\boxed{M_{\text{вш}_z} = \frac{dL_z}{dt}}. \tag{2.3.22}$$

Проекция на ось вращения момента всех внешних сил, действующих на абсолютно твёрдое тело, равна скорости изменения проекции момента импульса этого тела на ось вращения.

2.3.4 Закон сохранения момента импульса

Если проекция на ось вращения результирующего момента всех внешних сил, действующих на систему, равена нулю: $M_{\text{вш}_z} = 0$, то из закона (2.3.22) получаем, что проекция момента импульса L_z на ось вращения абсолютно твёрдого тела с течением времени не изменяется:

$$L_z = J_z\omega = const. \tag{2.3.23}$$

Следует отметить, что как и прежде, полученные результаты (законы (2.3.22) и (2.3.23)) справедливы только для *однородного и стационарного* внешнего поля.

Определение: если результирующий момент всех внешних сил, действующих на механическую систему, совершающую вращательное движение, равен нулю, то **систему** называют **замкнутой** *по отношению к моментам сил.*

Следствием выражения (2.3.23) является следующее заключение (формулировка закона сохранения момента импульса):

Никакими действиями внутри замкнутой *(по отношению к моментам сил)* **системы,**
находящейся в однородном стационарном поле,
невозможно изменить угловую скорость центра масс системы.

2.3.5 Момент инерции твёрдого тела.

Рассмотрим абсолютно твёрдое тело массой M произвольной формы, совершающее вращательное движение относительно произвольной оси Z.

Разобьём мысленно тело на бесконечно малые кусочки массой dm. Каждый такой кусочек движется по окружности с центром на оси вращения Z и его момент инерции относительно этой оси — это момент инерции материальной точки:

$$dJ_z = \rho^2 dm = r^2 \sin^2\theta dm. \tag{2.3.24}$$

Тогда, суммирование этих элементарных моментов по всему объему абсолютно твёрдого тела (т.е. интегрирование), даст момент инерции всего абсолютно твёрдого тела:

$$J_z = \int_V r^2 \rho_0(\vec{r}) \sin^2 \theta dV, \qquad (2.3.25)$$

где $\rho_0(\vec{r}) = dm/dV$ – плотность тела в точке с радиус-вектором $\vec{r}$, θ – угол между осью вращения и радиус-вектором $\vec{r}$. Полученная формула позволяет вычислить момент инерции любого тела относительно любой оси. И именно по этой формуле обычно вычисляют моменты инерции симметричных тел (шар, цилиндр и др.) относительно оси, совпадающей с одной из осей симметрии и проходящей через центр масс таких тел.

2.3.6 Теорема Штейнера.

Найдём связь между моментом инерции тела относительно оси Z и моментом инерции J_o этого тела относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно оси Z (рисунок 2.14).

Для того, чтобы найти связь момента инерции J_z с J_o выберем произвольную точку тела с массой m_i на расстоянии ρ_i от заданной оси. Момент инерции этой точки относительно оси Z равен $J_{zi} = \rho_i^2 m_i$. Введём постоянный вектор $\vec{a}$, длина которого $|\vec{a}| = a$, направленный по нормали к осям от оси Z к центру масс абсолютно твёрдого тела. Тогда три вектора $\vec{a}, \vec{\rho}_i$ и $\vec{\rho}_i{}'$ (вектор из центра масс к точке с массой m_i, смотри рисунок 2.13.) подчиняются правилу сложения векторов: $\vec{\rho}_i = \vec{a} + \vec{\rho}_i{}'$. Следовательно:

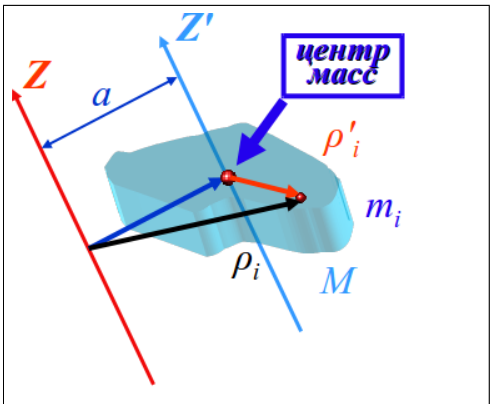


Рис. 2.14.

$$J_{zi} = \rho_i^2 m_i = \vec{\rho}_i{}^2 m_i = (\vec{\rho}_i{}' + \vec{a})^2 m_i. \qquad (2.3.26)$$

Раскрывая собки и суммируя по всем точкам тела, получим момент инерции всего тела:

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{\rho}_i{}'^2 + 2\vec{a}\vec{\rho}_i{}' + \vec{a}^2 \right) m_i. \qquad (2.3.27)$$

Перепишем эту формулу следующим образом (второй член умножим и разделим на M – массу всего тела):

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} \rho_i'^2 m_i + 2\vec{a}M \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i{}' m_i \right) + a^2 \sum_{i=1}^{n} m_i. \qquad (2.3.28)$$

Выражение в скобках в последней формуле является определением радиус-вектора центра масс (смотри формулу (2.2.3)), то есть задаёт *положение* центра масс *относительно* ценра масс. Очевидно, этот радиус-вектор равен нулю. Таким образом

$$J_z = J_o + Ma^2 \qquad (2.3.29)$$

где $J_o = \sum_{i=1}^{n} \rho_i'^2 m_i$ – момент инерции тела относительно оси z', проходящей через центр масс.

Итак, **теорема Штейнера** гласит: *момент инерции твёрдого тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, параллельно данной и момента инерции материальной точки с массой всего тела относительно выбранной оси.*

Как видно из (2.3.29), момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, меньше момента инерции относительно любой параллельной ей оси.

2.4 Работа и энергия

2.4.1 Работа

Будем говорить, что задано **физическое поле**, если каждой точке пространства поставлено в соответствие определённое значение физической величины.

Рассмотрим движение материальной точки в **силовом поле**, т.е. движение под действием сил, величина и направление которых известны для каждой точки траектории L (рисунок 2.15).

Пусть за элементарное время dt точка, под действием силы $\vec{F}$, совершает элементарное перемещение $d\vec{r}$.

Процесс перемещения тела под *действием силы* называют **работой силы**.

По определению, работа силы на *элементарном перемещении* равна скалярному произведению векторов силы $\vec{F}$ и элементарного перемещения $d\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r}. \tag{2.4.1}$$

Уточним, что для элементарной работы использовано обозначение δA (а не dA) для того, чтобы подчеркнуть, что в общем случае элементарная работа **не равна** *линейной части приращения* (то есть не является дифференциалом). Очевидно, при произвольном перемещении, например от точки 1 до точки 2, работа силы $\vec{F}$ на данном участке пути будет равна сумме элементарных работ вдоль траектории: $A_{12} = \sum_1^2 \delta A$. Но суммированинае бесконечно малых величин есть, по определению, интеграл.

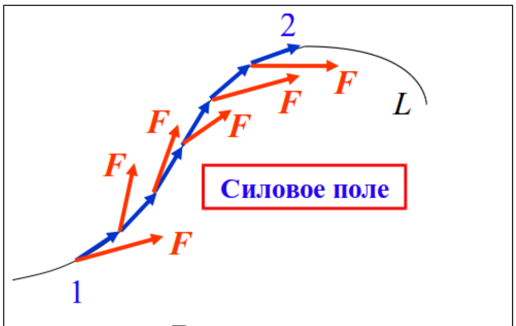


Рис. 2.15.

Таким образом, в общем случае, *работа по перемещению материальной точки вдоль произвольной траектории* L равна

$$A = \int_L \vec{F}\, d\vec{r}. \tag{2.4.2}$$

Здесь символ «$\int_L$» означает интеграл вдоль траектории и называется контурным интегралом.

Результаты, которые мы получили (определения (2.4.1, 2.4.2) справедливы только для материальной точки. Но, при изучении динамики, мы установили, что физические объекты можно моделировать ещё либо системой материальных точек, либо твёрдым телом (реально моделей можно построить сколь угодно много, мы назвали лишь те, которые изучили). И мы выяснили, что для описания поведения таких объектов достаточно описать поведение лишь одной точки – центра масс. Следовательно, полученные определения справедливы и для таких моделей – точнее, для центра масс соответствующих тел. Поэтому, в дальнейшем, говоря о физическои теле, мы будем иметь в виду его модель и, соответственно, силы, приложены к единственной точке тела – центру масс.

2.4.2 Теорема о кинетической энергии

Пусть под действием силы $\vec{F}$ материальная точка (или центр масс тела) совершила элементарное перемещение $d\vec{r}$, т.е. была совершена элементарная работа δA. Преобразуем выражение для элементарной работы воспользовавшись вторым законом Ньютона:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m\,\vec{v} d\vec{v}. \tag{2.4.3}$$

Последнее выражение можно преобразовать воспользовавшись следующим соотношением (здесь, для большей наглядности, мы используем обозначение скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в виде $(\vec{a}, \vec{b})$):

$$d(\vec{v}, \vec{v}) = (d\vec{v}, \vec{v}) + (\vec{v}, d\vec{v}) = 2(\vec{v}, d\vec{v}) \quad \Rightarrow \quad m(\vec{v}, d\vec{v}) = d\left(m\frac{(\vec{v}, \vec{v})}{2}\right)$$

Тогда, выражение для элементарной работы принимает вид:

$$\delta A = d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \tag{2.4.4}$$

Величину, стоящую в скобках

$$T = \frac{mv^2}{2}$$

называют **кинетической энергией тела**.

Итак, мы получили теорему о кинетической энергии:
– *для элементарных перемещений*:

Элементарная работа, совершённая над телом, равна дифференциалу кинетической энергии тела	$\delta A = dT$

– *на произвольном перемещении*:

$$A_{12} = \int_1^2 dT = T_2 - T_1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{A = \Delta T}$$

Работа по перемещению тела между любыми двумя точками пространства равна разности кинетических энергий тела в конечной и начальной точках

2.4.3 Потенциальные поля

Рассмотрим элементарное перемещение $d\vec{r}$ тела под действием внешних сил и распишем скалярное произведение в выражении для работы через компоненты соответствующих векторов:

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \tag{2.4.5}$$

Будем считать, что компоненты результирующего вектора силы, действующей на тело при его движении, в любой точке пространства удовлетворяют условию

$$\boxed{\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y,z),\\ F_y &= -\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y,z),\\ F_z &= -\frac{\partial}{\partial z}\Phi(x,y,z), \end{aligned}} \tag{2.4.6}$$

где $\Phi(x,y,z)$ – некоторая скалярная функция. То есть, каждая компонента силы $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ может быть выражена как частная производная от некоторой скалярной функции координат $\Phi(x,y,z)$. Тогда, подставив (2.4.6) в (2.4.5), получим:

$$-\delta A = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dz. \tag{2.4.7}$$

Правая часть в выражении (2.4.7) есть, по определению, дифференциал. Таким образом, элементарная работа δA в силовом поле, удовлетворяющем условию (2.4.6), равна полному дифференциалу (с обратным знаком) некоторой скалярной функции многих переменных $\Phi(x,y,z)$:

$$\delta A = -d\Phi(x,y,z). \tag{2.4.8}$$

Функцию $\Phi(x,y,z)$ называют *потенциальной функцией* силового поля.

Соответственно, *силовое поле, в котором возможно введение потенциальной функции*, то есть удовлетворяющее условию (2.4.6), называют **потенциальным силовым полем**.

Для произвольного перемещения в потенциальном силовом поле:

$$A_{12} = -\int_1^2 d\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{A = -\Delta\Phi} \tag{2.4.9}$$

то есть, *работа по перемещению тела в потенциальном поле не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положением тела.*

Согласно условию (2.4.9), при движении по замкнутой траектории

$$A_{11} = -\int_1^1 d\Phi = \Phi_1 - \Phi_1 \equiv 0. \tag{2.4.10}$$

Следовательно **работа в потенциальном поле по любой замкнутой траектории равна нулю**:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} \equiv 0. \tag{2.4.11}$$

Символ «$\oint$» означает, что интеграл нужно брать вдоль замкнутой линии.

