

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Г.В. Кузнецов

Лекции по курсу
Математические методы моделирования
физических процессов

Томск 2009

Лекция №1

Введение

Физиков математика интересует не сама по себе, а как средство решения физических задач.

Рассмотрим поэтому, как решается любая реальная задача – например, нахождение производительности проектируемой тепловой установки или себестоимости продукции строящегося завода.

Одним из способов решения является эксперимент. Построим эту установку или завод и измерим интересующую нас характеристику. Если характеристика оказалась неудачной, то изменим проект и построим новый завод и т.д. Ясно, что мы получим достоверный ответ на вопрос, но слишком медленным и дорогим способом.

Другой способ – математический анализ конструкции или явления. Но такой анализ применяется не к реальным явлениям, а к некоторым математическим моделям этих явления. Поэтому первая стадия работы – это формулировка математической модели (постановка задачи). Для физического процесса модель обычно состоит из уравнений, описывающих процесс; в эти уравнения в виде коэффициентов входят характеристики тел или веществ, участвующих в процессе. Например, если нас интересует распределение температуры в элементе конструкции теплообменного аппарата, то мы рассматриваем следующее уравнение:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right),$$

где

ρ – плотность материала;

C_p – теплоемкость материала;

$\lambda = g(x, y, z)$ – коэффициент теплопроводности материала;

$T = f(x, y, z, t)$ – температура.

Наиболее сложная и ответственная работа при постановке задачи заключается в выборе связей и характеристик явления, существенных для данной задачи и подлежащих включению в математическую модель.

Вторая стадия работы – это математическое исследование. В зависимости от сложности модели применяются различные математические подходы. Для наиболее грубых и несложных моделей зачастую удается получить аналитические решения. Для более точных и сложных моделей аналитическое решение удается получить сравнительно редко. Обычно используются некоторые математические приближения. Например, в нашей модели определения температурного поля можно предположить, что исследуемый строительный материал однородный ($\lambda = \text{const}$):

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

и если мы рассматриваем очень длинную и широкую пластину и нас интересует только распределение по глубине, то

$$\begin{aligned} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ T &= f(t, z); \\ \lambda &= \text{const}. \end{aligned}$$

Для решения подобного рода задач наиболее целесообразным является применение численных методов на ЭВМ. Применение этих методов позволяет добиваться хорошего количественного описания явления, не говоря уже о качественном.

Третья стадия работы – это осмысление математического решения и сопоставление его с экспериментальными данными. Если расчеты хорошо согласуются с экспериментом, то это свидетельствует о правильном выборе модели, а также о правильном выборе численного метода.

Численные методы являются одним из мощных математических средств решения задачи. Существуют задачи, где без использования достаточно сложных численных методов не удалось бы получить ответа. Более того, часто требуется выполнить огромное число действий за короткое

время, иначе ответ не нужен. Например, суточный прогноз погоды должен быть вычислен за несколько часов; коррекцию траектории ракеты надо рассчитывать за несколько минут; режим работы прокатного стана должен исправляться за секунды. Все эти операции (действия) немыслимы без мощных компьютеров.

Основные этапы численного решения задачи на ЭВМ

Решение прикладных задач математической физики с использованием ЭВМ можно разбить на несколько этапов:

1) *Физическая постановка задачи.* На этом этапе осуществляется физическая постановка задачи и намечается путь ее решения.

2) *Математическое моделирование.* На этом этапе строится или выбирается математическая модель, описывающая соответствующую физическую задачу. Модель должна адекватно описывать основные законы физического процесса.

3) *Выбор численного метода.* Для решения задачи необходимо найти численный метод, позволяющий свести ее к некоторому вычислительному алгоритму.

4) *Разработка алгоритма решения задачи.* Алгоритм решения задачи записывается как последовательность логических и арифметических операций. Алгоритм можно представить в виде блок-схемы или стилизованной диаграммы.

5) *Составление программы.* Программа, реализующая алгоритм решения задачи, записывается на одном из языков программирования высокого уровня (это зависит от математического обеспечения ВЦ, где предполагается решение задачи).

6) *Отладка программы.* Отладка программы состоит из 2-х этапов: тестирование и исправление ошибок.

7) *Счет по отлаженной программе.* На этом этапе готовятся исходные данные для рассчитываемых вариантов и осуществляется счет по отлаженной программе.

8) *Анализ результатов счета.* Полученные с помощью ЭВМ результаты численного счета анализируются, сравниваются с экспериментальными данными, и оформляется соответствующая научно-техническая документация.

9) *Внедрение полученных результатов.*

Основные источники и классификация погрешностей численного решения задач на ЭВМ

Одним из главных вопросов, возникающих при численном решении задач математической физики, является оценка достоверности полученного результата. Получение такой оценки усложняется, если в распоряжении исследователя нет экспериментальных или каких-либо иных результатов. Источник возникновения погрешностей можно проследить, следуя вышеприведенным этапам численного решения задачи. Во-первых, это погрешность, вносимая математической моделью задачи. Величина погрешности, вносимой в результат математической моделью, может возрасти, если в модели не учтены какие-либо важные характеристики изучаемого явления.

Кроме того, исходные данные вносят свою долю (иногда основную) в образование погрешности результата.

Эти источники погрешности называют *неустраняемыми погрешностями*, так как их нельзя полностью устранить ни до начала решения задачи, ни, тем более, в процессе ее решения.

Не следует стремиться к уменьшению погрешности одних данных, оставляя другие без изменения. Это не приводит к повышению точности результата, поэтому на практике исходные данные задаются примерно с одинаковой точностью.

Еще одним источником погрешности является численный метод. Во многих численных методах, связанных, например, с приближенным вычислением интегралов или с нахождением промежуточных значений функции, заданной в виде таблицы, используется идея приближения функции с помощью алгебраического многочлена степени n . Это приводит к образованию погрешности, связанной с такой заменой.

Заметим, что приближенное вычисление интеграла осуществляется также путем замены его конечной суммой, исходя из определения интеграла. Такая замена приводит к погрешности. Этот список примеров можно продолжить. Заметим, что *погрешность численного метода* может быть уменьшена до разумных пределов за счет изменения некоторых параметров задачи, например, шага интегрирования.

При вычислении на ПЭВМ неизбежно возникает *погрешность округления* в силу ограниченности разрядной сетки компьютера.

Численное интегрирование

Пусть требуется найти значение интеграла

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

для некоторой заданной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$.

В курсе математического анализа обосновывается аналитический способ нахождения значения интеграла с помощью формулы Ньютона-Лейбница

$$I = F(b) - F(a), \text{ где}$$

$F(x)$ – некоторая первообразная для данной функции $f(x)$.

К сожалению, применение этого подхода к вычислению I наталкивается на несколько серьезных препятствий. Самое главное из них – это несуществование первообразной среди элементарных функций для большинства элементарных функций $f(x)$; например, таким способом не удастся вычислить

$$\int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad \int_a^b \frac{dx}{\ln(x)} \quad \text{и т.д.}$$

Поэтому для вычисления I более эффективным является применение специальных приближенных формул – квадратурных формул или формул численного интегрирования.

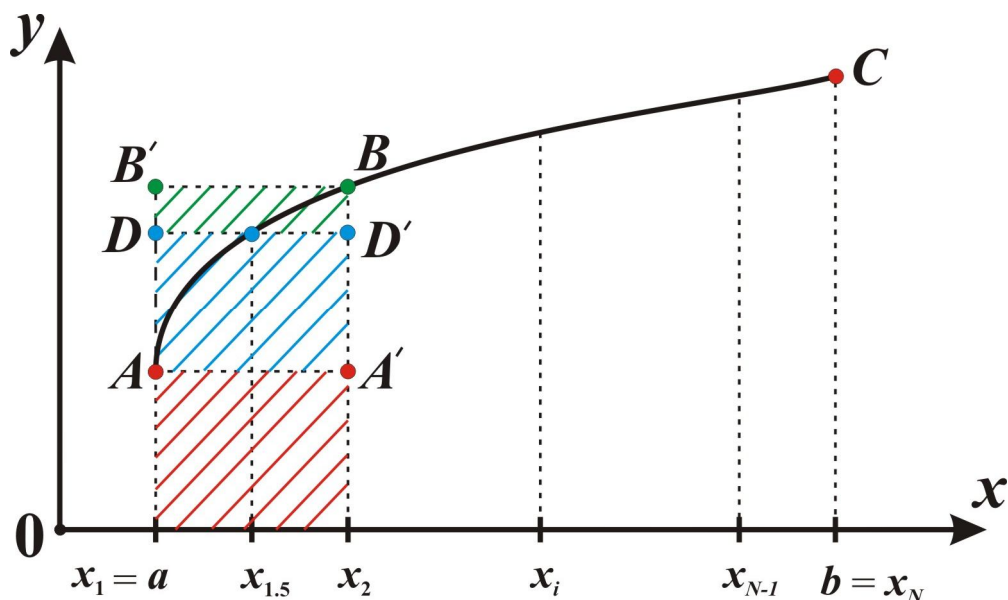
1. Формулы прямоугольников.

Предположим, что $f(x)$ имеет следующий график.

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad - \quad \text{площадь фигуры, заключенной между графиком}$$

функции и осью абсцисс. При численном интегрировании поступают следующим образом: отрезок $[a, b]$ разбивают на несколько частей $(N-1)$, т.е.

вводят разбиение, состоящее из N узлов: $x_i, \quad i = \overline{1, N}; \quad x_1 = a, \dots, x_N = b.$



Будем считать узлы равноотстоящими: $h = \frac{b-a}{N-1}$. Далее рассматривают полученные прямоугольники: или $x_1x_2A'A$, или x_1x_2BB' , или вводят новый промежуточный узел $x_{1.5} = \frac{x_1 + x_2}{2} = x_1 + \frac{h}{2}$.

Соответственно площадь всей фигуры $aACb$ складывается из площадей образованных прямоугольников:

а) Если будем рассматривать прямоугольники вида $x_1AA'x_2$, то получим формулу левых прямоугольников:

$$I = \int_a^b f(x)dx = h \cdot f(x_1) + h \cdot f(x_2) + \dots + h \cdot f(x_{N-1}) = h \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i).$$

б) Если будем рассматривать прямоугольники вида $x_1B'Bx_2$, то получим формулу правых прямоугольников:

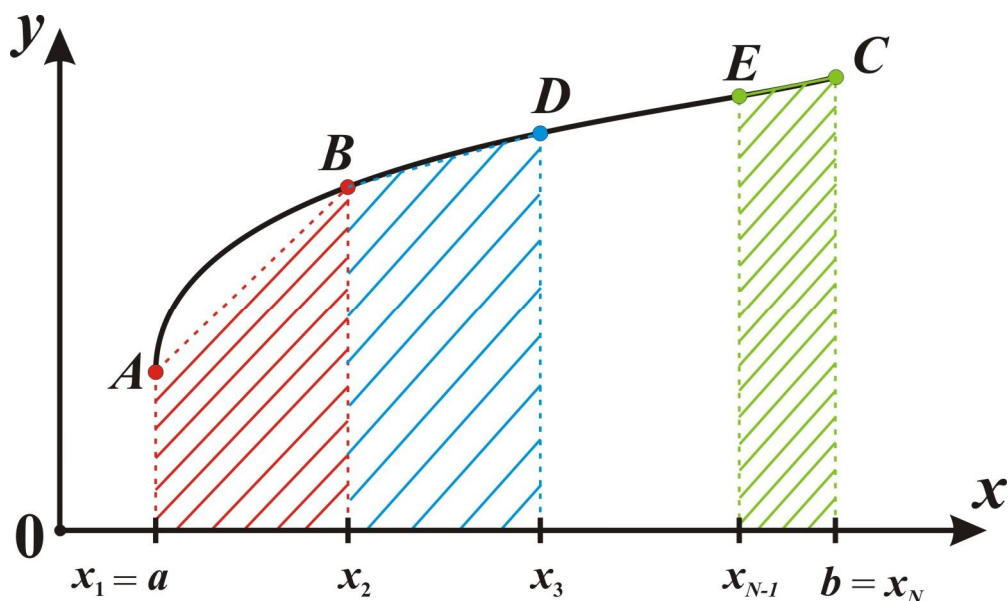
$$I = \int_a^b f(x)dx = h \cdot f(x_2) + h \cdot f(x_3) + \dots + h \cdot f(x_N) = h \sum_{i=2}^N f(x_i).$$

в) Если будем рассматривать прямоугольники вида $x_1DD'x_2$, то получим формулу средних прямоугольников:

$$I = \int_a^b f(x)dx = h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + h \cdot f\left(x_2 + \frac{h}{2}\right) + \dots + h \cdot f\left(x_{N-1} + \frac{h}{2}\right) = h \sum_{i=1}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right).$$

2. Формула трапеций.

Предположим, что $f(x)$ имеет следующий график.



Также отрезок $[a, b]$ разбивают на $(N-1)$ частей, т.е. вводят разбиение, состоящее из N узлов: $x_i, \quad i = \overline{1, N}; \quad x_1 = a, \dots, x_N = b, \quad h = \frac{b-a}{N-1}$.

