Для определения наиболее вероятного **количества частиц** *в каждом состоянии нужно найти максимум* **термодинамической вероятности** W

Так как $\ln W$ *- функция* **гладкая** *и* **монотонная,** *то положение* **экстремумов** *функций* W *и* $S = k\ln W$ **совпадают** *- потому будем искать* **максимум энтропии,** *при условиях, что полное число* **частиц системы** $N = \sum_i N_i$ *и полная* **энергия системы** $E = \sum_i N_i E_i$ *должны оставаться* **постоянными**

Подставим $E1$ *в* $E2$

$$S = k\ln\prod_{i=1}^{N}\frac{(N_i + g_i - 1)!}{N_i!(g_i - 1)!} = k\sum_i\left[\ln(N_i + g_i - 1)! - \ln N_i! - \ln(g_i - 1)!\right]$$

и воспользуемся формулой **Стирлинга** $\ln n! \approx n\ln n - n$ *справедливой для* **больших** n

$$S = k\sum_i\{[(N_i + g_i - 1)\ln(N_i + g_i - 1) - (N_i + g_i - 1)] - [N_i\ln N_i - N_i] - [(g_i - 1)\ln(g_i - 1) - (g_i - 1)]\}$$

Далее, согласно **методу Лагранжа,** *нужно построить* **функцию** $F = S + \lambda_1 N + \lambda_2 E$

и найти ее **максимум** *– для этого, прежде всего, нужно найти* **производную**

$$\partial F/\partial N_i = k\sum_i\{[\ln(N_i + g_i - 1) + 1 - 1] - [\ln N_i + 1 - 1] + \lambda_1 + \lambda_2 E_i\}$$

и приравнять ее **нулю**

Получим

$$\ln\left(\frac{N_i+g_i-1}{N_i}\right)=-\frac{\lambda_1+\lambda_2E_i}{k}$$

***что* эквивалентно**

$$N_i=(g_i-1)\Big/\left[Exp\left(-\frac{\lambda_1+\lambda_2E_i}{k}\right)-1\right]$$

Мы рассматриваем* ТС *с* очень большим числом частиц** $N_i>>1$ ***и, соответственно,* ячеек (*фазового пространства*)** $g_i>>1$ ***– потому

$$\langle n_i\rangle=\frac{N_i}{g_i}=\frac{1}{Exp\left(-\frac{\lambda_1+\lambda_2E_i}{k}\right)-1}$$

Здесь $\langle n_i\rangle$ - **числа заполнения *энергетических уровней*** ***с номерами*** $i=1,2,3,\ldots$

Параметры λ_1 ***и*** λ_2 ***имеют следующий смысл***

$$\lambda_1=\frac{\mu}{T},\ \ \lambda_2=\frac{1}{T}$$

где T **– абсолютная *температура*** ***и*** μ - **химический потенциал ТС** $\mu=\frac{1}{N_A}\left(\frac{dU}{dN}\right)_{S,U=const}$

Таким образом, для любого **энергетического уровня ТС бозонов**

$$\boxed{\langle n \rangle = \frac{1}{Exp\left(\dfrac{E-\mu}{kT}\right)-1}}$$