Силовое поле, удовлетворяющее *только* условию (2.4.11), называют **консервативным**. И мы получаем, что *если поле потенциально, то оно* **обязательно** *консервативно.* Обратное, в общем случае, неверно: *консервативное поле* **не обязательно** *потенциально.*

Очевидно, выражение (2.4.6) можно записать следующим образом

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \tag{2.4.12}$$

или в эквивалентной форме

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi. \tag{2.4.13}$$

В последней формуле выражение в скобках формально является вектором, но его компонентами являются не числа, а некоторые объекты, «желающие взять производные» от функции справа – его называют *оператор-вектором* и обозначают символом $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{2.4.14}$$

В физике оператор-вектор $\vec{\nabla}$ называют оператор «набла». Действие оператора «набла» на *скалярную функцию* называют **градиентом функции**:

$$\vec{\nabla}\Phi = \operatorname{grad}\Phi. \tag{2.4.15}$$

Геометрический смысл градиента заключается в следующем: *градиент функции – это вектор, направленный в сторону быстрейшего возрастания функции.*

С помощью оператора «набла» выражение (2.4.6) – **условие потенциальности силового поля**, получает наиболее лаконичную форму:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi. \tag{2.4.16}$$

Смысл градиента станет нагляднее и яснее, если ввести понятие *эквипотенциальной поверхности.* **Эквипотенциальной поверхностью** в потенциальных полях называют множество точек поля, в которых потенциальная функция имеет одинаковые значения. Уравнение эквипотенциалей:

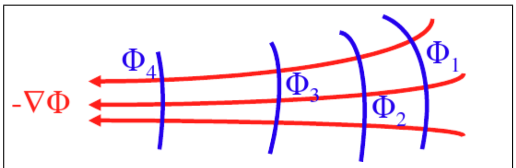


Рис. 2.16

$$\Phi(x, y, z) = const. \tag{2.4.17}$$

Ясно, что каждому значению константы $const$ в этом уравнении соответствует своя эквипотенциальная поверхность (рис. 2.16). В потенциальном поле

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi(x, y, z) \equiv -\operatorname{grad}\Phi, \tag{2.4.18}$$

т.е. сила направлена в сторону быстрейшего убывания потенциальной функции ($\Phi_1 > \Phi_2 > \Phi_3$) и, следовательно, *всегда перпендикулярна эквипотенциальным поверхностям.*

Линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением силы в этой точке, называется **силовой линией**.

Следовательно, в потенциальном поле силовые линии и эквипотенциальные поверхности всегда взаимно перпендикулярны.

2.4.4 Потенциальная энергия

Как мы установили, работа в потенциальном поле равна разности значений потенциальной функции в начальной и конечной точках поля:

$$A_{12} = \Phi_1 - \Phi_2. \tag{2.4.19}$$

Экспериментально измеримой физической величиной является работа. Соответственно, *потенциальная функция измерима только с точностью до произвольной константы.*

Это означает, что в потенциальном поле любую одну из потенциальных поверхностей можно принять за поверхность с нулевым значением потенциальной функции $\Phi_0 = 0$ (рисунок 2.17). В этом случае $A_{i0} = \Phi_i$, то есть, работа по перемещению тела из данной точки поля в точку с нулевым потенциалом численно равна значению потенциальной функции в этой точке. Численное значение потенциальной функции в любой точке поля (при заданном нулевом значении) называют **потенциальной энергией** тела, находящегося в этой точке и обозначают U_i.

Это означает, что $U_i = \Phi_i$ (при заданном нулевом потенциале). Таким образом, мы получили рецепт **вычисления** потенциальной энергии в заданной точке пространства: *потенциальная энергия* **численно равна работе,** *которую нужно совершить, чтобы переместить тело из данной точки поля в точку с нулевым значением потенциальной функции.*

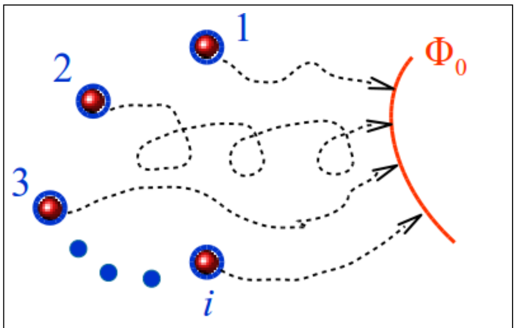


Рис. 2.17.

Учитывая, что потенциальная функция — это способ описания силового воздействия окружающего поля на тело (на центр масс тела), можно сформулировать следующее *качественное* определение потенциальной энергии:

> **потенциальная энергия – это мера взаимодействия тела,**
> *помещённого в данную точку потенциального поля,*
> **с окружающим полем.**

2.4.5 Закон сохранения энергии

В общем случае, законы сохранения являются лишь отражением определённых свойств симметрии законов динамики.

Именно поэтому законы сохранения позволяют достаточно легко получать ответы на ряд важных вопросов без привлечения уравнений движения. Это обстоятельство и превращает законы сохранения в весьма действенный инструмент исследования.

Получим закон сохранения энергии. Для элементарных перемещений в потенциальном поле элементарная работа равна $\delta A_{\text{п}} = -dU$

(см. (2.4.8)). Но по теореме о кинетической энергии для элементарных перемещений работа всех сил (потенциальных и непотенциальных), действующих на тело равна $\delta A = \delta A_{\text{п}} + \delta A_{\text{нп}} = dT$. Объединяя два этих выражения, получим:

$$d(T + U) = \delta A_{\text{нп}}. \tag{2.4.20}$$

Величину $E = T + U$ называют **полной механической энергией тела**.

Итак, для элементарных перемещений:

дифференциал полной механической энергии тела, равен элементарной работе непотенциальных сил над телом.

Соответственно, интегрируя (2.4.20), получим, что для произвольных перемещений:

изменение полной механической энергии тела на любом его перемещении равно работе непотенциальных сил над телом:

$$\Delta E = A_{\text{нп}}. \tag{2.4.21}$$

Из последнего выражения видно, что если работа непотенциальных сил равна нулю ($A_{\text{нп}} = 0$) то, следовательно, $\Delta E = 0$, а значит полная механическая энергия тела сохраняется ($E = const$). Таким образом, мы получаем **закон сохранения полной механической энергии**:

полная механической энергии тела сохраняется в любых состояниях этого тела, если в этих состояниях работа непотенциальных сил над телом равна нулю.

Отметим, что **сохраняется** именно полная механическая энергия, *кинетическая* же и *потенциальная* в общем случае *изменяются*. Однако, если выполняется закон сохранения полной механической энергии, то эти изменения происходят так, что приращение одной из них в точности равно убыли другой: $\Delta T = -\Delta U$.

Частным случаем закона сохранения полной механической энергии является случай полного отсутствия *непотенциальных сил* ($F_{\text{нп}} = 0$). При этом условии, очевидно, работа $A_{\text{нп}}$ этих сил будет равна нулю.

Следовательно,

при движении тела в потенциальном поле его полная механическая энергия сохраняется.

Следут отметить также, что в замкнутых системах, то есть при полном отсутствии сил (либо, когда их сумма равна нулю), полная механическая энергия сохраняется, но этот случай имеет очень ограниченное практическое значение.

2.5 Удар частиц

В этом параграфе мы рассмотрим различные случаи столкновения частиц в **замкнутой системе**, используя в качестве инструмента исследования только законы сохранения импульса и энергии.

Ударом точечных частиц будем называть такое *механическое* взаимодействие при *непосредственном контакте за бесконечно малое время* при котором частицы обмениваются *энергией и импульсом* при условии, что система частиц остается замкнутой.

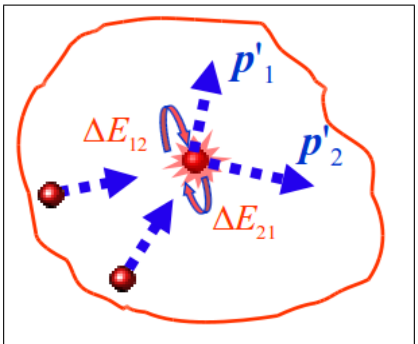


Рис. 2.18

Различают два вида ударов: **абсолютно неупругий удар**, такой удар, при котором после удара частицы движутся как единое целое и **абсолютно упругий удар**, при котором после удара частицы движутся с различными скоростями и в течение удара выполняются законы сохранения (энергии и импульса).

Абсолютно упругий удар бывает двух типов: *нецентральный* и *центральный.*

Нецентральный: такой удар частиц, после которого они разлетаются в направлениях, не совпадающих с направлением относительного движения этих частиц до удара. Этот удар моделирует, например, удар шаров, которые до удара двигались по прямой не совпадающей с линией соединяющей их центры масс.

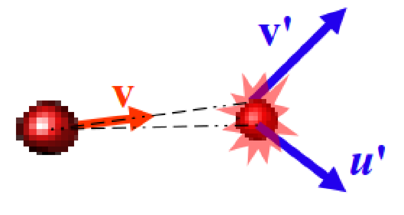


Рис. 2.19

Центральный: удар именно точечных частиц. Этот удар моделирует, например, удар шаров, которые до удара двигались вдоль линии, соединяющей центры масс этих шаров.

Рассмотрим более подробно каждый из этих типов ударов.

2.5.1 Абсолютно неупругий удар

Здесь при рассмотрении столкновений частиц будем считать, что система состоит из двух частиц или будем считать, что для произвольной системы частиц, в каждый данный момент времени в данной точке пространства сталкиваются только две частицы.

Согласно определению абсолютно неупругого удара закон сохранения импульса принимает вид

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}. \tag{2.5.1}$$

Откуда можно найти скорость системы частиц после удара относительно некоторой инерциальной системы отсчёта:

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\frac{\vec{v}_1}{m_2} + \frac{\vec{v}_2}{m_1}\right). \tag{2.5.2}$$

Перейдем в инерциальную систему отсчёта K_0, движущуюся со скоростью $\vec{u}$ – в этой системе отсчёта скорость частиц после удара равна нулю: $u' = 0$. Соответственно закон сохранения (2.5.1) примет следующий вид:

$$m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = 0, \quad \Rightarrow \quad m_1\vec{v}_1' = -m_2\vec{v}_2'. \tag{2.5.3}$$

Таким образом, видим, что в ИСО K_0 до столкновения обе частицы движутся навстречу друг другу с одинаковыми импульсами, а после столкновения образовавшаяся частица оказывается неподвижной. Следовательно, кинетическая энергия после взаимодействия в системе K_0 должна быть равна нулю. Очевидно, что до взаимодействия суммарная кинетическая энергия частиц не равна нулю (сумма квадратов двух вещественных величин не равных нулю не может быть равна нулю):

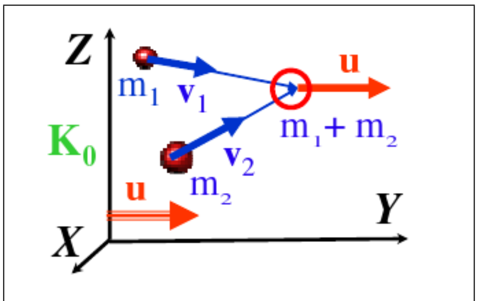


Рис. 2.19

$$\frac{m_1(\vec{v}_1')^2}{2} + \frac{m_2(\vec{v}_2')^2}{2} \neq 0. \tag{2.5.4}$$

Следовательно, **закон сохранения полной механической энергии при абсолютно неупругом ударе не выполняется**.

Введём обозначения: Q – полная механическая энергия частиц в ИСО K_0 до удара и μ – приведённая масса ситемы двух частиц:

$$Q = \frac{m_1(\vec{v}_1')^2}{2} + \frac{m_2(\vec{v}_2')^2}{2}; \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{2.5.5}$$

Механическая энергия Q после удара не может «исчезнуть» – поэтому, полученный результат означает, что **при абсолютно неупругом ударе часть механической энергии равная Q переходит в другой вид энрегии – во внутреннюю энергию, то есть в тепло**.