Далее рассматривают не прямоугольники, а трапеции. Например, $aABx_2, x_2BDx_3, x_{N-1}ECb$. При этом площадь фигуры $aACb$ будет равна сумме площадей образованных трапеций:

$$S_{aABx_2} = h \cdot \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{h}{2} \cdot (f_1 + f_2);$$

$$S_{x_2BDx_3} = \frac{h}{2} \cdot (f_2 + f_3);$$

.....

$$S_{x_{N-1}ECb} = \frac{h}{2} \cdot (f_{N-1} + f_N);$$

$$I = S_{aABx_2} + S_{x_2BDx_3} + \dots + S_{x_{N-1}ECb} = \frac{h}{2} \cdot (f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \dots + 2f_{N-1} + f_N).$$

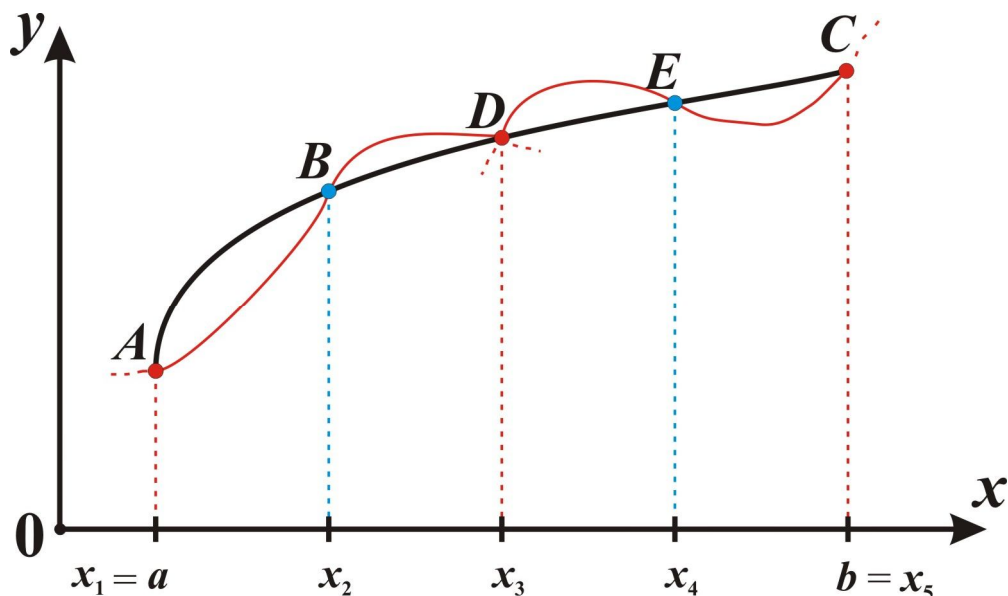
$$\text{В общем виде } \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \cdot \left(f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=2}^{N-1} f_i \right).$$

3. Формула Симпсона (метод парабол).

Предположим, что $f(x)$ имеет следующий график.

Также отрезок $[a, b]$ разбивают на $(N-1)$ частей, т.е. вводят разбиение,

состоящее из N узлов: $x_i, \quad i = \overline{1, N}; \quad x_1 = a, \dots, x_N = b, \quad h = \frac{b-a}{N-1}.$



В формуле прямоугольников и трапеций рассматривались фигуры, состоящие на оси x из двух узлов (x_i, x_{i+1}) . В формуле Симпсона в фигуре участвуют сразу три узла (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) . Через три точки проводят ветвь параболы. При выводе формулы Симпсона необходимо, чтобы число элементарных промежутков было четным, т.е. $N - 1 = 2m \Rightarrow N$ – нечетное.

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \cdot \left(f(a) + f(b) + 4 \cdot \sum_{j=1}^m f(x_{2j}) + 2 \cdot \sum_{j=2}^m f(x_{2j-1}) \right).$$

Пример вычисления определенного интеграла рассмотренными методами

Дано: $f(x) = 2x - 1, \quad x \in [1, 5]$.

Вычислить интеграл $I = \int_a^b f(x) dx$ с использованием формул прямоугольников, трапеций и Симпсона при $N = 5$ (N – число узлов). Проанализировать результат при изменении числа узлов.

Решение.

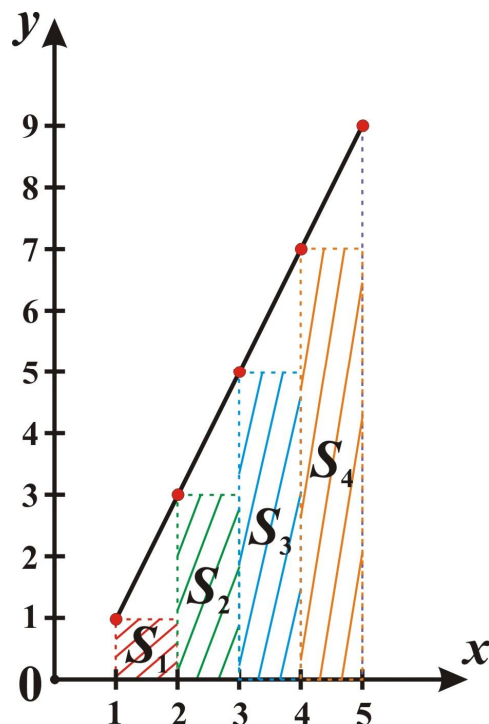
Сначала проведем вычисление интеграла аналитически на основе формулы

Ньютона-Лейбница:
$$I = \int_1^5 (2x - 1) dx = (x^2 - x) \Big|_1^5 = 20.$$

При численной реализации всех квадратурных формул приближенного интегрирования необходима сетка, поэтому определим шаг интегрирования:

$$h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{5-1}{5-1} = 1.$$

а) метод левых прямоугольников



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = y_1 \cdot h = 1;$$

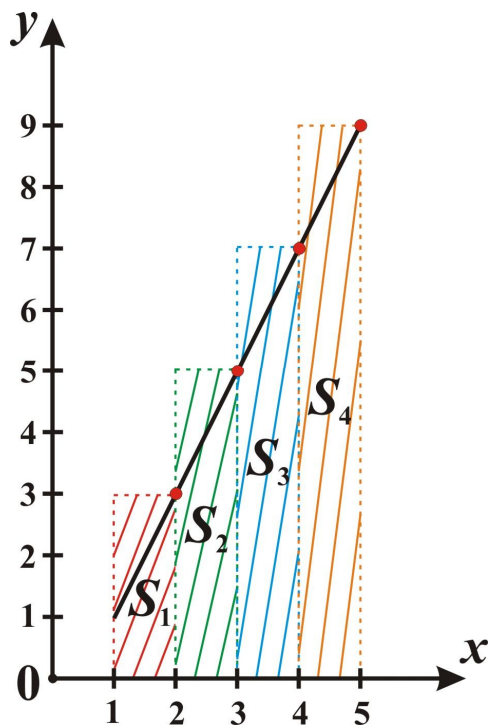
$$S_2 = y_2 \cdot h = 3;$$

$$S_3 = y_3 \cdot h = 5;$$

$$S_4 = y_4 \cdot h = 7;$$

$$I = \sum_i S_i = 16.$$

b) метод правых прямоугольников



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = y_2 \cdot h = 3;$$

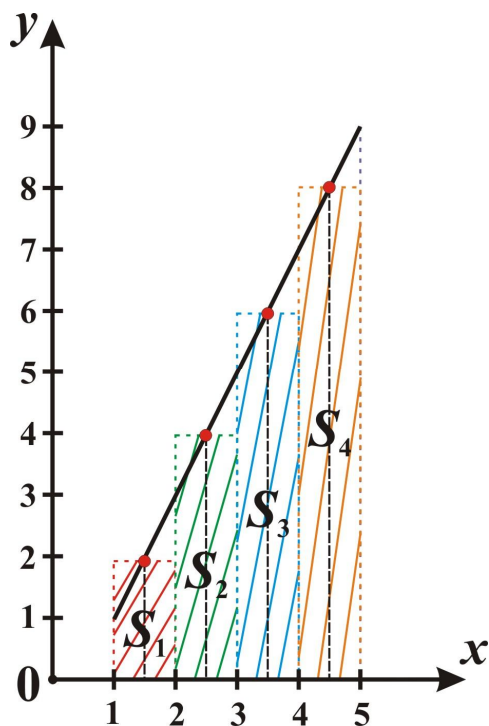
$$S_2 = y_3 \cdot h = 5;$$

$$S_3 = y_4 \cdot h = 7;$$

$$S_4 = y_5 \cdot h = 9;$$

$$I = \sum_i S_i = 24.$$

c) метод средних прямоугольников



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1.5	2.5	3.5	4.5
y_i	2	4	6	8

$$S_1 = f(x_{1.5}) \cdot h = 2;$$

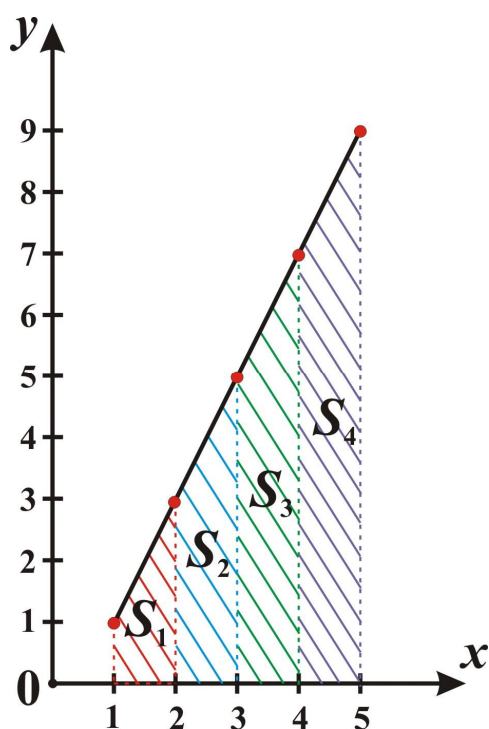
$$S_2 = f(x_{2.5}) \cdot h = 4;$$

$$S_3 = f(x_{3.5}) \cdot h = 6;$$

$$S_4 = f(x_{4.5}) \cdot h = 8;$$

$$I = \sum_i S_i = 20.$$

d) метод трапеций



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = \frac{h}{2}(f_1 + f_2) = 2;$$

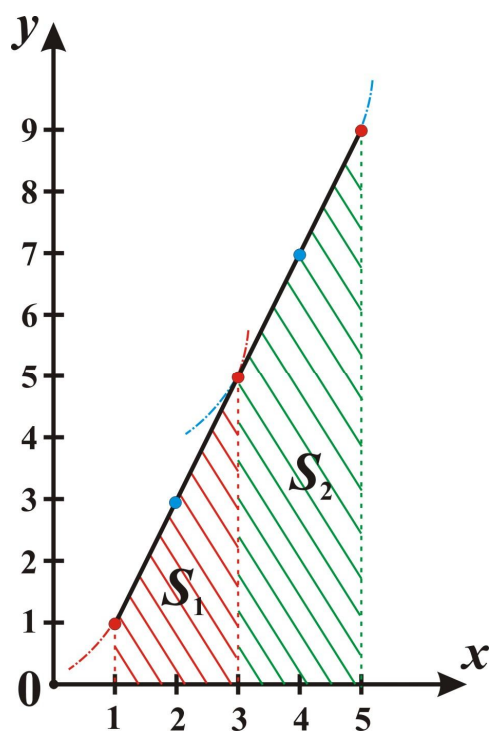
$$S_2 = \frac{h}{2}(f_2 + f_3) = 4;$$

$$S_3 = \frac{h}{2}(f_3 + f_4) = 6;$$

$$S_4 = \frac{h}{2}(f_4 + f_5) = 8;$$

$$I = \sum_i S_i = 20.$$

e) метод Симпсона (метод парабол)



$$f(x) = y = 2x - 1$$

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3	5	7	9

$$S_1 = \frac{h}{3}(f_1 + 4f_2 + f_3) = 6;$$

$$S_2 = \frac{h}{3}(f_3 + 4f_4 + f_5) = 14$$

$$I = \sum_i S_i = 20.$$

Увеличим число узлов до $N=11$: $h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{5-1}{11-1} = 0.4$.

x_i	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0	3.4	3.8	4.2	4.6	5.0
y_i	1.0	1.8	2.6	3.4	4.2	5.0	5.8	6.6	7.4	8.2	9.0

По формуле левых прямоугольников получим:

$$I = h \cdot \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) = h \cdot \sum_{i=1}^{N-1} y_i = 18.4.$$

По формуле правых прямоугольников получим:

$$I = h \cdot \sum_{i=2}^N f(x_i) = h \cdot \sum_{i=2}^N y_i = 21.6.$$

Увеличение количества узлов приводит к уточнению значения определенного интеграла.

Полиномиальная интерполяция

Задача аппроксимации функций

В основе большинства численных методов математического анализа лежит подмена одной функции $f(x)$ другой функцией $\varphi(x)$, близкой к $f(x)$ и обладающей “хорошими” свойствами, позволяющими легко производить над нею те или иные аналитические или вычислительные операции. Будем называть такую подмену аппроксимацией или просто приближением функции $f(x)$ функцией $\varphi(x)$.

Задача аппроксимации функции $f(x)$ функцией $\varphi(x)$ состоит в построении для заданной функции $f(x)$ такой функции $\varphi(x)$, что

$$f(x) \approx \varphi(x)$$

причем под знаком “ $\approx$ ” понимается некоторый критерий согласия (близости) между функциями $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Будем считать, что аппроксимация функции $f(x)$ производится с помощью многочленов степени n .

Пусть в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ таких, что $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ ($x_i, i = \overline{1, n}$ – узлы) известны значения функции $y = f(x)$, т.е. на отрезке $[a, b]$ задана табличная (сеточная) функция

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_n

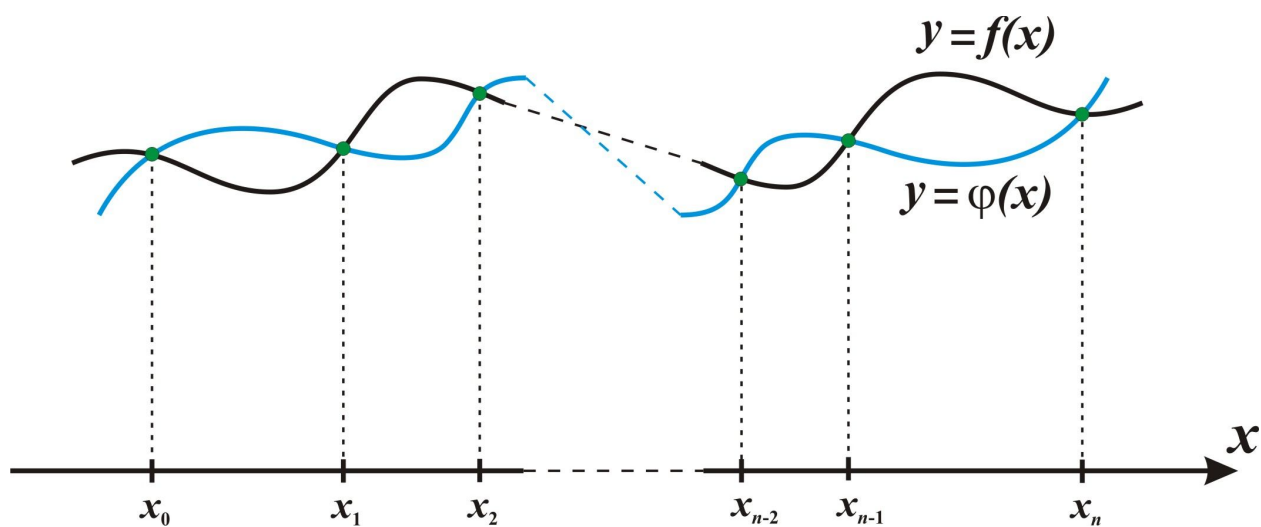
(1)

Функция $\varphi(x)$ называется интерполирующей или интерполяционной для $f(x)$ на $[a, b]$, если ее значения $\varphi(x_0), \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$ в заданных точках

$x_0, x_1, \dots, x_n$, называемых узлами интерполяции, совпадают с заданными значениями функции $f(x)$, т.е. с $y_0, y_1, \dots, y_n$:

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) &= y_0, \\ \varphi(x_1) &= y_1, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi(x_n) &= y_n\end{aligned}$$

Геометрически факт интерполирования означает, что график функции $\varphi(x)$ проходит так, что, по меньшей мере, в $n+1$ заданных точках он пересекает или касается графика функции $f(x)$.