Найдём величу энергии Q относительно исходной (лабораторной) инерциальной системы отсчёта. Для этого выразим энергию Q через импульсы частиц:

$$Q = \frac{(m_1\vec{v}_1')^2}{2m_1} + \frac{(m_2\vec{v}_2')^2}{2m_2} \tag{2.5.6}$$

и найдём связь импульсов $\vec{p}_1' = m_1\vec{v}_1'$ и $\vec{p}_2' = m_2\vec{v}_2'$ частиц в ИСО K_0 с их импульсами в лабораторной системе отсчёта воспользовавшись преобразованиями Галилея (1.6.8):

$$m_1\vec{v}_1' = m_1(\vec{u} - \vec{v}_1) = m_1\left(\frac{\vec{v}_1}{m_2} + \frac{\vec{v}_2}{m_1}\right)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} - m_1\vec{v}_1. \tag{2.5.7}$$

Здесь мы вопользовались выражением (2.5.2) для скорости системы частиц после абсолютно неупругого удара. Раскроем скобки в последнем равенстве в уравнении (2.5.7) и упростим его:

$$\begin{gathered} \frac{m_1}{m_2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_2 - m_1\vec{v}_1 = \\ m_1\vec{v}_1\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} - 1\right) + \mu\vec{v}_2 \end{gathered} \tag{2.5.8}$$

Выражение в скобках в последнем равенстве после упрощений равно приведённой массе μ. Таким образом, для импульса первой частицы в ИСО K_0 мы получили:

$$m_1\vec{v}_1' = \mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1). \tag{2.5.9}$$

Для импульса второй частицы, аналогично, получаем:

$$m_2\vec{v}_2' = \mu(\vec{v}_1 - \vec{v}_2). \tag{2.5.10}$$

В результате, выражение (2.5.6) принимает вид:

$$Q = \frac{\mu^2(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2}{2m_1} + \frac{\mu^2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2m_2} \tag{2.5.11}$$

и для механической энергии Q после несложных преобразований (с учётом определения (2.5.5)) получаем выражение через величины, характеризующие движение частиц системы относительно лабораторной ИСО:

$$Q = \frac{\mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2}{2}. \tag{2.5.12}$$

Итак, **при абсолютно неупругом ударе часть полной механической энергии взаимодействующих частиц (равная Q) переходит (за время удара) во внутреннюю энергию образующейся частицы**. Причём величина Q для данной пары частиц зависит только от их относительной скорости.

2.5.2 Абсолютно упругий удар, центральный

Рассмотрим замкнутую систему частиц относительно двух инерциальных систем отсчёта – K и K_c, движущейся (относительно K) со скоростью центра масс системы $\vec{v}_c$ (рис. 2.20).

Будем опять считать, что в заданной точке пространства в данный момент могут столкнуться не более двух частиц и будем обозначать символами $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ... \vec{v}_i$ – скорости частиц до удара (в ИСО K_c – со штрихом) и $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_i$ – скорости частиц после удара (в ИСО K_c – со штрихом). Рассмотрим систему частиц из ИСО K_c. Запишем закон сохранения энергии:

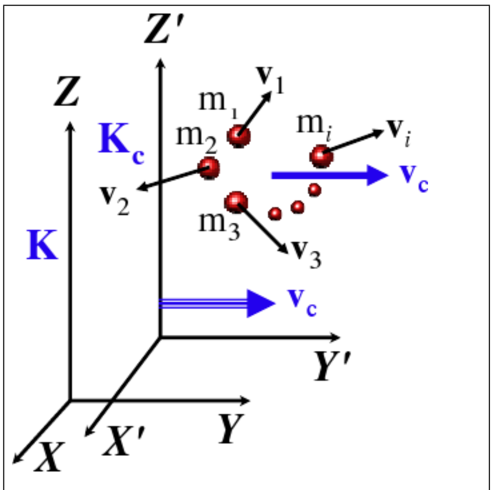


Рис. 2.20

$$\begin{aligned} m_1\vec{v}_1'^2 + m_2\vec{v}_2'^2 = \\ = m_1\vec{u}_1'^2 + m_2\vec{u}_2'^2. \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

Умножим это уравнение на m_1

$$\begin{aligned} m_1^2\vec{v}_1'^2 + m_1m_2\vec{v}_2'^2 = \\ m_1^2\vec{u}_1'^2 + m_1m_2\vec{u}_2'^2. \end{aligned} \tag{2.5.18}$$

Из закона сохранения импульса очевидно, что $(m_1\vec{v}_1')^2 = (m_2\vec{v}_2')^2$ и $(m_1\vec{u}_1')^2 = (m_2\vec{u}_2')^2$.

Тогда, получаем

$$m_2^2\vec{v}_2'^2 + m_1m_2\vec{v}_2'^2 = m_2^2\vec{u}_2'^2 + m_1m_2\vec{u}_2'^2 \qquad (2.5.19)$$

Откуда ясно, что

$$(m_2^2 + m_1m_2)\vec{v}_2'^2 = (m_2^2 + m_1m_2)\vec{u}_2'^2 \qquad (2.5.20)$$

Следовательно, в ИСО K_c $|\vec{v}_2'| = |\vec{u}_2'|$. Очевидно, для произвольного количества частиц $|\vec{v}_i'| = |\vec{u}_i'|$. А так как в ИСО K_c скорость центра масс равна нулю, то

$$\vec{v}_i' = -\vec{u}_i', \qquad (2.5.21)$$

то есть, с точки зрения наблюдателя в инерциальной системе отсчёта K_c скорости частиц в результате столкновения изменят свой знак на противоположный, не меняясь при этом по модулю. Для перехода в ИСО K воспользуемся преобразованиями Галилея – получим:

$$\vec{u}_i = 2\vec{v}_c - \vec{v}_i. \qquad (2.5.22)$$

В частности для двух частиц

$$\vec{u}_1 = 2\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} - \vec{v}_1; \qquad \vec{u}_2 = 2\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} - \vec{v}_2. \qquad (2.5.23)$$

2.5.3 Абсолютно упругий удар, нецентральный

Нецентральный абсолютно упругий удар рассмотрим на примере точечных частиц разной массы. Найдём скорости частиц после столкновения и угол под которым они разлетаются. Выберем такую инерциальную систему отсчёта, в которой частица массой M до удара покоится.

Запишем закон сохранения импульса для системы двух частиц в лабораторной системе отсчёта и соответствующий закон сохранения энергии:

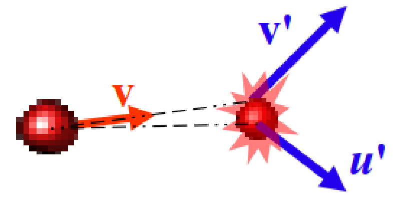


Рис. 2.21.

$$m\vec{v} = m\vec{v}\,' + M\vec{u}\,', \qquad m\vec{v}^{\,2} = m(\vec{v}\,')^2 + M(\vec{u}\,')^2. \tag{2.5.28}$$

Первое возведём в квадрат:

$$m^2\vec{v}^{\,2} = m^2(\vec{v}\,')^2 + M^2(\vec{u}\,')^2 + 2mM(\vec{v}\,', \vec{u}\,'), \tag{2.5.29}$$

а второе умножим на m:

$$m^2\vec{v}^{\,2} = m^2(\vec{v}\,')^2 + mM(\vec{u}\,')^2. \tag{2.5.30}$$

Вычитая их друг из друга, получим:

$$M^2(\vec{u}\,')^2 + 2mM(\vec{v}\,'\vec{u}\,') = mM(\vec{u}\,')^2. \tag{2.5.31}$$

Распишем скалярное произведение и перегруппируем слагаемые:

$$2m\,v'u'\cos\alpha = (m - M)(\vec{u}\,')^2. \tag{2.5.32}$$

Откуда находим угол, под которым разлетятся частицы разной массы после нецентрального абсолютно упругого удара

$$\cos\alpha = \frac{u'}{2v'}\left(1 - \frac{M}{m}\right). \tag{2.5.33}$$

Наиболее интересен этот результат для частиц одинаковой массы: в этом случае $\cos\alpha = 0$ и, следовательно, угол α=90°, то есть частицы одинаковой массы при любом нецентральном и абсолютно упругом столкновении разлетаются под прямым углом.

2.6 Гравитационное поле

2.6.1 Закон всемирного тяготения

Гравитационным полем называют *силовое поле, в котором ускорения пробных частиц за счет сил со стороны поля, не зависят от массы частиц.*

Гравитационное поле обеспечивает гравитационное взаимодействие в котором участвуют все объекты материального мира.

Закон всемирного тяготения — закон, описывающий гравитационное взаимодействие *материальных точек* (рис. 2.22):

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{2.6.1}$$

где $G = 6,673 \cdot 10^{-8}$см^3/г·с^2 - гравитационная постоянная, m_1 и m_2 – гравитационные массы тел. В силу сферической симметрии правой части закона (2.6.1), он справедлив и для тел, обладающих соответствующей симметрией – в частности, для планет солнечной системы, при этом, естественно, радиус-вектора $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ являются радиус-векторами центров масс тел.

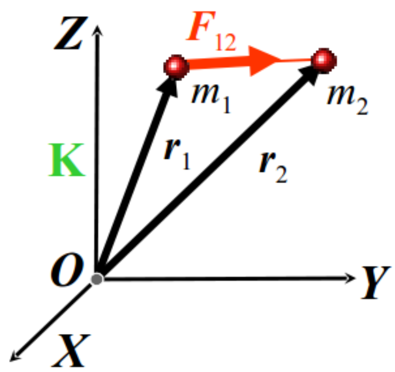


Рис. 2.22.

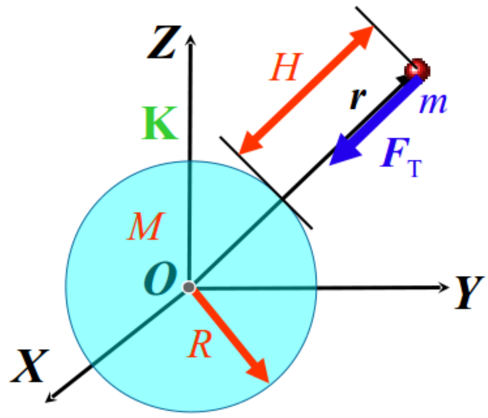


Рис. 2.23.

2.6.2 Принцип эквивалентности

Рассмотрим гравитационное взаимодействие точечного тела с Землей. Сила, действующая на тело со стороны Земли – сила тяжести (рис. 2.23)

$$\vec{F}_{\text{Т}} = -G\frac{Mm}{|\vec{r}|^3}\vec{r} \quad \Rightarrow \quad F_{\text{Т}} = -G\frac{Mm}{(R+H)^2} \tag{2.6.2}$$

где $R = 6,371 \cdot 10^8$ см – радиус Земли, H – высота тела над поверхностью Земли, $M = 5,977 \cdot 10^{27}$ г – масса Земли.

По второму закону Ньютона, под действием силы тяжести тело приобретает ускорение, величина которого равна

$$a_g = \frac{F_{\text{Т}}}{m_{\text{и}}} = G\frac{M}{(R+H)^2}\frac{m}{m_{\text{и}}} = g\frac{m}{m_{\text{и}}} \tag{2.6.3}$$

где $m_{\text{и}}$ – инертная масса тела и g – ускорение свободного падения. Таким образом, согласно второму закону Ньютона, ускорение силы тяжести a_g и ускорение свободного падения g не совпадают:

$$a_g \neq g. \tag{2.6.4}$$

Однако, измерение гравитационной m и инертной $m_{\text{и}}$ масс различных тел показали, что они **численно** совпадают с большой точностью — относительная ошибка не превышает 10^{-13}. На этом основании был сформулирован **принцип эквивалентности**, который утверждает, что

гравитационная и инертная массы тела численно всегда совпадают.

Таким образом:

$$a_g = G\frac{M}{(R+H)^2} \equiv g. \tag{2.6.5}$$

Следовательно, величина ускорения силы тяжести a_g и величина ускорения свободного падения g **совпадают**, если выполняется принцип эквивалентности.

2.6.3 Потенциальность гравитационного поля

Рассмотрим гравитационное взаимодействие двух точечных тел массами m_1 и m_2. Для того, чтобы убедиться, что гравитационное поле точечного тела массой m_1 потенциально, нужно убедиться, что существует такая скалярная функция $\Phi_{12}(\vec{r})$, градиент (grad) которой равен силе гравитационного взаимодействия этого тела с любым другим точечным телом массой m_2, т.е. вычислить результат действия оператора $\vec{\nabla}$ на функцию $\Phi_{12}(\vec{r})$.

Докажем, что функция $\Phi_{\vec{1}2}(r)$ должна иметь вид:

$$\Phi_{12}(\vec{r}) = G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|}. \tag{2.6.6}$$

Для этого нужно вспомнить определение оператора $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{2.6.7}$$

и модуля радиус-вектора: $|\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, вычислить производные и собрать их в одно выражение.

Однако, в целях упрощения предстоящих и дальнейших вычислений, воспользуемся правилами действия оператора $\vec{\nabla}$:

$$\left(\vec{a}\,\vec{\nabla}\right)\Phi = \vec{a}\left(\vec{\nabla}\Phi\right), \qquad \vec{\nabla}|\vec{r}|^n = n|\vec{r}|^{n-2}\vec{r}, \qquad \vec{\nabla}\left(\vec{a}\,\vec{r}\right) = a. \quad (2.6.8)$$

Тогда, с помощью второй формулы из (2.6.8) получаем

$$\vec{\nabla}\Phi_{12}(\vec{r}) = Gm_1m_2\vec{\nabla}|\vec{r}|^{(-1)} = -G\frac{m_1m_2}{|\vec{r}|^3}\vec{r}. \quad (2.6.9)$$

Сравнив полученное выражение с законом всемирного тяготения (2.6.1), видим что

$$F_{12} = -\vec{\nabla}\Phi_{12}(\vec{r}). \quad (2.6.10)$$

Таким образом, мы доказали, что сила гравитационного взаимодействия двух точечных тел массами m_1 и m_2 определяется градиентом скалярной функции $\Phi_{12}(\vec{r})$ – потенциальной функции гравитационного взаимодействия этих тел. Следовательно, **гравитационное поле — потенциально.**

2.7 Движение в центральном поле

Центральным полем называют потенциальное поле, потенциальная функция которого зависит только от модуля радиус-вектора, т.е. определяется только расстоянием от одной заданной точки поля, называемой **силовым центром**.

Таким образом, потенциальная функция центрального поля должна иметь вид:

$$\Phi_c(\vec{r}) = U(|\vec{r}|). \quad (2.7.1)$$

Соответственно, сила, действующая на пробную частицу в центральном поле

$$\vec{F}_c = -\nabla U(|\vec{r}|) = -\frac{\partial U(|\vec{r}\,|)}{\partial \vec{r}} = -\frac{dU(|\vec{r}\,|)}{d|\vec{r}\,|}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}\,|} \quad (2.7.2)$$

всегда направлена против радиус-вектора $\vec{r}$, те есть к силовому центру. Следовательно момент силы, действующей на частицу в центральном поле

$$\vec{M}_c = [\vec{r}, \vec{F}_c] = -\frac{dU(|\vec{r}\,|)}{d|\vec{r}\,|}\frac{1}{|\vec{r}\,|}[\vec{r}, \vec{r}] \equiv 0 \quad (2.7.3)$$

равен нулю. Откуда следует, что по основному закону динамики вращательного движения:

$$\vec{M}_c = \frac{dL_c}{dt} \equiv 0 \tag{2.7.4}$$

момент сил гравитационного поля, действующего на пробную частицу, равен нулю, а следовательно момент импульса частицы в центральном поле сохраняется:

$$\vec{L}_c = m[\vec{r}, \vec{v}_c] = const. \tag{2.7.5}$$

Найдём теперь скалярное произведение момента импульса $\vec{L}_c$ на радиус-вектор:

$$\vec{L}_c \vec{r} = m\vec{r}\,[\vec{r}, \vec{v}] = m\vec{v}\,[\vec{r}, \vec{r}] \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_c \perp \vec{r}$$

(здесь в предпоследнем действии мы сделали циклическую перестановку векторов в смешанном произведении $\vec{r}\,[\vec{r}, \vec{v}]$). Из равенства нулю скалярного произведения $\vec{L}_c \vec{r}$ следует, что векторы $\vec{L}_c$ и $\vec{r}$ при любом движении в центральном поле остаются взаимно перпендикулярными. Следовательно, радиус-вектор $\vec{r}$ все время остаётся в одной плоскости, перпендикулярной к вектору $\vec{L}$, то есть траектория движения частицы в центральном поле лежит полностью в одной плоскости.

Скалярное произведение $\vec{L}_c \vec{r}$ можно записать в виде:

$$L_x x + L_y y + L_z z = 0. \tag{2.7.6}$$

Последнее выражение есть уравнение плоскости, проходящей через начало координат и именно в этой плоскости движется частица.

Рассмотрим более подробно движение пробной частицы в центральном поле. Выберем инерцальную систему отсчёта с началом в силовом центре O. Из выражения для полной механической энергии частицы несложно найти связь между $d|\vec{r}\,|$ и dt.

В праграфе 1.2 было показано, что любое движение материальной точки можно разложить на два движения: прямолинейное – вдоль радиус-вектора (со скоростью $\vec{v}_r$) и вращательное – относительно начала системы отсчёта (со скоростью $\vec{v}_n$). Тогда запишем полную механическую энергию частицы в центральном поле как сумму её потенциальной энергии $U(|\vec{r}|)$ и кинетической энергии: кинетической энергии прямолинейного движения вдоль радиус-вектора и кинетической энергии вращательного движения относительно силового центра:

$$E = \left(\frac{mv_r^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}\right) + U(|\vec{r}|). \tag{2.7.7}$$

Перепишем это выражение испльзуя определения (1.2.3) и (2.3.16):

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{d|\vec{r}\,|}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2J} + U(|\vec{r}|) = \frac{m}{2}\left(\frac{d|\vec{r}\,|}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2m|\vec{r}\,|^2} + U(|\vec{r}|) \quad (2.7.8)$$

и выразим отсюда производную по времени от модуля радиус-вектора:

$$\left(\frac{d|\vec{r}\,|}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}(E - U(|\vec{r}|)) - \frac{L^2}{m^2|\vec{r}\,|^2}. \quad (2.7.9)$$

Тогда

$$dt = d|\vec{r}\,|\left(\frac{2}{m}(E - U(|\vec{r}|)) - \frac{L^2}{m^2|\vec{r}\,|^2}\right)^{1/2}. \quad (2.7.10)$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение, можно найти промежуток времени, за который частица в центральном поле переместится из одной точки траектории в любую другую.

По определению момента импульса частицы $L = J\omega = mr^2 d\phi/dt$, следовательно:

$$d\phi = \frac{L}{mr^2}dt \quad (2.7.11)$$

Подставив сюда выражение для dt из (2.7.10) найдём:

$$d\phi = \frac{L}{mr^2}d|\vec{r}\,|\left(\frac{2}{m}(E - U(|\vec{r}|)) - \frac{L^2}{m^2|\vec{r}\,|^2}\right)^{1/2}. \quad (2.7.12)$$

Это есть диффернциальное уравнение траектории частицы в полярных координатах. Интегрируя это уравнение можно найти явный вид траектории, то есть зависимость $\phi = \phi(\vec{r})$.

2.7.1 Задача Кеплера

Задачей Кеплера называют задачу описания движения частицы в центральном поле, потенциальная функция которого имеет вид

$$U(|\vec{r}\,|) = \frac{\alpha}{|\vec{r}\,|} \quad (2.7.13)$$

Для задачи Кеплера в тех точках, где скорость $\vec{v}_r = 0$ (точки поворота) полная механическая энергия частицы равна:

$$E = \frac{L^2}{2m|\vec{r}\,|^2} - \frac{\alpha}{|\vec{r}\,|}. \quad (2.7.14)$$

Это выражение приводит к квадратному уравнению на $|\vec{r}\,|$:

$$|\vec{r}\,|^2 + 2a|\vec{r}\,| - b^2 = 0, \tag{2.7.15}$$

где обозначено:

$$a = \frac{\alpha}{2E}, \qquad b = \frac{L}{\sqrt{2mE}} \tag{2.7.16}$$

Корни этого уравнения:

$$|\vec{r}\,|_{1,2} = -a\left(1 \pm \sqrt{1 + (b/a)^2}\right) \tag{2.7.17}$$

Рассмотрим два случая: параметр $\alpha < 0$ (отталкивающий центр) и $\alpha > 0$ (притягивающий центр).

В первом случае ($\alpha < 0$), если полная механическая энергия $\mathbf{E > 0}$ то параметры $a < 0$, $b > 0$ и $b \in Re$. Возможен только *один корень*:

$$|\vec{r}\,|_1 = |a|\left(1 + \sqrt{1 + (b/a)^2}\right)$$

Если полная механическая энергия меньше нуля: $\mathbf{E > 0}$ то параметры $a > 0$ и $b \in Im$. Положительных *корней нет.*

Итак, для отталкивающего центра энергия *только* положительна $\mathbf{E > 0}$ и **движение инфинитно**.

Во втором случае ($\alpha > 0$) притягивающего центра если полная механическая энергия $\mathbf{E > 0}$ то параметры $a > 0$, $b > 0$ и $b \in Re$. Возможен только *один корень*:

$$|\vec{r}\,|_1 = a\left(-1 + \sqrt{1 + (b/a)^2}\right)$$

и **движение инфинитно**.

Если полная механическая энергия меньше нуля: $\mathbf{E < 0}$ то параметры $a < 0$ и $b \in Im$. Существуют *два корня*:

$$|\vec{r}\,|_{1,2} = -a\left(1 \pm \sqrt{1 - (b/a)^2}\right)$$

и движение носит **финитный характер**.

Рассмотрим более подробно задачу Кеплера для притягивающего силового центра.

С обозначениями (2.7.16) уравнение (2.7.12) примет вид:

$$d\phi = \frac{b}{r^2}dr\left(1 + \frac{2a}{r} - \frac{b^2}{r^2}\right)^{1/2}. \tag{2.7.18}$$

Интегрируя это уравнение получим:

$$\cos\phi = \left(\frac{b^2}{ra} - 1\right)\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^{-1/2} \tag{2.7.19}$$

и после преобразований:

$$1 + e\cos\phi = p \tag{2.7.20}$$

где обозначено $e = \sqrt{1+(b/a)^2}$ – *эксцентриситет* и $p = b^2/ra$ – *параметр (орбиты)*. Выражение (2.7.20) есть уравнение конического сечения (с фокусом в начале координат) в полярных координатах.

Таким образом, движение материальной точки в ЦП с притягивающим центром возможно по трем типам траекторий:

1. гипербола ($E > 0$, $e > 1$);
2. парабола ($E = 0$, $e = 1$);
3. эллипс ($E < 0$, $e < 1$).

Для эллипса величины a и b – это большая и малая полуоси эллипса.

2.7.2 Законы Кеплера

Законами Кеплера называют результаты решения задачи Кеплера для частицы, движущейся в ЦП с притягивающим силовым центром – например – законы движения планет.

Первый Закон Кеплера

По определению, законы Кеплера соответствуют задаче Кеплера с параметрами $\alpha > 0$ и $E < 0$. Следовательно:

единственной замкнутой траекторией точечной частицы в центральном поле с притягивающим центром является эллипс
(с силовым центром в фокусе).