Легко понять, что графиков $\varphi(x)$, проходящих через заданные точки, можно изобразить сколько угодно, и они могут отличаться от графика $f(x)$ сколь угодно сильно, если не накладывать на $\varphi(x)$ и $f(x)$ определенных ограничений.

Функцию $\varphi(x)$ будем искать в виде многочлена степени n .

Тогда задача полиномиальной интерполяции формулируется так:

для функции $f(x)$, заданной таблицей (1) найти многочлен $P_n(x)$ такой, что выполняется совокупность условий интерполяции

$$P_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (2)$$

Найти многочлен $P_n(x)$ — это значит, учитывая его каноническую форму

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad (3)$$

найти его $n+1$ коэффициент $a_0, a_1, \dots, a_n$. Для этого имеется как раз $n+1$ условие (2). Таким образом, чтобы многочлен (3) был интерполяционным для функции (1), нужно, чтобы его коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n$ удовлетворяли системе уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1, \\ \text{-----} \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n. \end{cases}$$

Но если воспользоваться таким подходом, то это будет малоэффективно. Поэтому выберем другой путь.

Будем строить многочлен n -й степени $L_n(x)$ в виде линейной комбинации $\sum_{i=0}^n c_i l_i(x)$ многочленов n -й степени $l_i(x)$ (i – номер многочлена).

Для того, чтобы такой многочлен был интерполяционным для функции $f(x)$, достаточно зафиксировать в качестве коэффициентов c_i этой линейной комбинации заданные в таблице (1) значения $y_i = f(x_i)$, а от базисных многочленов $l_i(x)$ потребовать выполнение условия:

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad \left| \forall i, j = \overline{1, n} \right. \quad (4)$$

В таком случае для многочлена

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$

в каждом узле x_j ($j = \overline{1, n}$) в силу (4) получим:

$$\begin{aligned} L_n(x_j) &= l_0(x_j) \cdot y_0 + \dots + l_{j-1}(x_j) \cdot y_{j-1} + l_j(x_j) \cdot y_j + l_{j+1}(x_j) \cdot y_{j+1} + \dots + l_n(x_j) \cdot y_n = \\ &= 0 + \dots + 0 + y_j + 0 + \dots + 0 = y_j \end{aligned}$$

т.е. выполняется условие интерполирования (2).

Чтобы конкретизировать базисные многочлены $l_i(x)$, учтем, что они должны удовлетворять условиям (4). Равенство нулю i -го многочлена во всех узлах, кроме i -го, означает, что $l_i(x)$ можно записать в виде:

$$l_i(x) = A_i(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n),$$

а коэффициент A_i этого представления легко получается из содержащегося в (4) требования $l_i(x) = 1$. Подставляя в выражение для $l_i(x)$ значения $x = x_i$ и приравнявая результат к единице, получим:

$$A_i = \frac{1}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Таким образом, базисные многочлены Лагранжа имеют вид:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)},$$

а искомый интерполяционный многочлен Лагранжа примет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} y_i \quad (5)$$

В качестве примера запишем интерполяционные многочлены Лагранжа первой и второй степени.

При $n = 1$ информация об интерполируемой функции $y = f(x)$ сосредоточена в двух точках: (x_0, y_0) и (x_1, y_1) . Многочлен Лагранжа в этом случае составляется с помощью двух базисных многочленов первой степени ($l_0(x)$ и $l_1(x)$) и имеет вид:

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot y_1.$$

При $n = 2$ по трехточечной таблице

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

можно образовать три базисных многочлена ($l_0(x)$, $l_1(x)$ и $l_2(x)$) и, соответственно, интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени:

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2)}{(x_0-x_1) \cdot (x_0-x_2)} \cdot y_0 + \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_2)}{(x_1-x_0) \cdot (x_1-x_2)} \cdot y_1 + \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1)}{(x_2-x_0) \cdot (x_2-x_1)} \cdot y_2.$$

Приближенные равенства

$$f(x) \approx L_1(x) \text{ и } f(x) \approx L_2(x)$$

называют соответственно формулами линейной и квадратичной интерполяции.

Пример выполнения задания

Дано: $f(x) = x^2 - 3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in [2, 4]$. $N = 5$ – число узлов.

Необходимо найти значение функции f в точках несовпадающих с узлами интерполирования $(2.6; 3.4)$ с помощью многочлена Лагранжа первой и второй степени.

Решение

Затабулируем функцию $f(x)$.

$$h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{4-2}{5-1} = 0.5.$$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
x_i	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y_i	1.0	3.25	6.0	9.25	13.0

Воспользуемся многочленом Лагранжа первой степени для точки $x = 2.6 \in (x_1, x_2)$

$$\varphi(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} y_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} y_2.$$

Тогда $\varphi(2.6) = \frac{2.6-3}{2.5-3.0} \cdot 3.25 + \frac{2.6-2.5}{3.0-2.5} \cdot 6 = 3.8$. При этом точное значение $f(2.6) = 3.76$.

Для точки $x = 3.4 \in (x_2, x_3)$ линейная интерполяция дает следующий вывод:

$$\varphi(x) = \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} y_2 + \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} y_3.$$

Тогда $\varphi(3.4) = \frac{3.4 - 3.5}{3.0 - 3.5} \cdot 6.0 + \frac{3.4 - 3.0}{3.5 - 3.0} \cdot 9.25 = 8.6$. При этом точное значение $f(3.4) = 8.56$.

Далее воспользуемся многочленом Лагранжа второй степени для точки $x = 2.6 \in (x_0, x_1, x_2)$. Очевидно, что многочлен Лагранжа второй степени должен дать точное значение, поскольку анализируемая нами функция является квадратичной.

$$\varphi(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} y_2.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \varphi(2.6) &= \frac{(2.6 - 2.5) \cdot (2.6 - 3.0)}{(2.0 - 2.5) \cdot (2.0 - 3.0)} \cdot 1.0 + \frac{(2.6 - 2.0) \cdot (2.6 - 3.0)}{(2.5 - 2.0) \cdot (2.5 - 3.0)} \cdot 3.25 + \\ &+ \frac{(2.6 - 2.0) \cdot (2.6 - 2.5)}{(3.0 - 2.0) \cdot (3.0 - 2.5)} \cdot 6.0 = 3.76 \equiv f(2.6). \end{aligned}$$

Покажем, что значение многочлена Лагранжа не зависит от выбора промежутка интерполирования. Пусть $x = 2.6 \in (x_1, x_2, x_3)$. Тогда

$$\varphi(x) = \frac{(x - x_2) \cdot (x - x_3)}{(x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_3)}{(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_3)} y_2 + \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_2)} y_3.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \varphi(2.6) &= \frac{(2.6 - 3.0) \cdot (2.6 - 3.5)}{(2.5 - 3.0) \cdot (2.5 - 3.5)} \cdot 3.25 + \frac{(2.6 - 2.5) \cdot (2.6 - 3.5)}{(3.0 - 2.5) \cdot (3.0 - 3.5)} \cdot 6.0 + \\ &+ \frac{(2.6 - 2.5) \cdot (2.6 - 3.0)}{(3.5 - 2.5) \cdot (3.5 - 2.6)} \cdot 9.25 = 3.76 \equiv f(2.6). \end{aligned}$$

Решение систем линейных алгебраических уравнений

75% всех расчетных математических задач приходится на решение систем линейных алгебраических уравнений (в дальнейшем, СЛАУ). Это не удивительно, так как математические модели тех или иных явлений или процессов либо сразу строятся как линейные алгебраические, либо сводятся к таковым посредством дискретизации и/или линеаризации. Поэтому трудно переоценить роль, которую играет выбор эффективного (в том или ином смысле) способа решения СЛАУ. Современная вычислительная математика располагает большим арсеналом методов, а математическое обеспечение ЭВМ – многими пакетами прикладных программ, позволяющих решать различные возникающие на практике линейные системы. Чтобы ориентироваться среди методов и программ и в нужный момент сделать оптимальный выбор, нужно разбираться в основах построений методов и алгоритмов, учитывающих специфику постановок задач, знать их сильные и слабые стороны и границы применимости.

Все методы решения линейных алгебраических задач (наряду с задачей решения СЛАУ, это и вычисление определителей, и обращение матриц) можно разбить на два класса: прямые и итерационные.

Прямые методы – методы, которые приводят к решению за конечное число арифметических операций.

Итерационные методы – методы, в которых точное решение может быть получено лишь в результате бесконечного повторения единообразных (как правило, простых) действий.

Итак, будем рассматривать решение СЛАУ вида:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ \text{-----} \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

или в векторно-матричной форме:

$$A \cdot x = b \quad (2)$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} - \text{вектор свободных членов;}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{вектор неизвестных;}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{матрица коэффициентов.}$$

Прежде чем приступить к анализу методов решения СЛАУ освежим в памяти свойства матриц и операции над матрицами.

Определение. Матрицей называется прямоугольная таблица из чисел, содержащая некоторое количество m строк и некоторое количество n столбцов, где m и n – порядки матрицы. Если $m = n$ – матрица квадратная, а число $m = n$ называется порядком матрицы.

Главная диагональ матрицы состоит из элементов $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn})$.

Побочная диагональ – $(a_{n1}, a_{n-1\ 2}, a_{n-2\ 3}, \dots, a_{1n})$.

Операции над матрицами:

- a) сложение $C = A + B$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$;
- b) умножение на число $C = \alpha \cdot A$, $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$;
- c) перемножение матриц $C = A \cdot B$, если число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Мы будем работать с квадратными матрицами второго и третьего порядков, т.е. системы линейных алгебраических уравнений будут иметь вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Определение. Определителем (детерминантом) n -го порядка называется число D , образующееся из n^2 чисел a_{ij} , расположенных в матрице

$$D = |a_{ij}| = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^k a_{1\alpha} a_{2\beta} \cdots a_{n\omega}$$

$\alpha, \beta, \dots, \omega$ пробегает все возможные $n!$ перестановок из чисел $1, 2, \dots, n$, k – число инверсий.

Определение. Минором элемента a_{ij} называется определитель, образованный из данного зачеркиванием i -ой строки и j -го столбца.

Определение. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор со своим знаком:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Вычисление определителей второго порядка проводится по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Для вычисления определителей третьего порядка можно применять правило Саррюса (приписываются первые два столбца)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$\Delta = |A| = \det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \overline{M_j^i},$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} 12 = 45 = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

Применение формулы Крамера для решения СЛАУ вида

[illegible]

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{и } D_j - \text{ определитель, получающийся из } D$$

23

Если $D \neq 0$, то система (*) является определенной и ее решение имеет вид:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}, \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

- а) если $D = 0$ и $\exists j \ D_j \neq 0$, то система является несовместной (т.е. не имеет решений);
- б) если $D = 0$ и $\forall j \ D_j = 0$, то система является совместной, но неопределенной (т.е. имеет, по крайней мере, два решения).

Пример использования формулы Крамера для решения СЛАУ

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 9, \\ x - 2y + z = -2, \\ 3x + 2y + 2z = 7. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13, \quad D_x = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 26,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 39.$$

Таким образом, $x = \frac{D_x}{D} = -1$, $y = \frac{D_y}{D} = 2$, $z = \frac{D_z}{D} = 3$.

Метод Гаусса с выбором главного элемента

Наиболее известным и популярным способом решения СЛАУ является метод Гаусса. Суть его проста – это последовательное исключение неизвестных.

Для этого будем поэтапно приводить систему (1) к трехдиагональному виду, исключая последовательно сначала x_1 из второго, третьего, ..., n -го уравнений, затем x_2 из третьего, четвертого, ..., n -го уравнений и т.д.

На первом этапе заменим второе, третье, ... уравнения на уравнения, получающиеся сложением этих уравнений с первым, умноженным соответственно на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \dots, -\frac{a_{n1}}{a_{11}}$.

Результатом этого этапа преобразований будет:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)} \cdot x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{3n}^{(1)} \cdot x_n = b_3^{(1)}, \\ \hline a_{n2}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)} \cdot x_n = b_n^{(1)}. \end{array} \right.$$

Коэффициенты которой имеют следующий вид:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot a_{1j}; \quad b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot b_1,$$

где $i, j = 2, 3, \dots, n$.

При этом полагаем, что $a_{11} \neq 0$.

На втором этапе проделываем такие же операции, как и на первом этапе, с подсистемой системы (1), получающейся исключением первого уравнения. В результате получим следующую эквивалентную систему (после второго этапа):

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + a_{23}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)} \cdot x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)} \cdot x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)} \cdot x_n = b_3^{(2)}, \\ \hline a_{n3}^{(2)} \cdot x_3 + \dots + a_{nn}^{(2)} \cdot x_n = b_n^{(2)}. \end{array} \right.$$

где $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot a_{2j}^{(1)}; \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot b_2^{(1)}, \quad i, j = 3, \dots, n$.

Продолжая этот процесс, на $(n-1)$ -м этапе так называемого прямого хода метода Гаусса данную систему (1) приведем к треугольному виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + a_{23}^{(1)} \cdot x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)} \cdot x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)} \cdot x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)} \cdot x_n = b_3^{(2)}, \\ \dots \\ a_{nn}^{(n-1)} \cdot x_n = b_n^{(n-1)}. \end{array} \right. \quad (3)$$

И при этом коэффициенты системы (3) будут иметь вид:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot a_{kj}^{(k-1)}, \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot b_k^{(k-1)}, \quad \left| \begin{array}{l} k=1, \dots, n-1 \\ i, j=k+1, \dots, n. \end{array} \right. \quad (4)$$

$$a_{ij}^{(0)} = a_{ij}; \quad b_i^{(0)} = b_i.$$

Тогда из системы (3) получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \\ \text{--- --- ---} \\ x_2 = \frac{b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} \cdot x_3 - \dots - a_{2n}^{(1)} \cdot x_n}{a_{22}^{(1)}}, \\ x_1 = \frac{b_1 - a_{12} \cdot x_2 - \dots - a_{1n} \cdot x_n}{a_{11}}. \end{array} \right.$$

Этот процесс последовательного вычисления значений неизвестных называют обратным ходом метода Гаусса.

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot \left(b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k-1)} \cdot x_j \right), \quad (5)$$

где $k = n, n-1, \dots, 2, 1$.

Итак, решение (1) методом Гаусса сводится к последовательной реализации вычислений по формулам (4) и (5).

Поскольку реальные машинные вычисления производятся не с точными, а округленными числами, то анализируя, например, формулы (4), можно сделать вывод о том, что выполнение алгоритма может прекратиться или привести к неверным результатам, если знаменатели дробей на каком-то этапе окажутся равными нулю или очень маленькими числами.

Чтобы уменьшить влияние ошибок округлений и исключить деление на нуль на каждом этапе прямого хода уравнения системы представляют так, чтобы деление производилось на наибольший по модулю в данном столбце элемент.

Тогда алгоритм решения линейных систем (1) методом Гаусса с постолбцовым выбором главного элемента примет вид:

1. для $k = 1, 2, \dots, n-1$
2. выбор $\max$ элемента в k -ом столбце
и перестановка строк

$$p := a_{kk}; \quad l := k;$$

$$\text{для } i := k+1, \dots, n$$

$$\text{если } |p| < |a_{ik}|, \quad \text{то } \begin{cases} l := i \\ p := a_{ik} \end{cases}$$

перестановка

$$\text{для } j := k, \dots, n$$

$$p := a_{kj}; \quad a_{kj} := a_{lj}; \quad a_{lj} := p;$$

$$p := b_k; \quad b_k := b_l; \quad b_l := p;$$

3. для $i := k+1, \dots, n$
4. для $j := k+1, \dots, n$

$$5. \quad a_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \cdot a_{kj};$$

$$6. \quad b_i = b_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \cdot b_k;$$

$$7. \quad x_n = \frac{b_n}{a_{nn}};$$

8. для $k := n-1, n-2, \dots, 2, 1$

$$9. \quad x_k = \left(b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj} \cdot x_j \right) / a_{kk}.$$

Пример

Рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 5, \\ x - y + z = 4, \\ 2x + y + 4z = 1. \end{cases} \quad n = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2$$

При $k = 1$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -0.5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1.5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

При $k = 2$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1.25 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1.5 \\ -4.75 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 5, \\ -2y - 0.5z = 1.5, \\ 1.25z = -4.75. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8, \\ y = 0.2, \\ z = -3.8. \end{cases}$$

Метод Жордана решения СЛАУ

Рассмотрим расширенную матрицу системы (1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right) \quad (6)$$

На первом этапе первую строку (6) приведем к виду:

$$1 \quad a_{12}^{(1)} \quad a_{13}^{(1)} \mid b_1^{(1)} \quad (7)$$

соответственно умножением ее на a_{11}^{-1}

Итак,

$$a_{1j}^{(1)} = a_{11}^{-1} \cdot a_{1j}, \quad b_1^{(1)} = a_{11}^{-1} \cdot b_1 \quad (8)$$

На втором шаге процесса с помощью строки (7) умножением на $-a_{21}$ и сложением со второй строкой матрицы (6) последняя примет вид

$$0 \quad a_{22}^{(1)} \quad a_{23}^{(1)} \Big| b_2^{(1)} \quad (9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{2j}^{(1)} &= a_{2j} - a_{21} \cdot a_{1j}^{(1)}, \quad j = 2, 3 \\ b_2^{(1)} &= b_2 - a_{21} \cdot b_1^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

затем умножая (9) на $(a_{22}^{(1)})^{-1}$ получим

$$0 \quad 1 \quad a_{23}^{(2)} \Big| b_2^{(2)} \quad (11)$$

где

$$a_{23}^{(2)} = (a_{22}^{(1)})^{-1} \cdot a_{23}^{(1)}, \quad b_2^{(2)} = (a_{22}^{(1)})^{-1} \cdot b_2^{(1)} \quad (12)$$

Умножая строку (11) на $-a_{12}^{(1)}$ и складывая со строчкой (7) получим, что первая строка системы (6) примет вид:

$$1 \quad 0 \quad a_{13}^{(2)} \Big| b_1^{(2)} \quad (13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{13}^{(2)} &= a_{13}^{(1)} - a_{12}^{(1)} \cdot a_{23}^{(2)}, \\ b_1^{(2)} &= b_1^{(1)} - a_{12}^{(1)} \cdot b_2^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Таким образом, мы имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a_{13}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right)$$

Аналогично преобразуем третью строчку матрицы (6) к виду $0 \quad 0 \quad 1 \Big| b_3^{(3)}$, а далее на основе этой строки преобразуем первую и вторую строки и получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1^{(3)} \\ 0 & 1 & 0 & b_2^{(3)} \\ 0 & 0 & 1 & b_3^{(3)} \end{array} \right)$$

Пример

Рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 5, \\ x - y + z = 4, \\ 2x + y + 4z = 1. \end{cases} \quad n = 3$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

На первом этапе

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1.5 & 2.5 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

На втором этапе

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1.25 & 3.25 \\ 0 & 1 & 0.25 & -0.75 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

На третьем этапе:

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & -3.8 \end{array} \right)$$

Таким образом, имеем:
$$\begin{cases} x = 8, \\ y = 0.2, \\ z = -3.8. \end{cases}$$

Решение нелинейных уравнений

Будем рассматривать задачу приближенного нахождения нулей функции одной переменной, иначе, задачу нахождения корней уравнения вида

$$f(x) = 0 \quad (*)$$

Совокупность значений переменной x , при которых уравнение $(*)$ обращается в тождество, называется решением этого уравнения, а каждое значение x из этой совокупности – корнем уравнения.

В зависимости от вида функции $f(x)$ уравнения вида $(*)$ делят на алгебраические и трансцендентные.

Функцию $f(x)$ называют трансцендентной функцией, если она содержит показательную функцию a^x , логарифмическую функцию $\log_a x$, тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ и другие.

Предположим, что уравнение $(*)$ имеет лишь изолированные корни, т.е. для каждого корня уравнения $(*)$ существует окрестность, не содержащая других корней этого уравнения. Остановимся на методах приближённого вычисления корней уравнения $(*)$.

Этот процесс разбивается на два этапа:

- отделение корней, т.е. определение возможно малых промежутков $[a, b]$, в каждом из которых содержится один корень уравнения;
- уточнение корней уравнения с заданной точностью.

На этапе отделения корней область допустимых значений x разбивается на отрезки, на каждом из которых содержится только лишь один корень. Существует два метода отделения корней: графический и аналитический.

Графический метод

Условно можно выделить два подхода.

- Строят график функции $y = f(x)$. Абсциссы точек пересечения функции с осью Ox и есть корни уравнения (*).
- Все члены уравнения (*) разбивают на две группы и одну из них записывают в левую, а другую в правую части уравнения, т.е. (*) представляют в виде $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. Затем строят графики функций $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$. Абсциссы точек их пересечения и являются корнями уравнения (*).

В первом и втором подходах с графиков снимают числа a и b , между которыми расположен корень уравнения (*).

Аналитический метод отделения корней

Аналитически корни уравнения (*) отделяют с помощью известной теоремы математического анализа.

Теорема. Если непрерывная функция $f(x)$ принимает значения разных знаков на концах отрезка $[a, b]$, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то внутри этого отрезка существует по крайней мере один корень уравнения (*).

Далее рассмотрим три метода решения нелинейных уравнений.

Метод простых итераций

Функцию $f(x)$ представим в виде:

$$f(x) = x - g(x).$$

Соответственно, необходимо решить уравнение вида $x = g(x)$. Поступают следующим образом, корень ищут в виде последовательности приближений $x_{k+1} = g(x_k)$, где k – номер итерации. При этом $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$, $\xi = g(\xi)$ или $f(\xi) = 0$, x_0 – начальное приближение, которое берут

из отрезка $[a, b]$ (в котором находится изолированный корень), можно взять левую границу, т.е. точку a .

Ясно, что подобранное хорошее начальное приближение позволит за малое число итераций найти корень с заданной точностью ε . Условия окончания вычисления элементов последовательности $\{x_k\}_{k \geq 0}$:

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon \text{ или } |f(x_k)| \leq \varepsilon.$$

Рассмотрим пример, необходимо решить уравнение $x^3 + 3x - 2 = 0$, $x \in (0, 1)$ с точностью $\varepsilon = 0.01$, т.е. $|f(x^*)| \leq \varepsilon$.

Решение. Методом простых итераций найдем корень. Для этого построим последовательность приближений в виде: $x_{k+1} = \frac{1}{2}(2 - x_k^3)$.

$$\begin{aligned} x_0 &= 0; \\ x_1 &\approx 0.667 \Rightarrow f(x_1) \approx 0.298; \\ x_2 &\approx 0.568 \Rightarrow f(x_2) \approx -0.113; \\ x_3 &\approx 0.606 \Rightarrow f(x_3) \approx 0.041; \\ x_4 &\approx 0.592 \Rightarrow f(x_4) \approx -0.017; \\ x_5 &\approx 0.598 \Rightarrow f(x_5) \approx 0.008 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, $x_5 = 0.598 \approx x^*$, потребовалось пять итераций.

Замечания к методу простых итераций

Для решения нелинейного уравнения $f(x) = 0$ совершается переход от функции $f(x)$ к функции $x - \varphi(x)$ и тогда организуется итерационный процесс

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим вопрос поиска функции $\varphi(x)$. Решение уравнения $x = \varphi(x)$ представляет самостоятельный интерес; нахождение его корней называется задачей о неподвижной точке. Это название связано с тем, что точка $x^* = \varphi(x^*)$ при отображении с помощью $\varphi(x)$ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ остается на месте.

Существование и единственность корня уравнения $x = \varphi(x)$ основывается на принципе сжимающих отображений или, иначе, принципе неподвижной точки.

Определение. Непрерывная функция $\varphi(x)$ называется сжимающей (функцией сжатия) на отрезке $[a, b]$, если:

- 1) $\varphi(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b]$;
- 2) $\exists q \in (0, 1): |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq q|x_2 - x_1| \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b]$.

Теорема. Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Тогда, если выполняются условия:

- 1) $\varphi(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b]$;
- 2) $\exists q: |\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad \forall x \in (a, b)$,

то уравнение $x = \varphi(x)$ имеет и притом единственный на $[a, b]$ корень x^* ; к этому корню сходится определяемая методом простых итераций $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ последовательность $(x_k)_{k=0,1,2,\dots}$, начинающаяся с любого $x_0 \in [a, b]$; при этом справедливы оценки погрешности ($\forall k \in \mathbb{N}$):

$$|x^* - x_k| \leq \frac{q}{1-q} |x_k - x_{k-1}| \quad \text{или} \quad |x^* - x_k| \leq \frac{q^k}{1-q} |x_1 - x_0|.$$

Переход от уравнения $f(x) = 0$ к уравнению $x = \varphi(x)$ осуществляется следующим образом: уравнение сначала переписывают в виде $x = x - \lambda f(x)$, где $\lambda = \text{const}$, которую необходимо найти. Этот коэффициент можно найти из условия $\varphi'(x_0) = 0$, где x_0 – начальное приближение.

$$\varphi(x) = x - \lambda f(x) \Rightarrow \varphi'(x_0) = 1 - \lambda f'(x_0) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Или же можно провести иную оценку: на основе $|\varphi'(x)| < 1$:

$$\begin{aligned} |\varphi'(x)| < 1 &\Rightarrow |1 - \lambda f'(x)| < 1; \\ -1 < (1 - \lambda f'(x)) &< 1; \end{aligned}$$

$$0 < \lambda < \frac{2}{f'(x)}$$

при условии, что $f'(x) > 0$, в противном случае вместо уравнения $f(x) = 0$ рассматривается уравнение $-f(x) = 0$. Если известно, что

$$0 < a' \leq f'(x) \leq \gamma < \infty, \quad \forall x \in [a, b], \quad \text{то } \lambda = \frac{1}{\gamma}.$$

Метод дихотомии (от греч. деление на две части)

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$, то по теореме $\exists \xi \in (a, b) \mid f(\xi) = 0$.

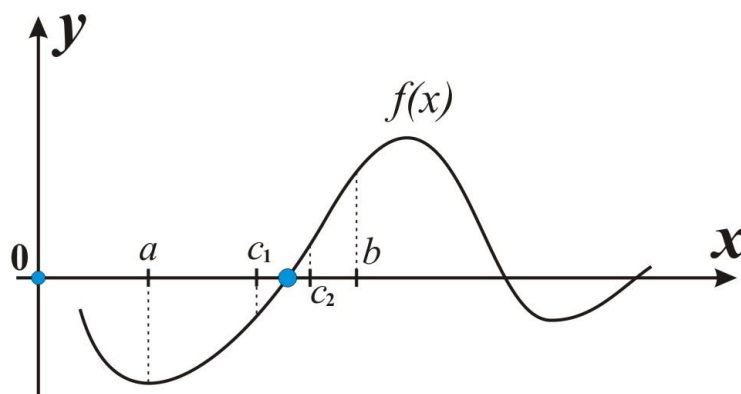
Для нахождения ξ поступают следующим образом. Возьмем произвольную точку $c_1 \in (a, b)$ и рассмотрим $f(c_1)$ (c_1 – пробная точка)

а) $f(a) \cdot f(c_1) < 0 \Rightarrow \xi \in (a, c_1),$

б) $f(b) \cdot f(c_1) < 0 \Rightarrow \xi \in (c_1, b),$

в) $f(c_1) = 0 \Rightarrow \xi = c_1.$

Далее анализируют отрезок, в который попал корень. Например, если $f(a) \cdot f(c_1) < 0$, то выбирают точку $c_2 \in (a, c_1)$ и также рассматривают значения $f(c_2)$ и значения $f(a)$ и $f(c_1)$ и так до тех пор пока не выполнится условие: $f(c_i) \approx 0$ или $|f(c_i)| < \delta$, где δ – точность вычислений.