Второй закон Кеплера

Рассмотрим частицу движущуюся в центральном поле по замкнутой траектории. Как мы уже доказали, при движении в центральном поле момент импульса частицы сохраняется $\vec{L} = const$ (2.7.5). С другой стороны

$$L = J\omega = mr^2\omega = mr^2\frac{d\varphi}{dt} = m\frac{r(rd\varphi)}{dt}, \tag{2.7.21}$$

здесь мы воспользовались определением момента инерции материальной точки (2.3.14) и угловой скорости (1.2.6). Площадь сектора эллипса может быть вычислена по формуле: $dS = r^2 d\varphi/2$ (см. рис. 2.24), тогда:

$$L = 2m\frac{dS}{dt} = const. \tag{2.7.22}$$

На рисунке 2.24 показана замкнутая траектория точечной частицы в центральном поле. В одном из фокусов находится силовой центр. Заштрихованная область – площадь dS элементарного сектора, образованного двумя бесконечно близкими радиус-векторами $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}(t+dt)$ и элементом дуги траектории.

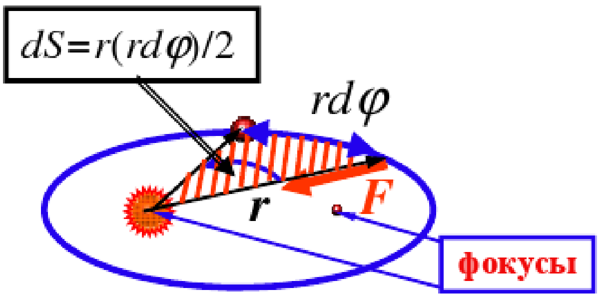


Рис. 2.24.

Таким образом, из (2.7.21) получаем:

$$\frac{dS}{dt} = const. \tag{2.7.23}$$

Производную dS/dt называют секториальной скоростью. Выражение (2.7.23) называют вторым законом Кеплера – *при движении в центральном поле по эллиптической орбите секториальная скорость остается постоянной*. Или:

За равные промежутки времени
радиус-вектор частицы
движущейся по эллиптической орбите
в центральном поле
описывает равные площади.

Третий закон Кеплера

По второму закону Кеплера

$$2m\frac{dS}{dt} = L = const. \tag{2.7.24}$$

Тогда для периода обращения точечной частицы движущейся по эллиптической орбите в центральном поле получим:

$$T = \frac{2mS}{L}. \tag{2.7.25}$$

Учитывая, что площадь эллипса $S = \pi ab$ из выражения (2.7.25) с учётом обозначений 2.7.16 можем написать

$$2m\pi ab = TL = Tb\sqrt{2mE} = Tb\sqrt{2m\frac{\alpha}{2a}}. \tag{2.7.26}$$

Откуда, после упрощения находим период T:

$$T = 2\pi a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}. \tag{2.7.27}$$

Возведём это выражение в квадрат и найдём отношение периодов для двух траекторий (с различными a – большими полуосями эллипсов). Получим третий закон (см рис. 2.25) Кеплера:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \tag{2.7.28}$$

Квадраты периодов обращения точечных частиц в гравитационном поле относятся как кубы больших полуосей их орбит.

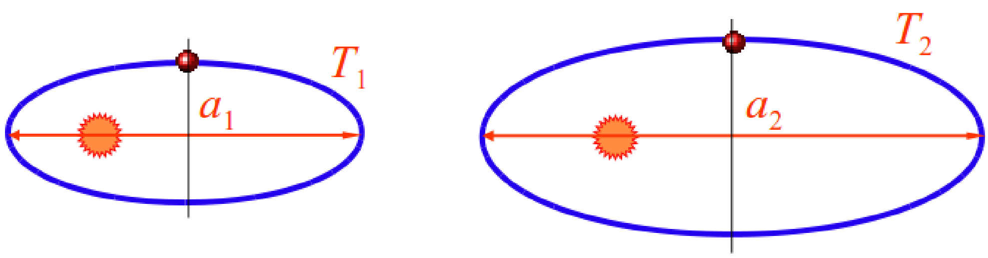


Рис. 2.25

2.8 Неинерциальные системы отсчета

Изучение динамики мы начали с законов Ньютона и установили, что закон Ньютона (2.1.1) выполняется **только** для инерциальных систем отсчёта. Но, все *реальные* системы отсчёта являются инерциальными только приближённо. В частности – система отсчёта, связанная с любой точкой поверхности Земли (кроме полюсов) является неинерциальной. Причина — суточное вращение Земли. Соответственно, чем меньше скорость $v_r = \omega R$ (где ω – угловая скорость суточного вращения) вращательного движения данной точки поверхности Земли, тем с большей точностью эта точка может моделировать инерциальную систему отсчёта.

Естественно, возникает вопрос: как записать закон динамики для частицы в неинерциальной системе отсчёта K', движущейся относительно некоторой инерциальной системы отсчёта K с известным ускорением a_0?

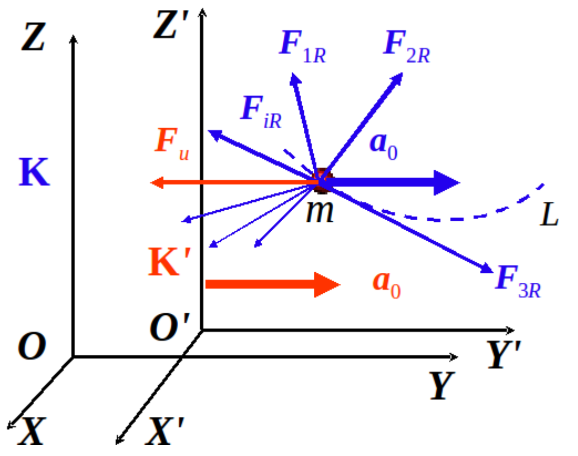


Рис. 2.26

Рассмотрим движение некоторой материальной точки массой m по траектории L из двух систем отсчёта — инерциальной K и неинерциальной K'. Величину и направление ускорения $\vec{a}_0$ неинерциальной системы отсчёта K' выберем равным ускорению $\vec{a}_0$ частицы (относительно инерциальной системы отсчёта K).

Частица движется в поле реальных сил F_{iR}, действующих на частицу. Тогда закон динамики в инерциальной системе отсчёта K запишется следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iR} = \vec{a}_0, \tag{2.8.1}$$

В неинерциальной системе отсчёта K' ускорение частицы равно нулю и закон динамики должен иметь вид

$$\sum_{i=1}^{n+1} \vec{F}_i = 0. \tag{2.8.2}$$

Число частиц механической системы и, следовательно, число реальных внешних сил равно n. Индекс $n+1$ в сумме означает, что в неинерциальной системе **нужна** еще одна сила, которая уравновесит все реальные силы. Введём обозначение

$$\vec{F}_u = -m\vec{a}_0. \tag{2.8.3}$$

Величину $\vec{F}_u$ рассматривают, как дополнительную **(фиктивную)** силу, возникающую в неинерцильной системе отсчёта и называют «силой» *инерции*. Тогда закон динамики движения материальной точки в неинерциальной системе отсчёта K' примет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{F}_u = 0. \tag{2.8.4}$$

2.8.1 Сила тяжести и вес тела

Рассмотрим небольшое тело (рисунок 2.27), подвешенное на некоторой (небольшой) высоте H от поверхности Земли. Земля вращается (суточное вращение) – вместе с ней в этом вращении участвуют все тела на Земле. За счёт гравитационного взаимодействия тела с Землёй на тело действует сила тяжести. В инерциальной системе отсчёта K, связанной с центром Земли, закон динамики для нашей частицы имеет вид

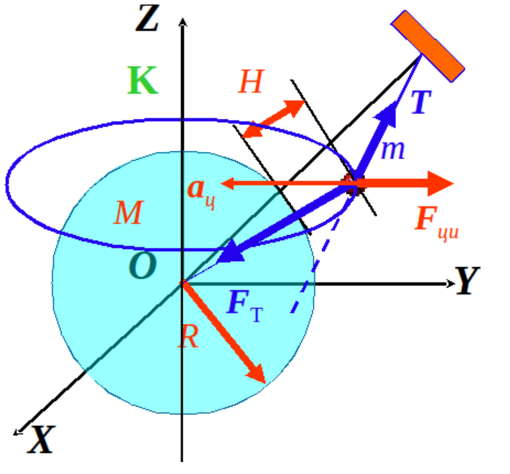


Рис. 2.27

$$\vec{F}_{\text{т}} + \vec{T} = m\vec{a}_{\text{ц}}, \tag{2.8.7}$$

где $\vec{T}$ – сила реакции нити, $\vec{a}_{\text{ц}}$ – центростремительное ускорение.

Поверхность Земли является неинерциальной системой отсчёта, вращающейся с ускорением $\vec{a}_{\text{ц}}$ – соответственно, закон динамики для неинерциальной системы отсчёта, связанной с поверхностью Земли можно записать в виде:

$$\vec{F}_{\text{т}} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{ци}} = 0, \tag{2.8.8}$$

где $\vec{F}_{\text{ци}} = -m\vec{a}_{\text{ц}}$ – центробежная сила инерции.

Весом тела называют силу, действующую на горизонтальную опору или вертикальный подвес.

Следовательно вес P тела массой m

$$|\vec{P}| = |-\vec{N}|. \tag{2.8.9}$$

При записи этого определения мы учли, что вес тела $\vec{P}$ и сила реакции нити $\vec{T}$ являются силами, связанными по третьему закону Ньютона и, следовательно, не могут быть сведены в одну точку пространства. Как (математическое) следствие, эти силы не могут быть записаны в одном векторном уравнении (см. параграф 2.1.1, пункт: «Третий закон Ньютона»).

Тогда, учитывая что $\vec{a}_{\text{ц}} = \vec{\rho}\omega^2$, где ρ – радиус окружности, по которой движется частица вместе с Землей, получим

$$|\vec{P}| = |m\vec{g} + m\vec{\rho}\omega^2|. \tag{2.8.10}$$

Введём обозначение

$$\vec{g}_R = \vec{g} + \vec{\rho}\omega^2. \tag{2.8.11}$$

Таким образом вес тела массой m

$$P = mg_R, \tag{2.8.12}$$

где g_R – ускорение свободного падения на широте, на которой расположена частица.

Глава 3

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

3.1 Кинематика специальной теории относительности (СТО)

3.1.1 Введение

Специальная теория относительности (СТО) это механика, учитывающая особенности пространства и времени для объектов, движущихся с очень большими скоростями относительно наблюдателя — релятивистская механика.

Исторически, основой СТО являются преобразования Лоренца. Первые результаты связанные с преобразованиями были получены Лоренцем (Hendrik Antoon Lorentz) в 1885 году и В. Фойгтом (Woldemar Voigt) в 1887 году. В 1904 году вышла работа Лоренца, где его преобразования впервые были сформулированы как самостоятельный научный результат. Затем, в июне 1905 года французский матеметик Пуанкаре (Henri Poincaré) дал новую форму преобразованиям, предложенным Лоренцем (именно Пуанкаре дал им имя Лоренца), и установил их групповую[1] природу. В силу этих преобразований скорость света постоянна и уравнения Максвелла инвариантны и этим удовлетворяется принцип относительности (принцип относительности Пуанкаре):

«законы физики должны быть одинаковыми, как для неподвижного наблюдателя, так и для наблюдателя, вовлеченного в равномерное

[1] Группа Лоренца является группой преобразований Лоренца пространства Минковского, сохраняющих начало координат. Группа всех преобразований Лоренца, включая и параллельный перенос называется группой Пуанкаре

движение, так, что мы не имеем и не можем иметь никакого способа узнать находимся ли мы или нет в подобном движении».

В конце сентября 1905 года вышла работа Эйнштейна (Albert Einstein), в которой был сформулирован тот же принцип относительности и получены преобразования Лоренца.

Главное отличие работы Эйнштейна заключалось в том, что новый принцип относительности и постоянство скорости света во всех ИСО были **исходными** постулатами, а преобразования Лоренца лишь *следствием* этоих постулатов. В работах Пуанкаре все результаты были получены, как *следствие* свойств **эфира** (особой физической субстанции в которой движутся все наблюдаемые физические объекты).

Таким образом, Эйнштейн впервые выдвинул идею о том, что необычный (с точки зрения механики Ньютона) вид преобразований Лоренца - это свойство самого пространства (а не следствие свойств ненаблюдаемого эфира).

3.1.2 Принцип относительности

В классической механике принцип относительности сформулирован **Галилео Галилеем** и сводится к следующему утверждению:

- все законы механики не зависят от выбора инерциальной системы отсчета (ИСО), то есть *инвариантны* по отношению к выбору ИСО.

Это означает, что никакими (механическими) опытами внутри ИСО невозможно определить движется ли данная система, или находится в покое.

Эйнштейн и Пуанкаре обобщили классический принцип относительности Галилея на все явления (и, соответственно, законы) Природы.**Принцип относительности** *Эйнштейна - Пуанкаре* можно сформулировать следующим образом:

- все законы Природы не зависят от выбора инерциальной системы отсчета (ИСО), то есть *инвариантны* по отношению к выбору ИСО.

Это означает, что *никакими* опытами внутри ИСО невозможно определить движется ли данная система, или находится в покое.

Следовательно, принцип относительности (как классический, так и релятивистский) утверждает равноправие всех ИСО.

3.1.3 Исходные постулаты СТО

Основным постулатом классического (т.е. галилеевского) принципа относительности, обеспечивающего равноправие ИСО в классической механике, является постулат Галилея, утверждающий, что время во всех ИСО течет одинаково (т.е. время абсолютно).

Какие же изменения внесли Эйнштейн и Пуанкаре в классические представления об ИСО?

1. Важнейшее отличие принципа относительности Эйнштейна - Пуанкаре от классического принципа заключается в том, что они отказались от абсолютности времени по отношению к выбору ИСО.

2. Как следствие, длина отрезка в различных ИСО тоже должна быть различной, то есть зависеть от выбора ИСО.

Итак, согласно представлениям релятивистского принципа относительности

$$\boxed{dt \neq inv} \boxed{dl \neq inv}$$

где dt и dl – соответственно элементарные промежутки времени и длины, inv – инвариант (по отношению к выбору ИСО). *Итак, промежутки вермени и длины в СТО являются относительными величинами.*

Возникает вопрос — что же является инвариантом (по отношению к выбору ИСО) в релятивистском принципе относительности?

На этот вопрос отвечает **основной постулат** СТО (постулат Эйнштейна), который утверждает, что

скорость света c не зависит от выбора ИСО, то есть во всех ИСО одинакова

Вторым (или дополнительным) постулатом обычно является постулат об *изотропности и однородности пространства и времени.* Из которого, путем логических рассуждений выводят, как следствие инвариантности скорости света, инвариантность величины $s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta l^2$, называемой *интервалом.* Чтобы избавиться от необходимости проводить довольно сложные (а самое главное - не очень убедительные) логические рассуждения мы поступим иначе — вместо неинвариантных по отношению к выбору ИСО величин dt и dl введем другую: $ds^2 = -c^2dt^2 + dl^2$, являющуюся *элементарным интервалом* и **постулируем** её инвариантность по отношению к выбору ИСО (**дополнительный** постулат):

$$\boxed{ds^2 = -c^2dt^2 + dl^2 = inv}$$

Здесь c - скорость света.

Итак, принципу относительности Эйнштейна соответствуют **два** постулата, которые коротко можно записать в таком виде:

$$\boxed{c = inv}\boxed{ds^2 = inv}$$

3.1.4 Синхронизация часов в СТО

Для описания движения точки необходимо иметь возможность учитывать изменение положения изучаемой материальной точки в пространстве с течением времени. В физике (и в СТО в частности) процедура, позволяющая определить и систему координат, и способ измерения времени называется заданием системы отсчёта.

По определению (смотри параграф 1.1) системой отсчёта называют совокупность базиса и градуировки. Базис — это множество физических лабораторий (реальных, или воображаемых), расположенных во всех точках пространства и снабжённых приборами для измерения промежутков времени и отрезков длины. Для того, чтобы иметь возможность измерять время, в первую очередь необходимо договориться о процедуре синхронизации часов.

Процедура синхронизации построена на основном постулате специальной теории относительности ($c = inv$):

1. выбираем базовые часы и *устанавливаем* на них показания времени t_0;

2. на всех остальных часах *устанавливаем* показания времени t_{0i} (предварительно измерив расстояния l_i до каждых часов):

$$t_{0i} = l_i/c$$

3. в момент t_0 **запускаем** базовые часы и *одновременно* посылаем сигнал со *скоростью света* на **все** остальные часы — в момент, когда этот сигнал достигает очередных часов, они *запускаются*.

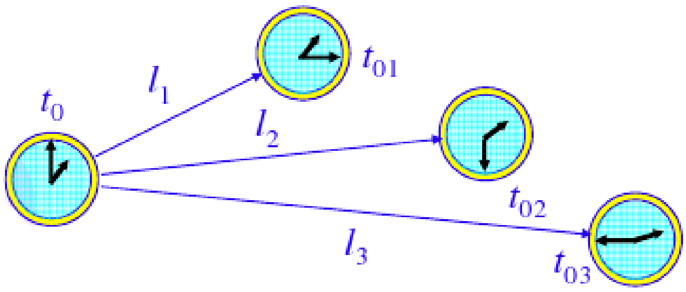


Рис. 3.1

3.1.5 Преобразования Лоренца

Промежутки времени в различных ИСО

В предыдущем пункте мы установили, что согласно релятивистскому принципу относительности промежутки времени зависят от выбора инерциальной системы отсчёта и, следовательно, различны в различных ИСО. Выясним как связаны промежутки времени в инерциальных системах отсчёта, движущихся относительно друг друга со скоростью $V = const$.

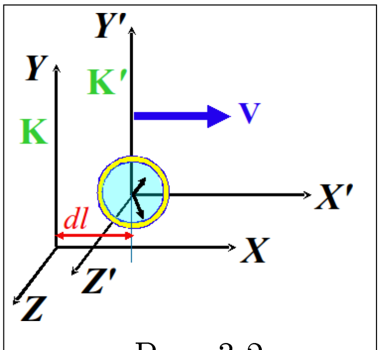


Рис. 3.2.

Для упрощения вычислений рассмотрим ИСО, движущиеся таким образом, что их оси координат остаются параллельными. Систему покоя (лабораторную) будем обозначать K, а движущуюся — K' (см. рис.3.2), и будем считать, что в начальный момент начала координат ИСО K и K' совпадали.

Пусть в начале координат системы K' расположены часы. За элементарное время dt с точки зрения наблюдателя, находящегося в системе покоя K, часы сдвинулись на элементарное расстояние dl. Однако, согласно релятивистскому принципу относительности, по часам наблюдателя, находящегося в инерциальной системе отсчёта K', на этот же процесс понадобилось некоторое другое элементарное время dt'. Причем часы в этой системе не двигались. Сказанное можно коротко записать в следующем виде:

$$K: dt \longrightarrow dl \qquad K': dt' \longrightarrow 0.$$

Но согласно второму исходному постулату СТО, $ds^2 = ds'^{\,2}$. То есть

$$-c^2dt^2 + dl^2 = -c^2dt'^{\,2} + \underbrace{dl'^{\,2}}_{\equiv 0}. \qquad (3.1.1)$$

Откуда легко найти, что

$$dt' = dt\sqrt{1 - \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 / c^2}. \qquad (3.1.2)$$

Так как часы движутся вместе с ИСО K', то dl/dt совпадает со скоростью V системы K', т.е. $dl/dt = V$. И, следовательно, элементарные промежутки времени dt и dt' между различными инерциальными системами отсчёта связаны соотношением

$$dt' = dt\sqrt{1 - V^2/c^2}, \qquad (3.1.3)$$

где V — относительная скорость инерциальных систем отсчёта. Интегрируя последнее соотношение, получим связь (точнее – правило пересчёта) промежутков времени в различных ИСО

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - V^2/c^2}. \qquad (3.1.4)$$

Время в системе покоя называют собственным и обозначают τ (у нас $\tau = t'$). Время во всех остальных инерциальных системах отсчёта называют мировым и обозначают t. Тогда уравнение (3.1.3) перепишется

$$\boxed{d\tau = \frac{dt}{\gamma},} \qquad (3.1.5)$$

где γ — так называемый релятивистский фактор (Лоренц-фактор):

$$\gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2} \qquad (3.1.6)$$

принимающий значения в пределах от 1 (при $v \ll c$ — нерелятивистский предел) до бесконечности (при скоростях близких к скорости света).

Очевидно, **промежутки времени по собственным часам всегда минимальны**.

В релятивистской механике, в силу технической невозможности (в настоящее время) экспериментально проверить многие теоретические результаты, прибегают к условным абстрактным задачам, называемым «*мысленный эксперимент*». Если решение такой абстрактной задачи (мысленного эксперимента) приводит к явному противоречию, то задачу называют *парадоксом*.

Одним из наиболее известных парадоксов, связанных с формулами (3.1.4, 3.1.5) преобразования промежутков времени в различных инерциальных системах отсчёта, является *парадокс близнецов*.

Следует подчеркнуть, что формула (3.1.5) симметрична относительно обеих инерциальных систем отсчёта K и K'. Иначе говоря, если с точки зрения K-системы «медленнее» идут часы K'-системы, то с точки зрения K'-системы, наоборот, «медленнее» идут часы K-системы (причём в том же отношении). Это обстоятельство указывет на то, что соотношение (3.1.5), связывающее промежутки времени в двух инерциальных системах отсчёта движущихся относительно друг друга, *является чисто кинематическим*. Оно представляет собой обязательное следствие постулатов специальной теории относительности и никак не может быть приписано какому-либо изменению в свойствах часов, обусловленному их движением.

Другими словами, формула (3.1.5) - это **правило пересчета** результатов измерений промежутков времени между различными инерциальными системами отсчёта.

Длина отрезка в различных ИСО

В пункте 3.1.3 мы установили, что согласно релятивистскому принципу относительности $dl \neq inv$ т.е. длина отрезка должна быть различной в различных инерциальных системах отсчёта. Выясним как связаны результаты измерений длины одного и того же отрезка из различных ИСО, движущихся относительно друг друга со скоростью $V = const$.

Для упрощения вычислений рассмотрим ИСО, движущиеся таким образом, что их оси координат остаются параллельными. Систему покоя (лабораторную) будем обозначать K, а движущуюся — K' (см. рис.3.3), и будем считать, что в начальный момент начала координат ИСО K и K' совпадали.

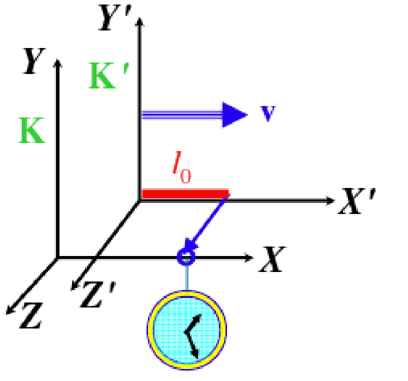


Рис. 3.3.

Пусть в начале координат системы K' вдоль оси Ox закреплён стержень. Измерения будем производить с точки зрения наблюдателя, находящегося в системе отсчёта K', но время будем измерять по часам находящимся в системе отсчёта K (смотри рисунок 3.3).

Важным условием измерений моментов времени в условиях специальной теории относительности является необходимость построения схемы измерений согласованной с процедурой синхронизации. Для этого будем считать, например, что на концах стержня имеются источники электромагнитного излучения способные испускать волну строго вдоль оси Z (по рис. 3.3). Таким образом, мы можем измерить время Δt прохождения стержня мимо часов и вычислить длину стержня l в системе отсчёта K:

$$l = V\Delta t \tag{3.1.7}$$

Аналогично можно вычислить длину стержня в системе отсчёта K' зафиксировав моменты времени t'_1 и t'_2 прохождения обоих концов стержня относительно часов в ИСО K'. Тогда, длина стержня l_0 в системе относительно которой он покоится равна:

$$l_0 = V\Delta t'. \tag{3.1.8}$$

Найдём отношение длин стержня измеренных из систем отсчёта K и K':

$$\frac{l}{l_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t'}. \tag{3.1.9}$$

Время в системе, где часы находятся в покое является собственным: $\Delta t_0 \equiv \Delta\tau$. Тогда очевидно:

$$\boxed{l_0 = \gamma l.} \tag{3.1.10}$$

Таким образом, **длина стержня в системе покоя (собственная длина) всегда максимальна.**

Как и в предыдущем пункте, формула (3.1.10) – это **правило пересчёта** результатов измерений отрезков длины между различными инерциальными системами отсчёта.