Если способ задания пробных точек c_i определен так, что последовательность длин получающихся в этом процессе промежутков

существования корня стремится к нулю, то методом дихотомии можно найти какой-либо корень уравнения (*).

Наиболее распространенным частным случаем метода дихотомии является метод половинного деления, реализующий простой способ выбора пробной точки – деление промежутка корня пополам, т.е.

$$c_1 = \frac{a+b}{2}, \quad c_2 = \frac{a+c_1}{2} \quad \text{или} \quad c_2 = \frac{c_1+b}{2} \dots$$

Пример применения метода половинного деления. Необходимо решить уравнение: $x^3 + 3x - 2 = 0$, $x \in (0,1)$ с точностью $\varepsilon = 0.01$, т.е. $|f(x^*)| \leq \varepsilon$.

Решение. Начнем поиск корня:

$$f(0) = -2, \quad f(1) = 2;$$

$$c_1 = \frac{a+b}{2} = 0.5, \quad f(c_1) = -0.375;$$

$$x^* \in (0.5, 1) \Rightarrow c_2 = 0.75, \quad f(c_2) \approx 0.67;$$

$$x^* \in (0.5, 0.75) \Rightarrow c_3 = 0.625, \quad f(c_3) \approx 0.119;$$

$$x^* \in (0.5, 0.625) \Rightarrow c_4 = 0.5625, \quad f(c_4) \approx -0.13;$$

$$x^* \in (0.5625, 0.625) \Rightarrow c_5 = 0.59375, \quad f(c_5) \approx -0.009;$$

$$|f(c_5)| \approx 0.009 < \varepsilon \Rightarrow c_5 = 0.59375 \approx x^*.$$

Метод Ньютона

Одним из популярнейших итерационных методов решения нелинейных уравнений, что связано с его идейной простотой и быстрой сходимостью, является метод Ньютона.

Будем считать, что $f(x)$ дважды дифференцируема на $[a, b]$, $\xi \in [a, b]$, $f(\xi) = 0$.

Необходимо построить последовательность x_k , такую, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \xi$.

Пусть $x_k \in [a, b]$ – некоторый член последовательности. По формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k) + \frac{1}{2} f''(\theta_k) \cdot (x - x_k)^2$$

$\theta_k \in (a, b)$ между точками x и x_k .

Тогда

$$f(\xi) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (\xi - x_k) + \frac{1}{2} f''(\bar{\theta}_k) \cdot (\xi - x_k)^2 = 0.$$

Если $\bar{\theta}_k$ известна, то ξ находится из уравнения

$$f(x_k) + f'(x_k) \cdot (\xi - x_k) + \frac{1}{2} f''(\bar{\theta}_k) \cdot (\xi - x_k)^2 = 0.$$

Будем считать, что x_k близко к ξ , то $|x_k - \xi|$ — мала, а $|x_k - \xi|^2$ еще меньше и поэтому этим слагаемым можно пренебречь. При этом будет найден не корень ξ , а некоторая другая точка x_{k+1} — следующий член последовательности.

Таким образом, итерационный процесс Ньютона определяется линейным уравнением

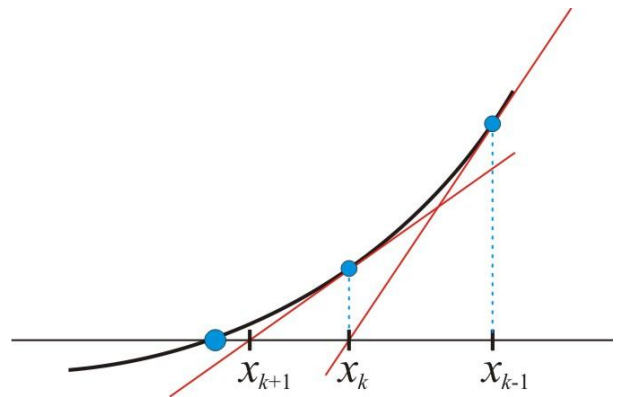
$$f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) = 0 \quad (**)$$

или в явной форме

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

x_k находим до тех пор, пока не выполнится условие $|f(x_k)| < \delta$.

Если в равенстве (**) фиксированную точку x_{k+1} заменить переменной x , а 0 в правой части — переменной y , то получим уравнение касательной к кривой $y = f(x)$, проведенной к ней в точке $(x_k, f(x_k))$. Отсюда геометрический смысл метода Ньютона: приближения к корню ξ совершаются по абсциссам точек



пересечения касательных к графику данной функции, проводимых в точках, соответствующих предыдущим приближениям.

Поэтому метод Ньютона называют также методом касательных.

Поскольку процесс итерационный, то необходимо задать начальное приближение: x_0 графическим методом.

Например, $\xi \in (a, b) \Rightarrow x_0 = a$.

Пример применения метода Ньютона. Необходимо решить уравнение:

$$x^3 + 3x - 2 = 0, \quad x \in (0, 1) \text{ с точностью } \varepsilon = 0.01, \text{ т.е. } |f(x^*)| \leq \varepsilon.$$

Решение. Методом Ньютона найдем корень с заданной точностью. Для этого построим последовательность приближений в виде:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad f'(x) = 3x^2 + 3 \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 + 3x_k - 2}{3x_k^2 + 3}.$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = -2.0;$$

$$x_1 \approx 0.667 \Rightarrow f(x_1) \approx 0.298;$$

$$x_2 \approx 0.598 \Rightarrow f(x_2) \approx 0.008 < \varepsilon.$$

Таким образом, $x_7 = 0.598 \approx x^*$, потребовались две итерации.

Обобщение методов решения нелинейных уравнений на системы нелинейных уравнений

Пусть требуется решить систему уравнений

[illegible]

где $f_i, i = \overline{1, n}$ – нелинейные функции.

$$F(X)=0,$$

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Метод простых итераций

Пусть систему можно привести к виду:

[illegible]

Метод простых итераций: $X^{(k+1)} = \Phi(X^{(k)})$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Вычисления проводятся до тех пор, пока не выполнится условие:

$$\max_i \left| f_i \left(x^{(k+1)} \right) \right| < \varepsilon \text{ или } \max_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon.$$

Итак, задавая начальное приближение

$$X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}).$$

Находим последующие приближения по формулам: $X^{(k+1)} = \Phi(X^{(k)})$.

Метод Ньютона

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \left[F'(X^{(k)}) \right]^{-1} \cdot F(X^{(k)})$$

$$F'(X) = J(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ — матрица Якоби.}$$

Существуют модификации метода Ньютона.

Чтобы на каждой итерации не вычислять обратную матрицу Якоби можно рассмотреть приближение вида:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \left[F'(X^{(0)}) \right]^{-1} \cdot F(X^{(k)}).$$

Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

Постановка задачи Коши

При решении научных и инженерных задач исследователь часто сталкивается с проблемой математического описания анализируемой динамической системы. При этом не всегда удастся найти закон, устанавливающий в явном виде зависимость между величинами, хотя известно, как взаимосвязаны производные этих величин по времени и по координате в виде дифференциальных уравнений. Известно много аналитических методов решения дифференциальных уравнений, когда решение записывается в виде интеграла. Но при решении практических задач интегралы часто не выражаются в элементарных функциях. В этом случае необходимо использовать численные методы решения дифференциальных уравнений.

Рассмотрим ОДУ первого порядка

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad t \in [t_0, c] \quad (1)$$

с начальным условием

$$y(t_0) = y_0 \quad (2)$$

где $f(t, y)$ – некоторая заданная, в общем случае. Нелинейная функция двух переменных.

Сформулированная задача (1), (2) называется начальной задачей или задачей Коши.

Несмотря на внешнюю простоту уравнения (1), решить его аналитически, т.е. найти общее решение $y = y(t, c)$ с тем, чтобы затем выделить из него интегральную кривую $y = y(t)$, проходящую через заданную точку (t_0, y_0) , удастся лишь для некоторых специальных типов

таких уравнений. Поэтому приходится делать ставку на приближенные способы решения начальных задач для ОДУ, которые можно разделить на 3 группы:

- 1) приближенно-аналитические методы;
- 2) графические или машинно-графические методы;
- 3) численные методы.

К методам первой группы относят такие, которые позволяют находить приближенные решения $y(t)$ сразу в виде некоторой функции $\varphi(t)$. Например, широко известен метод степенных рядов, в одну из реализаций которого заложено представление искомой функции $y(t)$ отрезком ряда Тейлора, где тейлоровские коэффициенты, содержащие производные высших порядков, находят последовательным дифференцированием самого уравнения.

Название графические методы говорит о приближенном представлении искомого решения $y(t)$ на промежутке (t_0, c) в виде графика, который можно строить по тем или иным правилам, связанным с графическим толкованием данной задачи.

Наиболее значимыми в настоящее время, характеризующее бурным развитием цифровой вычислительной техники, являются численные методы решения дифференциальных уравнений, предполагающие получение числовой таблицы приближенных значений y_i искомого решения $y(t)$ на некоторой сетке $t_i \in [t_0, c]$ значений аргумента t .

Типы задач для ОДУ

Задачи для ОДУ можно разделить на две группы:

- а) начальные задачи (задачи Коши);
- б) краевые задачи.

Краевые задачи рассмотрим на примере ОДУ второго порядка:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p(t) \cdot \frac{dy}{dt} + q(t) \cdot y = f(t) \quad (3)$$

$$t \in [a, b]$$

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \quad (4)$$

$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \quad (5)$$

где к коэффициентам краевых условий (4) и (5) предъявляются требования

$$\begin{cases} |\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0 \\ |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0 \end{cases} \quad (6)$$

а функции $p = p(t)$, $q = q(t)$ и $f = f(t)$ в уравнении (3) должны быть такими, чтобы данная задача имела единственное решение $y = y(t)$.

Краевые условия (4), (5) определяют так называемую третью или, иначе, смешанную краевую задачу для уравнения (3), содержащую в себе первую (когда $\alpha_1 = \beta_1 = 0$) или вторую (при $\alpha_0 = \beta_0 = 0$) краевые задачи.

Методы решения задачи Коши

Прежде всего рассмотрим один *приближенно-аналитический способ* решения задачи Коши (1)–(2), в котором искомое решение $y = y(t)$ в некоторой правой окрестности точки t_0 является пределом последовательности получаемых определенным образом функций $y_n(t)$.

Проинтегрируем левую и правую части уравнения (1) в границах от t_0 до t

$$\int_{t_0}^t y'(x) dx = \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx.$$

Отсюда получим

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx$$

или

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (1) с начальным условием (2) преобразовали в интегральное уравнение.

Полученное уравнение имеет вид задачи о неподвижной точки:

$$y = \Phi(y)$$

где $\Phi(y) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx.$

Формально к этой задаче можно применить метод простых итераций

$$y_{n+1} = \Phi(y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где в качестве $y_0(t)$ можно взять y_0 из условия (2).

Тогда

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y_0) dx$$

далее

$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y_1(x)) dx.$$

И так далее, пока не выполнится условие вида:

$$\max_t |y_{n+1}(t) - y_n(t)| < \varepsilon.$$

Таким образом, этот приближенно-аналитический метод называется методом последовательных приближений или методом Пикара,

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y_n(x)) dx,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ и $y_0(t) \equiv y_0$.

Теорема. Если в некоторой области G такой, что $(t_0, y_0) \in G$ и $|f(t, y)| \leq c$, $|f'_y(t, y)| \leq c_1$, то $\exists h > 0$, $h = \text{const}$ такая, что на отрезке $[t_0, t_0 + h]$ последовательность функций $y_n(t)$ определяемая методом Пикара,

равномерно сходится к решению $y(t)$ задачи Коши (1)–(2) и справедлива

$$\text{оценка погрешности } |y(t) - y_n(t)| \leq c \cdot c_1^n \cdot \frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Пример решения задачи Коши методом Пикара.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y \cdot t^2, & t \in [0,1], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Аналитически:

$$\frac{dy}{dt} = y \cdot t^2 \Rightarrow \frac{dy}{y} = t^2 dt \Rightarrow \ln y = \frac{t^3}{3} + \ln C \Rightarrow y = C \exp\left(\frac{t^3}{3}\right)$$

поскольку $y(0) = 1$, то $C = 1$. Тогда решение имеет вид $y = \exp\left(\frac{t^3}{3}\right)$.

Воспользуемся методом Пикара

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y_n(x)) dx$$

в нашем случае

$$y_{n+1}(t) = 1 + \int_{t_0}^t (x^2 \cdot y_n(x)) dx.$$

Итак,

$$n=0, \quad y_0=1, \quad y_1 = 1 + \int_0^t (x^2 \cdot 1) dx = 1 + \frac{t^3}{3};$$

$$n=1, \quad y_2 = 1 + \int_0^t x^2 \cdot \left(1 + \frac{x^3}{3}\right) dx = 1 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^6}{3 \cdot 6};$$

$$n=2, \quad y_3 = 1 + \int_0^t x^2 \cdot \left(1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{3 \cdot 6}\right) dx = 1 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^6}{3 \cdot 6} + \frac{t^9}{3 \cdot 6 \cdot 9};$$

$$n=3, \quad y_4 = 1 + \int_0^t x^2 \cdot \left(1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{3 \cdot 6} + \frac{x^9}{3 \cdot 6 \cdot 9}\right) dx = 1 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^6}{3 \cdot 6} + \frac{t^9}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \frac{t^{12}}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12};$$

или если ввести обозначение $\frac{t^3}{3} \equiv z$, то

$$y_4 = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} = \sum_{k=0}^4 \frac{z^k}{k!};$$

Ясно, что $y_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(z).$

Таким образом, $y(t) = \exp\left(\frac{t^3}{3}\right).$

Численные методы решения задачи Коши

Для решения ОДУ будем использовать пошаговые методы. Идея этих методов заключается в следующем: генерируется последовательность точек $t_i \in [t_0, c]$, $(0 \leq i \leq N)$ возможно с переменным шагом $h_i = t_{i+1} - t_i$. В каждой точке t_i решения $y(t_i)$ аппроксимируется значением y_i , которое вычисляется по предыдущим значениям. Разностный метод, определяющий формулу для вычисления y_{i+1} по k предыдущим значениям $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-k+1}$ называется k -шаговым методом. Примером одношагового метода является метод Эйлера.

Метод Эйлера

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

При этом будем считать, что вычисления проводятся с расчетным шагом $h = \frac{c - t_0}{N}$, расчетными точками (узлами) служат точки $t_i = t_0 + i \cdot h$, $i = 0, 1, \dots, N$ промежутка $[t_0, c]$ и целью является построение таблицы

t	t_0	t_1	$\dots$	$t_N = c$
y	y_0	y_1	$\dots$	$y_N \cong y(c)$

приближенных значений y_i решения $y = y(t)$ задачи (1), (2) в расчетных точках t_i .

В окрестности точки t_0 функцию $y(t)$ разложим в ряд Тейлора

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0) \cdot (t - t_0) + 0.5 y''(t_0) \cdot (t - t_0)^2 + \dots, \quad (7)$$

который можно применить для приближенного определения искомой функции $y(t)$. В точке $(t_0 + h)$ при малых значениях h можно ограничиться двумя членами ряда (7), тогда

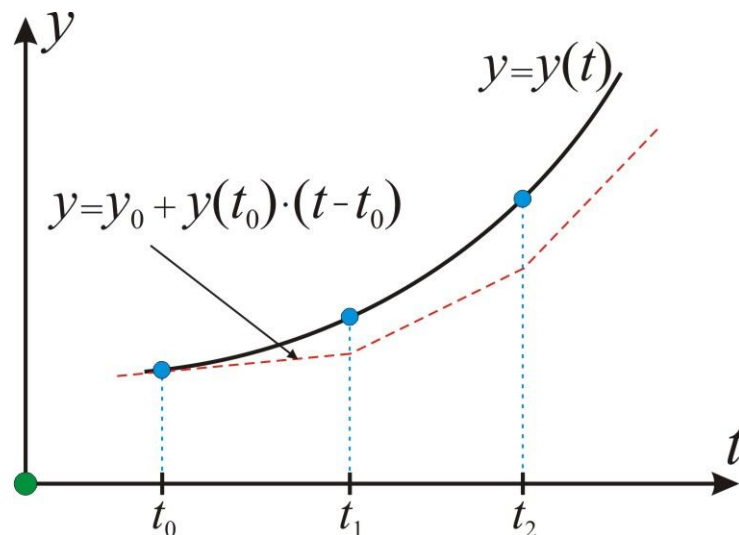
$$y(t_0 + h) = y_0 + h \cdot y'(t_0) + O(h^2) \quad (8)$$

где $O(h^2)$ – функция порядка h^2 .

Заменяем производную $y'(t_0)$, входящую в формулу (8), на правую часть уравнения (1)

$$y(t_0 + h) = y_0 + h \cdot f(t_0, y_0) \quad (9)$$

Теперь приближенное решение в точке $t_1 = t_0 + h$ можно вновь рассматривать как начальное условие для значения искомой функции в следующем узле и по формуле (9) найти значение функции в точке $t_2 = t_1 + h$. В результате получен простейший алгоритм решения задачи Коши, который называется методом Эйлера, или методом касательных. Последнее название связано с геометрической интерпретацией процесса (см. рис.).



Искомую функцию $y(t)$ заменяем ломанной линией, представляющей собой отрезки касательных к этой функции в узлах $t_0, t_1, t_2, \dots$

Таким образом, метод Эйлера примет следующий вид:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Неявный метод Эйлера

Неявный (или обратный) метод Эйлера для ОДУ имеет следующий вид:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_{i+1}, y_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Этот метод называется неявным, поскольку для вычисления неизвестного значения $y_{i+1} \approx y(t_{i+1})$ по известному значению $y_i \approx y(t_i)$ требуется решить уравнение, в общем случае нелинейное. Этот метод также как и явный метод Эйлера дает первый порядок точности относительно h .

Метод трапеций

Метод трапеций – одна из модификаций метод Эйлера. Это тоже неявный метод и его реализация имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})], \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Порядок точности метода трапеций на единицу больше порядка точности методов Эйлера как явного, так и неявного, т.е. метод трапеций – это метод второго порядка точности.

Необходимо решить задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y \cdot x^2, & x \in [0, 1], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

методами:

- a) явным методом Эйлера;
- b) неявным методом Эйлера;
- c) методом трапеций

на сетке, состоящей из шести узлов.

Шаг сетки будет иметь значение $h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{1}{5} = 0.2$.

1. Явный метод Эйлера.

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \text{ т.е. } y_{i+1} = y_i + h \cdot x_i^2 \cdot y_i = y_i \cdot (1 + h \cdot x_i^2).$$

2. Неявный метод Эйлера.

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}), \text{ т.е. } y_{i+1} = y_i + h \cdot x_{i+1}^2 \cdot y_{i+1} \Rightarrow y_{i+1} = \frac{y_i}{1 - h \cdot x_{i+1}^2}.$$

3. Метод трапеций.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \text{ т.е. } y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot [x_i^2 \cdot y_i + x_{i+1}^2 \cdot y_{i+1}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = \frac{y_i \cdot (2 + h \cdot x_i^2)}{2 - h \cdot x_{i+1}^2}.$$

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
явный метод Эйлера	1	1	1.008	1.04	1.115	1.26
неявный метод Эйлера	1	1.008	1.041	1.122	1.587	1.61
метод трапеций	1	1.004	1.024	1.079	1.191	1.408
точное решение $y(x) = \exp\left(\frac{x^3}{3}\right)$	1	1.003	1.022	1.075	1.186	1.396

Сравнение полученных результатов показывает, что точность метода трапеций, действительно, выше точности и явного, и неявного метода Эйлера.

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

Будем рассматривать линейные краевые задачи второго порядка:

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x) \quad (1)$$

$$x \in [a, b]$$

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \quad (2)$$

$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \quad (3)$$

условия на коэффициенты:

$$\begin{cases} |\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0 \\ |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0 \end{cases}$$

а функции $p = p(x)$, $q = q(x)$ и $f = f(x)$ выбираются таким образом, чтобы краевая задача имела единственное решение.

В зависимости от краевых условия краевые задачи делят на:

- а) первая краевая задача $\alpha_1 = \beta_1 = 0$;
- б) вторая краевая задача $\alpha_0 = \beta_0 = 0$;
- с) третья краевая задача или смешанная (2)–(3).

Как известно, точное (аналитическое) решение краевых задач вызывает еще большие трудности, чем решение задачи Коши. Отсюда – повышенный интерес и большое разнообразие приближенных методов решения.

Классификация приближенных методов решения краевых задач для ОДУ:

- 1) методы сведения к задаче Коши (метод пристрелки, метод дифференциальной прогонки, метод редукции);
- 2) метод конечных разностей;
- 3) метод балансов или интегро-интерполяционный метод;
- 4) метод коллокации;

- 5) проекционные методы (моментов, Галеркина);
- 6) вариационные методы (наименьших квадратов, Рунге);
- 7) проекционно-разностные методы (метод конечных элементов).

Методы 4)...6) приводят к приближенному решению в виде функции заданного семейства (линейной комбинации некоторой системы линейно независимых функций).

Методы 1)...3) и 7) генерируют таблицы численных значений приближенного решения.

Метод конечных разностей

Идея метода конечных разностей (МКР) решения краевых задач: вместо производных в дифференциальном уравнении используются их конечно-разностные аппроксимации. Эта идея уже применялась при построении методов решения задачи Коши. При построении дискретных аппроксимаций краевых дифференциальных задач нужно стремиться увязать две цели: хорошее качество аппроксимации и эффективное и устойчивое решение получающихся при этом алгебраических систем.

Рассмотрим применение МКР для линейной краевой задачи (1)–(3). Сначала на отрезке $[a, b]$ вводится сетка с шагом $h = \frac{b-a}{N}$, где $(N+1)$ – число узлов. На этой сетке определяются сеточные функции $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, отвечающие функциональным коэффициентам данного дифференциального уравнения, а также $y_i \approx y(x_i)$ при условии, что $y(x)$ – точное решение краевой задачи.

Фиксируя в уравнении (1) $x = x_i$ с учетом обозначений приходим к равенству:

$$y''(x_i) + p_i \cdot y'(x_i) + q_i \cdot y(x_i) = f_i \quad (4)$$

где $i = \overline{0, N}$.

Далее необходимо аппроксимировать производные: существует большое количество формул, отличающихся как внешним видом, так и порядком аппроксимации:

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2);$$

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} + O(h);$$

$$y'(x_i) = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1}))}{h} + O(h);$$

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2).$$

Будем использовать формулы вида $O(h^2)$, подставляя их в уравнение (4) получим:

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + p_i \cdot \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + q_i \cdot y(x_i) = f_i + O(h^2).$$

Это уравнение является точным отражением дифференциального уравнения (1), но в нем имеется неопределенное слагаемое $O(h^2)$. Отбрасывая его, приходим к разностному уравнению относительно приближенных значений решения:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i \cdot y_i = f_i.$$

Приведем это уравнение к классической форме трехточечного разностного уравнения второго порядка:

$$A_i y_{i+1} - B_i y_i + C_i y_{i-1} = F_i, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (5)$$

$$A_i = \frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}; \quad B_i = \frac{2}{h^2} - q_i; \quad C_i = \frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}; \quad F_i = f_i.$$

Видим, что в системе уравнений (5) $N-1$ уравнение, а неизвестных $N+1$. Два недостающих уравнения получают на основе краевых условий (2) и (3).

Будем рассматривать два варианта аппроксимации производных первого порядка:

$$y'(a) = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} + O(h) = \frac{-3y(x_0) + 4y(x_1) - y(x_2)}{2h} + O(h^2);$$

$$y'(b) = \frac{y(x_N) - y(x_{N-1})}{h} + O(h) = \frac{y(x_{N-2}) - 4y(x_{N-1}) + 3y(x_N)}{2h} + O(h^2).$$

В случае аппроксимации первого порядка относительно шага h получим:

$$\text{для условия (2) } \alpha_0 y(x_0) + \alpha_1 \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} + O(h) = A,$$

$$\text{для условия (3) } \beta_0 y(x_N) + \beta_1 \frac{y(x_N) - y(x_{N-1})}{h} + O(h) = B,$$

переходя к y_i получим

$$\left(\alpha_0 - \frac{\alpha_1}{h} \right) y_0 + \frac{\alpha_1}{h} y_1 = A,$$

$$\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{h} \right) y_N - \frac{\beta_1}{h} y_{N-1} = B.$$

В случае аппроксимации второго порядка $O(h^2)$ получим:

$$\text{для условия (2) } \alpha_0 y(x_0) + \alpha_1 \frac{-3y(x_0) + 4y(x_1) - y(x_2)}{2h} + O(h^2) = A,$$

$$\text{для условия (3) } \beta_0 y(x_N) + \beta_1 \frac{y(x_{N-2}) - 4y(x_{N-1}) + 3y(x_N)}{2h} + O(h^2) = B,$$

откуда получим

$$\left(\alpha_0 - \frac{3\alpha_1}{2h} \right) y_0 + \frac{2\alpha_1}{h} y_1 - \frac{\alpha_1}{2h} y_2 = A,$$

$$\frac{\beta_1}{2h} y_{N-2} - \frac{2\beta_1}{h} y_{N-1} + \left(\beta_0 + \frac{3\beta_1}{2h} \right) y_N = B.$$

Таким образом, все соотношения получены. Рассмотрим наиболее эффективный метод решения трехточечных разностных уравнений второго порядка.

Метод прогонки

Итак, для решения уравнения вида

$$A_i y_{i+1} - B_i y_i + C_i y_{i-1} = F_i, \quad i = \overline{1, N-1} \quad (*)$$

предполагают, что существует зависимость $y_i = \delta_i y_{i+1} + \lambda_i$, т.е. трехточечное уравнение второго порядка сводят к двухточечному уравнению первого порядка.

Тогда

$$y_{i-1} = \delta_{i-1} y_i + \lambda_{i-1} \quad (**)$$

подставим это соотношение в уравнение *, получим:

$$A_i y_{i+1} - B_i y_i + C_i \delta_{i-1} y_i + C_i \lambda_{i-1} = F_i.$$

Откуда имеем

$$y_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \delta_{i-1}} y_{i+1} + \frac{C_i \lambda_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \delta_{i-1}}.$$

Сравнивая полученное соотношение с (**) можно записать

$$\delta_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \delta_{i-1}}; \quad \lambda_i = \frac{C_i \lambda_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \delta_{i-1}}; \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Чтобы воспользоваться этими формулами, необходимо найти δ_0 и λ_0 на основе соотношения $y_0 = \delta_0 y_1 + \lambda_0$, т.е. δ_0 и λ_0 можно найти из краевого условия на левой границе.

В нашем случае два вида аппроксимации условий:

$$1) \quad \left(\alpha_0 - \frac{\alpha_1}{h} \right) y_0 + \frac{\alpha_1}{h} y_1 = A \Rightarrow y_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0 h} y_1 - \frac{Ah}{\alpha_1 - \alpha_0 h}, \text{ таким образом}$$

$$\delta_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0 h}; \quad \lambda_0 = \frac{Ah}{\alpha_0 h - \alpha_1};$$

$$2) \quad \left(\alpha_0 - \frac{3\alpha_1}{2h} \right) y_0 + \frac{2\alpha_1}{h} y_1 - \frac{\alpha_1}{2h} y_2 = A. \text{ Из этого соотношения необходимо}$$

исключить y_2 , воспользуемся уравнением (5) при $i = 1$:

$$\begin{aligned}
A_1 y_2 - B_1 y_1 + C_1 y_0 &= F_1, \\
A_1 &= \frac{1}{h^2} + \frac{p_1}{2h}; \quad B_1 = \frac{2}{h^2} - q_1; \quad C_1 = \frac{1}{h^2} - \frac{p_1}{2h}; \quad F_1 = f_1; \\
y_2 &= \frac{F_1}{A_1} + \frac{B_1}{A_1} y_1 - \frac{C_1}{A_1} y_0,
\end{aligned}$$

подставляя это в краевое условие получим:

$$\begin{aligned}
\left(\alpha_0 - \frac{3\alpha_1}{2h} \right) y_0 + \frac{2\alpha_1}{h} y_1 - \frac{\alpha_1}{2h} \left[\frac{F_1}{A_1} + \frac{B_1}{A_1} y_1 - \frac{C_1}{A_1} y_0 \right] &= A; \\
y_0 \left[\alpha_0 - \frac{3\alpha_1}{2h} + \frac{\alpha_1 C_1}{2A_1 h} \right] + y_1 \left[\frac{2\alpha_1}{h} - \frac{\alpha_1 B_1}{2A_1 h} \right] &= A + \frac{\alpha_1 F_1}{2A_1 h}; \\
y_0 &= \frac{\alpha_1 B_1 - 4\alpha_1 A_1}{2\alpha_0 h A_1 - 3\alpha_1 A_1 + \alpha_1 C_1} y_1 + \frac{2h A A_1 + \alpha_1 F_1}{2\alpha_0 h A_1 - 3\alpha_1 A_1 + \alpha_1 C_1}.
\end{aligned}$$

Таким образом, в случае $O(h^2)$

$$\delta_0 = \frac{\alpha_1 B_1 - 4\alpha_1 A_1}{2\alpha_0 h A_1 - 3\alpha_1 A_1 + \alpha_1 C_1}; \quad \lambda_0 = \frac{2h A A_1 + \alpha_1 F_1}{2\alpha_0 h A_1 - 3\alpha_1 A_1 + \alpha_1 C_1}.$$

Когда δ_0 и λ_0 определили можно находить δ_i и λ_i , $i = \overline{1, N-1}$

$$\delta_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \delta_{i-1}}; \quad \lambda_i = \frac{C_i \lambda_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \delta_{i-1}}.$$

Далее находят y_i по формулам

$$y_i = \delta_i y_{i+1} + \lambda_i, \quad i = N-1, N-2, \dots, 0.$$

y_N необходимо найти на основе правого краевого условия.

Рассмотрим два варианта:

1) с погрешностью аппроксимации $O(h)$

$$\begin{aligned}
\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{h} \right) y_N - \frac{\beta_1}{h} y_{N-1} &= B; \\
y_{N-1} &= \delta_{N-1} y_N + \lambda_{N-1}; \\
\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{h} \right) y_N - \frac{\beta_1}{h} \delta_{N-1} y_N - \frac{\beta_1}{h} \lambda_{N-1} &= B; \\
y_N &= \frac{\beta_1 \lambda_{N-1} + h B}{h \beta_0 + \beta_1 - \beta_1 \delta_{N-1}} + O(h).
\end{aligned}$$

2) с погрешностью аппроксимации $O(h^2)$

$$\frac{\beta_1}{2h} y_{N-2} - \frac{2\beta_1}{h} y_{N-1} + \left(\beta_0 + \frac{3\beta_1}{2h} \right) y_N = B.$$

Воспользуемся системой уравнений, полученной после аппроксимации дифференциального уравнения (5) при $i = N - 1$.

$$A_{N-1} y_N - B_{N-1} y_{N-1} + C_{N-1} y_{N-2} = F_{N-1},$$

$$A_{N-1} = \frac{1}{h^2} + \frac{p_{N-1}}{2h}; \quad B_{N-1} = \frac{2}{h^2} - q_{N-1}; \quad C_{N-1} = \frac{1}{h^2} - \frac{p_{N-1}}{2h}; \quad F_{N-1} = f_{N-1};$$

$$y_{N-2} = \frac{F_{N-1}}{C_{N-1}} + \frac{B_{N-1}}{C_{N-1}} y_{N-1} - \frac{A_{N-1}}{C_{N-1}} y_N,$$

подставим в краевое условие:

$$\frac{F_{N-1}\beta_1}{2C_{N-1}h} + \frac{B_{N-1}\beta_1}{2C_{N-1}h} y_{N-1} - \frac{A_{N-1}\beta_1}{2C_{N-1}h} y_N - \frac{2\beta_1}{h} y_{N-1} + \left(\beta_0 + \frac{3\beta_1}{2h} \right) y_N = B.$$

Получим

$$\left(\frac{B_{N-1}\beta_1}{2C_{N-1}h} - \frac{2\beta_1}{h} \right) y_{N-1} + \left(\beta_0 + \frac{3\beta_1}{2h} - \frac{A_{N-1}\beta_1}{2C_{N-1}h} \right) y_N = B - \frac{F_{N-1}\beta_1}{2C_{N-1}h},$$

$$y_{N-1} = \delta_{N-1} y_N + \lambda_{N-1},$$

$$y_N = \frac{2hBC_{N-1} - F_{N-1}\beta_1 - B_{N-1}\beta_1\lambda_{N-1} + 4\beta_1\lambda_{N-1}C_{N-1}}{B_{N-1}\beta_1\delta_{N-1} - 4\beta_1\delta_{N-1}C_{N-1} + 2\beta_0hC_{N-1} + 3\beta_1C_{N-1} - \beta_1A_{N-1}}.$$

y_N определили, далее находят все y_i , $i = \overline{N-1, 1}$.

Таким образом, решение уравнения (5) описываемым способом, называемым методом прогонки, сводится к вычислениям по трем формулам:

1) нахождение прогоночных коэффициентов δ_i и λ_i

$$\delta_i = \frac{A_i}{B_i - C_i\delta_{i-1}}; \quad \lambda_i = \frac{C_i\lambda_{i-1} - F_i}{B_i - C_i\delta_{i-1}}, \quad \text{при } i = \overline{1, N-1} \text{ – это прямая прогонка;}$$

2) вычисление y_i по прогоночной формуле

$$y_i = \delta_i y_{i+1} + \lambda_i, \quad i = N-1, N-2, \dots, 0 \text{ – это обратная прогонка.}$$

δ_0 и λ_0 находят из левого граничного условия, y_N находят из правого граничного условия.

Для успешного применения метода прогонки нужно, чтобы в процессе вычислений не возникло ситуаций с делением на нуль, а при больших размерностях систем не должно быть быстрого роста погрешностей округлений.

Определение. Будем называть прогонку *корректной*, если знаменатели прогоночных коэффициентов не обращаются в нуль, и *устойчивой*, если $|\delta_i| < 1 \quad \forall i = \overline{0, N-1}$.

Достаточные условия корректности и устойчивости прогонки:

$$|B_i| > |A_i| + |C_i| \quad \forall i = \overline{1, N-1} \quad \text{и} \quad |\delta_0| < 1.$$

Дифференциальные уравнения в частных производных

Примеры и классификация уравнений в частных производных

При изучении большинства физических и иных процессов и явлений приходится сталкиваться с тем, что исследуемые свойства объекта описываются функциями не одной переменной, а нескольких. В таких случаях при составлении математических моделей изучаемых явлений вместо ОДУ возникают уравнения в частных производных. Независимыми переменными в таких уравнениях, как правило, выступают пространственные координаты и время, и эти уравнения описывают какое-то физическое явление или процесс. Такие уравнения называются уравнениями математической физики.

Рассмотрим несколько классических примеров уравнений математической физики.

1. Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta u = 0$$

это уравнение используется для описания плоских электростатических полей, магнитных полей постоянных токов, стационарных тепловых полей,.... Аналогичные пространственные поля описываются трехмерным уравнением

Лапласа
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

2. Уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad \text{или} \quad \Delta u = f.$$

Область применения – задачи электростатики, электронной оптики, теории упругости, гидродинамики,....

3. Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

где a – коэффициент температуропроводности. Данное уравнение описывает распространение тепла в тонком стержне. В общем случае: $\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T$. Это

уравнение теплопроводности является однородным, т.е. без наличия различного рода источников или поглотителей тепла. Неоднородное уравнение теплопроводности имеет вид: $\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T + f(t, x, y, z)$.

4. Волновое уравнение (уравнение колебаний струны):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \text{свободные колебания};$$

если колебания происходят под действием внешней силы $f(x, t)$, то

уравнение примет вид: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x)$.

Уравнение свободных колебаний однородной мембраны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

5. Уравнения Навье-Стокса:

уравнение неразрывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{V}) = 0$, $\bar{V} = u\bar{i} + v\bar{j}$;

уравнения движения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right);$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right);$$

уравнение энергии

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right).$$

Все представленные примеры, кроме уравнений Навье-Стокса, содержат неизвестные функции вида $u(x, y)$ или $u(t, x)$ в плоском случае. Тогда все эти уравнения можно считать частными случаями уравнения вида:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Gu = F.$$

Это общий вид линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка относительно неизвестной функции $u(x, y)$. В наиболее общем случае A, B, C, D, E, G и $F = f(x, y)$.

Если $F = 0$, то уравнение однородное; если $F \neq 0$, то уравнение неоднородное.

Классификация уравнений второго порядка производится в зависимости от знака дискриминанта $B^2 - AC$:

- 1) $B^2 - AC < 0$ – уравнение эллиптического типа (уравнения Лапласа, Пуассона);
- 2) $B^2 - AC > 0$ – уравнение гиперболического типа (волновое уравнение);
- 3) $B^2 - AC = 0$ – уравнение параболического типа (уравнение теплопроводности).

Если уравнение не содержит время в качестве независимой переменной, то оно называется стационарным, в противном случае нестационарным или эволюционным уравнением.

Постановка задач для уравнений математической физики

Каждое дифференциальное уравнение в частных производных имеет бесчисленное множество решений. Для получения частного (конкретного) решения некоторой задачи необходимо еще сформулировать дополнительные условия. При этом необходимо позаботиться о том, чтобы эти дополнительные условия выделяли из общего решения единственное частное решение, чтобы это частное решение существовало в заданном функциональном пространстве и чтобы оно мало изменялось при малых

изменениях условий. Эти три требования – существование (разрешимость), единственность (однозначность) и непрерывная зависимость от исходных данных в совокупности характеризуют корректность постановки задачи.

Рассмотрим примеры постановок задач. Прежде всего отметим, что для дифференциальных уравнений в частных производных ставятся начальные и граничные условия. Если одна из независимых переменных играет роль времени, то условия, относящиеся к начальному моменту времени ($t = t_0$), называются начальными условиями (начальная задача). Условия, которые задаются при различных значениях пространственных переменных, называются граничными условиями (граничная задача). А если для задачи необходимо сформулировать и начальные, и граничные условия, то имеем смешанную задачу.

Например, если нам необходимо проанализировать нестационарное распределение температуры в пластине, то соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид: $\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$. Если необходимо поставить задачу, значит, помимо дифференциального уравнения, нужно сформулировать граничные и начальные условия.

Начальное условие:

$t = 0 \quad T = f(x, y)$, т.е. задано распределение температуры в области в начальный момент времени.

Граничные условия бывают 4 видов.

1) Граничное условие 1 рода

$T|_{\Gamma} = g(x, y, t)$, т.е. это условие определяет неизвестную функцию температуры T через известные функции (например, $T|_{x=0} = T_h = \text{const}$).

2) Граничное условие 2 рода

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right|_{\Gamma} = g(x, y, t),$$

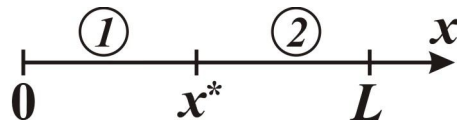
т.е. на границе задается производная по нормали в нашем случае – это тепловой поток. Например, на границе $x=0$ $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q$ – закон Фурье.

3) Граничное условие 3 рода

$$T|_{\Gamma} + \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma} = g(x, y, t)$$

включает в себя и саму неизвестную функцию и производную по нормали от нее. В случае уравнения энергии или уравнения теплопроводности, в частности, граничные условия 3 рода соответствуют закону Ньютона-Рихмана: $-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha(T^e - T|_{x=0})$.

4) Граничное условие 4 рода рассматривается при наличии двух сред, отличающихся теплофизическими характеристиками. Например, имеем составной стержень



на границе $x = x^*$
$$\begin{cases} T_1 = T_2; \\ -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}. \end{cases}$$

Сформулируем нашу задачу.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

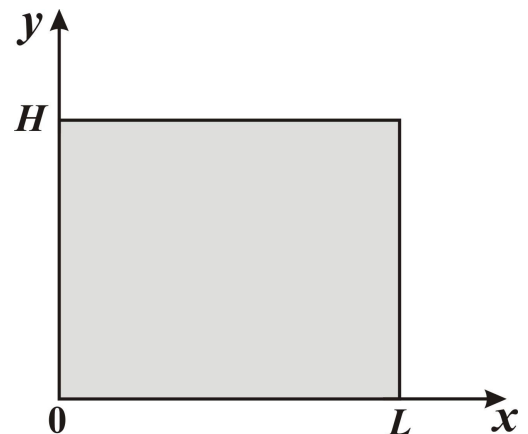
$$t = 0: T(x, y) = T_0 = \text{const};$$

$$x = 0: -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q, \quad t > 0;$$

$$x = L: T(t, L, y) = T_h, \quad t > 0;$$

$$y = 0: \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad t > 0;$$

$$y = H: \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=H} = \alpha(T^e - T|_{y=H}), \quad t > 0.$$



Это сформулирована плоская нестационарная задача теплопроводности.

В настоящее время для решения подобных задач используют численные методы. Хотя существуют аналитические методы, например, метод разделения переменных или метод Фурье. Но как и большинство аналитических методов этот метод рассчитан на решение достаточно простых задач.

Для решения краевых задач используют три группы численных методов:

- 1) метод конечных разностей;
- 2) метод конечных элементов;
- 3) метод контрольного объема.

Некоторые разностные схемы для уравнения теплопроводности

Рассмотрим применение метода конечных разностей на примере однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, t^k] \quad (1)$$

$$T(x, 0) = \tilde{T} = \text{const} \quad \text{при } x \in [0, L];$$

$$T(0, t) = \alpha(t), \quad T(L, t) = \beta(t) \quad \text{при } t \in [0, t^k]$$

Как видно, область, на которой определена функция T , представляет собой прямоугольник $(0, L) \times (0, t^k)$ в системе координат $0xt$. Ее граница Γ состоит из отрезков прямых $x = 0$, $x = L$, $t = 0$. Поскольку используется МКР, то нам необходимо всю область покрыть сеткой: проводятся прямые $x = x_i$ и $t = t_j$ параллельно осям $0t$ и $0x$, при этом

$$x_i = i \cdot h, \quad h = \frac{L}{N}, \quad i = 0, \dots, N;$$

$$t_j = j \cdot \tau, \quad \tau = \frac{t^k}{M}, \quad j = 0, \dots, M.$$

Точки (x_i, t_j) , лежащие на пересечениях этих прямых, называются узлами; внутренними, если они лежат внутри области и граничными, если на границе области. Совокупность всех узлов называется сеткой. h и τ называются шагами сетки. Узлы, лежащие на одной прямой $t = t_j$ при фиксированном j , называют слоем. Далее на построенной сетке вводят сеточные функции – это функции определенные в узлах стеки

$$T(x_i, t_j) = T_i^j, \quad \alpha(t_j) = \alpha^j, \quad \beta(t_j) = \beta^j.$$

Мы рассматриваем равномерную сетку, что позволяет привлекать конечноразностную аппроксимацию. Необходимо спроектировать задачу (1) на сетку, заменяя входящие в нее функции сеточными, а частные производные – их простейшими разностными аппроксимациями.

Рассмотрим аппроксимацию частных производных $\frac{\partial T}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2} + O(h^2).$$

Для аппроксимации $\frac{\partial T}{\partial t}$ можно использовать следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} + O(\tau); \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{T_i^j - T_i^{j-1}}{\tau} + O(\tau); \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{T_i^{j+1} - T_i^{j-1}}{2\tau} + O(\tau^2). \end{aligned}$$

Подставив эти аппроксимации в соотношение (1) получим сеточные уравнения:

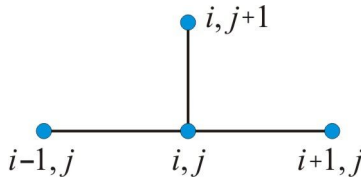
$$\begin{aligned} \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} &= a \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2}, & \begin{cases} i = \overline{1, N-1}, \\ j = \overline{0, M-1}; \end{cases} \\ \frac{T_i^j - T_i^{j-1}}{\tau} &= a \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2}, & \begin{cases} i = \overline{1, N-1}, \\ j = \overline{1, M}; \end{cases} \end{aligned}$$

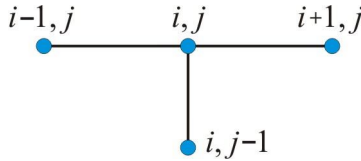
$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^{j-1}}{2\tau} = a \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2}, \quad \begin{cases} i = \overline{1, N-1}, \\ j = \overline{1, M-1}. \end{cases}$$

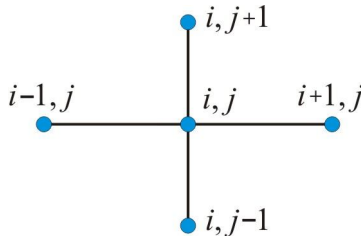
Эти уравнения дополняются аппроксимацией граничных условий:

$$\begin{aligned} T_i^0 &= \tilde{T}, \quad i = \overline{0, N}; \\ T_0^j &= \alpha^j, \quad T_N^j = \beta^j, \quad j = \overline{0, M}. \end{aligned}$$

Сеточные уравнения в совокупности с аппроксимациями начальных и граничных условий называются разностными схемами. Конфигурация узлов, которые участвуют в аппроксимации частных производных, называют шаблоном разностной схемы.

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = a \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2}, \quad \begin{cases} i = \overline{1, N-1}, \\ j = \overline{0, M-1}; \end{cases} \quad (a)$$


$$\frac{T_i^j - T_i^{j-1}}{\tau} = a \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2}, \quad \begin{cases} i = \overline{1, N-1}, \\ j = \overline{1, M}; \end{cases} \quad (б)$$


$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^{j-1}}{2\tau} = a \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2}, \quad \begin{cases} i = \overline{1, N-1}, \\ j = \overline{1, M-1}. \end{cases} \quad (в)$$


Определение. Если в разностной схеме присутствуют значения искомой функции на двух соседних слоях, то схема называется двухслойной (а) и (б). Соответственно, (в) – трехслойная схема.

Определение. Явная схема – это схема, представляющая собой формулу для непосредственного вычисления искомых значений очередного слоя (а) и (в). Неявная схема требует при переходе от слоя к слою решать СЛАУ (б).

Аппроксимация, устойчивость и сходимость разностных схем для уравнения теплопроводности

Под аппроксимацией подразумевается замена частных производных соответствующими конечными разностями. При этом появляется понятие невязки или погрешности аппроксимации, которая представляет собой разность между точным решением и приближенным, т.е.

$$\left| \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{i,j} - \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} \right| = \delta \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{i,j} = \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} + O(\tau)$$

δ и $O(\tau)$ – невязка (погрешность аппроксимации).

Определение. Разностная схема называется устойчивой, если малые изменения правой части дифференциального уравнения приводят к незначительным отклонениям решения.

$$L_h y^{(h)} = f^{(h)}$$

$$\exists h_0 > 0, \delta > 0 \quad \forall h < h_0 \quad \forall \varepsilon^{(h)} \in F_h \quad \|\varepsilon^{(h)}\| < \delta$$

$L_h z^{(h)} = f^{(h)} + \varepsilon^{(h)}$ имеет единственное решение такое, что $\|z^{(h)} - y^{(h)}\| \leq c \cdot h^k$.

Теорема Лакса (аппроксимация+устойчивость = сходимость).

Если разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу и устойчива. Тогда решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи.

Возвращаясь к краевой задаче теплопроводности, а именно, к разностным схемам можно сделать некоторые замечания относительно погрешностей аппроксимации для каждой из введенных схем:

- a) двухслойная явная схема – $O(\tau + h^2)$;
- b) двухслойная неявная схема – $O(\tau + h^2)$;
- c) трехслойная явная схема – $O(\tau^2 + h^2)$.

Анализ устойчивости.

Существует много методов, позволяющих проводить анализ устойчивости применяемых разностных схем. Например, решение

представляют в виде члена ряда Фурье $T_i^j = \lambda^j \exp(ki\varphi)$, $k^2 = -1$ и если $|\lambda| \leq 1$, то схема устойчива.

Разностная схема, устойчивость которой связана с некоторым ограничением на шаг, называется условно устойчивой. Например, явная двухслойная схема – условно устойчива $\tau \leq \frac{h^2}{2a}$. Неявная двухслойная схема – безусловно или абсолютно устойчива, т.е. позволяет проводить расчеты при любых τ и h .

Таким образом, явная и неявная двухслойные схемы имеют погрешность аппроксимации $O(\tau + h^2)$, обладают свойством устойчивости, соответственно, решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи.

Одномерное нестационарное уравнение теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, t^k] \\ T(x, 0) &= T^0 = \text{const} \quad \text{при } x \in [0, L]; \\ T(0, t) &= T_h, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad \text{при } t \in (0, t^k] \end{aligned}$$

Необходимо получить полк температуры в момент времени $t = t^k$.

Этапы решения задачи:

1) строим сетку

$$x_i = i \cdot h, \quad h = \frac{L}{N}, \quad i = 0, \dots, N; \quad N + 1 - \text{число узлов по оси } x;$$

$$t_j = j \cdot \tau, \quad \tau = \frac{t^k}{M}, \quad j = 0, \dots, M; \quad M + 1 - \text{число узлов по оси } t.$$

2) Аппроксимируем производные (воспользуемся двухслойной неявной схемой)

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = a \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2}, \quad \begin{cases} i = \overline{1, N-1}, \\ j = \overline{0, M-1}; \end{cases}$$

$$T_i^0 = T^0 = \text{const}, \quad i = \overline{0, N};$$

$$T_0^k = T_h = \text{const}, \quad k = \overline{1, M};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_N^k = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_N^k = \frac{T_N^k - T_{N-1}^k}{h} + O(h); \\ \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_N^k = \frac{T_N^k - T_{N-1}^k}{h} + \frac{h}{2a\tau} (T_N^k - T_N^{k-1}) + O(\tau + h^2); \end{cases}$$

На втором этапе совершен переход от дифференциальной задачи к разностной.

3) Решаем разностную задачу.

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = a \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{h^2}, \quad \begin{cases} i = \overline{1, N-1}, \\ j = \overline{0, M-1}. \end{cases}$$

Задача является нестационарной, значит на каждом шаге по времени необходимо решать систему для определения T_i . Самым эффективным методом решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей является метод прогонки.

$$A_i T_{i+1} - B_i T_i + C_i T_{i-1} = F_i, \quad i = \overline{1, N-1}$$

$$A_i = \frac{a}{h^2}; \quad B_i = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\tau}; \quad C_i = \frac{a}{h^2}; \quad F_i = -\frac{T_i^k}{\tau}.$$

$$T_i = \alpha_i T_{i+1} + \beta_i;$$

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}; \quad \beta_i = \frac{C_i \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}; \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Начальные прогоночные коэффициенты находим на основе левого

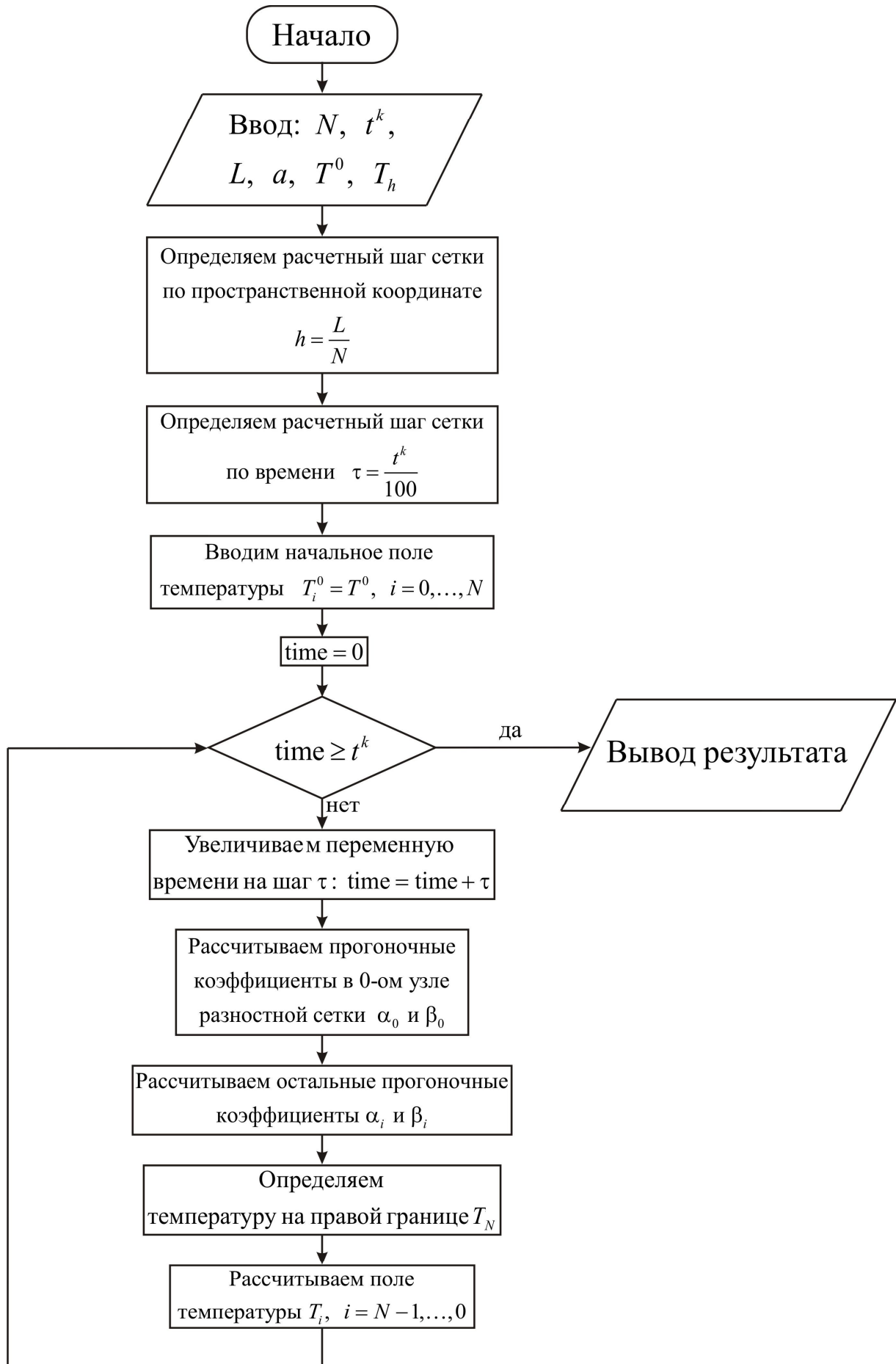
граничного условия: при $x = 0 \quad T_0 = T_h \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 0; \\ \beta_0 = T_h. \end{cases}$

После этого находим все прогоночные коэффициенты. Значение температуры на правой границе определяем, исходя из правого граничного

$$\text{условия } \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \text{ Получаем } T_N^k = \begin{cases} \frac{\beta_{N-1}}{1 - \alpha_{N-1}} + O(h); \\ \frac{2a\tau\beta_{N-1} + h^2 T_N^{k-1}}{2a\tau(1 - \alpha_{N-1}) + h^2} + O(h^2). \end{cases}$$

Зная T_N^k находим поле температуры на k -ом временном слое, после чего переходим на новый временной слой.

Блок-схема рассматриваемой задачи



Основная литература

1. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов: учебник для вузов / В.М. Вержбицкий. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
2. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 632 с.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
4. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 782 с.
5. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задачи теплопроводности. – Томск: Изд-во ТПУ. 2007. – 172 с.

Дополнительная литература

6. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.
7. Берковский Б.М., Ноготов Е.Ф. Разностные методы исследования задач теплообмена. – Минск: Наука и техника, 1976. – 141 с.
8. Петухов Б.С., Генин Л.Г., Ковалев С.А., Соловьев С.Л. Теплообмен в ядерных энергетических установках. – М.: Изд-во МЭИ, 2003. – 548 с.
9. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.