Преобразования Лоренца

Рассмотрим две инерциальные системы отсчёта K и K'. Пусть K'-система движется относительно K-системы со скоростью $\vec{V}$. Направим координатные оси обеих систем отсчёта так, как показано на рисунке 3.4: оси X и X' совпадают и направлены параллельно вектору $\vec{V}$, а оси Z и Z' параллельны друг другу. Установим в обеих системах отсчёта одинаковые часы и синхронизируем их — отдельно часы K-системы и отдельно часы K'-системы. И наконец, возьмём за начало осчёта времени в обеих системах отсчёта момент, когда начала координат O и O' совпадают ($t = t' = 0$).

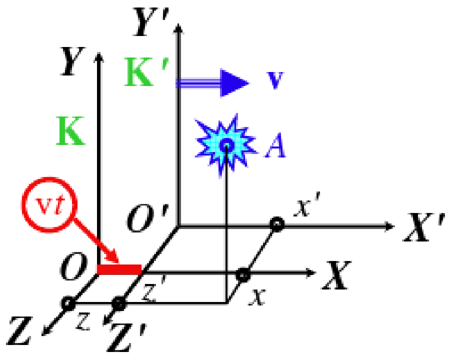


Рис. 3.4.

Рассмотрим событие А **из ИСО** K'. Его координата по оси X' равна расстоянию от x' до начала системы отсчёта – точки O'; обозначим это расстояние $x' = l_0$ (длина отрезка, измеренная в системе покоя). В системе отсчёта K это же расстояние равно $x - Vt = l$ (длина того же отрезка, измеренная из движущейся системы):

$$\left.\begin{array}{lrll} K': & x' & = l_{O'x'} & = l_0 \\ K: & x - Vt & = l_{O'x} & = l \end{array}\right\} \quad \Leftarrow \quad l = \frac{l_0}{\gamma}. \tag{3.1.11}$$

Используем соотношение между длиной отрезка l_0, измеренной в собственной системе отсчёта и l, получим:

$$x - Vt = x'/\gamma. \tag{3.1.12}$$

Выразим отсюда x': $x' = \gamma(x - Vt)$.

При измерениях **из ИСО** K координата события А по оси X равна расстоянию l_{Ox} от точки x до начала системы отсчёта – точки O, теперь оно будет являться собственным и обозначаться l_0, а это же расстояние в системе отсчёта K' равно $x' + Vt'$:

$$\left.\begin{array}{lrlll} K: & x & = l_{Ox} & = & l_0 \\ K': & x' + Vt' & = l_{Ox'} & = & l \end{array}\right\} \quad \Leftarrow \quad x' = \gamma(x - Vt). \qquad (3.1.13)$$

Используем соотношение (3.1.10) между длиной отрезка l_0, измеренной в собственной системе отсчёта и l, и после подстановки x':

$$\gamma(x - Vt) + Vt' = \frac{x}{\gamma}. \qquad (3.1.14)$$

Тогда, очевидно:

$$Vt' = \frac{x}{\gamma} - x\gamma + Vt\gamma = \gamma(Vt - x + \frac{x}{\gamma^2}). \qquad (3.1.15)$$

Упростим сомножитель в скобках – подставим в явном виде выражение для Лоренц-фактора γ :

$$Vt' = \gamma\left(Vt - x\frac{V^2}{c^2}\right). \qquad (3.1.16)$$

И мы получаем выражение, связывающее между собой момент времени t в покоящейся системе отсчёта и момент времени t' в двужущейся относительно неё со скоростью V системе отсчёта K':

$$t' = \gamma(t - \frac{Vx}{c^2}). \qquad (3.1.17)$$

Таким образом, мы получили пробразования Лоренца для координат и моментов времени:

$$\boxed{\begin{array}{l} y' = y, \quad z' = z, \\ x' = \gamma(x - Vt), \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{Vx}{c^2}\right). \end{array}} \qquad (3.1.18)$$

Как видно из этих уравнений, преобразования Лоренца «смешивают» между собой пространственные и временные координаты.

3.1.6 Закон сложения скоростей в СТО

Рассмотрим произвольно движущуюся материальную точку из двух инерциальных систем отсчета K и K'. Причём, как и ранее выберем систему K' так, что ось X' при движении параллельна оси X. Пусть скорость материальной точки в инерциальной системе отсчёта K известна. Найдём чему равна её скорость в системе отсчёта K'.

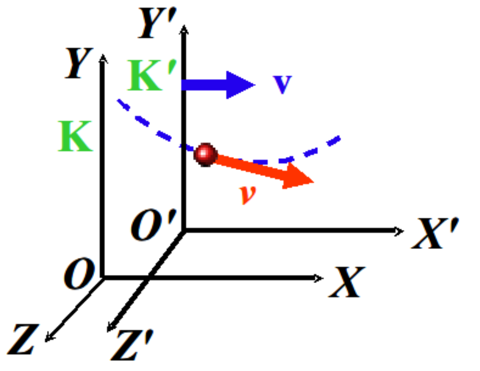


Рис. 3.5.

По определению:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

Следовательно нам нужно найти связь $dx' \to dx, dy' \to dy, dz' \to dz$ и $dt' \to dt$. Для этого возьмём дифференциал от левой и правой части преобразований Лоренца (3.1.18) получим:

$$\begin{aligned} dx' = (dx - V dt)\gamma, \quad dt' = (dt - \frac{V}{c^2}dx)\gamma, \\ dy' = dy, \quad dz' = dz. \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Подставляя полученные выражения в определение скорости, получим

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{(dx - V dt)\gamma}{(dt - V/c^2 dx)\gamma}. \tag{3.1.20}$$

Поделим числитель и знаменатель на dt:

$$v'_x = \frac{\left(\frac{dx}{dt} - V\right)}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} \tag{3.1.21}$$

и снова, воспользовавшись определением скорости приходим к окончательному выражению для компоненты скорости точки вдоль направления движения инерциальной системы отсчёта K':

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}. \tag{3.1.22}$$

Для y компоненты скорости в движущейся системе отсчёта $v'_y = dy'/dt'$. Подставляя в это определение соотношения (3.1.19) получим закон сложения скоростей для компоненты v'_y перпендикулярной направлению движения системы отсчёта K':

$$v'_y = \frac{dy}{(dt - V/c^2 dx)\gamma}. \tag{3.1.23}$$

Поделим числитель и знаменатель на dt:

$$v'_y = \frac{\frac{dy}{dt}}{\left(1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)\gamma} = \frac{v_y}{(1 - \frac{v_x V}{c^2})\gamma}. \tag{3.1.24}$$

Аналогично для последней компоненты вектора скорости можно получить соответствующее выражение, и в, итоге, получаем закон сложения скоростей:

$$\boxed{v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y}{(1 - \frac{v_x V}{c^2})\gamma}, \quad v'_z = \frac{v_z}{(1 - \frac{v_x V}{c^2})\gamma}.} \tag{3.1.25}$$

3.1.7 Преобразование компонент вектора ускорения

Рассмотрим произвольно движущуюся материальную точку из двух инерциальных систем отсчета K и K'. Выберем систему K' так, что ось X' при движении параллельна оси X. Пусть ускорение материальной точки в инерциальной системе отсчёта K известно. Найдём чему равно её ускорение в системе отсчёта K'. По определению:

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'}, \quad a'_y = \frac{dv'_y}{dt'}, \quad a'_z = \frac{dv'_z}{dt'}.$$

Следовательно нам нужно найти связь $dv'_x \to dv_x, dv'_y \to dv_y, dv'_z \to dv_z$ и $dt' \to dt$. Последнее преобразование для времени мы уже получили – выражение (3.1.19). Найдём связь для дифференциалов компонент скорости. Для компоненты x:

$$dv'_x = d\frac{v_x - V}{\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)} = \frac{dv_x}{\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)} + \frac{(v_x - V)V dv_x}{c^2\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)^2}. \tag{3.1.26}$$

После приведения подобных слагаемых и упрощений дифференциал компоненты скорости dv_x примет вид:

$$dv'_x = dv_x \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{(1 - \frac{Vv_x}{c^2})^2} = \frac{dv_x}{\gamma^2\left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)^2}. \tag{3.1.27}$$

Подставим выражения (3.1.19) в виде:

$$dt' = \gamma \left(dt - \frac{V dx}{c^2} \right) = \gamma dt \left(1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt} \right), \tag{3.1.28}$$

и (3.1.27) в определение ускорения (учтём, что dx/dt по определению есть скорость v_x):

$$a'_x = \frac{dv'_x}{dt'} = \frac{dv_x}{dt\,\gamma^3 \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)^3}. \tag{3.1.29}$$

В итоге получим:

$$\boxed{a'_x = \frac{a_x}{\gamma^3 \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)^3}} \tag{3.1.30}$$

Аналогично для компоненты y вектора скорости (для последней z компоненты, очевидно, будет то же самое с точностью до замены индексов $y \to z$) дифференциал будет равен:

$$dv'_y = d\frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{v_x V}{c^2})} = \frac{dv_y}{\gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)} + \frac{V v_y dv_x}{c^2 \gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)^2}. \tag{3.1.31}$$

Приведём к общему знаменателю:

$$dv'_y = \frac{dv_y + \frac{V}{c^2}(v_y dv_x - v_x dv_y)}{\gamma \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)^2}. \tag{3.1.32}$$

Тогда, по определению ускорения $a'_y = dv'_y/dt'$, с использованием полученного дифференциала компоненты скорости dv'_y и выражения для dt' (3.1.28):

$$a'_y = \frac{dv_y + \frac{V}{c^2}(v_y dv_x - v_x dv_y)}{dt\,\gamma^2 \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)^3}. \tag{3.1.33}$$

Поделим числитель и знаменатель на dt (по аналогии запишем выражение для компоненты z ускорения):

$$\boxed{\begin{aligned} a'_y &= \frac{a_y + \frac{V}{c^2}(v_y a_x - v_x a_y)}{\gamma^2 \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)^3}, \\ a'_z &= \frac{a_z + \frac{V}{c^2}(v_z a_x - v_x a_z)}{\gamma^2 \left(1 - \frac{Vv_x}{c^2}\right)^3}. \end{aligned}} \tag{3.1.34}$$

Таким образом, из выражений (3.1.30) и (3.1.34) видно, что при переходе в движущуюся систему координат K' компоненты ускорения $\vec{a}'$ преобразуются не только через исходные компоненты вектора $\vec{a}$, но (в отличие от преобразований Галилея (1.6.6)) зависят и от скорости частицы.

3.1.8 Относительность понятия одновременности

Рассмотрим два события A и B из двух инерциальных систем отсчёта K и K', таких, что ось X' при относительном движении систем параллельна оси X. Найдём промежуток времени $\Delta t'$ между событиями в системе отсчёта K', при условии что он известен в ИСО K. Координаты события A в ИСО K: (x_A, y_A, z_A, t_A). Координаты события B в ИСО K: (x_B, y_B, z_B, t_B). Тогда, используя преобразования Лоренца (3.1.18) получим:

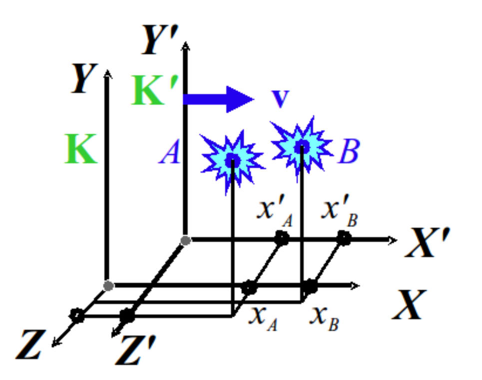


Рис. 3.6.

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \gamma(t_B - x_B V/c^2) - \gamma(t_A - x_A V/c^2) \qquad (3.1.35)$$

и перегруппировав слагаемые:

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \Delta x V/c^2) \qquad (3.1.36)$$

где обозначено $\Delta t = t_B - t_A$ и $\Delta x = x_B - x_A$.

Пусть события A и B одновременны с точки зрения наблюдателя из инерциальной системы отсчёта K, то есть $\Delta t = 0$. Тогда для любого наблюдателя из инерциальной системы отсчёта K':

$$\Delta t' = -\Delta x \frac{\gamma V}{c^2} \qquad (3.1.37)$$

то есть: **события (происходящие в разных точках), одновременные в одной инерциальной системе отсчёта, во всех остальных ИСО не одновременны.**

Заметим, что при этом *принцип причинности* не нарушается.

3.2 Динамика специальной теории относительности

3.2.1 Основные динамические характеристики

Понятие силы в СТО

В классической механике сила определяется законом Ньютона $\vec{F} = m\vec{a} = d\vec{p}/dt$, где $\vec{p}$ — импульс частицы. В СТО определение силы остается без изменений:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{3.2.1}$$

Определение импульса уточняется с учетом зависимости промежутков времени от ИСО — производная берется по собственному времени:

$$\vec{p} = m\frac{d\vec{r}}{d\tau} = m\gamma\frac{d\vec{r}}{dt} = m\gamma\vec{v} \tag{3.2.2}$$

где $d\tau = dt/\gamma$.

Масса и энергия в СТО

В классической механике, используя определение кинетической энергии (2.4.4), несложно получить:

$$dT = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{v}\,d\vec{p}. \tag{3.2.3}$$

В специальной теории относительности это определение остаётся без изменений (для импульса, естественно, используется релятивистское определение (3.2.2)):

$$dT = \vec{v}\,d\vec{p} = \vec{v}\,d(\gamma m\vec{v}). \tag{3.2.4}$$

После несложных преобразований последняя формула принимает вид

$$dT = d(\tilde{m}c^2), \tag{3.2.5}$$

где введено обозначение для так называемой **релятивистской массы**

$$\tilde{m} = \gamma m. \tag{3.2.6}$$

Приведём эти преобразования. По определению производной от произведения

$$dT = \vec{v}\, d(\tilde{m}\vec{v}) = v^2 d\tilde{m} + \tilde{m}\vec{v}d\vec{v}. \tag{3.2.7}$$

Теперь, используя определение релятивистской массы $\tilde{m}$, сделаем несложные преобразования – поделим выражение (3.2.6) на γ и умножим на c^2:

$$\tilde{m}c^2/\gamma = mc^2. \tag{3.2.8}$$

Подставим явное выражение для лоренц-фактора $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, возведём в квадрат:

$$\tilde{m}^2 c^4 \left(1 - v^2/c^2\right) = m^2 c^4 \tag{3.2.9}$$

и раскроем скобки. После сокращения на c^2:

$$\tilde{m}^2 c^2 - \tilde{m}^2 v^2 = m^2 c^2. \tag{3.2.10}$$

Найдём теперь дифференциал от полученного выражения:

$$2\, c^2\, \tilde{m}\, d\tilde{m} - 2\, v^2\, \tilde{m}\, d\tilde{m} - 2\, \tilde{m}^2\, v\, dv = 0 \tag{3.2.11}$$

и после упрощений:

$$c^2\, d\tilde{m} - (v^2\, d\tilde{m} + \tilde{m}\, v\, dv) = 0. \tag{3.2.12}$$

Сравнивая выражение (3.2.12) с выражением для дифференциала dT из (3.2.7), получаем: $dT = c^2 d\tilde{m}$, то есть мы пришли к выражению (3.2.5) описывающему кинетическую энергию свободной частицы. Интегрируя его, получим:

$$T = \int_0^v c^2 d\tilde{m} = \tilde{m}c^2 - mc^2 = mc^2(\gamma - 1). \tag{3.2.13}$$

Найдём условия, при которых выражение (3.2.13) переходит в выражение для классической кинетической энергии. Разлагая параметр γ в ряд Тэйлора по v^2/c^2:

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots, \tag{3.2.14}$$

мы видим, что

$$T = \frac{mv^2}{2} + m\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^2} + \ldots, \tag{3.2.15}$$

то есть релятивистская формула для кинетической энергии (3.2.13) переходит в классическую, если $(v/c)^2 \ll 1$ и можно пренебречь $(v/c)^4$.

Величину

$$E = \tilde{m}c^2 = T + mc^2 \tag{3.2.16}$$

называют **полной механической энергией** свободной частицы. Для покоящейся частицы ($T = 0$) энергия $E = mc^2$, соответственно, эту величину называют **энергией покоя** E_0:

$$E_0 = mc^2. \tag{3.2.17}$$

Выражение для полной механической энергии с учётом (3.2.17) можно записать в виде:

$$E = \gamma E_0. \tag{3.2.18}$$

Связь между полной механической энергией частицы и её импульсом

С обозначением для релятивистской массы (3.2.6), определение импульса (3.2.2) принимает вид:

$$\vec{p} = \tilde{m}\vec{v}. \tag{3.2.19}$$

Подчеркнем, что **релятивистская масса** *является третьим понятием массы* (в дополнение к инертной и гравитационной массам) и по смыслу является **энергией** *(измеренной в килограммах).*

Из формул (3.2.16) и (3.2.19) можно получить связь между импульсом и полной механической энергией свободной частицы. Возведём каждое из них в квадрат: $E^2 = \gamma^2 m^2 c^4$, $p^2 = \gamma^2 m^2 v^2$ и найдём разность:

$$E^2/c^2 - p^2 = \gamma^2 m^2 c^2 (1 - v^2/c^2)$$

или

$$E^2 = c^2(m^2c^2 + p^2). \tag{3.2.20}$$

Из этой формулы, в частности, следует, что масса покоя m в СТО становится неаддитивной величиной – сумма масс отдельных частиц системы не равна массе системы. Покажем это.

Масса покоя системы частиц

Определения (3.2.2)-(3.2.19) очевидно не нарушают свойств аддитивности энергии и импульса – воспользуемся этим для вычисления этих характеристик системы из двух частиц. То есть, энергия и импульс равны, соответственно:

$$E = E_1 + E_2; \qquad \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \tag{3.2.21}$$

Возведём оба выражения в квадрат:

$$E^2 = E_2^2 + 2\,E_1\,E_2 + E_1^2; \qquad \vec{p}^{\,2} = \vec{p}_1^{\,2} + 2\vec{p}_1\vec{p}_2 + \vec{p}_2^{\,2}. \tag{3.2.22}$$

Воспользуемся определениями импульса $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ и энергии $E = \gamma mc^2$:

$$\begin{aligned} E^2 &= \left(\gamma_1^2 m_1^2 + \gamma_2^2 m_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2 m_1 m_2\right) c^4; \\ \vec{p}^{\,2} &= \gamma_1^2 m_1^2 v_1^2 + \gamma_2^2 m_2^2 v_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2 m_1 m_2 \vec{v}_1\vec{v}_2 \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

где введены обозначения

$$\gamma_1 = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \qquad \gamma_2 = \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{3.2.24}$$

Подставим выражение (3.2.23) в выражение (3.2.20): $E^2/c^2 - p^2 = m^2c^2$. После подстановки и упрощений получим:

$$\begin{gathered} m_1^2\gamma_1^2\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)c^2 + m_2^2\gamma_2^2\left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)c^2 \\ +2m_1m_2\gamma_1\gamma_2\left(1 - \frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}\right)c^2 = m^2c^2. \end{gathered} \tag{3.2.25}$$

Откуда следует:

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\gamma_1\gamma_2\left(1 - \frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}\right). \tag{3.2.26}$$

Несложно убедиться, что коэффициент $\gamma_1\gamma_2\left(1 - \frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}\right) \geq 1$, то есть

$$\boxed{m \geq (m_1 + m_2).} \tag{3.2.27}$$

Таким образом, масса системы частиц равна сумме масс отдельных частиц только в том случае, когда все частицы системы находятся в покое или движутся с одинаковой скоростью прямолинейно в одном направлении – условия невыполнимые ни для одной реальной системы.

Этот результат является одним из важнейших практических выводов СТО .

Для того, чтобы убедиться, что $\gamma_1\gamma_2\left(1-\frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}\right) \geq 1$ воспользуемся введёнными обозначениями, получим

$$\left(1-\frac{\vec{v}_1\vec{v}_2}{c^2}\right) \geq \frac{1}{\gamma_1\gamma_2} = \sqrt{\left(1-\frac{v_1^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v_2^2}{c^2}\right)} \tag{3.2.28}$$

Введём ещё одно обозначение: $\vec{\beta} = \vec{v}/c$, тогда

$$1-\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2 \geq \sqrt{(1-\beta_1^2)(1-\beta_2^2)}.$$

Возведём полученное неравенство в квадрат:

$$1+\beta_1^2\beta_2^2 - 2\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2 \geq (1-\beta_1^2-\beta_2^2+\beta_1^2\beta_2^2).$$

Получим неравенство:

$$\beta_1^2+\beta_2^2-2\vec{\beta}_1\vec{\beta}_2 = (\vec{\beta}_2-\vec{\beta}_1)^2 \geq 0$$

выполнимое безусловно.

3.2.2 Уравнения движения в СТО

Согласно определениям (3.2.1) и (3.2.2), уравнение движения частицы, имеет вид:

$$\vec{F} = \frac{d(\gamma m\vec{v})}{dt} = m\frac{d(\gamma\vec{v})}{dt} = m\gamma\frac{d\vec{v}}{dt} + m\vec{v}\frac{d\gamma}{dt}. \tag{3.2.29}$$

Несложно взять производные и записать уравнения движения через классические динамические переменные. Производная в первом слагаемом есть ускорение $\vec{a}$ (по определению). Возьмём производную от лоренц-фактора γ.

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(\frac{-2v}{c^2}\frac{dv}{dt}\right) = \gamma^3\frac{va_\tau}{c^2},$$

где a_τ – модуль тангенциального ускорения (см. 1.3.5). Представим вектор скорости $\vec{v}$ во втором слагаемом 3.2.29 в виде произведения модуля скорости v и вектора $\vec{e}_\tau$, касательного к траектории: $\vec{v} = v\vec{e}_\tau$.

В итоге, используя обозначение для релятивистской массы $\tilde{m} = \gamma m$, получаем:

$$\vec{F} = \tilde{m}\vec{a} + \tilde{m}\vec{e}_\tau a_\tau \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} = \tilde{m}\vec{a} + \tilde{m}\vec{a}_\tau \left(\frac{\gamma v}{c}\right)^2 \tag{3.2.30}$$

Следовательно, **сила**, в общем случае, **не является причиной ускорения**, как это было в классической механике – т.е. сила не является линейной функцией ускорения.

Рассмотрим частные случаи движения тела.

- Частица движется *прямолинейно.* в этом случае $\vec{a} = \vec{a}_\tau$ и мы получаем:
$$\vec{F} = \tilde{m}\vec{a}_\tau \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\gamma^2\right) = \tilde{m}\gamma^2\vec{a}_\tau$$
- Частица движется *по окружности.* в этом случае $\vec{a} = \vec{a}_n$, $a_\tau = 0$ и мы получаем:
$$\vec{F} = \tilde{m}\vec{a}_n$$

Таким образом, **величина силы**, измеренной для одного и того же силового взаимодействия *разными наблюдателями* – **различна**. Причем величина силы, измеренной *каждым наблюдателем*, зависит не только от ускорения взаимодействующих объектов (как это было в классической механике), но и от скорости взаимодействующих объектов относительно инерциальной системы, в которой находится наблюдатель.

Учебное пособие

К.Б. Коротченко, Е.А. Синицын

ФИЗИКА
КРАТКИЙ КУРС

МЕХАНИКА

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета

Подписано к печати xx.10.2011. Формат 60x84/8. Бумага "Снегурочка".
Печать XEROX. Усл.печ.л. . Уч.-изд.л.
Заказ xxx-11. Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет Система менеджмента качества издательства Томского политехнического университета сертифицирована NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

Издательство ТПУ. 634034, Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru