

Нелинейные цепи

Элементы, их

свойства и

характеристики.



**Методы расчета и
анализа**

Содержание

1. Нелинейные элементы. Их свойства и характеристики	<u>3</u>
2. Аппроксимация характеристик	<u>44</u>
3. Резистивные цепи и их расчет	<u>57</u>
4. Нелинейные индуктивные цепи	<u>202</u>
4.1. Магнитные цепи	<u>229</u>
5. Нелинейные динамические цепи	<u>281</u>
5.1. Приближенные методы расчета	<u>343</u>
5.2. Приближенный анализ цепей с нелинейными индуктивностями	<u>388</u>
6. Субгармонические колебания	<u>421</u>

Нелинейные элементы. Их свойства и характеристики

Нелинейной называют цепь, содержащую хотя бы один элемент, параметры которого являются **нелинейной функцией одной или нескольких переменных.**

Взаимосвязи (характеристики)
между током
(потокосцеплением, зарядом) и
напряжением (током) задаются
в широком диапазоне их
изменения. При этом важно
указать, при каких условиях
сняты характеристики.

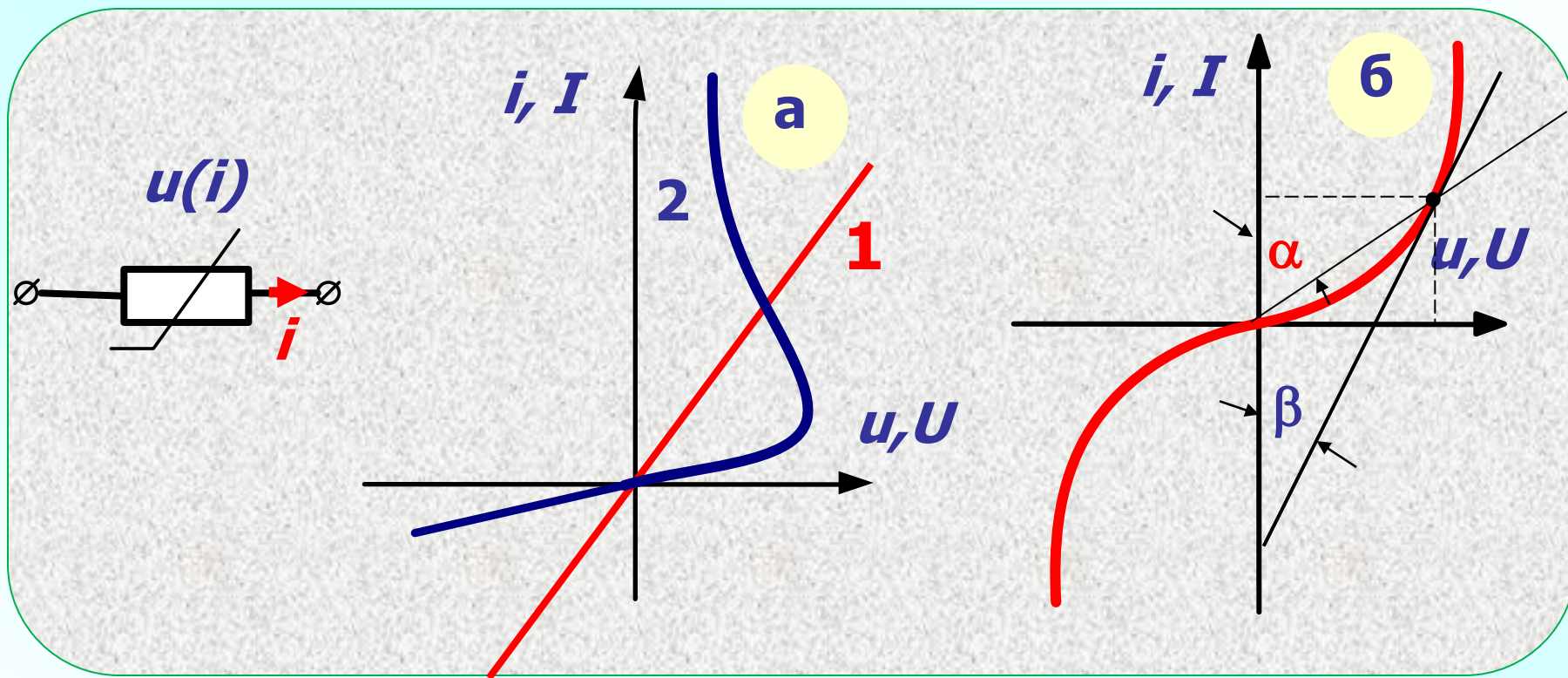
Зависимости, снятые при постоянном или медленно изменяющемся токе (их называют **статическими), отличаются от зависимостей, снятых при его быстром изменении (**динамические**).**

Элементы нелинейной цепи делят на резистивные, индуктивные и емкостные.

1. Резистивный элемент – идеализированный резистор, свойства которого определяются зависимостью между током и напряжением – вольтамперной характеристикой (ВАХ):

$$i = i(u); \quad u = u(i).$$

Условное обозначение и примеры ВАХ нелинейных резистивных элементов



а) 1- динамическая, 2- статическая ВАХ термистора; б) – ВАХ варистора.

Каждая **точка** статической **ВАХ** может быть определена двумя параметрами: **статическим сопротивлением**

$$R_{\text{СТ}} = \frac{u}{i} = \frac{U}{I};$$

и **дифференциальным**

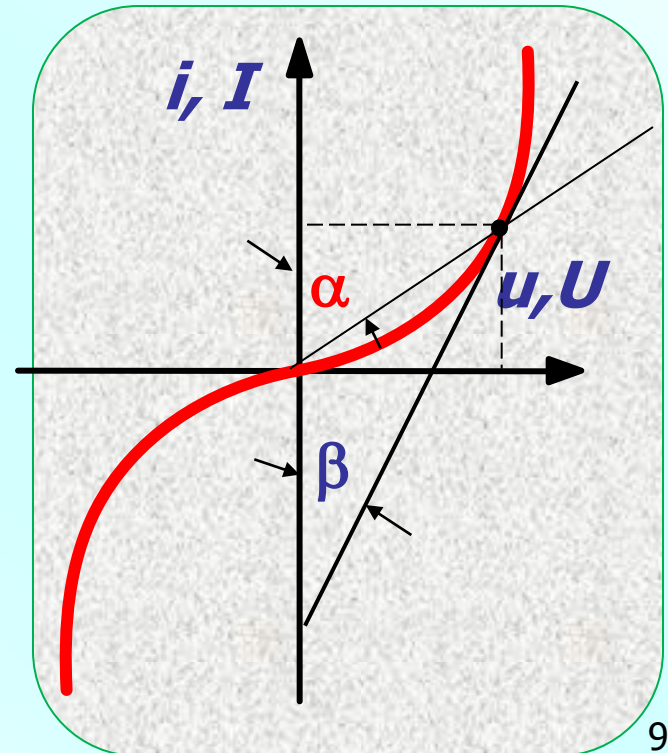
$$R_{\text{Д}} = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{du}{di}.$$

Графически статическое сопротивление определяется тангенсом угла α , а дифференциальное - тангенсом угла β :

$$R_{\text{ст}} = m_R \operatorname{tg} \alpha;$$

$$R_{\text{д}} = m_R \operatorname{tg} \beta;$$

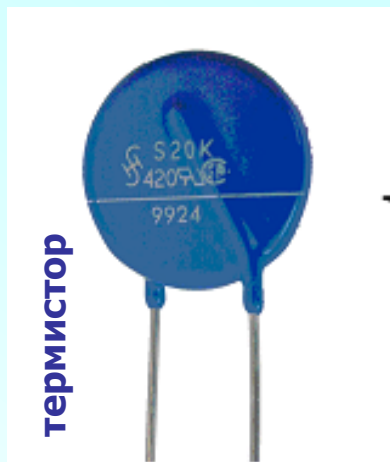
$$m_R = m_U / m_i.$$



**Резистивный элемент
необратимо преобразует
электрическую **энергию** в
тепло.**

**Практически все **электронные
приборы** – **резистивные
элементы.****

Нелинейные резистивные приборы



2. Нелинейный индуктивный элемент (НИЭ)

– идеализированный элемент, запасаящий энергию в магнитном поле. Свойства **НИЭ** определяются зависимостью потокосцепления ψ от тока i - веберамперной характеристикой (ВБАХ):

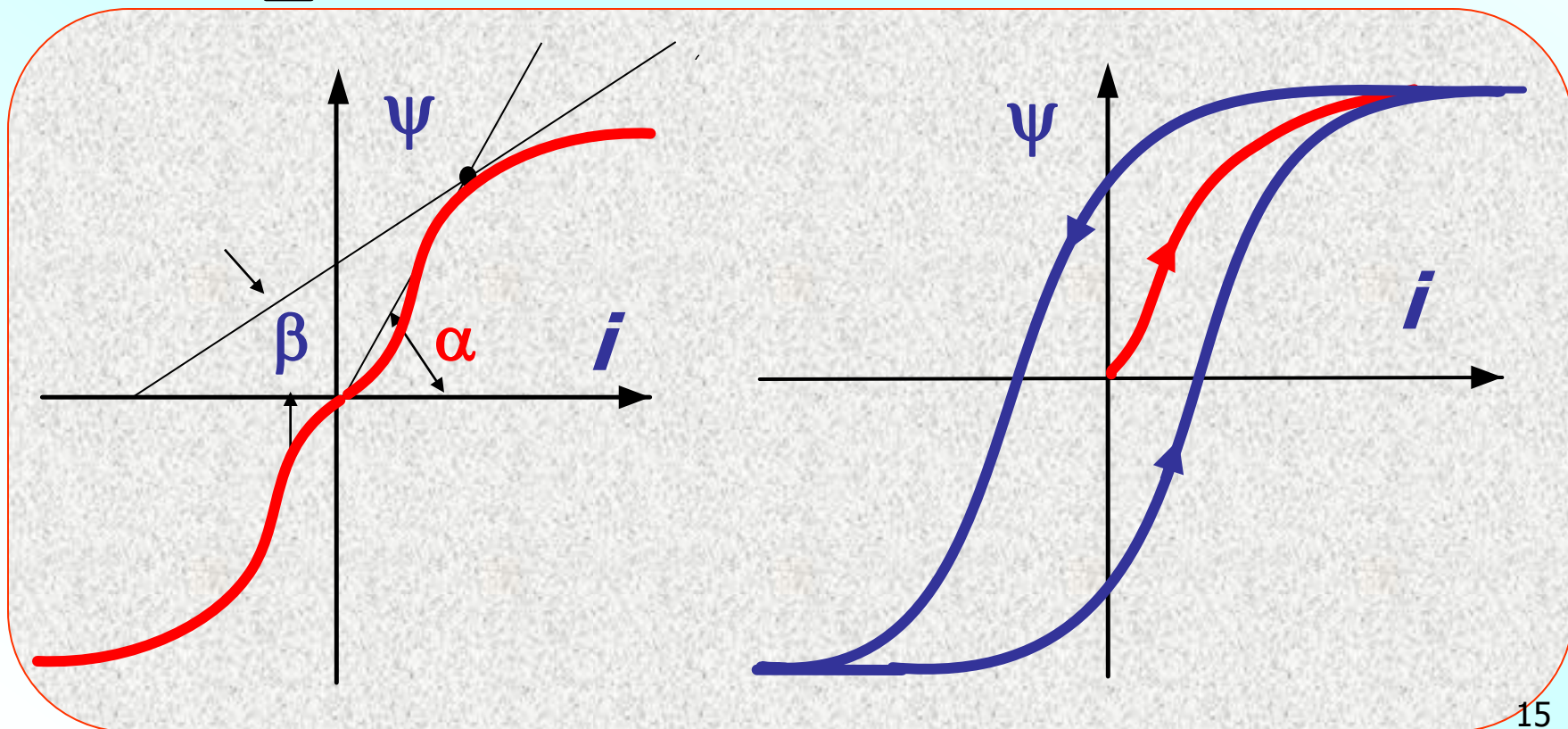
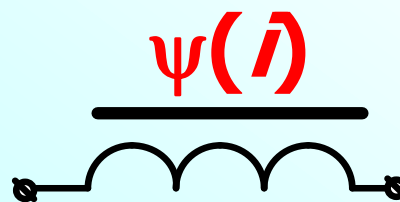
$$\psi = \psi(i); \quad i = i(\psi),$$

где $\psi = \int_{-\infty}^t u dt; \quad u = d\psi / dt.$

Типичный нелинейный индуктивный элемент (**нелинейная индуктивность**) – катушка с ферромагнитным сердечником, потерями в которой можно пренебречь. Ее нелинейность обусловлена нелинейной характеристикой намагничивания материала **$B(H)$** .

**Особенность ферромагнитных
материалов сердечника –
образовывать при
перемагничивании переменным
током петли гистерезиса**

Условные обозначения и веберамперные характеристики НИЭ



Каждая точка **ВБАХ** может быть определена двумя параметрами: **статической** индуктивностью

$$L_{\text{ст}} = \frac{\psi}{i}$$

и дифференциальной

$$L_{\text{д}} = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi}{\Delta i} = \frac{d\psi}{di}$$

Графически статическая индуктивность определяется тангенсом угла α

$$L_{\text{ст}} = m_L \operatorname{tg} \alpha;$$

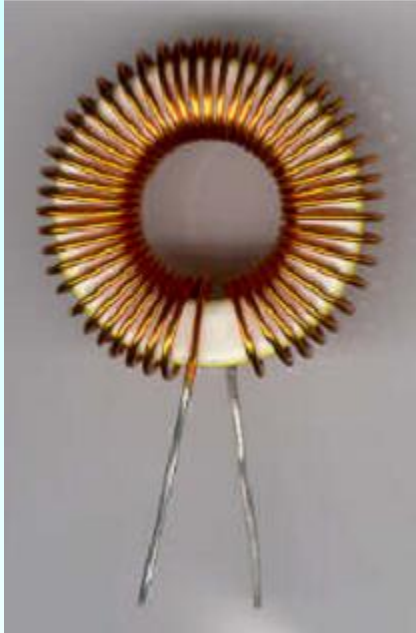
дифференциальное - тангенсом угла β

$$L_{\text{д}} = m_L \operatorname{tg} \beta,$$

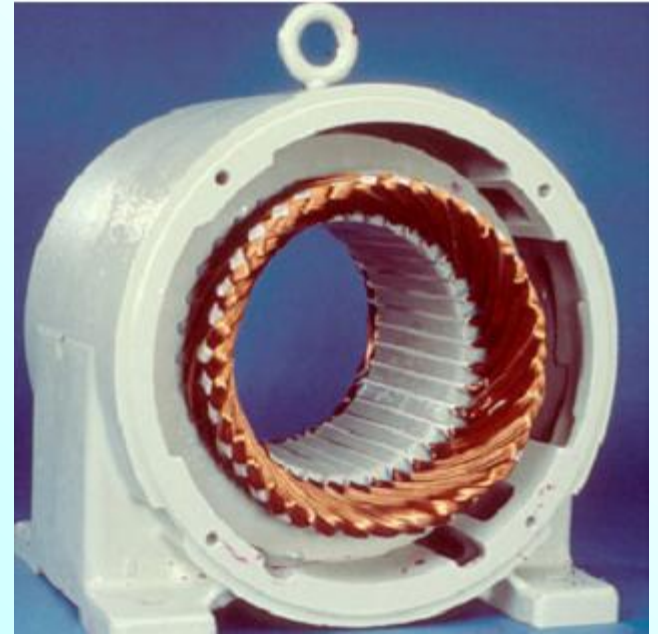
где $m_L = m_{\psi} / m_i$.

Очевидно, что $u_L = \frac{d\psi}{dt} = L_{\text{д}} \frac{di_L}{dt}$.

Нелинейные индуктивные устройства



трансформатор



дроссели



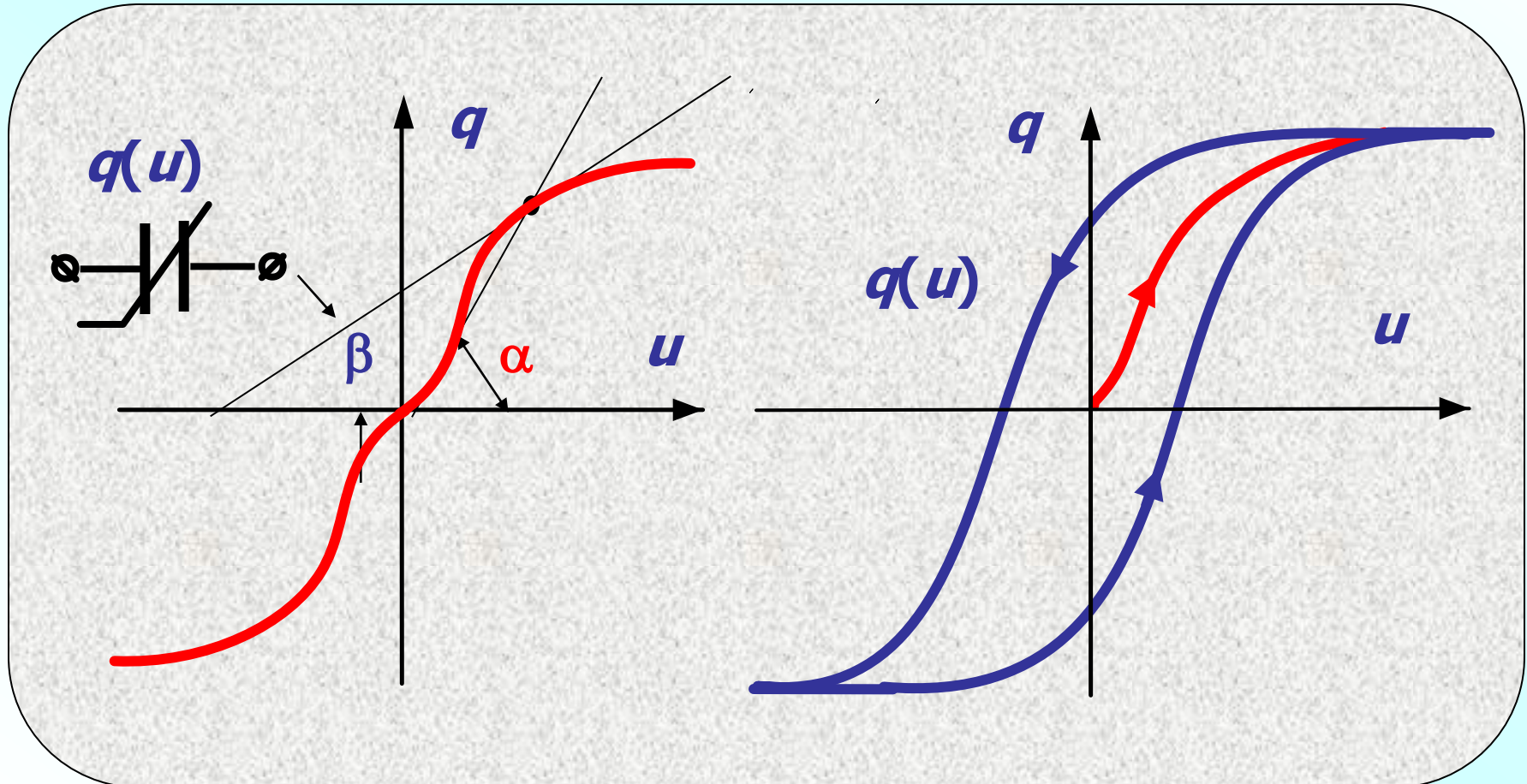
В.ч катушки

3. Нелинейный емкостный элемент (НЕЭ) – идеализированный элемент, свойства которого определяются зависимостью между зарядом q и напряжением u – кулонвольтной характеристикой (КВХ)

$$q = q(u); \quad u = u(q),$$

где $q = \int_{-\infty}^t i dt; \quad i = dq / dt.$

Условное обозначение и кулонвольтовые характеристики НЕЭ



Каждая **точка** статической **КВХ** может быть определена **статической емкостью**

$$C_{\text{ст}} = \frac{q}{u} = m_c \operatorname{tg} \alpha;$$

и дифференциальной

$$C_{\text{д}} = \frac{dq}{du} = m_c \operatorname{tg} \beta,$$

$$m_c = m_q / m_u. \quad \dot{i}_c = \frac{dq}{dt} = C_{\text{д}} \frac{du_c}{dt}.$$

Типичный нелинейный конденсатор – **вариконд**, изоляция которого выполнена из сегнетовой соли, обладающей гистерезисом.

Нелинейной емкостью обладают специальные диоды – **варикапы**, а также емкостные датчики

Нелинейные конденсаторы



Характеристики нелинейных элементов могут располагаться полностью или частично **во втором** или в **четвертом** квадрантах. В этом случае элементы - **активные**, т.к. в этих квадрантах

$$ui = p < 0;$$

$$\psi i = W_m < 0;$$

$$qu = W_\varepsilon < 0.$$

Для каждого нелинейного элемента **существует частота**, при превышении которой статическими характеристиками пользоваться **нельзя**.

У некоторых элементов статическая и динамическая характеристики совпадают в широком диапазоне частот – это **безынерционные НЭ**.
Например, полупроводниковый диод.

Элементы, характеристики которых существенно зависят от частоты (их режим определяется тепловыми или механическими процессами), называют **инерционными.
Например, ВАХ лампы накаливания при постоянном токе – **нелинейная**, а для частоты в 50 Гц – **линейная**.**

НЭ может быть представлен характеристиками **различных типов**:

1. Для **мгновенных значений**;
2. Для **первых гармоник**;
3. Для **действующих значений**.

Основные характеристики- **1**.

Учет динамических свойств - сложная задача, поэтому будем рассматривать процессы, определяющиеся **статическими** характеристиками.

При расчете цепей с переменными входными сигналами важное значение имеет **симметрия** характеристик **НЭ**. Для **НЭ** с симметричными характеристиками выполняются равенства

$$\begin{aligned}u(i) &= -u(-i); \\ \psi(i) &= -\psi(-i); \\ q(u) &= -q(-u).\end{aligned}$$

Симметричные характеристики имеют терморезисторы, лампы накаливания, катушки с сердечником без подмагничивания, вариконды и некоторые типы газоразрядных приборов.

НЭ могут быть двухполюсными и многополюсными, управляемыми и неуправляемыми.

Итак, НЭ бывают:

- **двухполюсные и многополюсные;**
- **инерционные и безынерционные;**
- **управляемые и неуправляемые.**

Характеристики НЭ могут быть:

- **статическими и динамическими;**
- **симметричными и несимметричными;**
- **для первых гармоник; мгновенных и действующих значений.**

Задачи исследования Н. цепей

Задачи исследования: анализ, диагностика и синтез.

Задача анализа – определение токов (потоков, зарядов) и напряжений ветвей и элементов цепи по заданной схеме, характеристикам элементов и входным воздействиям (источникам ЭДС и тока).

Для цепей с электронными приборами важная задача - **определение рабочих точек** на характеристиках и определение их дифференциальных параметров.

Задача синтеза – построение цепи, удовлетворяющей заданной входной или передаточной характеристике.

Решение задач анализа и синтеза сводится к составлению и решению **уравнений состояния** цепи. **Общих методов** решения нелинейных уравнений нет. К ним **неприменим** принцип **наложения** и методы, основанные на этом принципе: интеграл Дюамеля, Фурье, классический и операторный методы.

Нельзя применять принципы взаимности и линейности.

Это первая проблема.

Вторая проблема - отсутствие простого и точного математического описания характеристик **НЭ, которые в большинстве случаев задаются графически или таблично.**

Общие принципы формирования уравнений нелинейной цепи.

Однородные Н. цепи, содержащие элементы одного вида (только R , L или C), описываются нелинейными функциональными уравнениями (не дифференциальными), поэтому их рассматривают отдельно от смешанных, которые описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

Однородные цепи называют функциональными,
а смешанные, процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями, называют динамическими.

**Общие положения при анализе
нелинейных цепей:**

НЭ в схемах замещения представляются **двухполюсниками**;
каждый из которых принимается
за **отдельную ветвь**;
соединение **двух элементов**
рассматривается как **узел**.

**Однородные элементы,
соединенные последовательно и
параллельно, преобразуются в
эквивалентный.**

**Линейная часть схемы
замещения представляется
эквивалентным источником
согласно теореме об активном
двухполюснике.**

Для упрощенной схемы записываются **структурные** и **компонентные** уравнения. Структурные уравнения – это уравнения, записанные **по законам Кирхгофа**, не зависящие от вида характеристик элементов. В матричной форме они записываются:

$$A \cdot i = 0; \quad B \cdot u = 0; \quad Q \cdot i = 0,$$

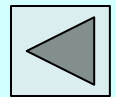
где **A** – узловая матрица;
B – контурная;
Q – матрица главных сечений;
u, i - векторы напряжений и токов ветвей.

Компонентные уравнения связывают переменные для каждого из нелинейных элементов. В общем виде они записываются:

$$\begin{aligned}u_i &= u_i(i_j); \\ \psi_j &= \psi_j(i_j); \\ q_k &= q_k(u_k)\end{aligned}$$

Общее число структурных уравнений, составленных по законам Кирхгофа, равняется числу ветвей, причем число неизвестных – токов и напряжений – составляет удвоенную величину.

**Половина из неизвестных
исключается с помощью
компонентных уравнений -
характеристик элементов
или закона Ома для
линейных элементов.**



Аппроксимация характеристик нелинейных элементов

При расчете нелинейной цепи, как правило, требуется аналитическое представление **характеристик** ее **НЭ**. Аналитические зависимости получают **путем аппроксимации** – приближенного описания экспериментальных данных.

Аппроксимацию **выполняют с помощью степенных или экспоненциальных полиномов, кусочно-линейных или трансцендентных функций,** а также с помощью **сплайнов.**

1. Степенное приближение

Характеристика записывается в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

где **n** – степень полинома;

a_k – его коэффициенты.

В Mathcad для степенной аппроксимации предусмотрены функции **regress** и **interp**.

Функция **regress** служит для записи данных и степени полинома. Она готовит данные для функции **interp** и вычисляет коэффициенты ряда.

2. Экспоненциальное приближение.

Характеристика записывается в виде суммы экспонент

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k e^{b_k x},$$

где a_k, b_k – постоянные коэффициенты, которые определяются, как правило, методом наименьших квадратов

3. Кусочно-линейное приближение

Характеристика заменяется суммой линейных участков. При этом она принимает вид ломаной линии:

$$f(x) = f_k + \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k),$$

где x_{k+1} , x_k – границы участков аппроксимации; f_{k+1} , f_k – значения функции на границах интервала.

В Mathcad для линейной аппроксимации используется функция **linterp**, позволяющая вычислять значения функции в промежутках между узлами.

4. Параболическое приближение

Характеристика представляется в виде квадратичных или кубических парабол - **сплайнов**.

Для квадратичного сплайна функция на участке от $(x_{k-1} + x_k)/2$ до $(x_k + x_{k+1})/2$

записывается в виде

$$f_k(x) = f_k + a_k(x - x_k) + b_k(x - x_k)^2,$$

где коэффициенты a_k и b_k определяются из условия непрерывности функции и ее производной в точках сопряжения парабол.

Mathcad располагает тремя функциями: **cspline(vx,vy)**, **pspline(vx,vy)**,
lspline(vx,vy),
обеспечивающими сплайн-аппроксимацию. Функция **lspline(vx,vy)**
генерирует кривую сплайна, которая
приближается к прямой линии в
граничных точках;
pspline(vx,vy) генерирует кривую,
которая в граничных точках
приближается к параболе.

Из перечисленных функций наибольшую точность аппроксимации обеспечивает функция с кубическими парабололами **`cspline(vx,vy)`**.

Пример 1. Аппроксимировать степенным полиномом характеристику варистора, заданную таблично:

$$u \text{ (В)} = (0 \ 10 \ 20 \ 30 \ 40)$$

$$i \text{ (А)} = (0 \ 0,5 \ 1,5 \ 4 \ 9).$$

Ограничимся полиномом третьей степени и обратимся к MathCAD:

$$u := (0 \quad 10 \quad 20 \quad 30 \quad 40)^T \quad i := (0 \quad 0.5 \quad 1.5 \quad 4 \quad 9)^T$$

$$n := 4 \quad k := 0..n \quad u1_k := -u_{n-k} \quad i1_k := -i_{n-k}$$

$$u := \text{stack}(u1, u) \quad i := \text{stack}(i1, i) \quad v1 := \text{regress}(u, i, 3)$$

$$v1^T = \left(3 \quad 3 \quad 3 \quad 1.568 \times 10^{-15} \quad 0.025 \quad 0 \quad 1.246 \times 10^{-4} \right)$$

$$f(x) := \text{interp}(v1, u, i, x)$$

$$f(30) = 4.104 \quad f(40) = 8.96$$

Таким образом,

$$f(u) = 0,025u + 1,246 \cdot 10^{-4} u^3$$

Графики исходной и аппроксимированной характеристик



Пример 2. Аппроксимировать ВАХ туннельного диода (задана таблично)

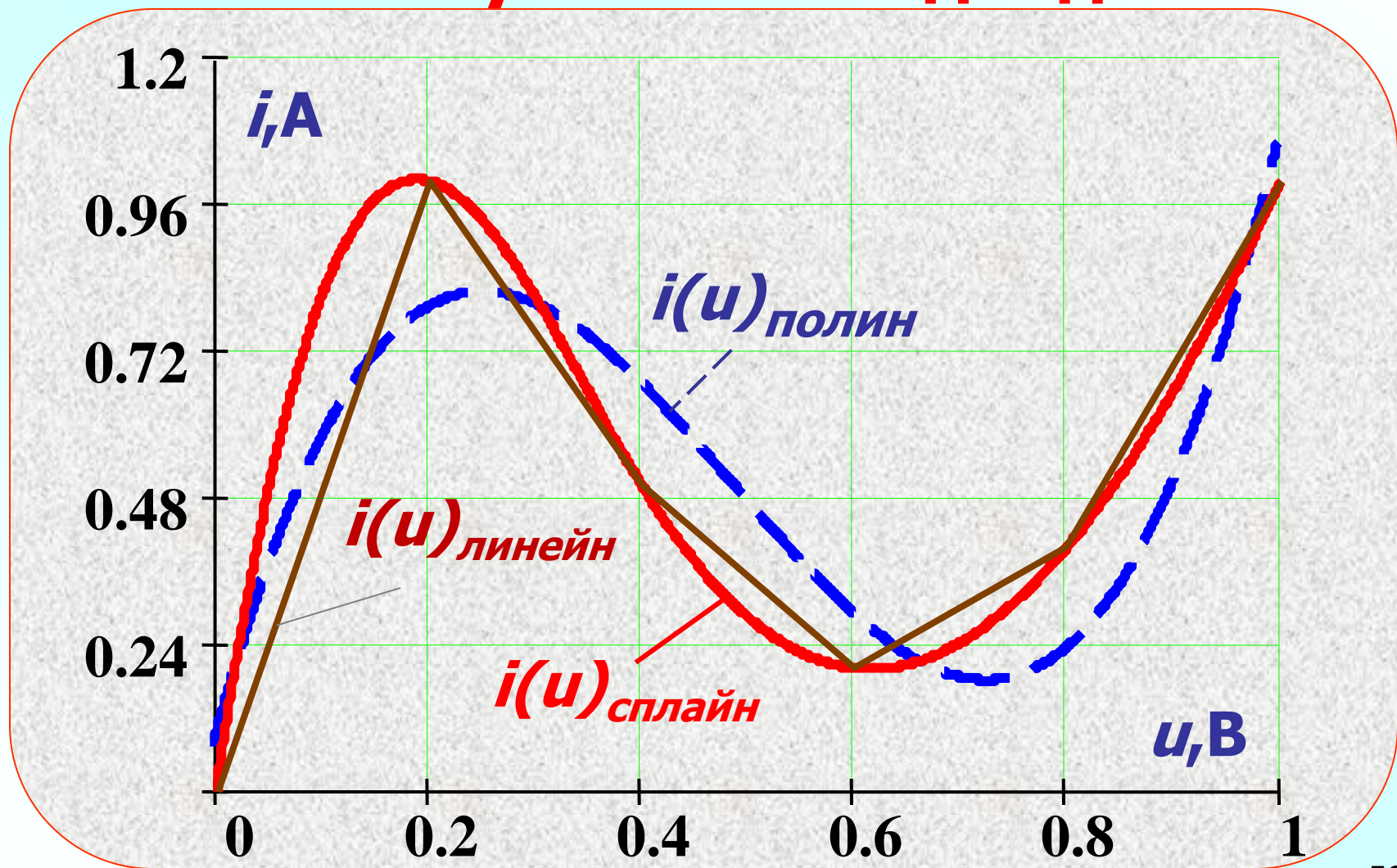
$$\mathbf{u} := (0 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0.6 \quad 0.8 \quad 1)^T$$

$$\mathbf{i} := (0 \quad 1 \quad 0.5 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 1)^T$$

$$\mathbf{v} := \text{regress}(\mathbf{u}, \mathbf{i}, 3) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \text{interp}(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{i}, \mathbf{x})$$

$$\mathbf{s} := \text{cspline}(\mathbf{u}, \mathbf{i}) \quad \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) := \text{interp}(\mathbf{s}, \mathbf{u}, \mathbf{i}, \mathbf{x})$$

Графики исходной и аппроксимированной ВАХ туннельного диода



Резистивные цепи и методы их расчета

1. Общие сведения	<u>58</u>
2. Аналитический расчет	<u>77</u>
3. Графическое преобразование нелинейных резистивных цепей	<u>86</u>
4. Метод кусочно-линейной аппроксимации	<u>126</u>
5. Численный метод расчета	<u>152</u>

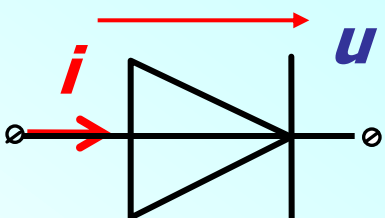
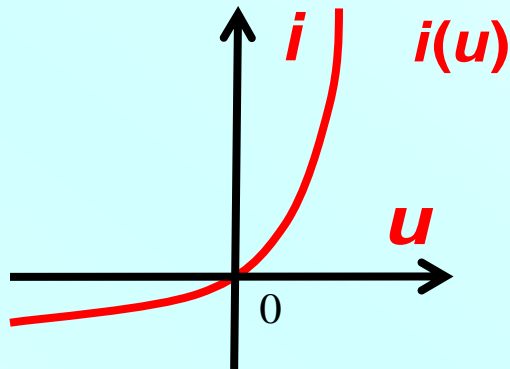

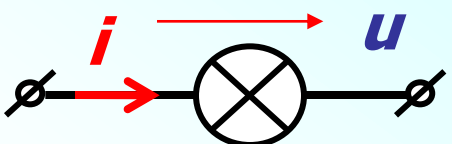
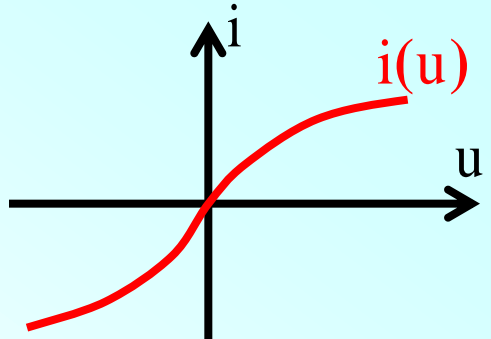


Общие замечания.

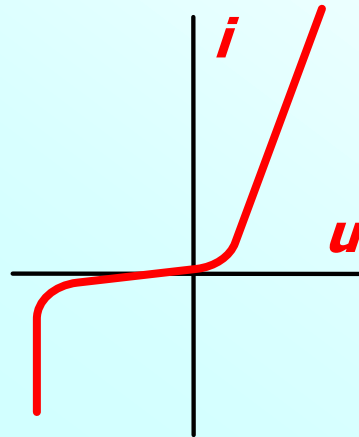
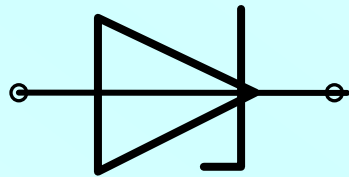
Нелинейные резистивные элементы (НРЭ), включая электронные и полупроводниковые приборы, - самый большой класс нелинейных элементов. НРЭ используются в электротехнике, радиоэлектронике, технике связи – практически везде.

Они могут быть **двухполюсными** и **многополюсными**;
управляемыми и **неуправляемыми**.
Их ВАХ бывают **однозначными** и **неоднозначными**;
симметричными и **несимметричными**;
монотонными и **немонотонными**.
Условные обозначения и ВАХ
некоторых из них приведены ниже.

Двухполюсные неуправляемые НРЭ

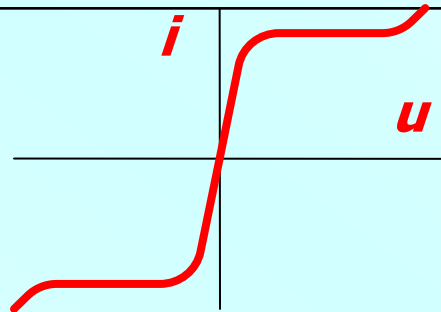
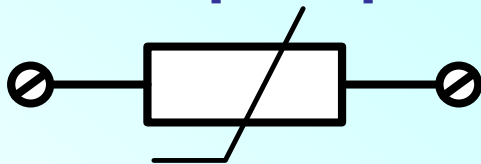
Наименование и условное обозначение	Вольтамперная характеристика	Причина нелинейности общий вид
<p>Выпрямительный диод</p> 		<p>n-p переход</p> 
<p>Лампа накаливания</p> 		<p>Зависимость сопротивления спирали от температуры</p>

П/п стабилитрон



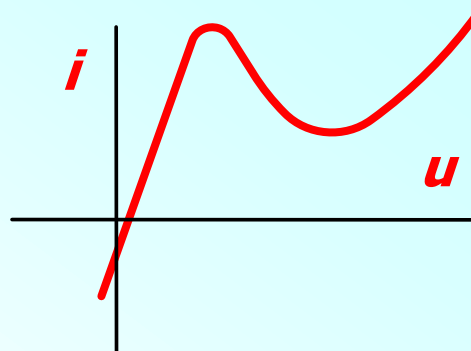
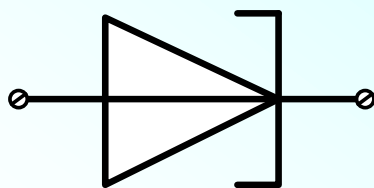
Свойства п-р
перехода

Бареттер



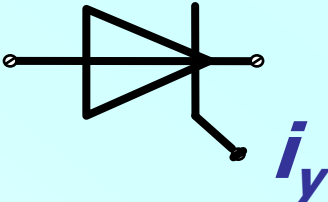
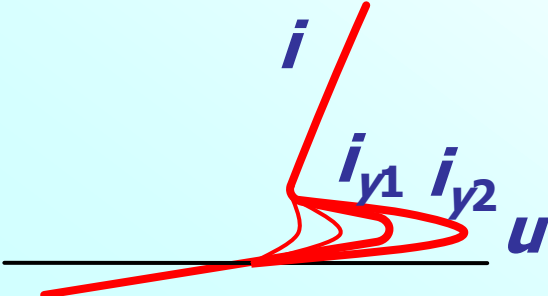
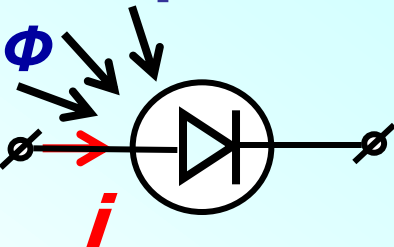
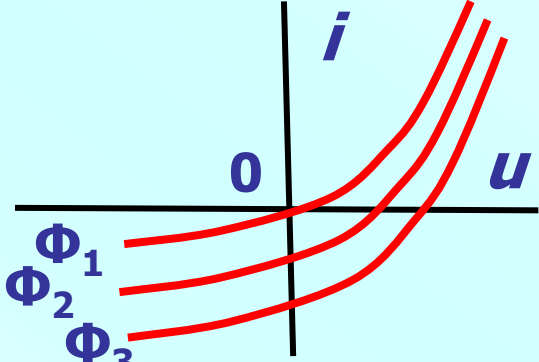
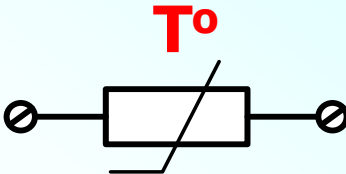
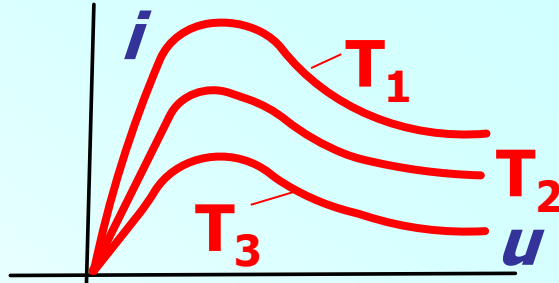
Зависимость
сопротивления
спирали от
температуры

Туннельн. диод



Туннельный
эффект

Управляемые двухполюсные НРЭ

<p>Тиристор</p> 		<p>Импульс тока</p>
<p>П.п. фотодиод</p> 		<p>Световой поток Φ</p>
<p>Позистор</p> 		<p>Температура внешней среды</p>

Формирование уравнений нелинейных резистивных цепей

Порядок формирования:

1) выбирается дерево графа. В него включают элементы, допускающие обращение характеристик или их запись в форме $i = f(u)$, а также все источники ЭДС;

2) дополняют дерево графа хордами - ветвями источников тока и элементов с характеристиками в виде функций тока $u = f(i)$.

3) для каждого главного сечения, определяемого ветвями дерева, записывают уравнения по первому закону Кирхгофа;

4) для каждого главного контура, определяемого хордами, записывают уравнения по второму закону Кирхгофа.

Из уравнений **п.3** исключают **токи** ветвей **дерева**, а из уравнений **п.4** – **напряжения** ветвей **связи**.

Полученная система уравнений будет иметь число неизвестных, равное числу ветвей.

Чтобы **уменьшить** погрешность решения, число переменных сводится к минимуму. Это достигается **исключением** из уравнений токов и напряжений, **связанных** между собой **линейными соотношениями**.

На этапе записи уравнений сокращение числа переменных достигается **выбором** в качестве переменных **контурных токов** или **узловых потенциалов**, через которые определяются искомые неизвестные.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. В резистивных цепях отсутствуют переходные процессы и при питании цепи от источника периодических сигналов (тока, напряжения) во всех ветвях цепи одновременно устанавливаются периодические токи и напряжения, но другой амплитуды и формы.

Наличие источников периодических сигналов существенно усложняет аналитическое решение уравнений цепи.

Однако можно исключить время, записывая решения для фиксированных моментов времени, полагая

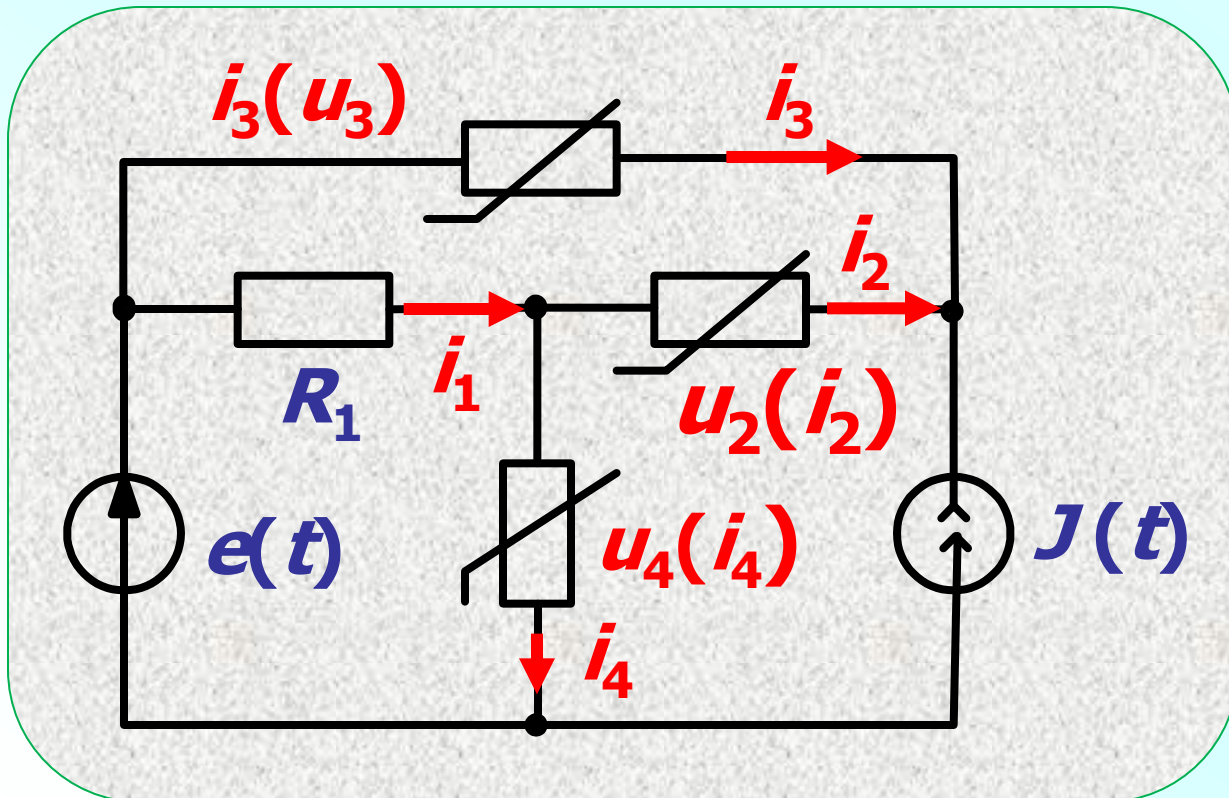
$$**t = t_j; \quad e(t_j) = E_j; \quad J(t_j) = J_j, \text{ т.е.}**$$

заменяя источники постоянными

2. Если невозможно выбрать главные контуры, содержащие по одному нелинейному элементу, то метод контурных токов не применяется.

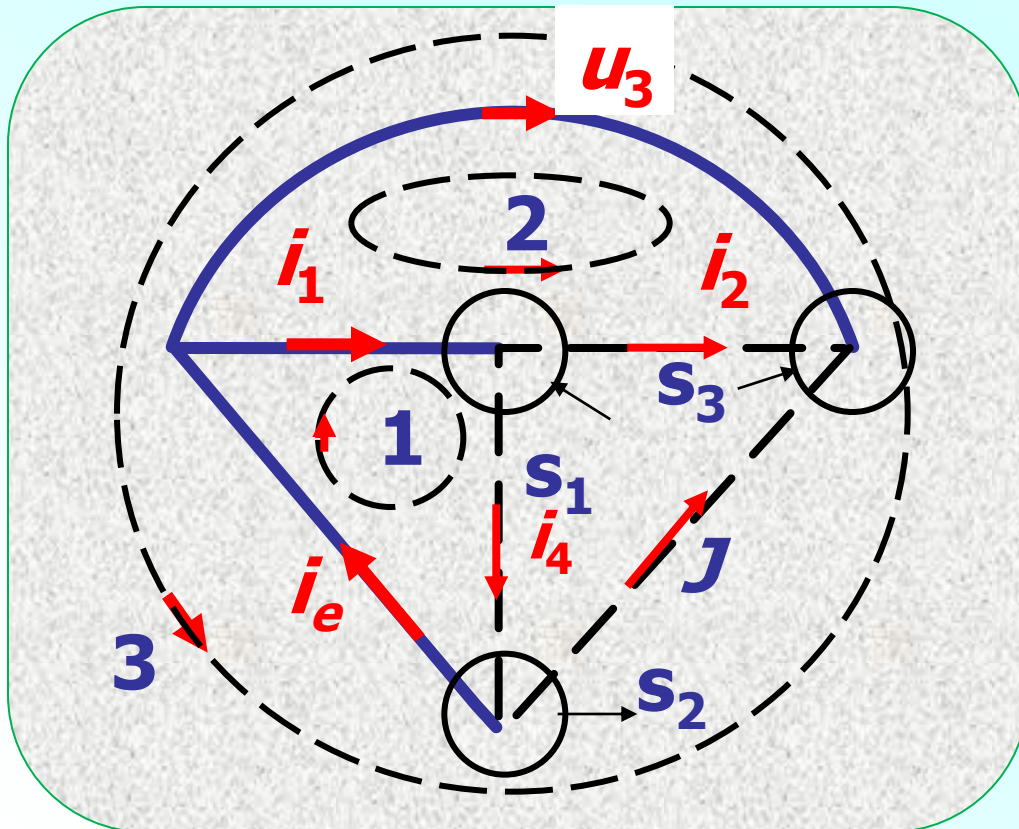
Метод узловых потенциалов неприменим к цепям с элементами, управляемыми током.

Пример 1. Составить уравнения НЦ, содержащей НРЭ: $u_2 = i_2^2$; $i_3(u_3)$; $u_4(i_4)$, а также линейный резистор R_1 и источники: ЭДС $e(t)$; тока $J(t)$.



Решение.
Выбираем
дерево
графа

Оно должно включать ветви с ЭДС; элементами, управляемыми напряжением (u_3) или допускающими обращение ВАХ; линейные R (i_1).



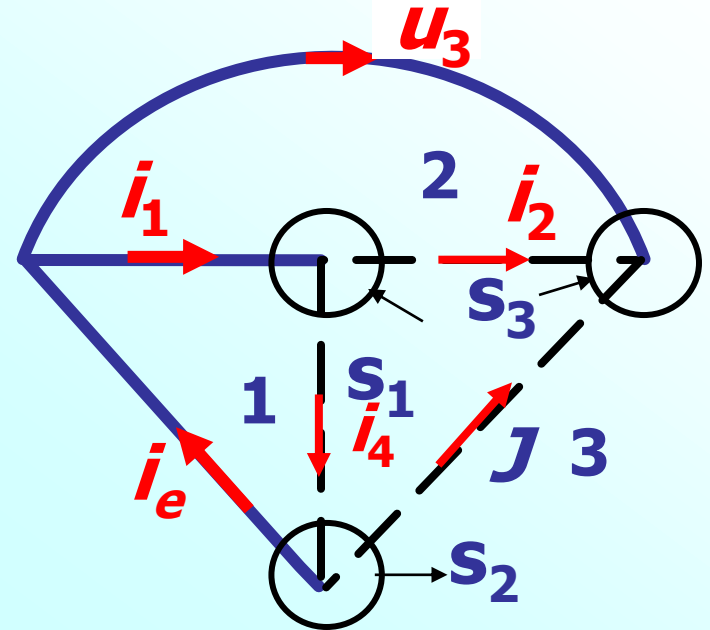
Оставшиеся ветви – хорды.
Производим разметку графа

Уравнения для главных сечений

$$i_1 - i_2 - i_4 = 0;$$

$$i_e - i_4 + J = 0;$$

$$i_2 + i_3(u_3) - J = 0.$$



Уравнения
для главных
контуров

$$i_1 R_1 + u_4(i_4) - e = 0;$$

$$i_1 R_1 + i_2^2 - u_3 = 0;$$

$$-u_3 - u_J + e = 0.$$

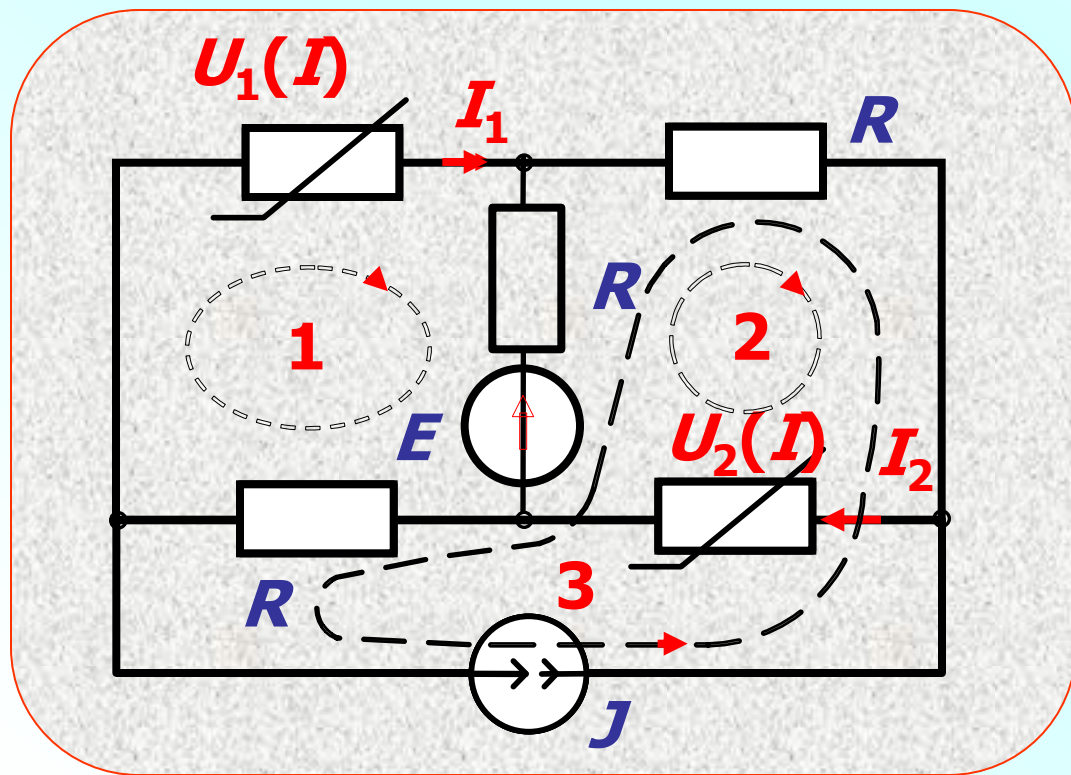
Число уравнений – шесть (число переменных). Можно исключить:

$$i_e = i_4 - J; \quad i_1 = i_2 + i_4; \quad u_J = e - u_3.$$

Тогда система уравнений будет:

$$\begin{aligned} i_2 + i_3(u_3) - J &= 0; \\ (i_2 + i_4)R_1 + u_4(i_4) &= e; \\ (i_2 + i_4)R_1 + i_2^2 - u_3 &= 0. \end{aligned}$$

Пример 2. Составить уравнения для расчета токов в НЦ с источниками $E=4$ В и $J=1$ А, линейными резисторами $R=2$ Ом и НЭ с заданными ВАХ



$$U_1(I_1) = 5I_1 + I_1^2 \text{ В};$$

$$I_2(U_2) = 0,5U_2^{0,5} \text{ А.}$$

Решение. 1.
Разметим цепь

Записываем уравнения по методу контурных токов, предварительно преобразовав функцию $I_2(U)$ в обратную $U_2(I) = 4I_2^2$:

$$2RI_1 + U_1(I_1) - RI_2 + 2RJ = -E;$$

$$-RI_1 + 2RI_2 + U_2(I_2) - 2RJ = E.$$

Численно:

$$9I_1 + I_1^2 - 2I_2 + 8 = 0;$$

$$-2I_1 + 4I_2 + 4I_2^2 - 8 = 0.$$

Методы расчета

1. Аналитический расчет.

Для аналитического расчета НЦ ВАХ НЭ должны задаваться
аналитически.

При этом удастся рассчитать цепи, уравнения которых сводятся к полиномам второй или третьей степени.

**Возможности метода
ограничены простейшими
схемами и схемами,
допускающими
предварительные
преобразования до
простейших.**

Пример 1. Передаточная ВАХ цепи аппроксимирована полиномом

$$i(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2,$$

где a_0 , a_1 и a_2 - коэффициенты.

Определить реакцию цепи на действие входного сигнала

$$u(t) = U_m \cos \omega t.$$

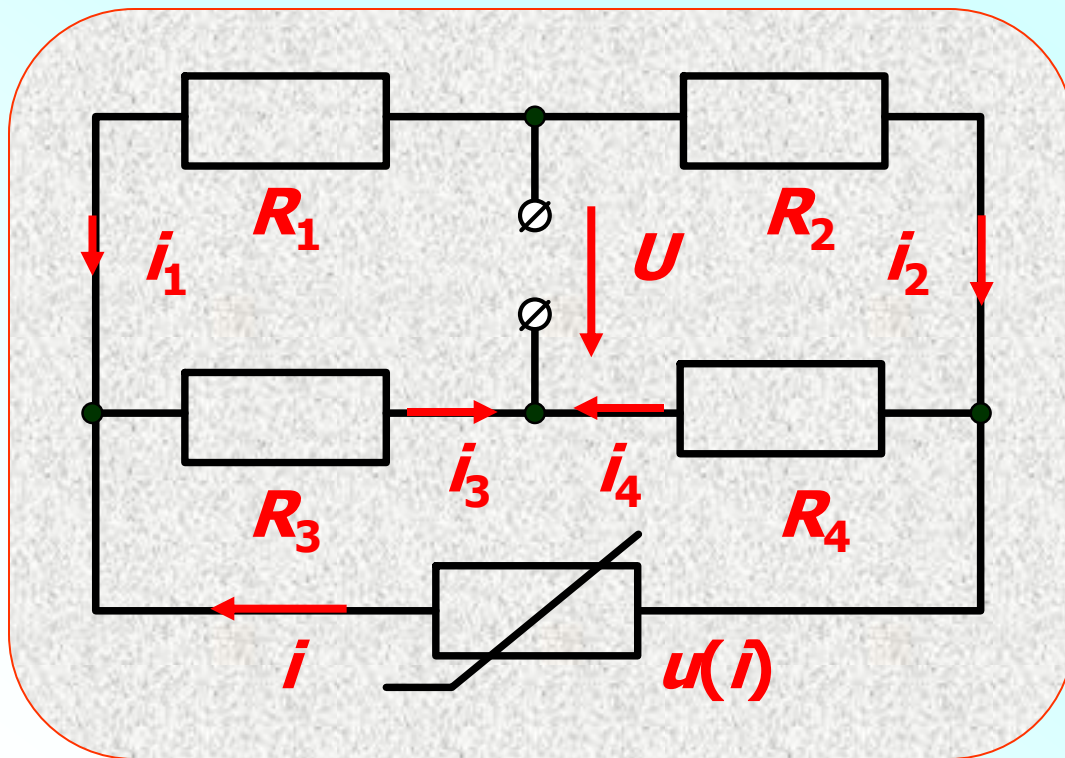
Решение. Подставляем функцию времени в выражение заданной характеристики:

$$\begin{aligned} i(u) &= a_0 + a_1 U_m \cos \omega t + a_2 U_m^2 \cos^2 \omega t = \\ &= a_0 + a_1 U_m \cos \omega t + a_2 \frac{U_m^2}{2} (1 + \cos 2\omega t) = \\ &= \left(a_0 + a_2 \frac{U_m^2}{2} \right) + a_1 U_m \cos \omega t + \\ &\quad + a_2 \frac{U_m^2}{2} \cos 2\omega t. \end{aligned}$$

Полученный результат характеризует важнейшее свойство НЦ – преобразовать спектральный состав входного сигнала.

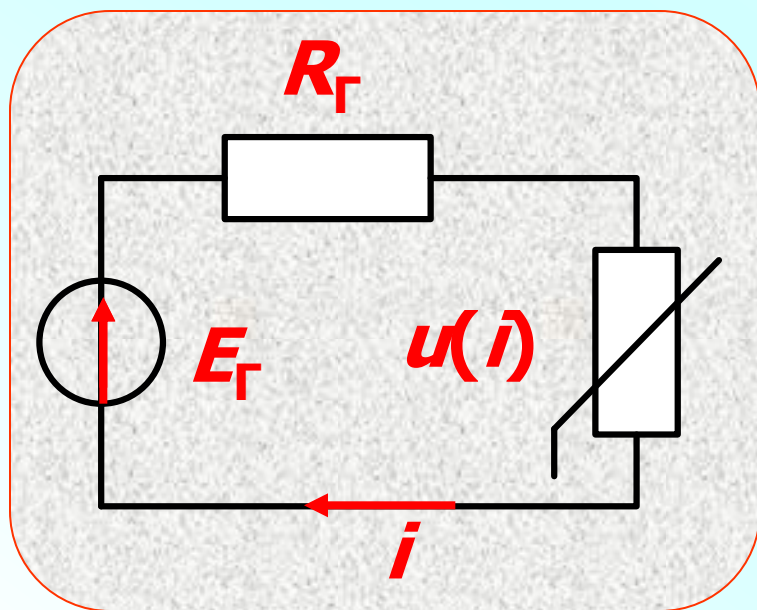
При входном синусоидальном сигнале – выходной сигнал несинусоидальный

Пример 2. Рассчитать токи ветвей, если: сопротивления резисторов $R_1 = R_4 = 6$ Ом; $R_2 = R_3 = 3$ Ом, напряжение $U = 18$ В; ВАХ НРЭ $u(i) = 2i^2$.



Решение.
Заменяем линейную часть эквивалентным источником

ЭДС источника E_{Γ} определяется напряжением ХХ на зажимах разомкнутой ветви с НРЭ по второму закону Кирхгофа:



$$\begin{aligned} E_{\Gamma} &= R_4 i_4 - R_3 i_3 = \\ &= \frac{R_4 U}{R_2 + R_4} - \frac{R_3 U}{R_1 + R_3} = \\ &= 2 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 6 \text{ В.} \end{aligned}$$

Внутреннее сопротивление источника R_{Γ} находим относительно зажимов нелинейного резистора (зажимы источника замкнуты)

$$\begin{aligned} R_{\Gamma} &= \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \\ &= \frac{6 \cdot 3}{6 + 3} + \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 4 \text{ Ом} \end{aligned}$$

Уравнение эквивалентной схемы

$$R_{\Gamma} i + u(i) = E_{\Gamma}.$$

Подставляем заданную функцию

$$R_{\Gamma} i + 2i^2 = E_{\Gamma}; \quad i^2 + 2i - 3 = 0.$$

Решение уравнения $i = 1$ А. Второе значение $i = -3$ А отбрасывается по условию задачи. Остальные токи легко найти по законам Кирхгофа.

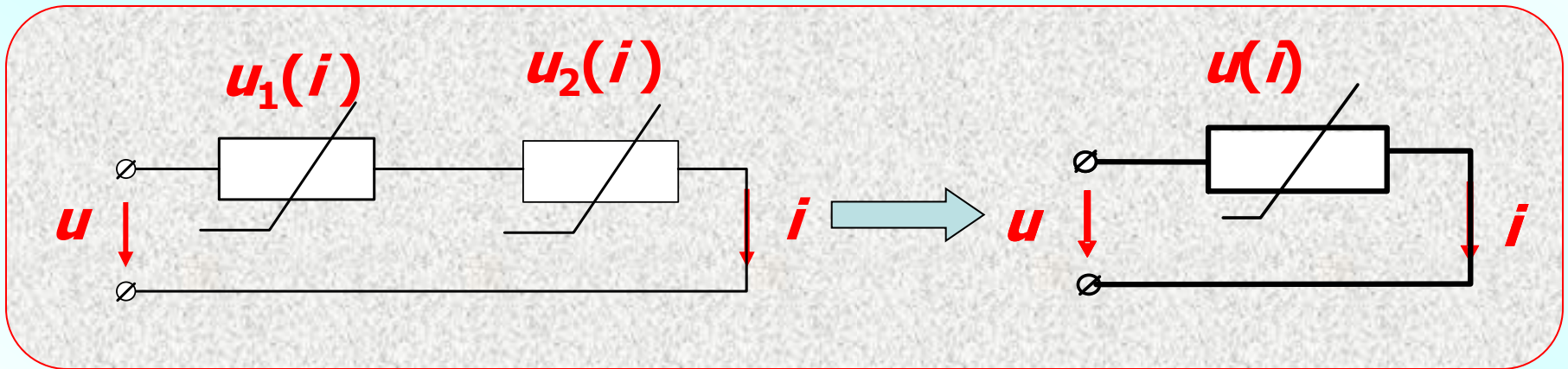
2. Графическое преобразование нелинейных резистивных цепей

Преобразования используются для упрощения схем.

Преобразуются цепи, состоящие из последовательно и параллельно соединенных ветвей (лестничные цепи) путем графического сложения ВАХ.

Преобразования осуществляются на основании законов Кирхгофа.

а) последовательное соединение.

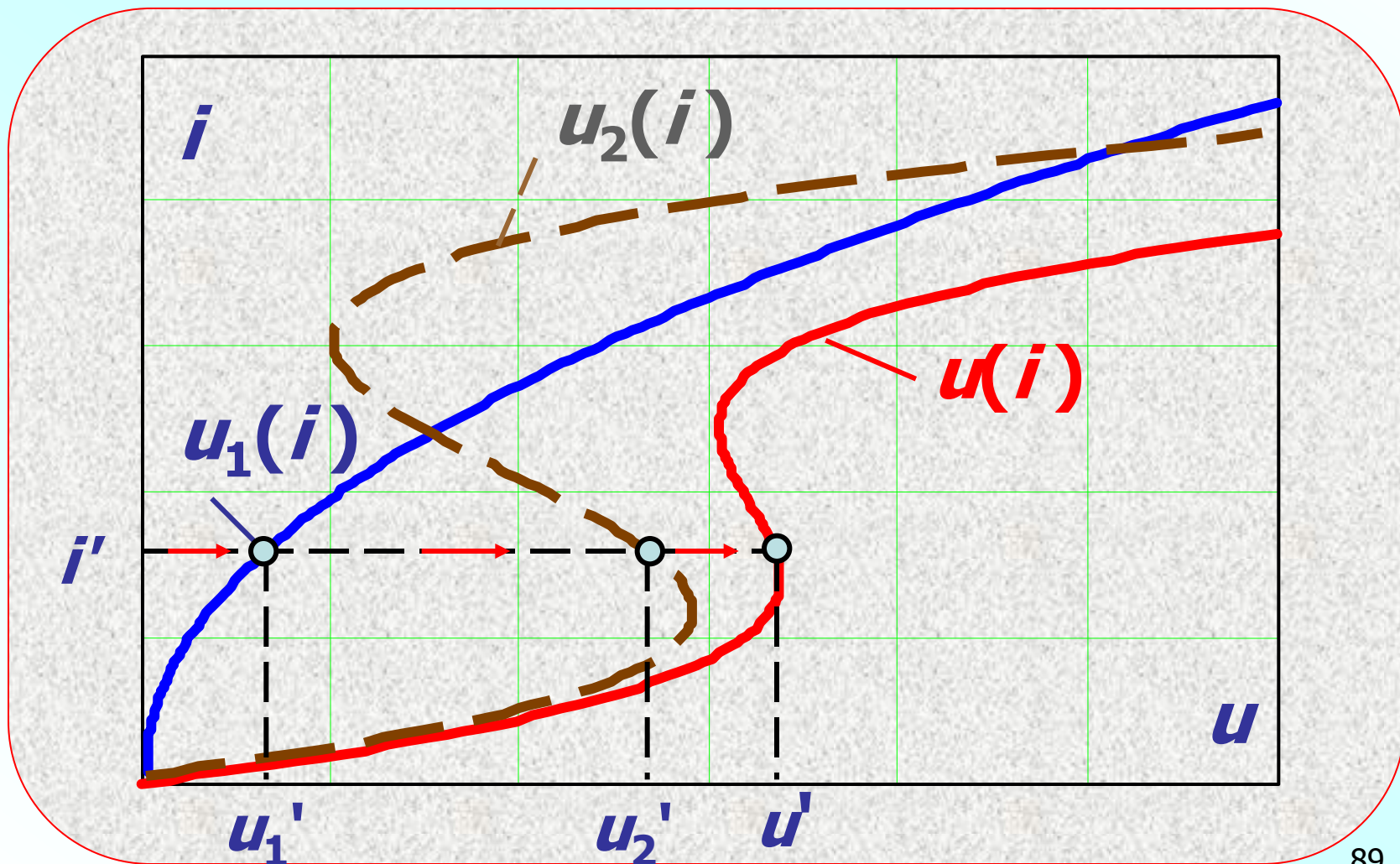


По второму закону Кирхгофа

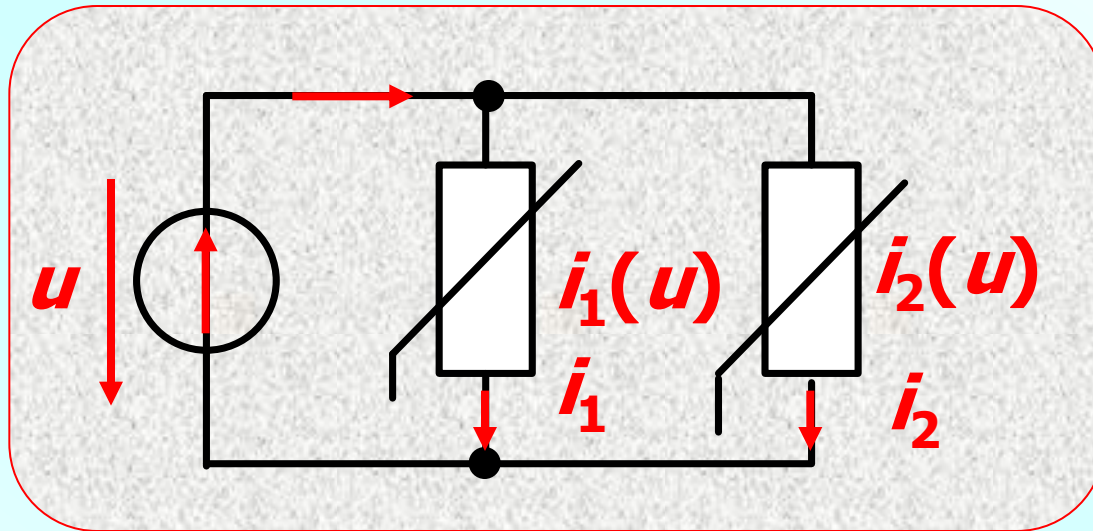
$$u_1(i_1) + u_2(i_2) = u_1(i) + u_2(i) = u(i).$$

Задавая фиксированные значения токов и суммируя соответствующие им напряжения, получают эквивалентную ВАХ.

Сложение ВАХ при последовательном соединении элементов



б) Параллельное соединение НЭ.

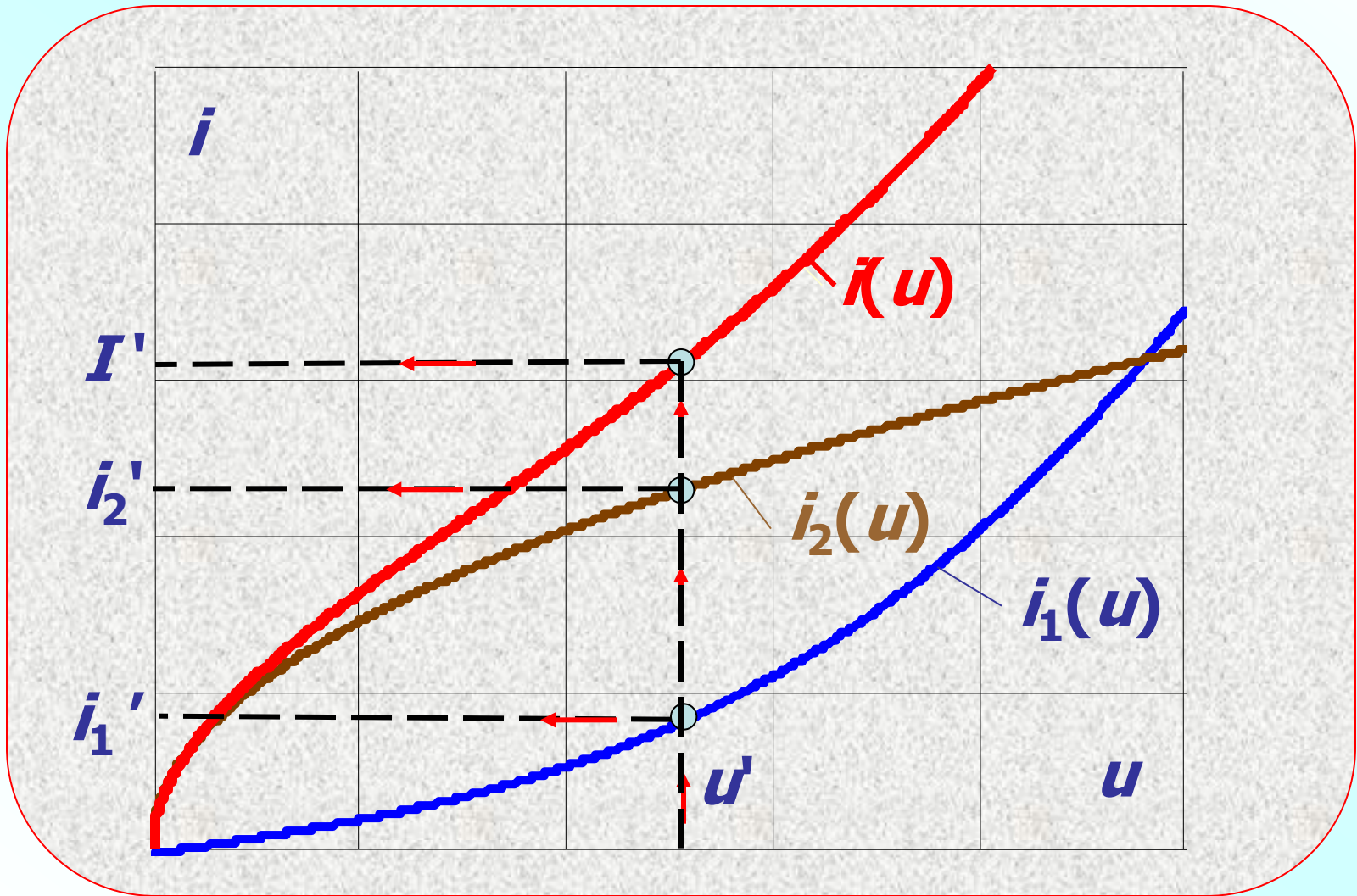


По первому закону Кирхгофа

$$i_1(u_1) + i_2(u_2) = i_1(u) + i_2(u) = i(u).$$

**Задавая
фиксированные
значения
напряжений и
суммируя токи,
получаем
эквивалентную ВАХ.**

Сложение ВАХ при параллельном соединении элементов



Аналогичным образом преобразуют ветви, содержащие линейный и нелинейный элементы или источник ЭДС (тока).

Если ВАХ цепи получены графически, дальнейшее решение выполняют графически.

**Если воздействие –
постоянное напряжение
или ток, то реакция
цепи – ток или
напряжение – также
постоянные.**

Графический метод расчета

Основу графического метода составляет **метод пересечения характеристик**, согласно которому нелинейное уравнение разбивается на две части

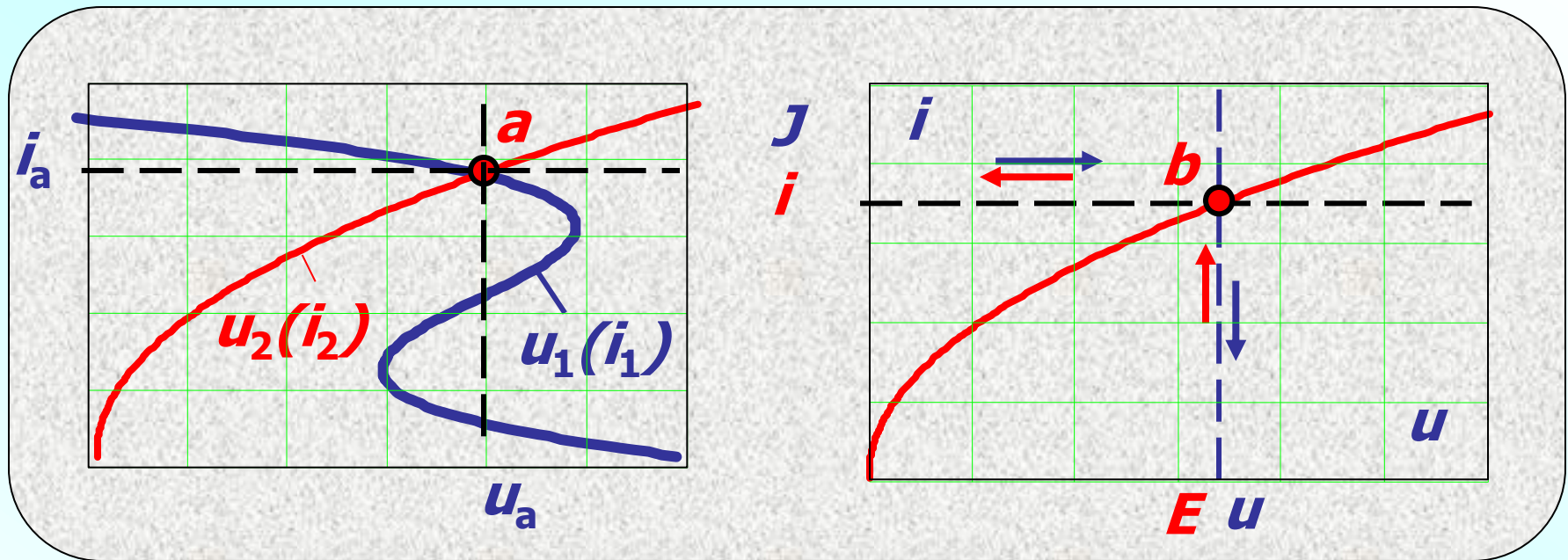
$$f_1(x) = f_2(x),$$

каждая из которых изображается графически.

Точка пересечения кривых определяет решение.

Если источник постоянного напряжения или тока, то решением будет одна точка на входной ВАХ цепи.

Примеры определения рабочей точки



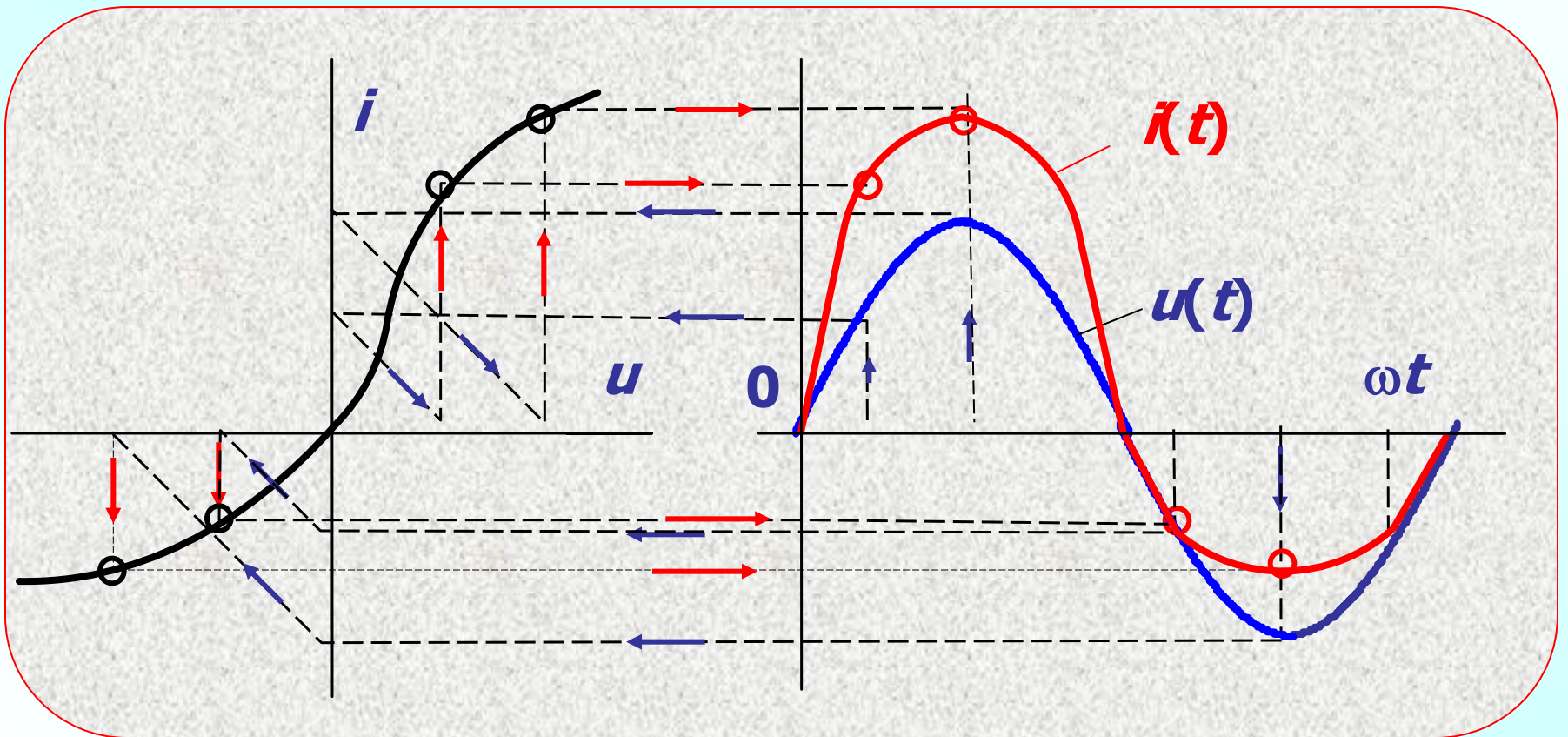
Рабочая точка ***a*** – результат пересечения двух характеристик. Точка ***b*** – пересечение ВАХ **НЭ** и источников

Если входное воздействие – функция времени, реакция цепи находится **методом отображающей точки.**

Суть метода ОТ – в переносе точек кривой воздействия на кривую реакции после отображения их от соответствующей ВАХ.

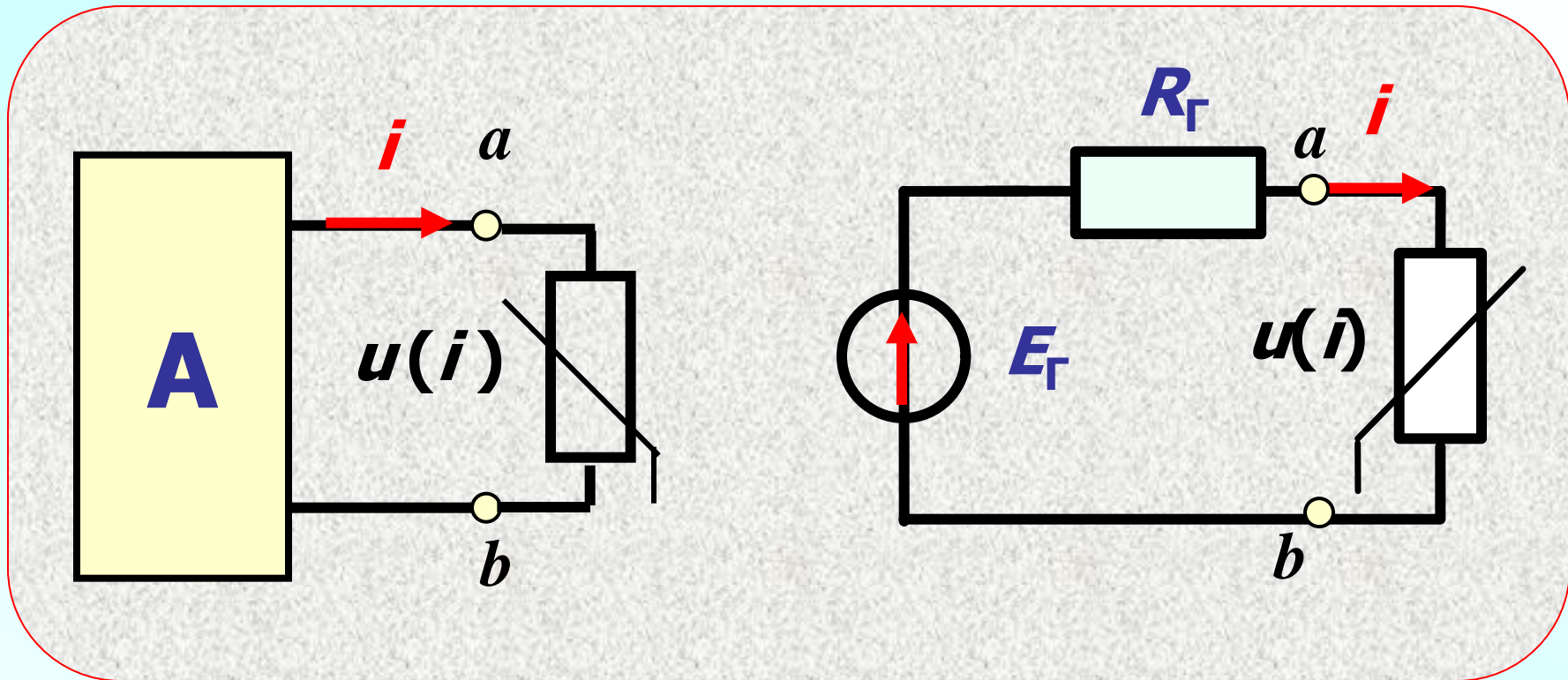
Для примера рассмотрим входной сигнал – синусоидальное напряжение и найдем реакцию цепи - несинусоидальный ток.

Пример построения реакции цепи по заданному воздействию



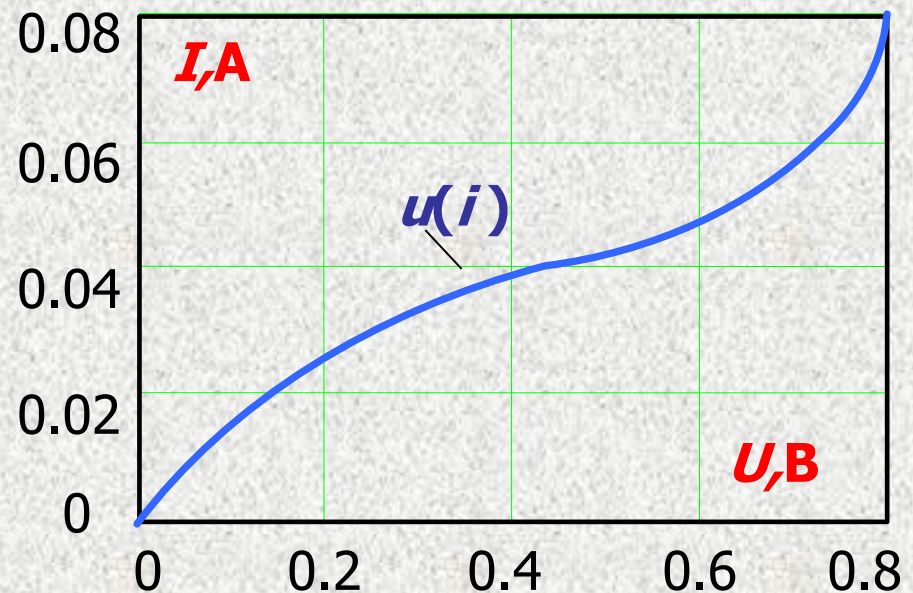
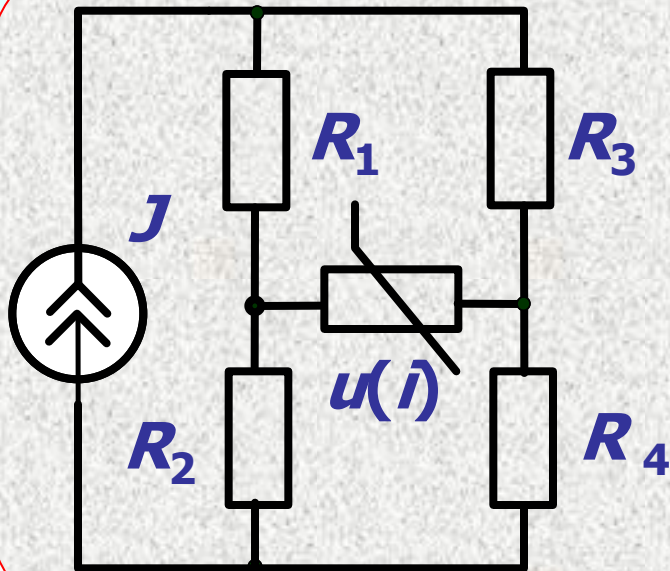
Расчет нелинейной цепи с одним НЭ

**Вся линейная часть цепи
по отношению к зажимам НЭ
представляется активным
двухполюсником согласно
теореме об активном
двухполюснике.**

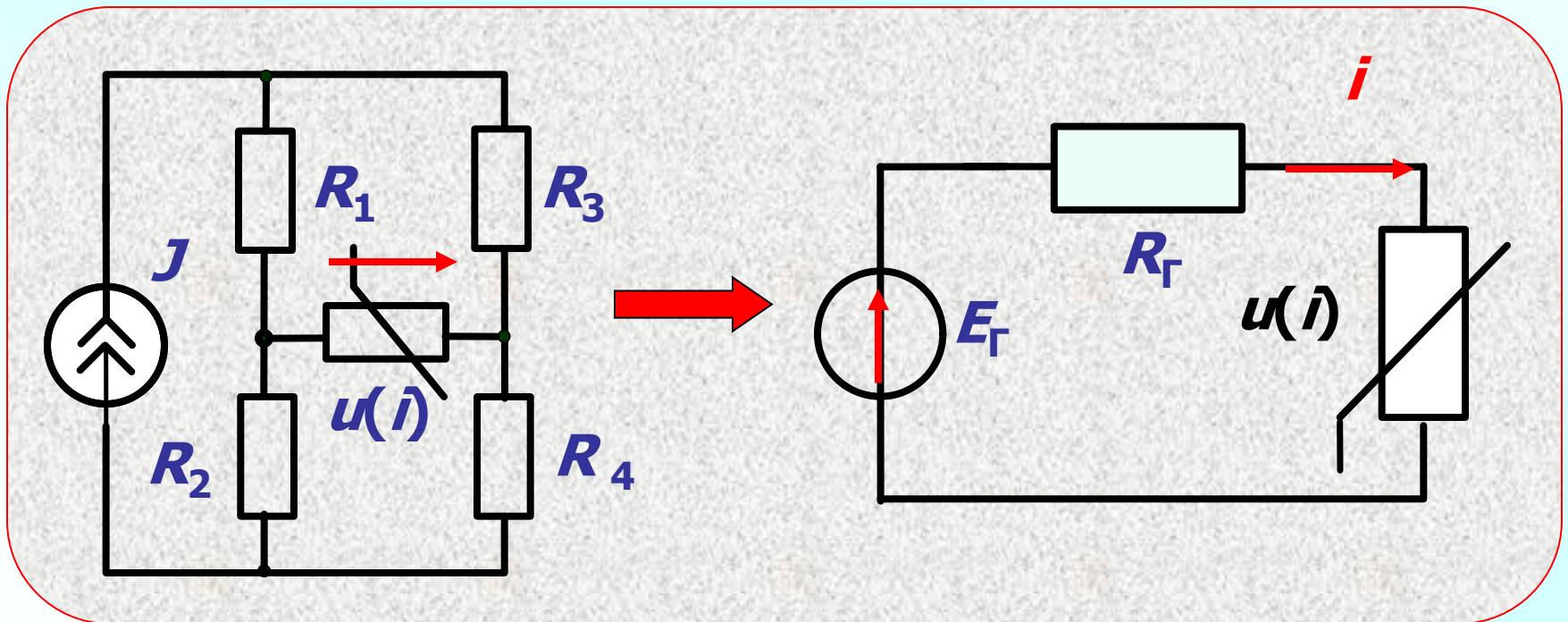


**Дальнейший расчет можно вести
любым методом**

Пример 1. Определить напряжение, ток и статическое сопротивление нелинейного элемента с заданной ВАХ в цепи с параметрами $R_1=8\text{ Ом}$; $R_2=R_3=12\text{ Ом}$; $R_4=8\text{ Ом}$; $J=400\text{ мА}$.



Решение. Линейную часть цепи заменим ЭДС E_{Γ} , равной $U_{\text{ХХ}}$ на разомкнутых зажимах **НЭ**, и эквивалентным сопротивлением цепи R_{Γ} относительно этих же зажимов.



По второму закону Кирхгофа

$$U_{xx} = E_{\Gamma} = U_{R_3} - U_{R_1};$$

$$E_{\Gamma} = I_3 R_3 - I_1 R_1 = J / 2 (R_3 - R_1);$$

$$E_{\Gamma} = 0,2 \cdot 4 = 0,8 \text{ В.}$$

Эквивалентное сопротивление R_{Γ}

$$R_{\Gamma} = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4};$$

Численно:

$$R_r = \frac{(8 + 12)(12 + 8)}{8 + 12 + 12 + 8} = 10 \text{ Ом}$$

Уравнение эквивалентной цепи

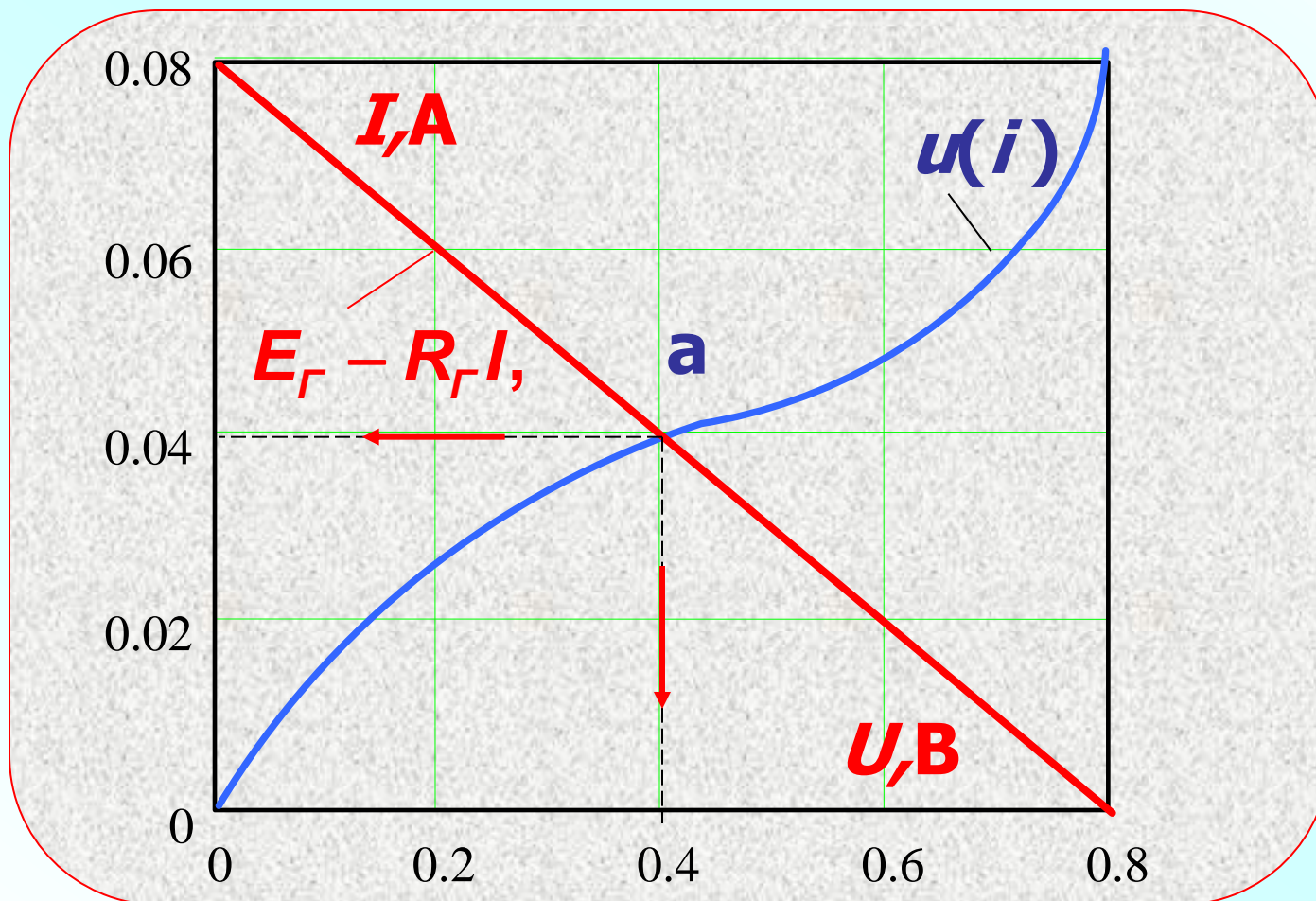
$$R_r I + u(i) = E_r.$$

Построив зависимость $E_r - R_r I$,
находим $U = 0,4 \text{ В}$; $I = 40 \text{ мА}$.

$$R_{ст} = \frac{U}{I} = \frac{0,4}{0,04} = 10 \text{ Ом.}$$

Графическое решение уравнения

$$E_r - R_r I = u(i).$$

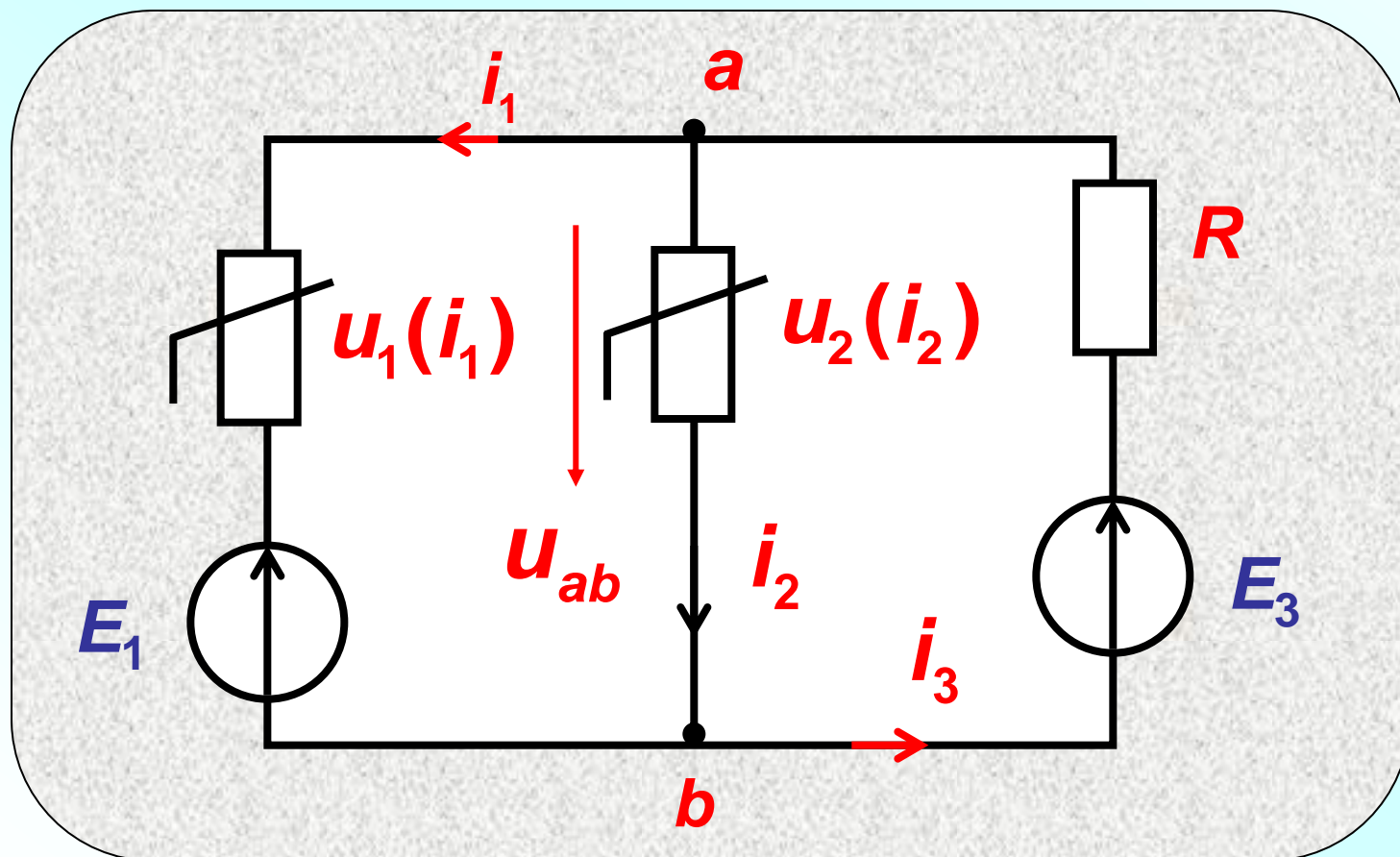


Расчет НЦ с двумя узлами
Нелинейные цепи с
параллельным соединением
ветвей (активных или
пассивных двухполюсников)
рассчитывают методом **двух**
узлов.

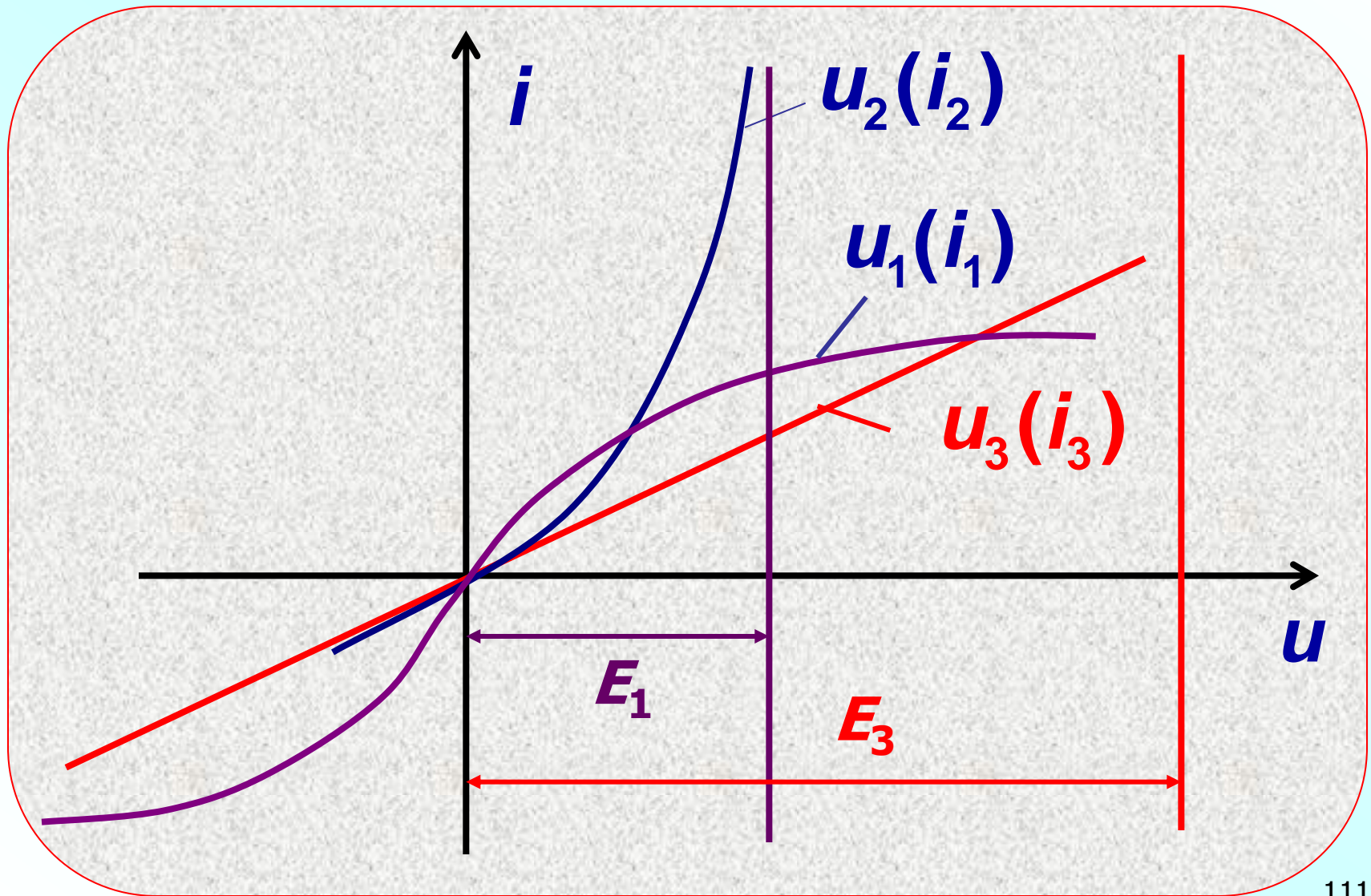
Его **суть:** в одних осях строятся **ВАХ** параллельных ветвей в функции напряжения между узлами схемы.

Затем **ВАХ** складывают графически согласно первому закону Кирхгофа и находят межузловое напряжение

Пример 2. Определить токи ветвей, полагая ЭДС источников и ВАХ элементов заданными.



ВАХ элементов цепи

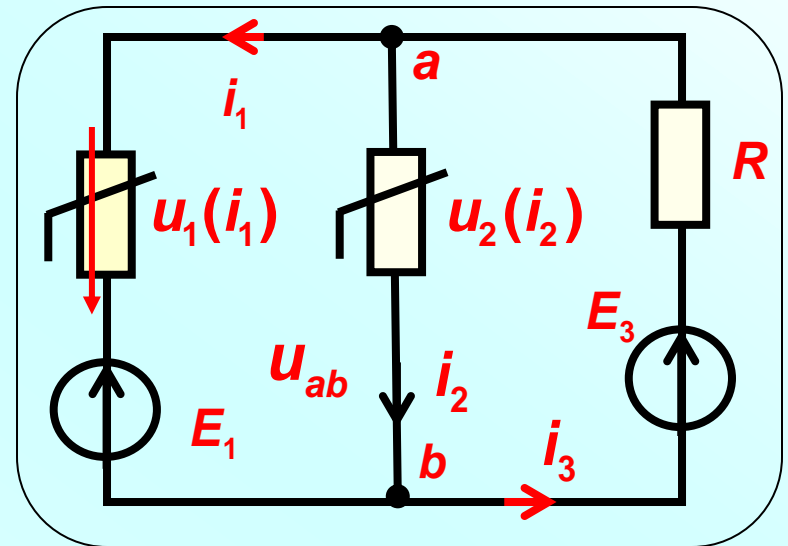


Решение. Записываем уравнения по второму закону Кирхгофа для межузлового напряжения U_{ab} :

$$U_{ab}(i_1) = E_1 + u_1(i_1);$$

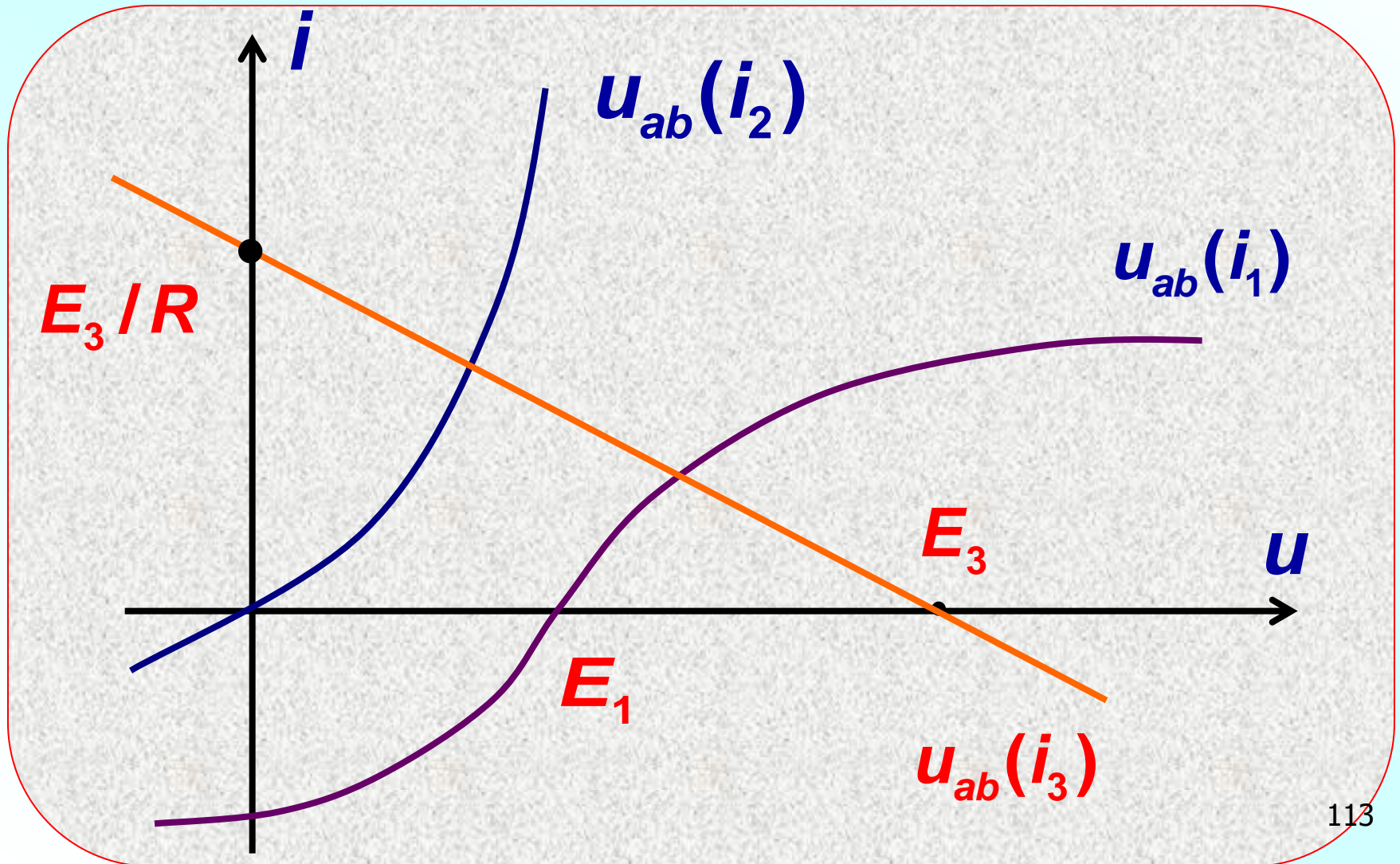
$$U_{ab}(i_2) = u_2(i_2);$$

$$U_{ab}(i_3) = E_3 - Ri_3.$$

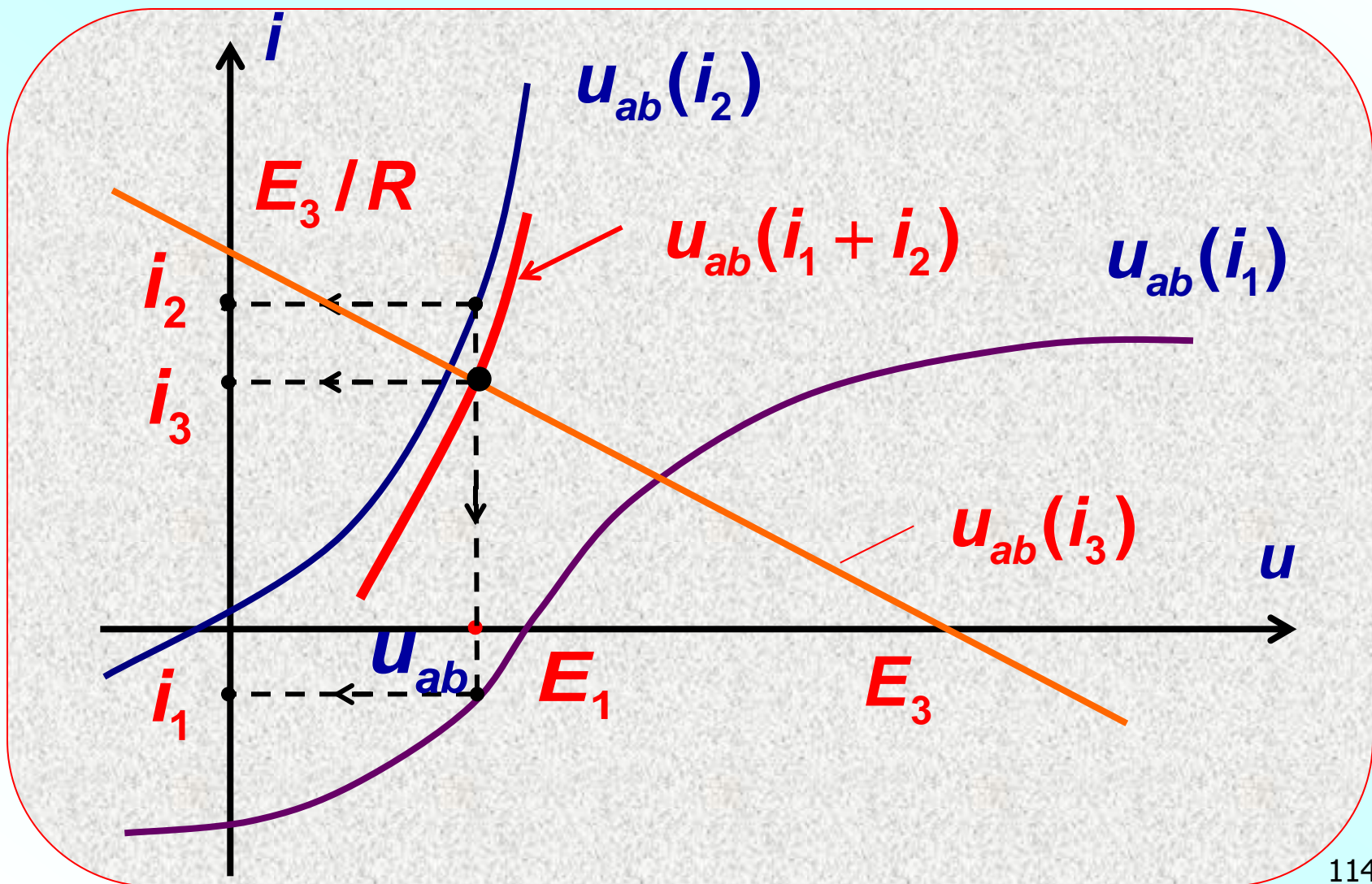


В одних осях строим зависимости

$u_{ab}(i_1)$, $u_{ab}(i_2)$ и $u_{ab}(i_3)$.



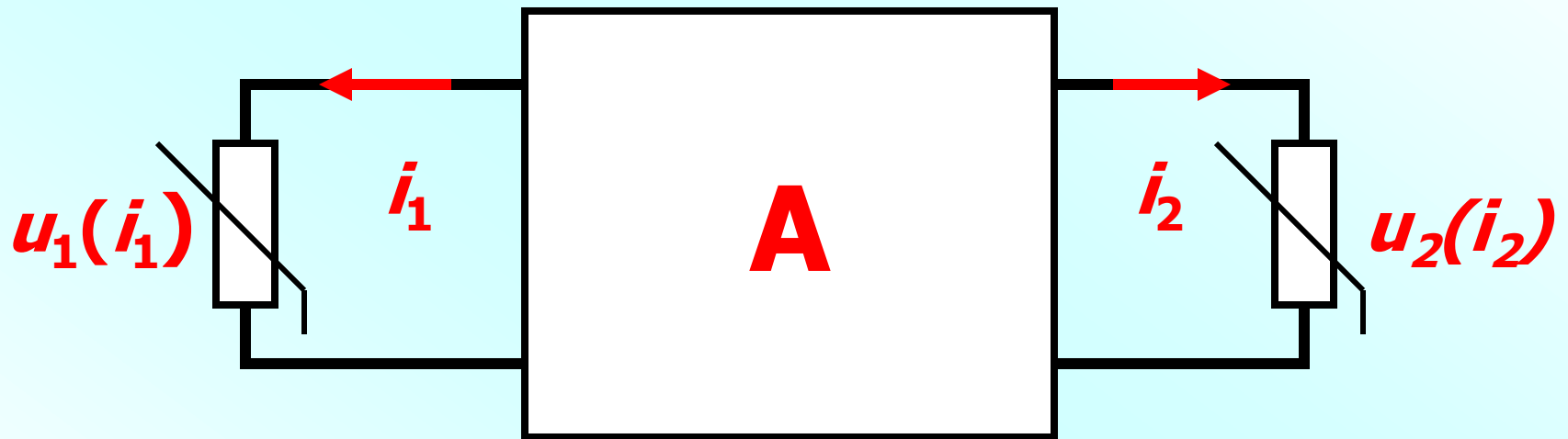
Графическое решение



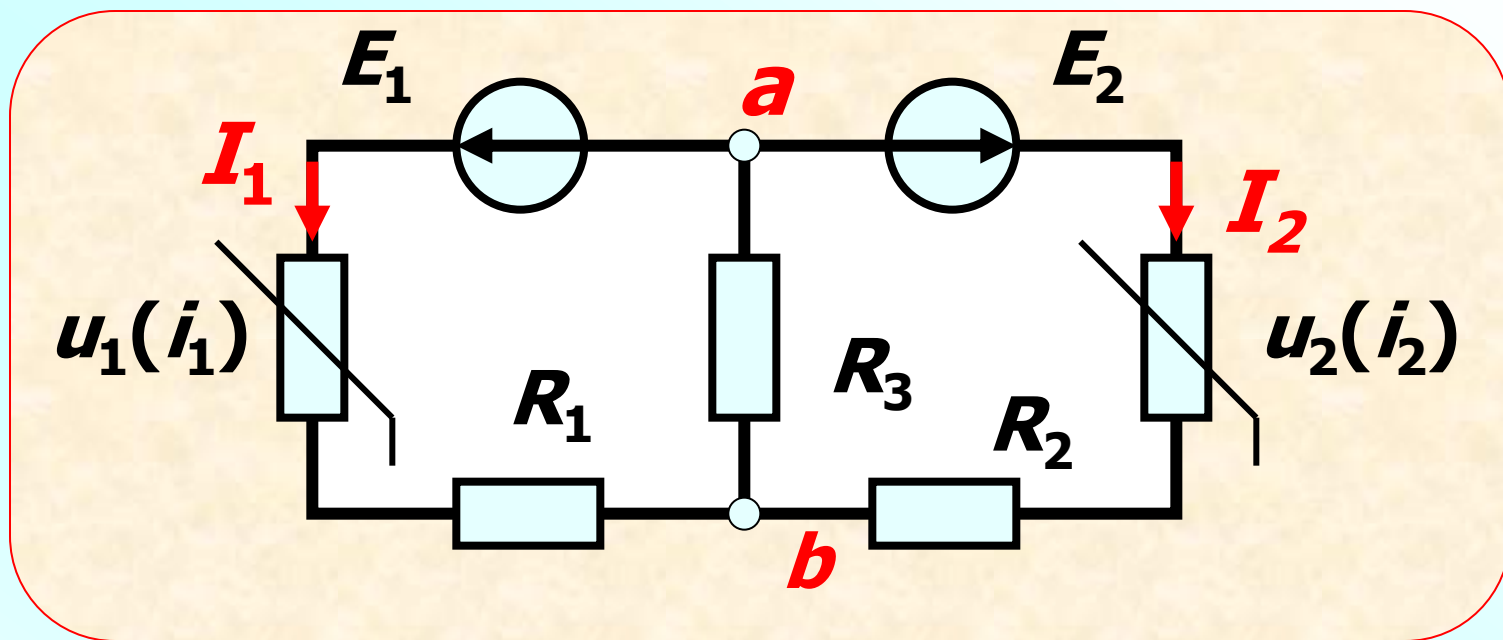
Так как $i_3 = i_1 + i_2$, то точка решения находится на пересечении ВАХ $u_{ab}(i_3)$ с эквивалентной ВАХ $u_{ab}(i_1 + i_2)$. Чтобы найти ее, ВАХ $u_{ab}(i_1)$ и $u_{ab}(i_2)$ складываем вдоль оси i при фиксированных значениях u_{ab} . Точка пересечения полученной ВАХ $u_{ab}(i_1 + i_2)$ с $u_{ab}(i_3)$ определяет напряжение u_{ab} .

ЗАМЕЧАНИЕ. Цепь любой сложности с двумя **НЭ** рассчитывают аналогично. **Линейную часть** цепи заменяют активным **четырёхполюсником** с эквивалентными параметрами: **два ЭДС**, равными напряжениям холостого хода при размыкании ветвей с **НЭ** и линейными резисторами пассивной **T-образной** схемы.

Порядок расчета сложной цепи с двумя нелинейными элементами



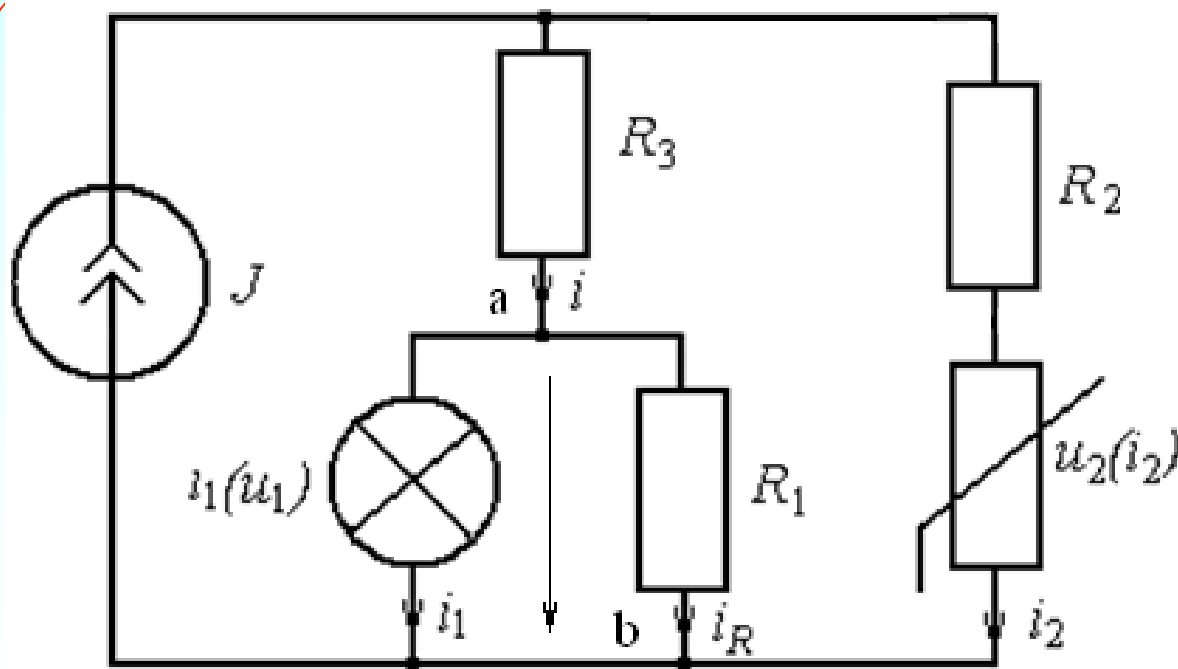
1. Четырехполюсник заменяется эквивалентной схемой замещения



Здесь $E_1 = U_{1x}$; $E_2 = U_{2x}$ при XX с обеих сторон четырехполюсника ($I_1 = 0$; $I_2 = 0$).

2. Полученная схема рассчитывается любым методом. Можно в MathCAD

Пример 3. ВАХ нелинейных элементов цепи: $i_1(u_1) = (u_1 / m)^{1/3}$; $i_2(u_2) = m u_2^2$; $J=24$ мА; $m=0,06$ (В/мА³ и мА/В²), $R_1=1,2$ кОм; $R_2=0,8$ кОм; $R_3=1$ кОм.



**Найти
ТОКИ i_1, i_2**

Решение. Записываем уравнения Кирхгофа

$$\begin{aligned}i + i_2 &= J; & i_1 + i_R &= i; \\R_2 i_2 + u_2(i_2) - u_{ab}(i_1) - R_3 i &= 0; \\u_{ab}(i_1) &= i_R R = u_{ab}(i),\end{aligned}$$

Выбирая в качестве независимой переменной ток i , систему уравнений преобразуем к одному уравнению:

$$R_2(J - i) + u_2(J - i) - u_{ab}(i) - R_3 i = 0,$$

которое решаем графически в **MathCAD**

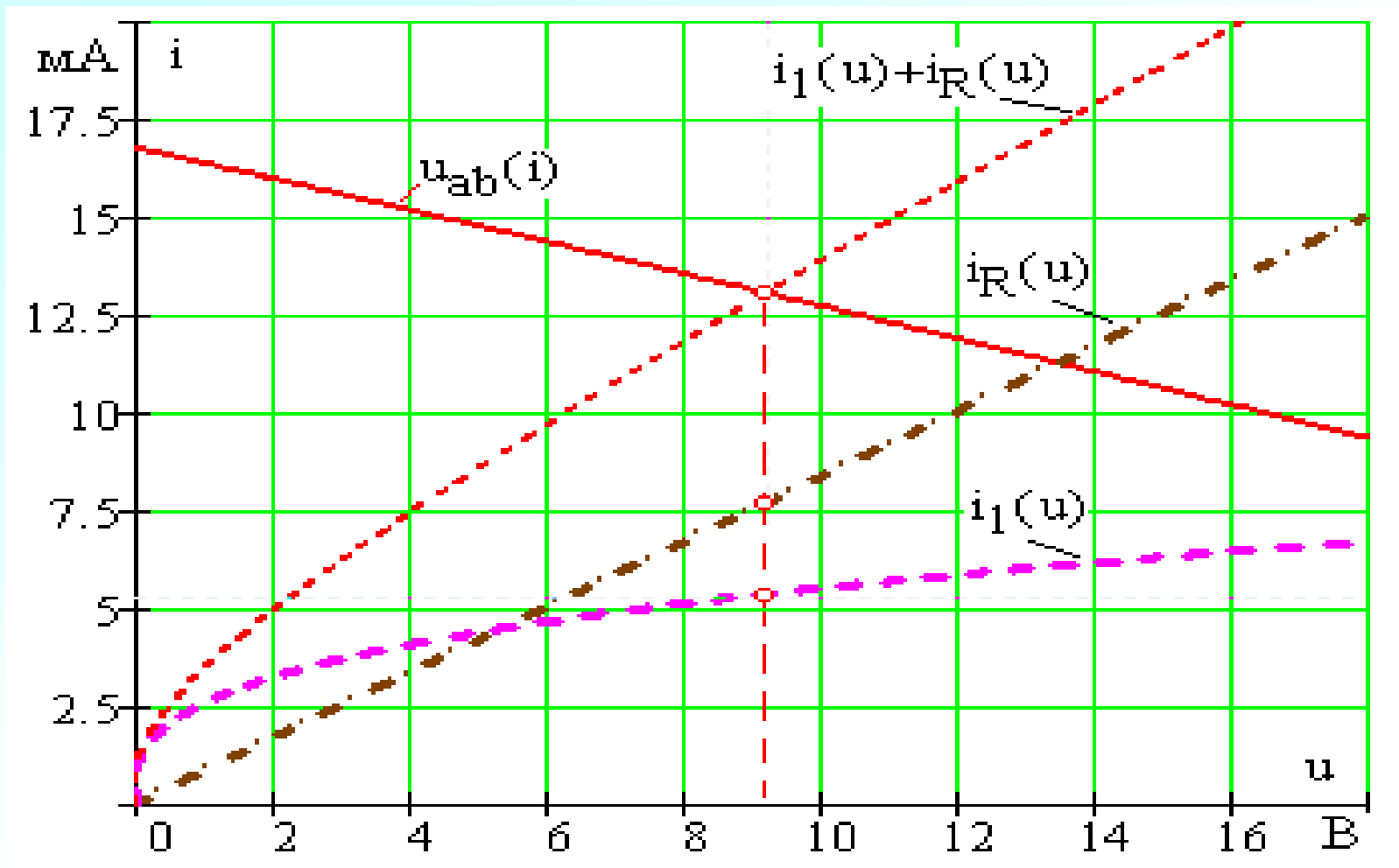
Документ **MathCAD**

$$R_1 := 1.2 \quad R_2 := 0.8 \quad R_3 := 1 \quad J := 24 \quad m := 0.06$$

$$i_2(i) := J - i \quad u_2(i) := \left(\frac{J - i}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad i_1(u) := \left(\frac{u}{m} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$u_{ab}(i) := u_2(i) + R_2 \cdot i_2(i) - R_3 \cdot i \quad i_3(u) := \frac{u}{R_1}$$

Графическое решение в MathCad

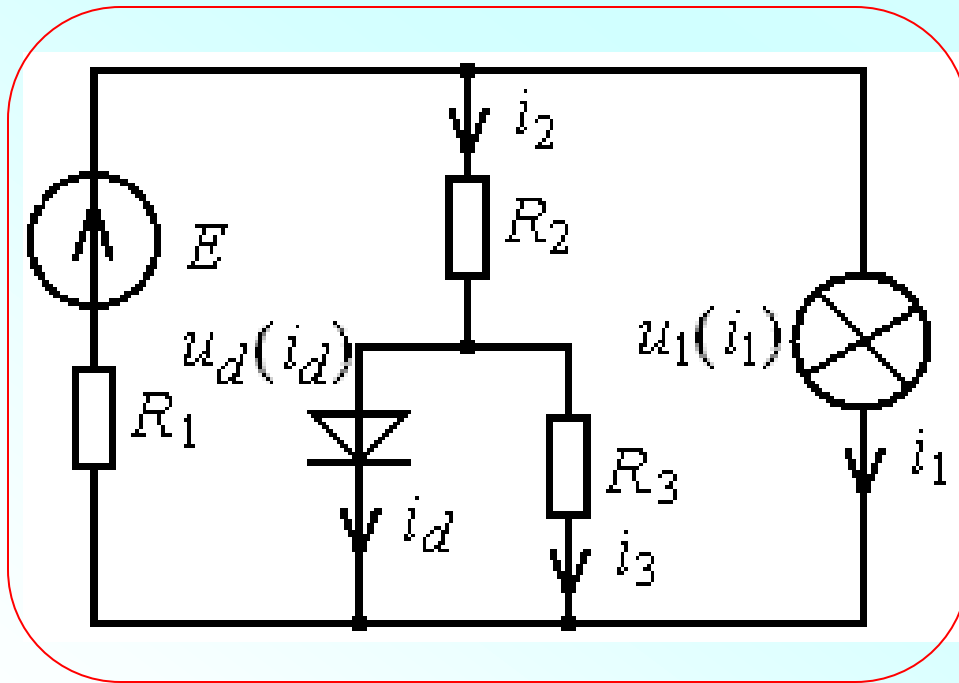


$$U_{ab} := 9.198 \quad i := 13.07 \quad i_2 := J - 13.017 \quad i_2 = 10.983$$

Пример 4. Найти токи нелинейных элементов аппроксимированных как

$$u_1(i_1) = mi_1^3 \quad \text{и} \quad u_d(i_d) = U_0 \ln\left(\frac{i_d}{I_0} + 1\right),$$

$$\begin{aligned} & (u - \text{В}, i - \text{мА}); \\ & m = 0,009 \text{ В/мА}^3; \\ & U_0 = 12 \text{ В}; \\ & I_0 = 10 \text{ мА}; \quad E = 16 \text{ В}; \\ & R_1 = 1,25 \text{ кОм}; \\ & R_2 = 0,75 \text{ кОм}; \\ & R_3 = 1,5 \text{ кОм}. \end{aligned}$$



Решение выполним в системе MathCAD

$$R_1 := 1.25$$

$$R_2 := 0.75$$

$$R_3 := 1.5$$

$$I_0 := 10$$

$$U_0 := 12$$

$$E := 16$$

$$m := 9 \cdot 10^{-3}$$

$$i_1(u_1) := \left(\frac{u_1}{m} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$i_e(u_1) := \frac{E - u_1}{R_1}$$

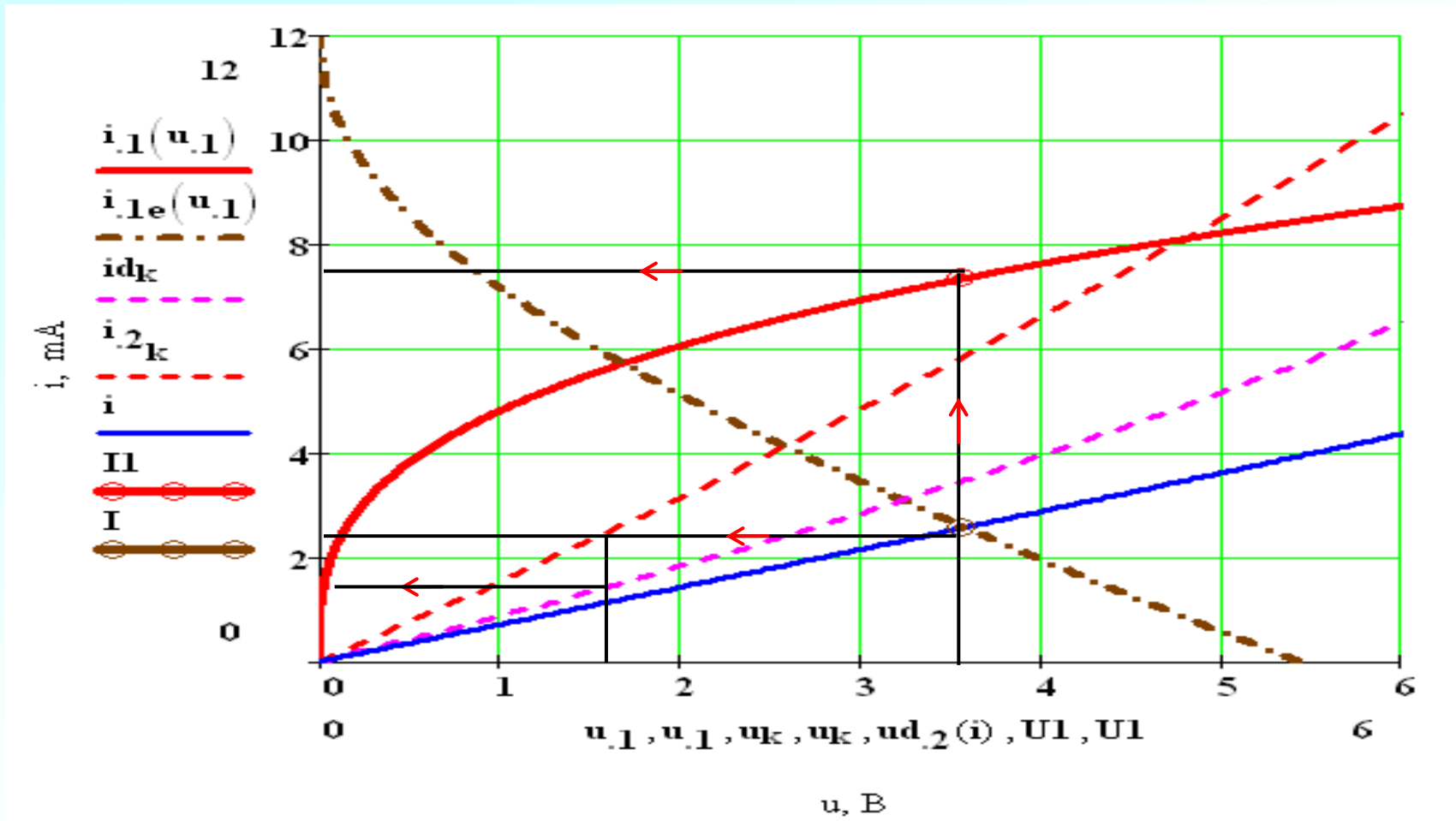
$$i_{1e}(u_1) := i_e(u_1) - i_1(u_1)$$

$$k := 0 .. 100 \quad u_k := 0.1 \cdot k \quad id(ud) := I_0 \cdot \left(e^{\frac{ud}{U_0}} - 1 \right) \quad id_k := id(u_k)$$

$$i_{3k} := \frac{u_k}{R_3} \quad i_2 := id + i_3 \quad s := cspline(i_2, u) \quad ud_3(i) := interp(s, i_2, u,$$

$$ud_2(i) := ud_3(i) + R_2 \cdot i \quad I := 2.58 \quad U1 := 3.56 \quad I1 := 7.37$$

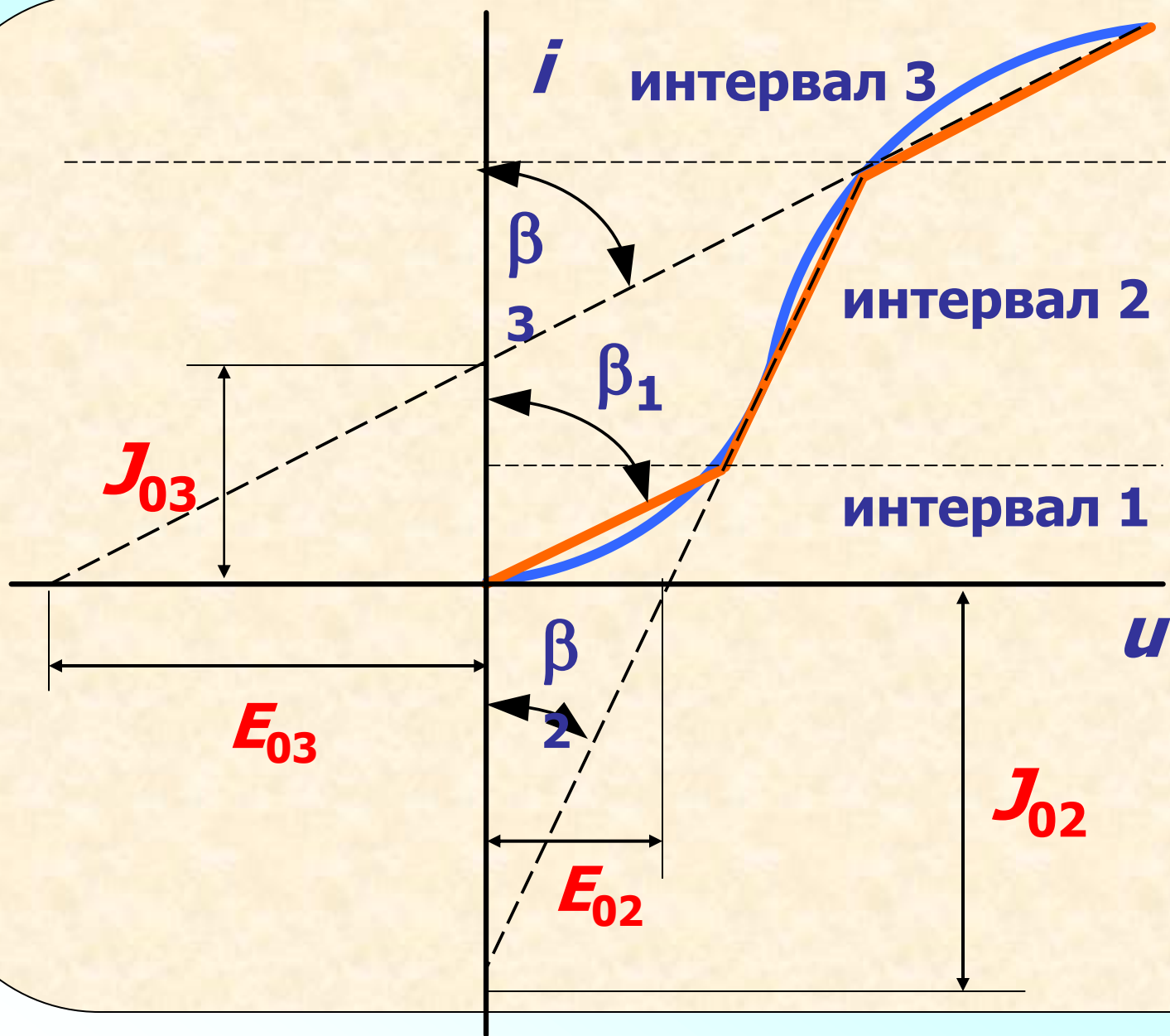
Графическое решение в MathCad



3. Метод кусочно-линейной аппроксимации

Сущность метода (метод линейных сплайнов) – в замене ВАХ НЭ ломаной кривой с одной или несколькими точками излома. При такой замене нелинейное уравнение приводится к системе линейных уравнений.

Кусочно-линейная аппроксимация



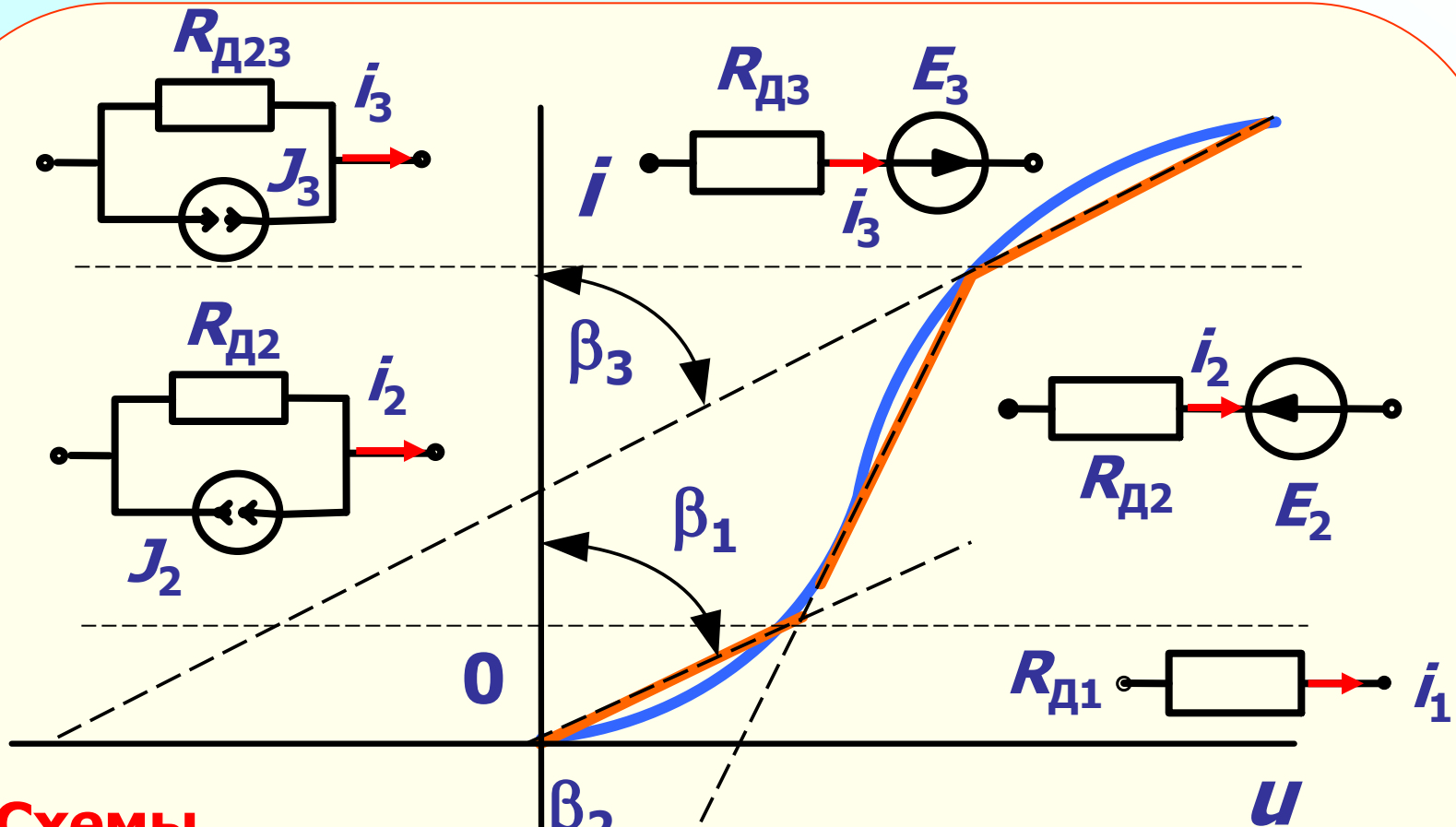
При такой аппроксимации решения для отдельных линейных участков согласуются между собой (**припасовываются**): значения токов и напряжений в конце участка приравниваются соответствующим значениям в начале следующего участка и т.д.

В интервалах между изломами характеристик цепь оказывается **линейной и рассчитывается известными методами теории линейных цепей. Более того, для каждого из участков можно построить линейные схемы замещения.**

В пределах линейных участков **НЭ** можно представить линейным **резистором** и источником постоянных **ЭДС** или **тока**.

Сопротивление резистора равно **тангенсу угла** наклона прямой, аппроксимирующей участок, **к оси тока**. **ЭДС** и **ток** определяются отрезком, отсекаемым этой прямой на соответствующих осях.

**Принцип замены участков
нелинейного элемента
линейной схемой
замещения показан на рис.**



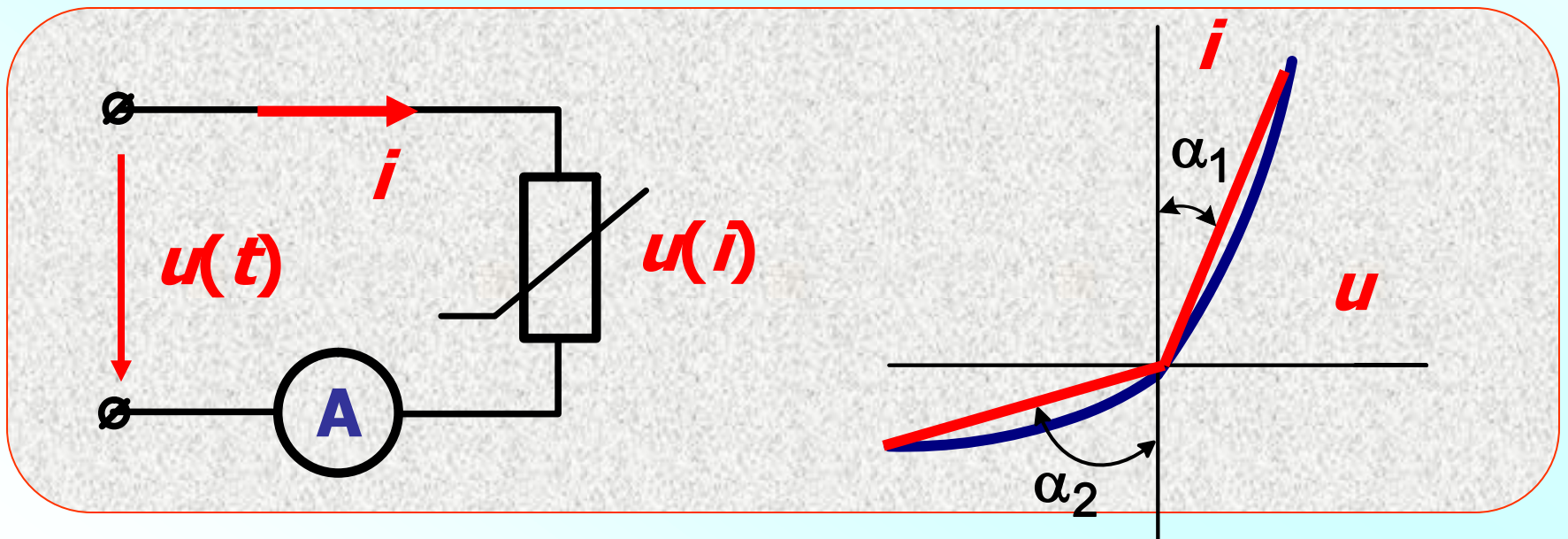
**Схемы
замещения с
источником
тока**

**Схемы
замещения с
источником ЭДС**

**При наличии в цепи нескольких
НЭ решение приходится
выполнять для каждого из
возможных сочетаний
линейных интервалов, т.к.
положение рабочих точек на
ВАХ заранее неизвестно.**

Параметры этих схем **различны** на каждом из линейных участков, однако, **система уравнений** остается **неизменной**, поскольку структура схемы не изменяется. **В этом** – одно из **достоинств** рассматриваемого метода.

Пример 1. Определить **ток** амперметра магнитоэлектрической системы в цепи НРЭ с ВАХ, аппроксимированной двумя отрезками. Напряжение источника $u(t) = U_m \sin \omega t$.

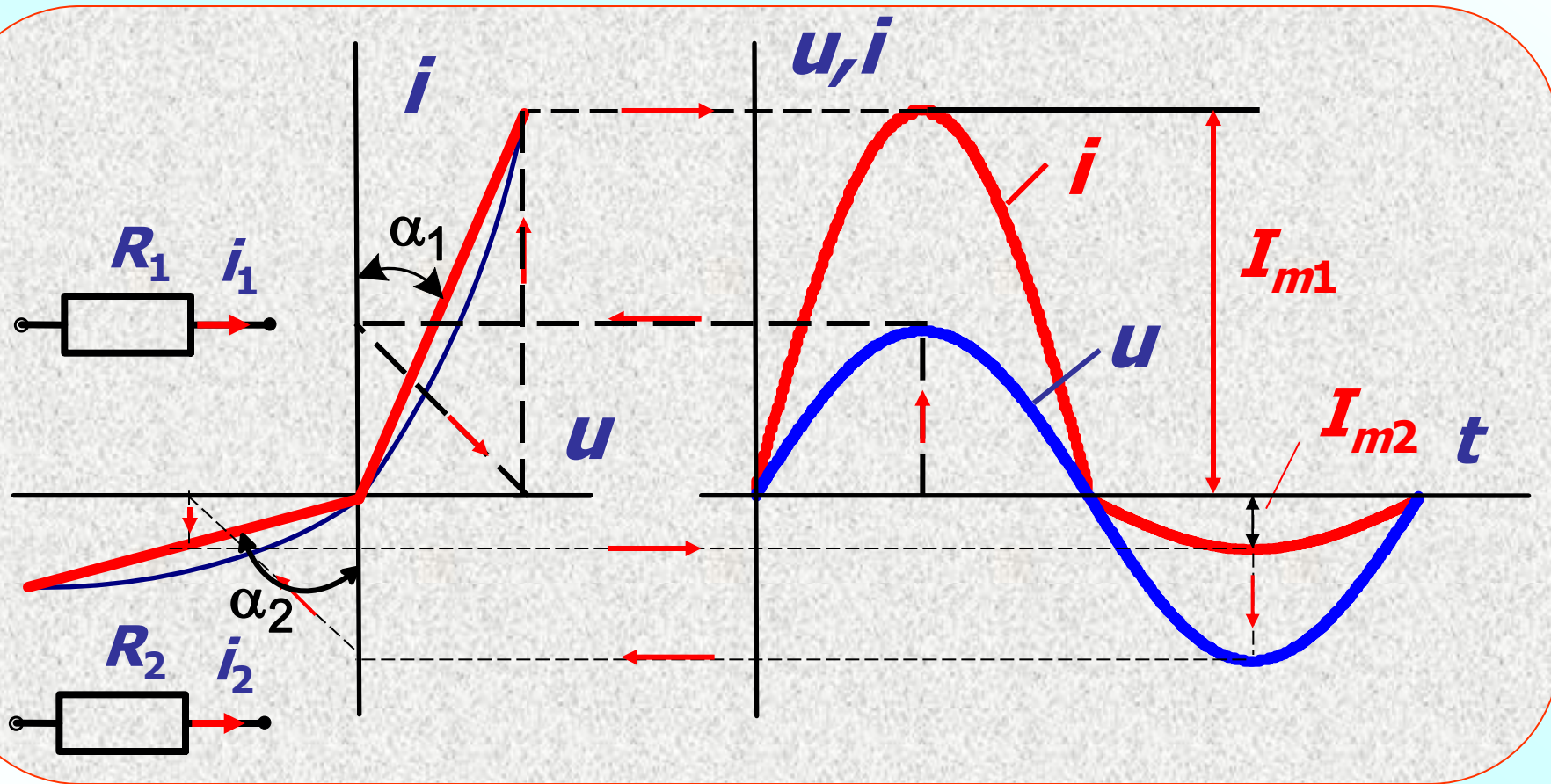


Решение. Аппроксимируем ВАХ в пределах **положительного полупериода** линейным отрезком соответствующим сопротивлению R_1 . В пределах отрицательного - R_2 .

Величины сопротивлений определяются углом наклона отрезков к оси тока:

$$R_1 = m_R \operatorname{tg} \alpha_1; \quad R_2 = m_R \operatorname{tg} \alpha_2$$

Графическое определение тока



Ток в линейной резистивной цепи повторяет форму приложенного напряжения, поэтому можно воспользоваться законом Ома: для амплитудных значений имеем

$$**I_{m1} = \frac{U_m}{R_1}; \quad I_{m2} = \frac{U_m}{R_2}.**$$

Среднее значение тока, состоящего из двух полуволн :

$$\begin{aligned} I_{\text{CP}} = I'_{\text{CP}} + I''_{\text{CP}} &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} [I_{m1} \sin(\omega t) dt + \\ &+ \int_{T/2}^T I_{m2} \sin(\omega t) dt] = \frac{1}{\pi} (I_{m1} - I_{m2}). \end{aligned}$$

Пример 2. Определить ток электромагнитного амперметра в цепи идеальных тиристоров, срабатывающих в моменты времени, соответствующих максимальным значениям входного напряжения

$$u(t) = 100\sin(\omega t) \text{ В.}$$

Сопротивление нагрузки

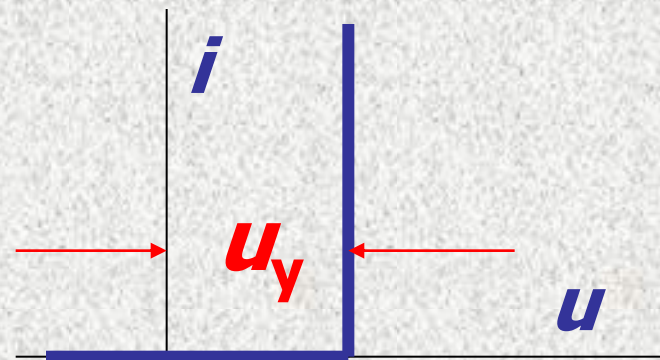
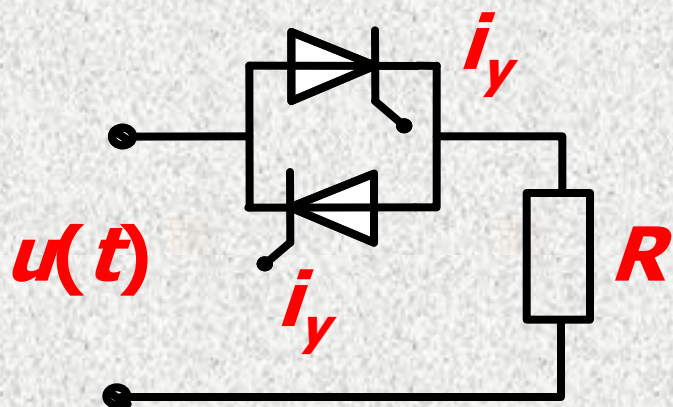
$$R = 100 \text{ Ом.}$$

Решение. Идеальный тиристор можно представить **ключом**, имеющим бесконечно малое сопротивление при **замыкании** и бесконечно **большое** - при **размыкании**. В общем тиристор - управляемый вентиль, в котором проводящее состояние наступает после подачи управляющего импульса тока.

Это состояние **удерживается** после снятия импульса **до момента** времени, когда **ток** принимает значение, близкое **к нулю**.

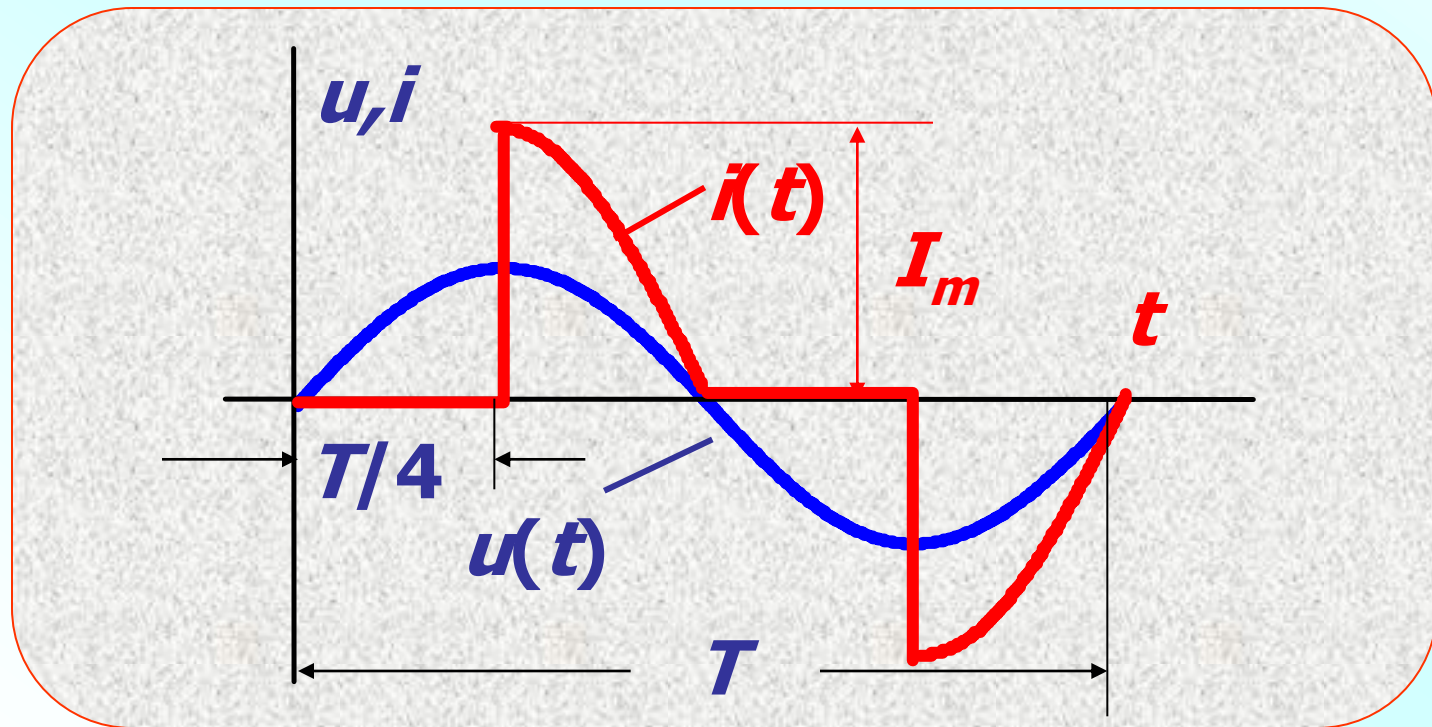
ВАХ идеального тиристора можно представить двумя линейными отрезками, совпадающими с полуосями координат, как и **ВАХ** идеального диода.

Схема цепи



**ВАХ идеального
тиристора**

Поскольку цепь резистивная, то с момента открытия тиристоров и до их запираения ток цепи повторяет форму входного напряжения.



Действующее значение тока амперметра

$$I_A = \sqrt{\frac{2}{T} \int_{T/4}^{T/2} i^2(t) dt},$$

где $i(t) = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t) = I_m \sin(\omega t).$

Интегрируя, получаем:

$$I_A = I_m \sqrt{\frac{2}{T} \int_{T/4}^{T/2} \sin^2(\omega t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} (T/2 - T/4)} = \frac{I_m}{2}.$$

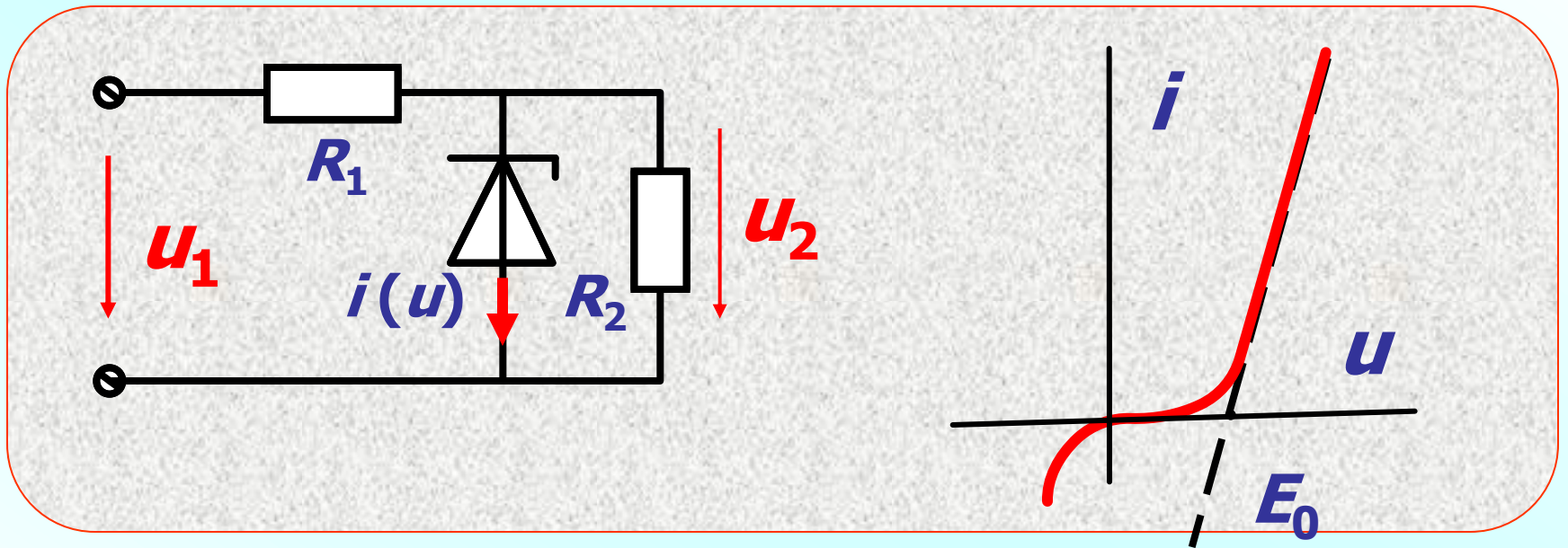
Численно: $I_A = 0,5 \text{ А.}$

Пример 3. Стабилитрон (опорный диод) в схеме стабилизатора постоянного напряжения работает на линейном участке ВАХ.

Параметры сопротивлений R_1 и R_2 известны.

Определить коэффициент передачи напряжения и коэффициент стабилизации стабилизатора.

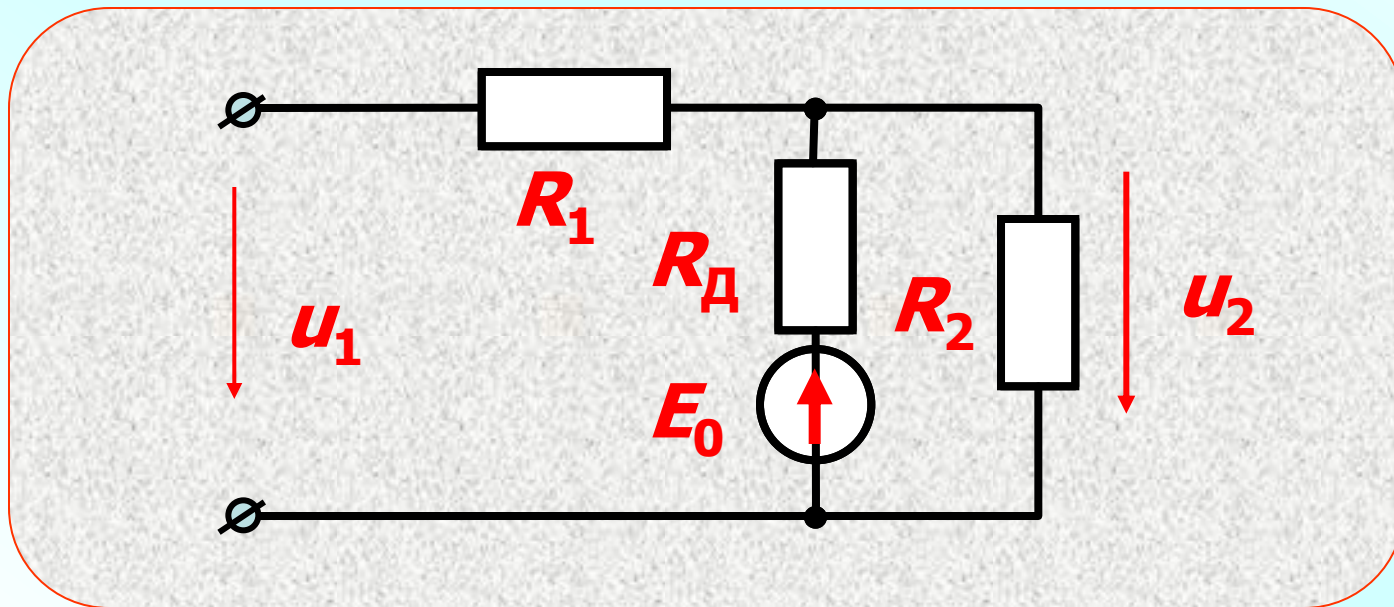
Схема стабилизатора и ВАХ стабилитрона.



Рабочая часть ВАХ совпадает с прямой, отсекающей на оси абсцисс отрезок

$$u = E_0.$$

Уравнение прямой $u = R_d \dot{i} + E_0$,
где R_d – дифференциальное сопротивление. Уравнению соответствует линейная схема замещения.



По методу 2^х узлов

$$U_2 = \frac{U_1 G_1 + E_0 G_D}{G_1 + G_2 + G_D},$$

где $G_1 = 1/R_1$; $G_2 = 1/R_2$; $G_D = 1/R_D$.

Коэффициент передачи напряжения

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{G_1 + (E_0/U_1)G_D}{G_1 + G_2 + G_D}$$

или

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2 R_D + (E_0 / U_1) R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_D + R_2 R_D}.$$

Коэффициент стабилизации определяется отношением относительного изменения напряжения на входе цепи к относительному изменению напряжения на выходе:

$$k_{\text{СТ}} = \frac{dU_1}{U_1} : \frac{dU_2}{U_2} = \frac{dU_1 \cdot U_2}{dU_2 \cdot U_1}.$$

Определив

$$\frac{dU_1}{dU_2} = \frac{1}{dU_2/dU_1} = \frac{G_1 + G_2 + G_D}{G_1},$$

находим

$$k_{CT} = \frac{G_1 + (E_0 / U_1)G_D}{G_1} =$$
$$= 1 + \frac{E_0 G_D}{U_1 G_1} = 1 + \frac{E_0 R_1}{U_1 R_D}.$$

4. Численный метод расчета

Как отмечалось, основной метод решения системы нелинейных уравнений – **численный**.

Численное решение получают, как правило, многократным использованием одних и тех же уравнений, уточняя искомое решение "**шаг за шагом**".

Такой способ называют методом последовательных приближений или **итераций**.

По методу **простой итерации** уравнения **частично** разрешают относительно искоемых переменных x_i , т. е. приводят к виду $x_i = F_i(x_j)$, где $j = 1, 2, 3, \dots, n$, а затем, задав начальное приближение $x_i(0)$, уточняют решение.

Уточнения производят по алгоритму

$$x_{i(k+1)} = F_i(x_{i(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где k – номер шага итерации.

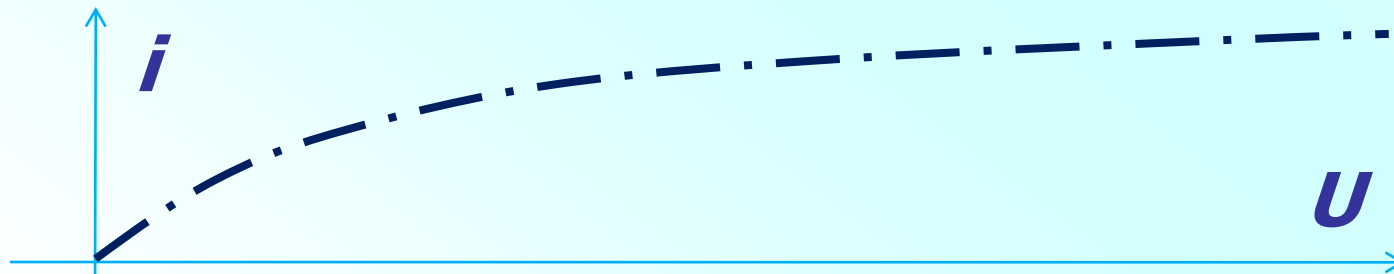
Итерационный процесс для одного уравнения сходится, если

$$\left| dF(x) / dx \right| < 1.$$

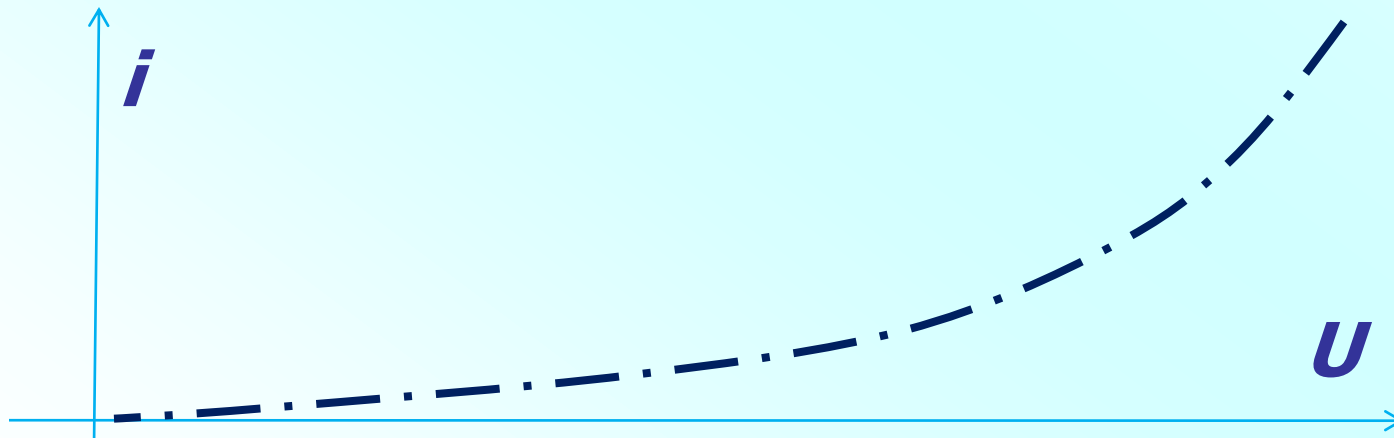
Для системы уравнений критерий сходимости более сложный; там она проверяется в процессе счета.

Итерационный процесс **практически**
всегда сходится:

1. Если для элементов с ВАХ,
статические сопротивления которых
возрастают (кривые с **вогнутостью**,
обращенной **к оси напряжений**)
расчетные **уравнения составлены**
относительно **напряжений**.



2. Если для элементов с ВАХ, для которых статические сопротивления убывают (**вогнутость** кривых обращена **к оси токов**), уравнения составлены относительно тока.



Более эффективным считается метод Ньютона (**Ньютона-Рафсона**).

Рассмотрим его.

Пусть нелинейное уравнение

$$f(x)=0$$

имеет приближенное значение

корня $x=x_k$. Уточненное значение

$x_{k+1}=x_k+\Delta x_k$, (Δx_k - поправка к

корню) находится разложением

функции в ряд Тейлора.

Ограничивая ряд двумя членами, для функции в точке x_{k+1} записываем:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + \Delta x_k) \approx f(x_k) + \Delta x_k f'(x_k),$$

где $f(x_k)$ – значение функции в точке x_k ;

$f'(x_k)$ – производная функции в этой же точке;

$f' \Delta x_k = h_k$ – поправка к решению.

Так как $f(x_{k+1})=0$ (решение), то

$$\Delta x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

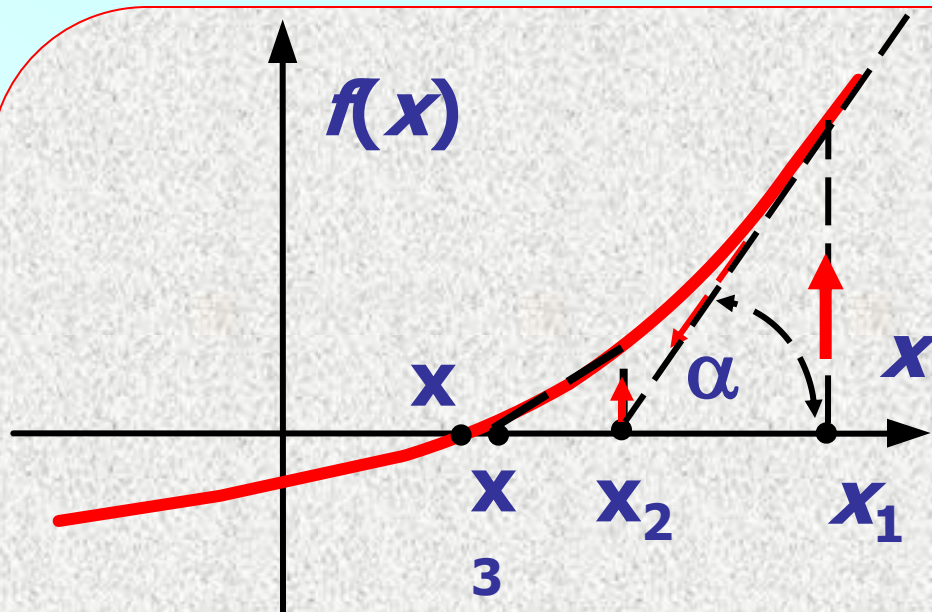
Уточненное значение корня будет

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k \approx x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

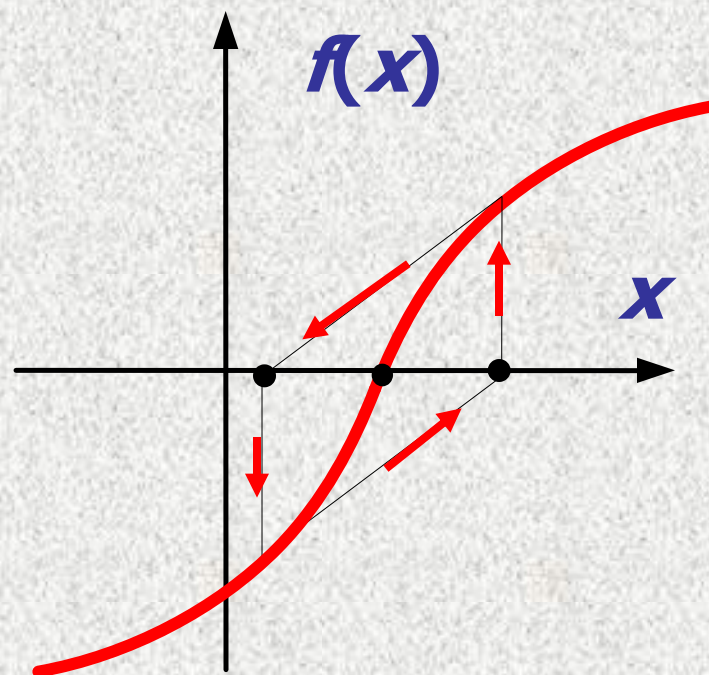
Расчет заканчивают, если

$$\left| \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k} \right| < \varepsilon, \quad \text{где } \varepsilon \text{ - заданная погрешность.}$$

Графическое представление численного решения по методу Ньютона - Рафсона



Процесс сходится



**Защивливание
процесса**

Касательные, проведенные в точках x_k , определяют значение поправки на соответствующем шаге $h_k = x_{k+1} - x_k$, т.к.

$$f'(x_k) = \operatorname{tg} \alpha_k = \frac{f(x_k)}{h_k};$$

$$h_k = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{f(x_k)}{\operatorname{tg} \alpha_k}.$$

Метод сходится, если начальное приближение достаточно близко к решению.

Однако, если производная $f'(x_k) = 0$, решение **невозможно**.

Критерием сходимости является неравенство

$$|f(x)f''(x)| < [f'(x)]^2.$$

Порядок расчета НЦ методом Ньютона

1. Задают начальное приближенное значение искомого решения.
2. Определяют поправку h_k . Для этого находят производную функции $f'(x_k)$.
3. Определяют новое значение корня и повторяют процесс на следующем шаге, уточняя предыдущее решение до необходимой точности.

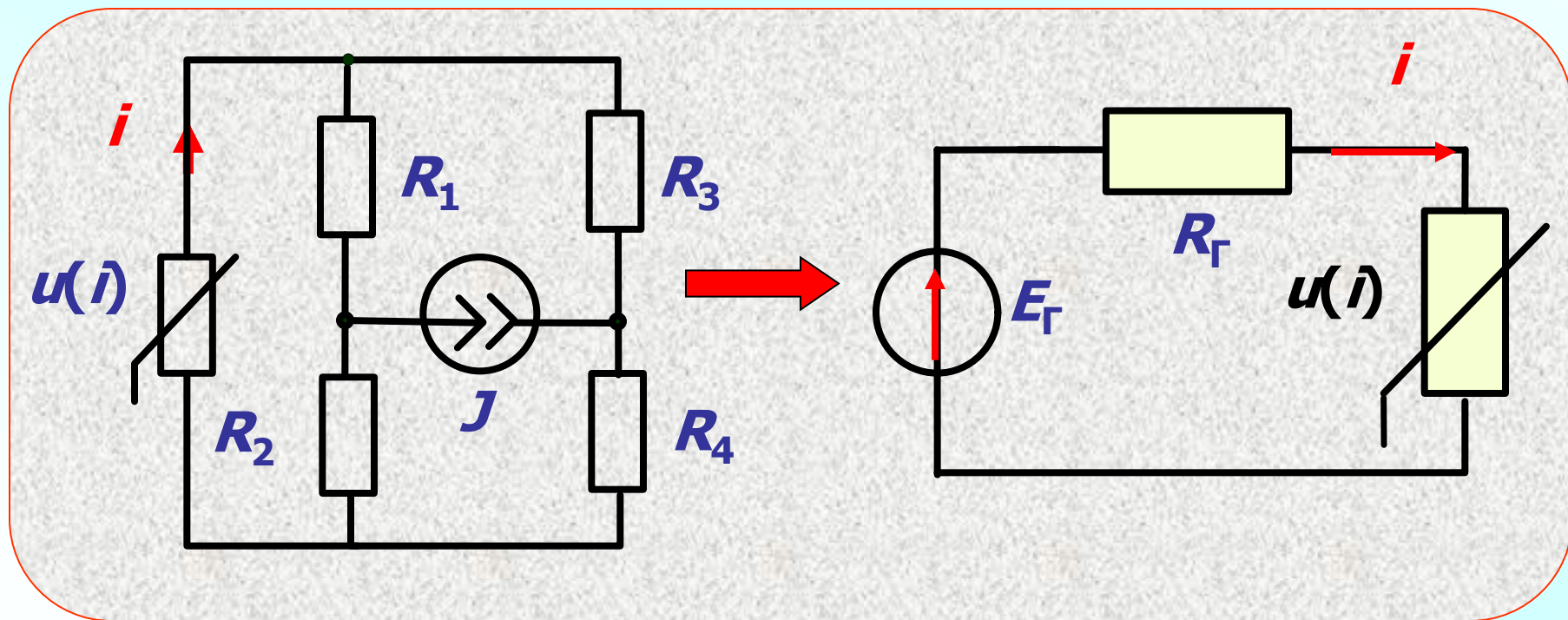
Для некоторых функций процесс может **зацикливаться** или **расходиться**.

Чтобы избежать этого, нужно задать новое приближение, расположенное достаточно близко от решения или записать уравнения относительно других переменных.

**Эффективен прием
улучшения сходимости
итерационного процесса, при
котором уточненное значение
принимается равным**

$$\mathbf{x}_{k+1}^y = \mathbf{x}_k - 0,5 \frac{f(\mathbf{x}_k)}{f'(\mathbf{x}_k)}.$$

Пример 1. Определить ток **НЭ** с ВАХ $i = a u^2 = 0,25 u^2$, если известны: ток источника $J=6$ А; $R_1 = R_4=3$ Ом; $R_2=R_3=5$ Ом.



Решение. Линейную часть цепи заменяем эквивалентным источником с ЭДС E_T , равной напряжению ХХ на разомкнутых зажимах **НЭ**, и эквивалентным сопротивлением цепи относительно этих же зажимов.

По второму закону Кирхгофа

$$U_{xx} = E_{\Gamma} = U_{R_3} - U_{R_4};$$

$$E_{\Gamma} = I_3 R_3 - I_4 R_4 = J / 2 (R_3 - R_4);$$

$$E_{\Gamma} = 3 \cdot 2 = 6 \text{ B.}$$

Эквивалентное сопротивление относительно разомкнутых зажимов НЭ равно:

$$R_{\Gamma} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)};$$

$$R_{\Gamma} = \frac{(3 + 5)(3 + 5)}{(3 + 5 + 3 + 5)} = 4 \text{ Ом.}$$

Уравнение эквивалентной цепи

$$R_{\Gamma} i + u(i) = E_{\Gamma},$$

где $u(i) = (i/a)^{1/2} = 2i^{1/2}$.

Решаем уравнение методом простой итерации, а затем - Ньютона.

а). Поскольку статическое сопротивление ВАХ НЭ с ростом тока убывает (**вогнутость кривой обращена к оси токов**), расчетное уравнение составляем для тока:

$$i_{k+1} = \frac{E_{\Gamma} - u(i_k)}{R_{\Gamma}}.$$

Выберем начальное приближение тока максимально возможным:

$$**i_{(0)} = \frac{E_{\Gamma}}{R_{\Gamma}} = 1,5 \text{ A.}**$$

Определим напряжение, соответствующее этому значению

$$**u(i_{(0)}) = (i_{(0)} / a)^{1/2} = 2,45 \text{ B.}**$$

Подставляя в формулу тока заданную ВАХ в форме $u(i) = 2i^{1/2}$ и числовые значения, получаем

$$i_{(0+1)} = \frac{6 - 2(1,5)^{1/2}}{4} = 0,888 \text{ А.}$$

Процесс вычисления повторяем и находим второе приближение:

$$i_2 = \frac{6 - 2 \cdot (0,888)^{1/2}}{4} = 1,029 \text{ А.}$$

По уравнению для тока находим
третье

$$i_3 = \frac{6 - 2 \cdot (1,029)^{1/2}}{4} = 0,993 \text{ А}$$

и четвертое приближения

$$i_4 = \frac{6 - 2 \cdot (0,993)^{1/2}}{4} = 1,002 \text{ А.}$$

Относительная погрешность вычислений

$$\delta\% = \frac{1,002 - 0,993}{0,993} \cdot 100 = 0,9\%.$$

б). Решение методом Ньютона.

Уточнение решения выполняем по схеме

$$i_{(k+1)} = i_{(k)} - f(i_{(k)})/f'(i_{(k)}),$$

где $f(i) = R_{\Gamma}i + u(i) - E_{\Gamma};$

$$(u(i) = 2i^{1/2}) \quad f'(i) = R_{\Gamma} + i^{-1/2}.$$

За начальное приближение возьмем максимально возможное значение тока 1,5 А.

Тогда ток первого приближения будет

$$i_{(1)} = 1,5 - \frac{4 \cdot 1,5 + (4 \cdot 1,5)^{1/2} - 6}{4 + 1,5^{-1/2}} \approx 0,99 \text{ А.}$$

Для второго приближения получим

$$i_{(2)} = 0,99 - \frac{4 \cdot 0,99 + (4 \cdot 0,99)^{1/2} - 6}{4 + 0,99^{-1/2}} \approx$$
$$\approx 0,999 \text{ А.}$$

Третье приближение дает $i_{(3)} = 1,00$ А, что совпадает с точным аналитическим решением.

Таким образом, итерационный процесс по методу Ньютона обеспечил более быстрое решение.

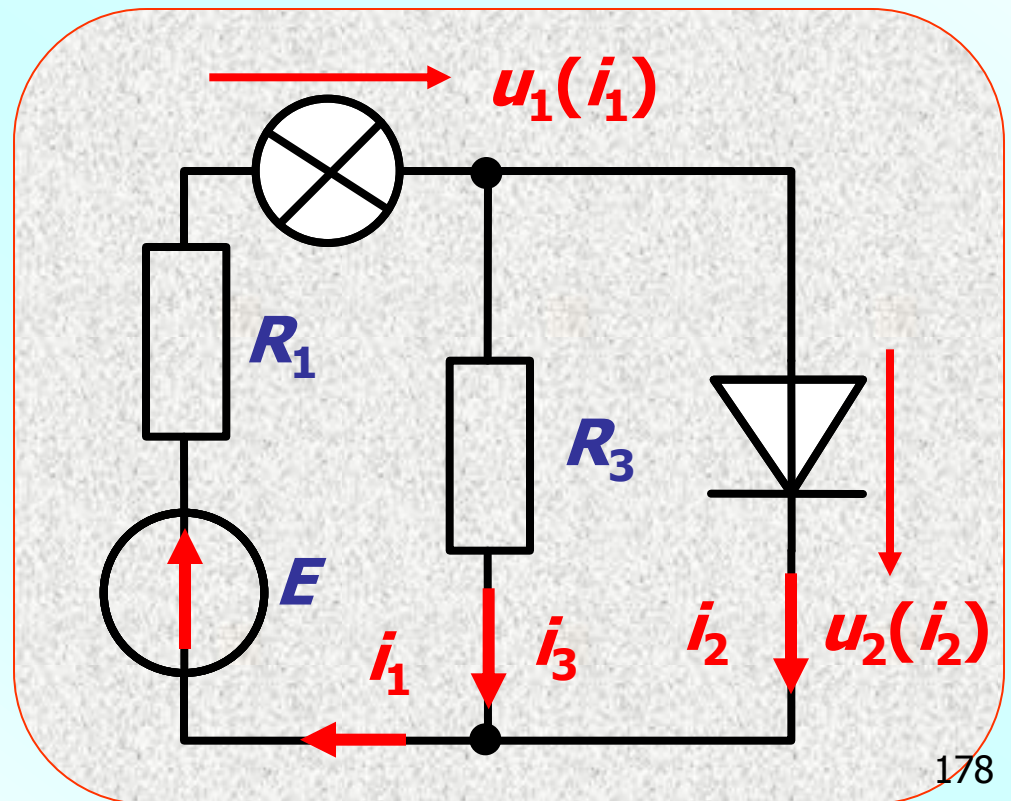
Пример 2. ВАХ НЭ аппроксимированы

выражениями: $u_1(i_1) = m i_1^3$;

$i_2(u_2) = I_0(e^{u_2/U_0} - 1)$, где $m = 0,01 \text{ В/мА}^3$,

$I_0 = 8 \text{ мА}$; $U_0 = 10 \text{ В}$. $E = 20 \text{ В}$; $R_1 = 800 \text{ Ом}$;
 $R_3 = 600 \text{ Ом}$.

**Рассчитать
токи
нелинейных
элементов**



Решение. Выбираем контурные токи схемы таким образом, чтобы они были равны искомым токам нелинейных элементов. Тогда система уравнений запишется следующим образом:

$$(R_1 + R_3)i_1 + u_1(i_1) - R_3i_2 = E;$$

$$-R_3i_1 + R_3i_2 + u_2(i_2) = 0.$$

Выразим напряжения на нелинейных элементах через токи и их статические сопротивления:

$$u_1(i_1) = R_{1\text{CT}} i_1; \quad u_2(i_2) = R_{2\text{CT}} i_2;$$

$$R_{1\text{CT}}(u_1) = \frac{u_1}{i_1(u_1)} = \frac{u_1}{(u_1 / m)^{1/3}};$$

$$R_{2\text{CT}}(i_2) = \frac{u_2(i_2)}{i_2} = \frac{U_0}{i_2} \ln\left(\frac{i_2}{I_0} + \mathbf{1}\right)$$

Решая систему уравнений относительно искомых токов (можно через определители) получаем:

$$\mathbf{i}_1 = \Delta_1 / \Delta; \quad \mathbf{i}_2 = \Delta_2 / \Delta,$$

$$\mathbf{i}_1 = \frac{E(R_{2CT} + R_3)}{R_{2CT}(R_{1CT} + R_1 + R_3) + R_3(R_{1CT} + R_1)};$$

$$\mathbf{i}_2 = \frac{ER_3}{R_{2CT}(R_{1CT} + R_1 + R_3) + R_3(R_{1CT} + R_1)}.$$

Для обеспечения сходимости процесса ток i_1 заменяем на напряжение u_1 и записываем выражения с учетом порядкового номера приближения (номера итерации)

$$u_{1(k+1)} = \frac{E(R_{2CTk} + R_3)R_{1CTk}}{R_{2CTk}(R_{1CTk} + R_1 + R_3) + R_3(R_{1CTk} + R_1)};$$

$$i_{2(k+1)} = \frac{ER_3}{R_{2CTk}(R_{1CTk} + R_1 + R_3) + R_3(R_{1CTk} + R_1)}.$$

Выбираем нулевые приближения:

$$u_{1(0)} = 20 \text{ В}; \quad i_{2(0)} = 25 \text{ мА.}$$

и определяем статические сопротивления

$$R_{1\text{ст}} = \frac{20}{(20 / 0,01)^{1/3}} = 1,587 \text{ кОм};$$

$$R_{2\text{ст}1} = 10 \ln(25 / 8 + 1) / 25 = \\ = 0,567 \text{ кОм.}$$

Подставляя числовые значения в уравнения, находим

$$u_{1(1)} = 11,85 \quad i_{2(1)} = 3,84 \text{ мА.}$$

Дальнейшие расчеты выполняются по тому же принципу.

На пятом шаге итерации процесс сходится:

$$u_{1(5)} = 8,74 \text{ В;} \quad i_{2(5)} = 3,5 \text{ мА.}$$

Численное решение нелинейных уравнений в системе Mathcad

Mathcad имеет несколько функций и вычислительных блоков для решения систем нелинейных уравнений. Основными из них можно считать блоки **Given Find** и **Given Minner**, а также функцию **Solve**.

Слово **Given** открывает вычислительный блок и **располагается после** записи исходных данных и начальных приближений. Правее и ниже слова **Given** вводится система уравнений.

После записи уравнений можно задать ограничения на поиск решения в виде неравенств типа

$$***a \leq x \leq b.***$$

Функция **Find** выдает **решение** в виде вектора. Полученные **корни** надо обязательно **проверить** подстановкой в исходные уравнения или построением графика, т.к. MathCAD может вывести корни, не имеющие физического смысла. Если **система сообщает**, что **нет решения**, можно повторить расчеты, задавая новые приближения.

Можно перейти к другому алгоритму расчета, выбрав его в **контекстном меню** (после щелчка правой кнопкой мыши по функции **Find**).

Функция **Minner** может давать приближенные решения уравнений, не имеющих точного решения. Ниже приведено численное решение в блоке **Given Find** предыдущего (**№2**) примера.

$$R_1 := 0.8 \quad R_3 := 0.6 \quad m := 0.01$$

$$U_0 := 10 \quad I_0 := 8 \quad E := 20$$

Given

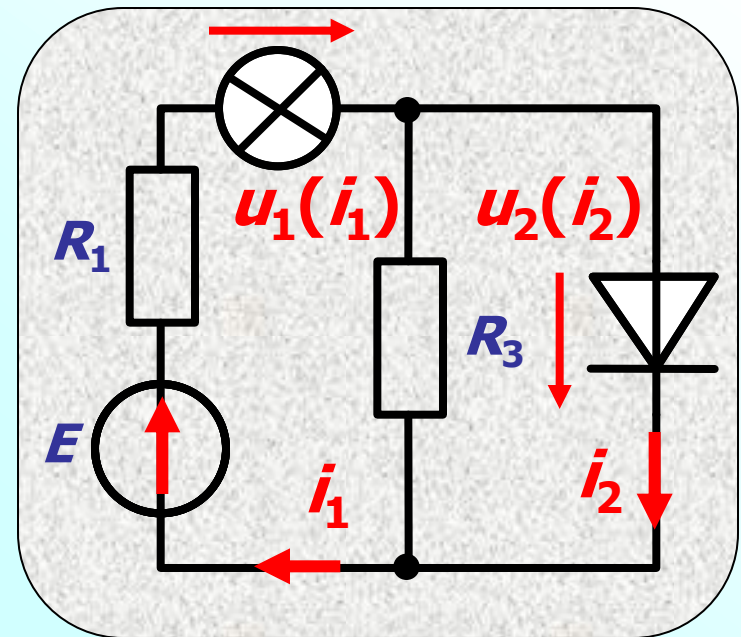
$$u_1 + (R_1 + R_3) \cdot i_1 - R_3 \cdot i_2 = E$$

$$u_2 - R_3 \cdot i_1 + R_3 \cdot i_2 = 0$$

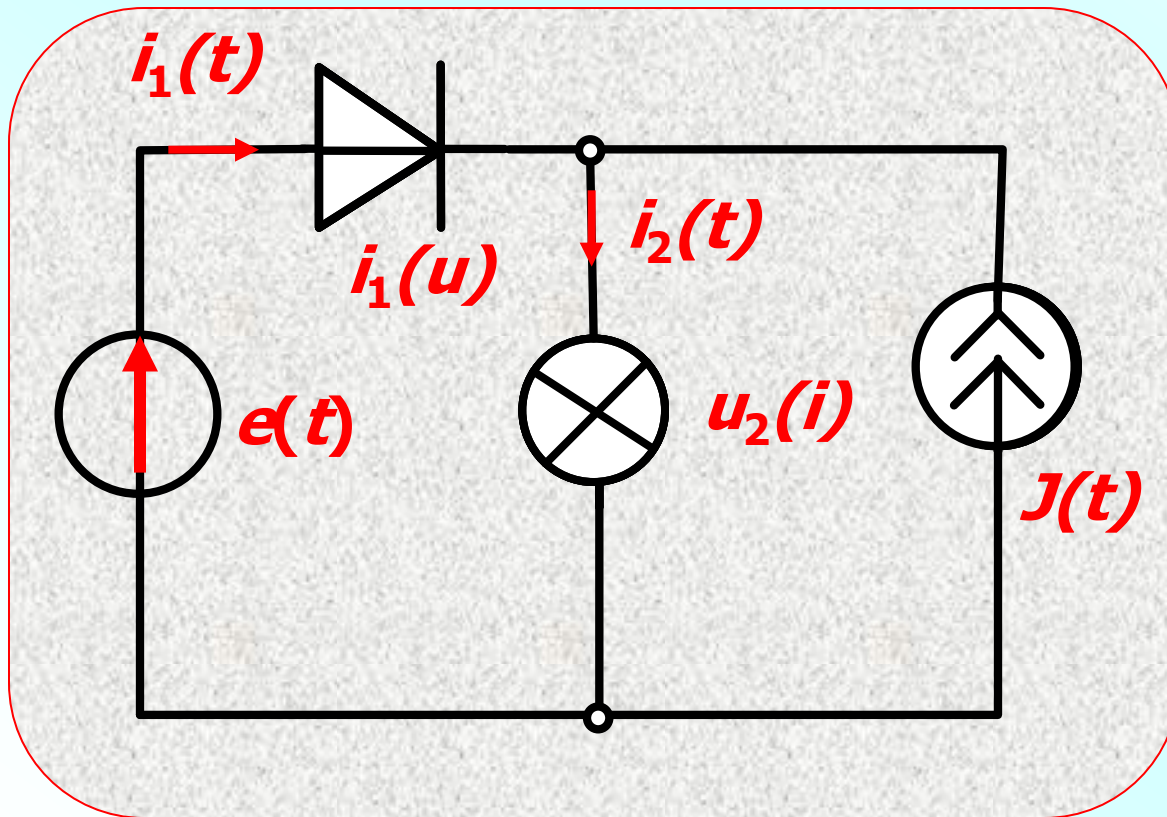
$$u_2 = U_0 \cdot \ln\left(\frac{i_2}{I_0} + 1\right) \quad u_1 = m \cdot i_1^3$$

$$\text{Find}(i_1, u_1, i_2, u_2)^T \text{ float, 3} \rightarrow (9.56 \quad 8.72 \quad 3.50 \quad 3.63)$$

Ед. измерения: кОм;
вольт, миллиампер



MathCad позволяет рассчитывать цепи с воздействиями, изменяющимися во времени.



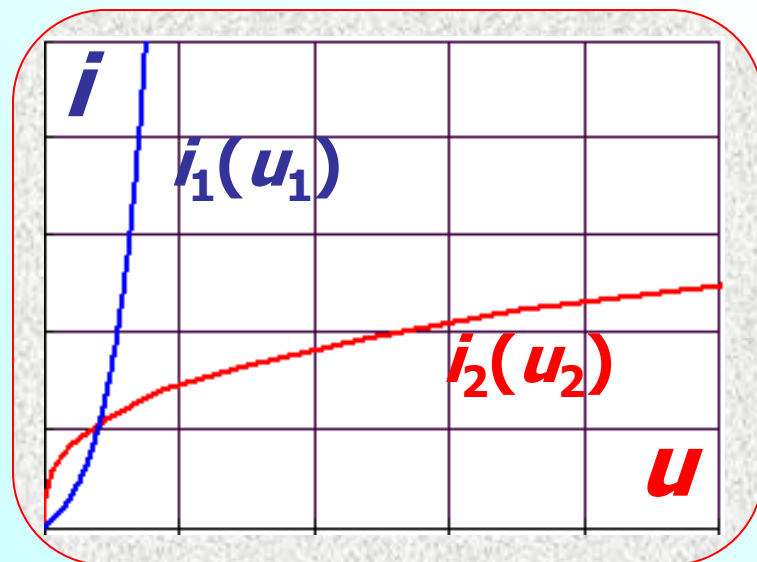
Пример 3.
Найти токи и напряжения НЭ.

Дано: $e(t) = 200 \sin 500t$ В;

$$J(t) = 1 \cos 500t \text{ A};$$

$$i_1 = 0,1 \left(e^{0,02 \cdot u_1} - 1 \right) \text{ A};$$

$$u_2 = 100 i_2^3 \text{ В.}$$



Решение. Записываем уравнения цепи:

$$-i_1 + i_2 - J(t) = 0;$$

$$e(t) = u_1(i_1) + u_2(i_2).$$

Чтобы процесс сходился, переменными выбираем u_2 и i_1 . Составленные уравнения переписываем в форме:

$$i_1 - \sqrt[3]{\frac{u_2}{100}} + 1 \cos(500t) = 0;$$

$$50 \ln(10i_1 + 1) + u_2 - 200 \sin 500t = 0.$$

Решаем в **MathCad** уравнения относительно u_2 и i_1 , затем находим i_2 и u_1 .

Рабочий документ MathCAD

$j := 0 .. 100$ $t_j := 0.0002 \cdot j$ $u2 := 100$ $i1 := 1$ - начальные значения

Given $i1 + 1 \cdot \cos(500 \cdot t) - \sqrt[3]{\frac{u2}{100}} = 0$

$50 \cdot \ln(10 \cdot i1 + 1) + u2 - 200 \cdot \sin(500 \cdot t) = 0$

$x(t) := \text{Find}(u2, i1)$ $\begin{pmatrix} u2_j \\ i1_j \end{pmatrix} := x(t_j)$

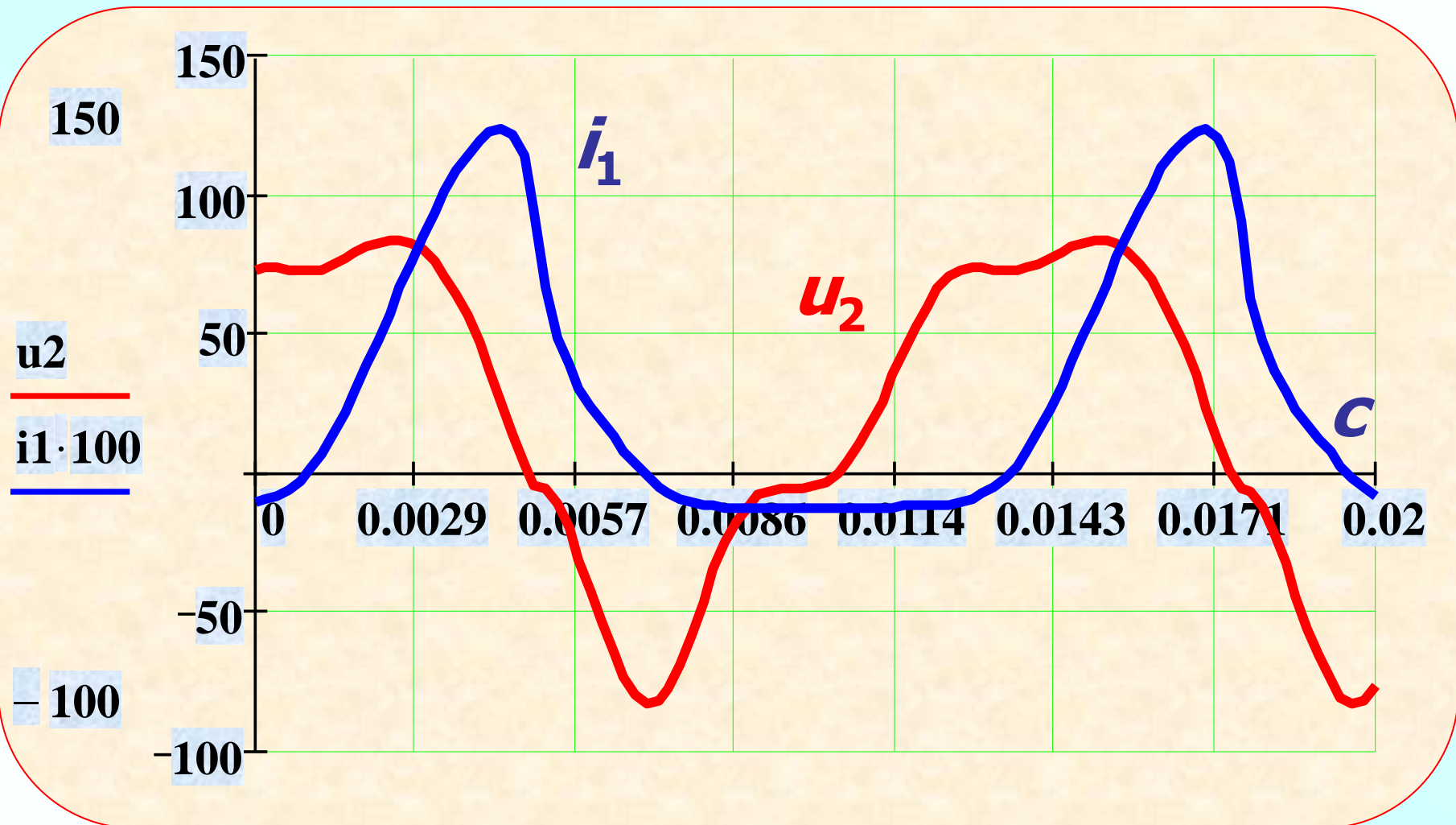
$u2^T =$

	0	1	2	3	4	5
0	78.114	79.283	79.256	78.634	78.053	78.01

$i1^T =$

	0	1	2	3	4	5
0	-0.079	-0.069	-0.055	-0.032	$-3.374 \cdot 10^{-4}$	0.043

Графики изменения u_2 и i_1



Расчет нелинейной цепи методом минимизации мощности потерь

Все явления в природе совершаются с минимальной затратой энергии (принцип Гамильтона). Распространив этот принцип на электрическую цепь, заключаем: токи в ветвях цепи распределяются так, чтобы мощность, выделенная в резисторах была минимальной.

Иными словами, рассеиваемая в резисторах мощность будет минимальной, если токи (напряжения) **являются решением уравнений цепи.**

Согласно теореме Теледжена, сумма мощностей электрической цепи равна нулю, т.е. выполняется баланс мощностей - выработанных и потребленных (рассеянных).

Сумма рассеянных мощностей или **функционал мощности** записывается:

$$F(u) = \sum_k G_k u_k^2 - 2 \sum_m u_m J_m$$

при питании от источника тока, или

$$\Phi(u) = \sum_k R_k i_k^2 - 2 \sum_m e_m i_m$$

при питании от источника ЭДС.

Функционал - функция, заданная на интервале, которой можно поставить в соответствие некоторое число.

Например, мгновенная мощность ветви с напряжением u и током i – функционалы мощности:

$$p(u) = \int_0^u i(u) du \quad p(i) = \int_0^i u(i) di.$$

Независимо от выбранных переменных функционал представляет собой выражение, записанное для баланса мощностей. Его минимум – решение уравнений цепи.

Убедимся в этом **на конкретном примере.**

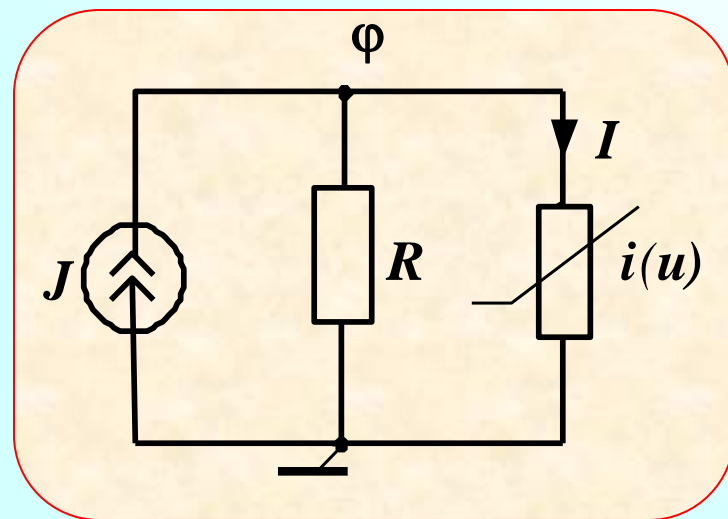
Пусть $J=1$ А; $R=2$ Ом; $i(u)=u+0,5u^3$.

Мощность рассеяния цепи:

$$P(u) = Gu^2 + \int_0^u i(u)du$$

Функционал мощности:

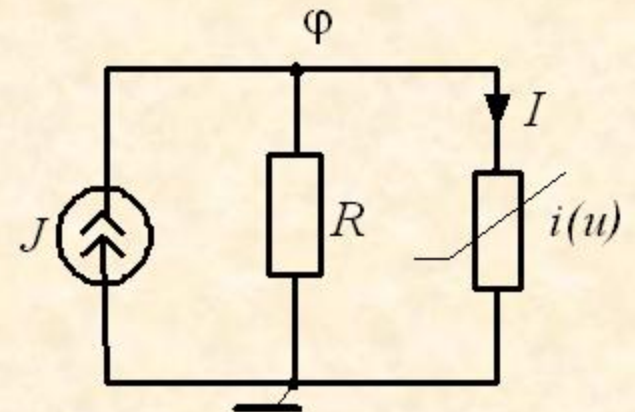
$$F(u) = Gu^2 + 2 \int_0^u i(u)du - 2Ju$$



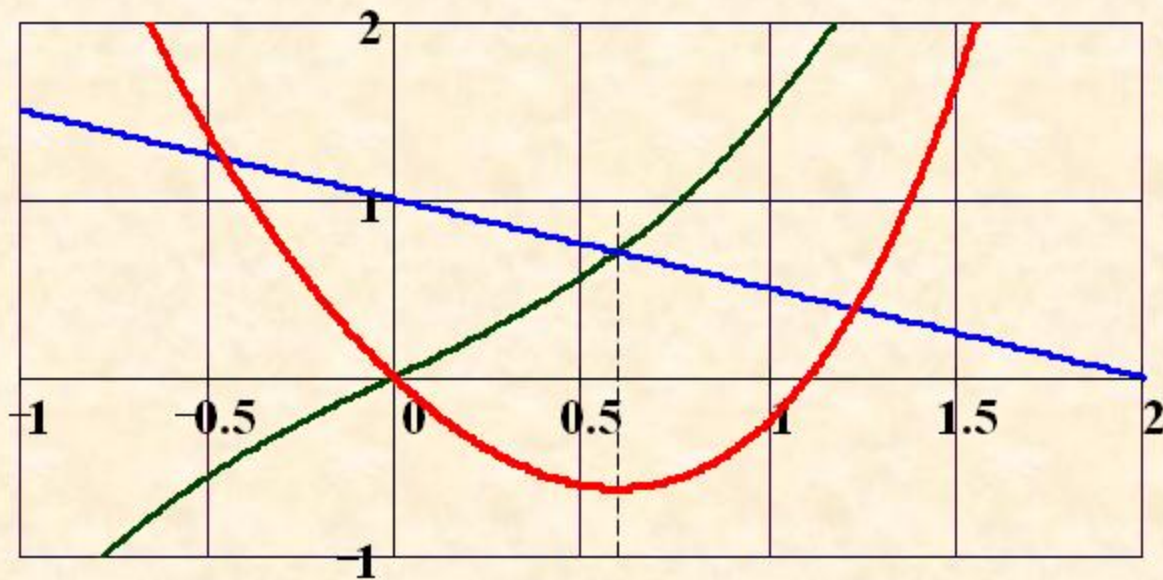
$$\underline{J} := 1 \quad \underline{G} := 0.5$$

$$\mathbf{I}(\phi) := \mathbf{J} - \mathbf{G} \cdot \phi \quad \mathbf{i}(\phi) := \phi + 0.5 \cdot \phi^3$$

$$\mathbf{F}(\phi) := \mathbf{G} \cdot \phi^2 + 2 \cdot \int_0^\phi \mathbf{i}(\phi) d\phi - 2 \cdot \mathbf{J} \cdot \phi$$



$\mathbf{i}(\phi)$
 $\mathbf{I}(\phi)$
 $\mathbf{F}(\phi)$



ϕ

$$\mathbf{i}_1(\phi) := \phi + \mathbf{0.5} \cdot \phi^3 \quad \phi := \mathbf{0}$$

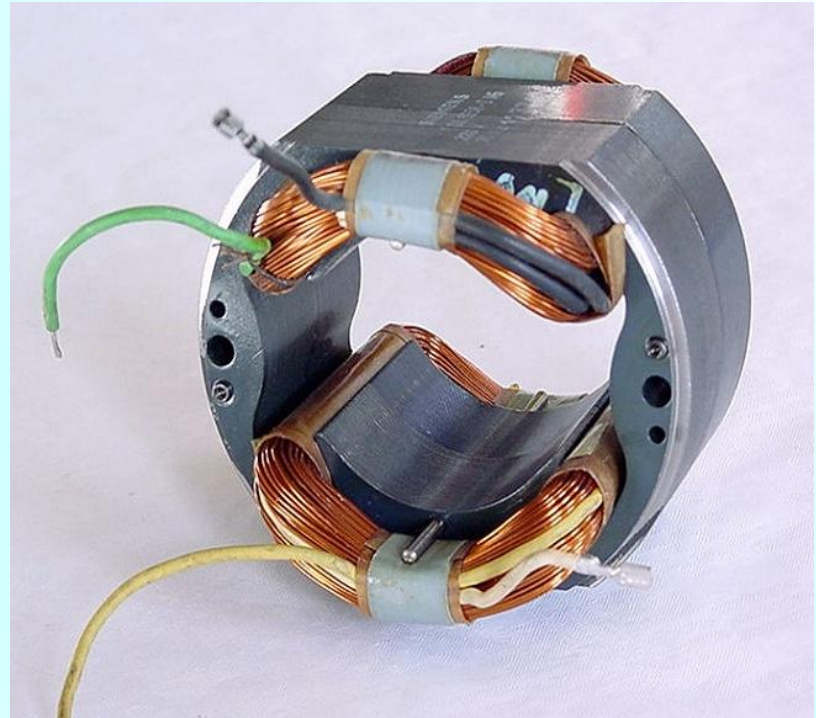
$$\mathbf{Given} \quad \mathbf{i}_1(\phi) + \mathbf{G} \cdot \phi - \mathbf{J} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x} := \mathbf{Find}(\phi) \quad \mathbf{x} = \mathbf{0.596}$$

$$\mathbf{Given} \quad \mathbf{F}(\phi) := \mathbf{G} \cdot \phi^2 + 2 \int_0^{\phi} \mathbf{i}_1(\phi) \, d\phi - 2\phi \cdot \mathbf{J}$$

$$\frac{d}{d\phi} \mathbf{F}(\phi) = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} := \mathbf{Find}(\phi) \quad \mathbf{x} = \mathbf{0.596} \blacksquare$$

Нелинейные индуктивные цепи



**Нелинейные индуктивные
элементы (НИЭ) запасают
энергию в магнитном поле и
характеризуются нелиней-
ными вебер-амперными
характеристиками $\psi(l)$ (ВбАХ).**

ВБАХ НИЭ определяются свойствами материала сердечника катушки и при отсутствии в нем зазора повторяет кривую намагничивания сердечника **$B(H)$** .

ВБАХ, как и ВАХ, бывают статическими и динамическими, однозначными и многозначными, симметричными и несимметричными.

ВБАХ катушек с ферромагнитными сердечниками при циклическом перемагничивании имеют гистерезисный характер.

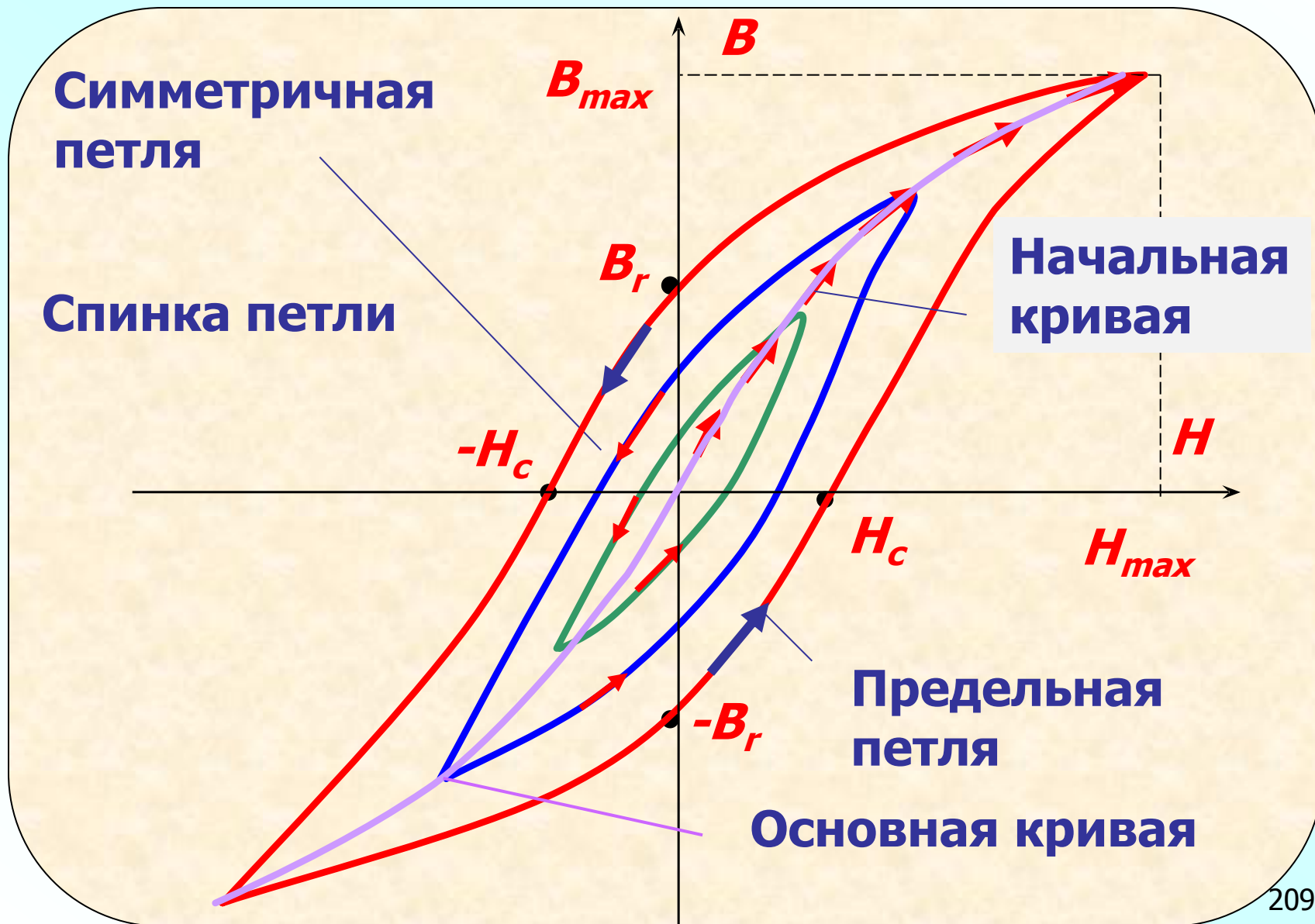
Гистрезис – явление отставания изменений магнитной индукции **B** от изменений напряженности поля **H** . Обусловлен внутренним трением областей самопроизвольного намагничивания

При плавном увеличении **тока** намагничивания **размагниченого материала** сначала получается начальная кривая (**НК**). При периодических перемагничиваниях различными амплитудными значениями тока (напряженности **H_m**) получают гистерезисные петли (**ГП**)

Различают частные и предельные гистерезисные петли.

Основная кривая намагничивания – геометрическое место вершин симметричных петель гистерезиса. При анализе электромагнитных устройств пользуются **основной кривой** намагничивания, которая приводится **в справочниках**.

Петли магнитного гистерезиса



Точный анализ ведется с учетом всей ВБАХ в виде ГП. Часть **предельной петли гистерезиса**, расположенной во второй четверти ("спинка" петли), называется кривой **размагничивания**.

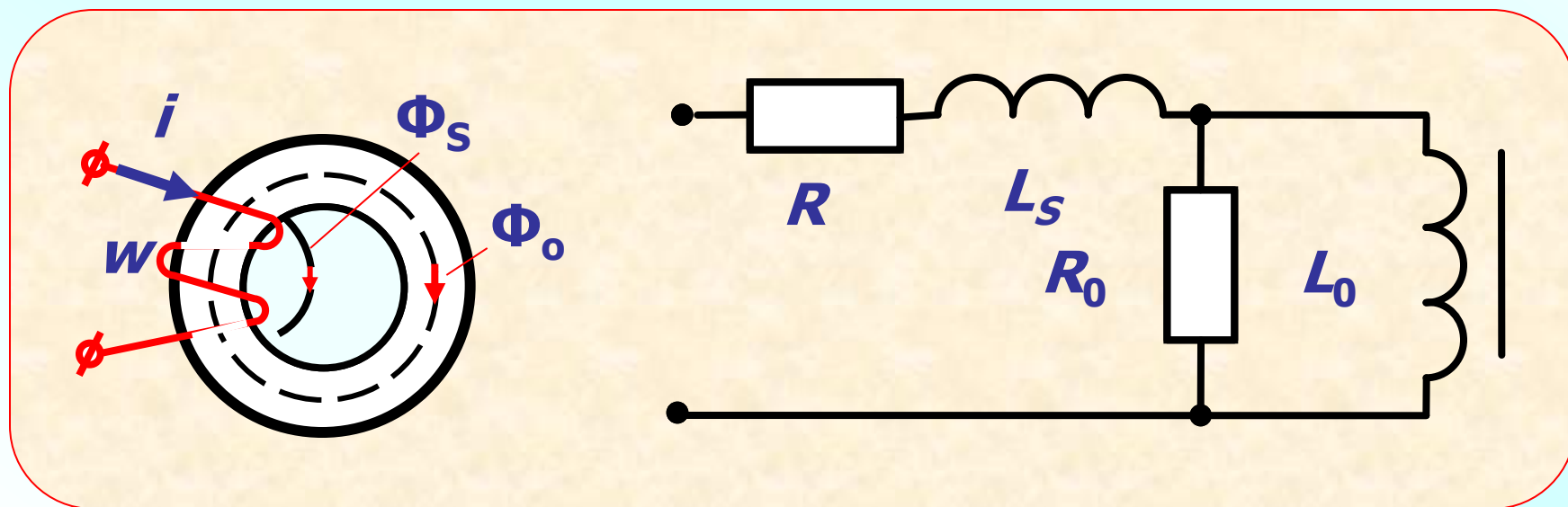
Индукция B_r , сохраняющаяся в материале при снятии поля ($H=0$), называется **остаточной**, а напряженность H_c , необходимая для размагничивания материала, - **коэрцитивной силой**. Эта часть кривой нужна для расчета цепей с постоянными магнитами.

Материалы с большой коэрцитивной силой называют **магнитно-твердыми** (углеродистые и вольфрамовые стали, магнито). Они имеют широкую петлю гистерезиса в отличие от **магнитно-мягких** материалов с узкой петлей гистерезиса (железо, пермаллой, ферриты).

Любая реальная катушка с ферромагнитным сердечником обладает:

- 1– потерями в меди (активное сопротивление обмотки);**
- 2 – потерями на гистерезис;**
- 3 – потерями на вихревые (индуцированные) токи.**

С учетом активных потерь и рассеяния потокоцепления катушка с ϕ/m сердечником может быть представлена схемой замещения

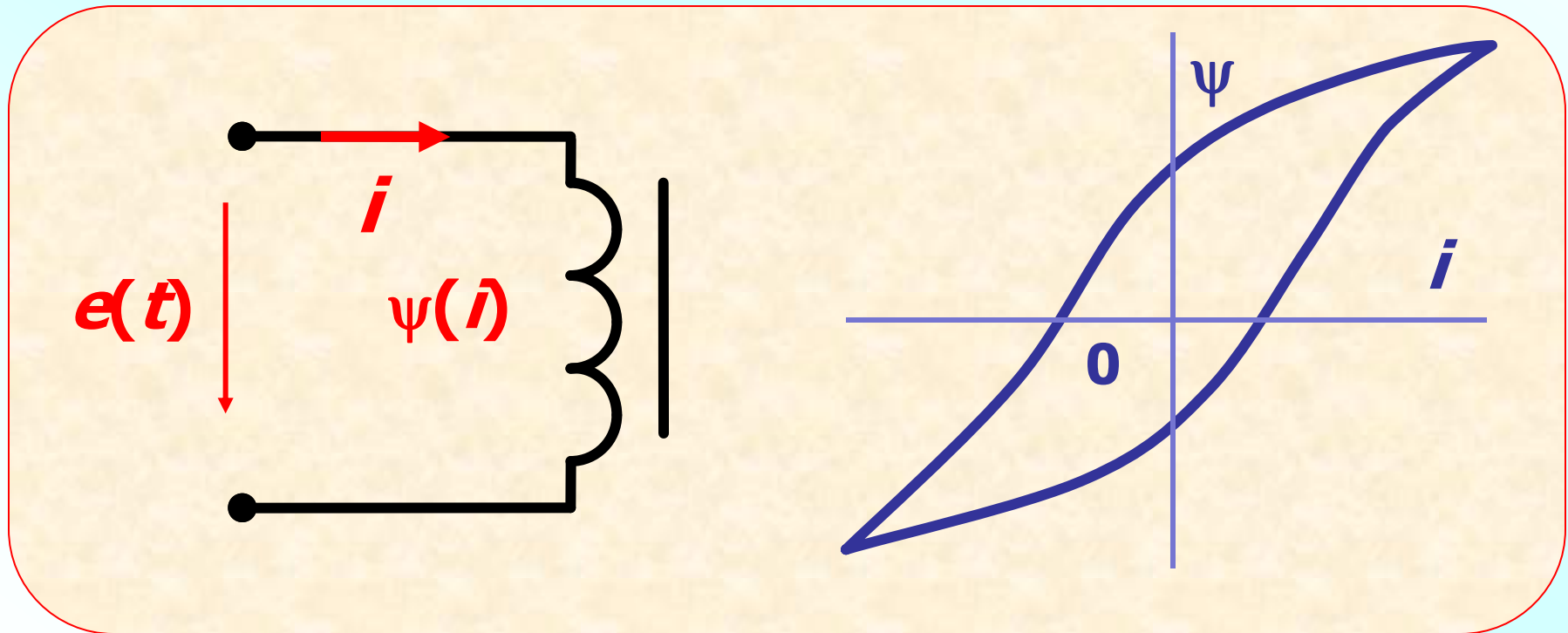


Если пренебречь активными потерями R , и R_0 и индуктивностью рассеяния L_s , получим идеальный НИЭ. Он может быть многополюсным. Для этого на одном сердечнике располагают несколько обмоток.

Цепи с **НИЭ** описываются **функциональными уравнениями**, если в качестве переменных выбираются **потокосцепление и ток**. В этом случае они рассчитываются теми же методами, что и резистивные. Переход от переменной ψ к i осуществляется по формулам:

$$u = d\psi / dt; \quad \psi = \int u dt.$$

Пример 1. Определить ток в цепи с нелинейной индуктивностью, входная ВБАХ которой задана графически, а ЭДС $e(t) = E_m \cos \omega t$.



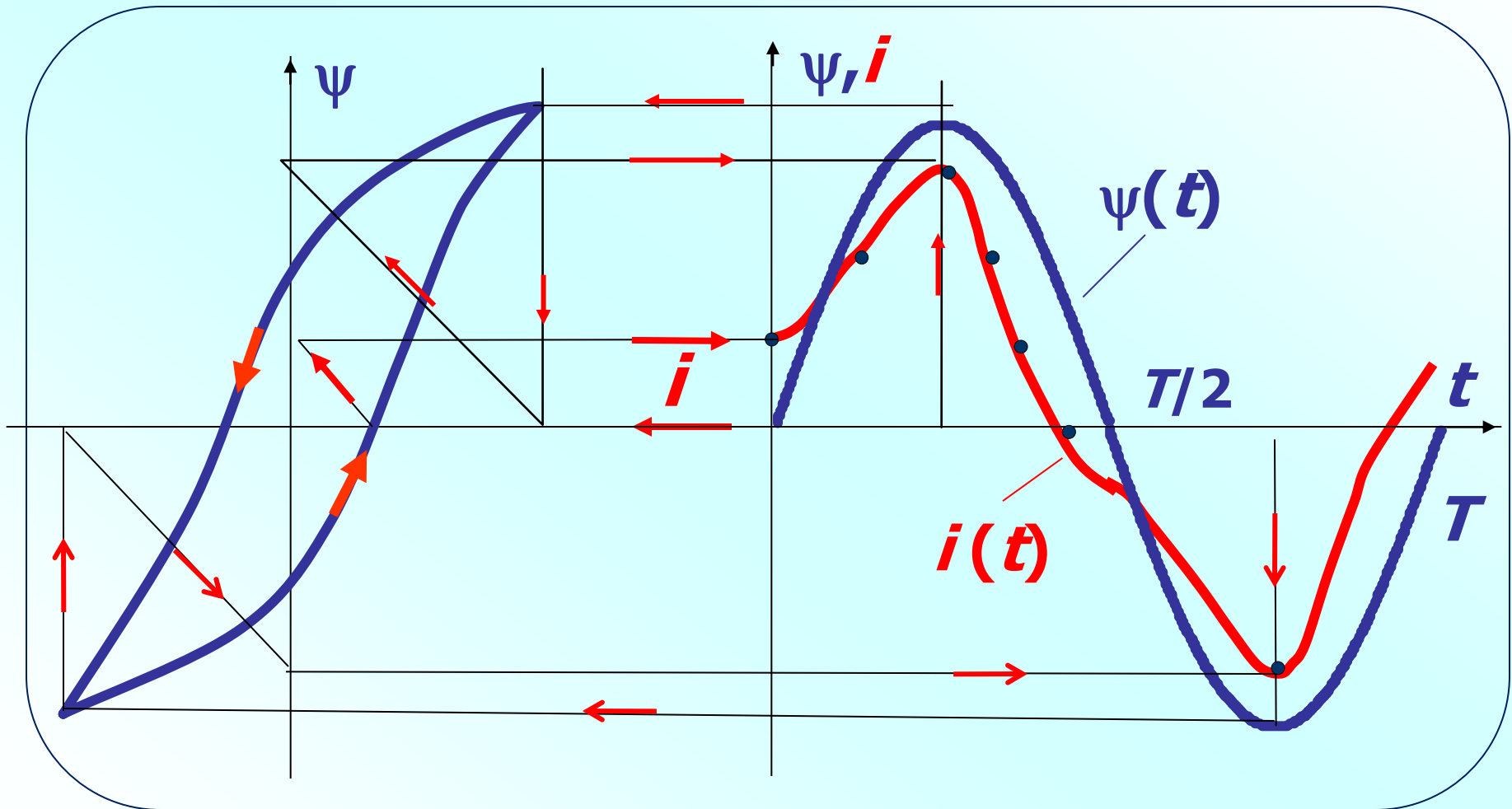
Решение. Воспользуемся методом отображающей точки, предварительно определив закон изменения потокосцепления

$$\psi(t) = \int E_m \cos \omega t dt = \frac{E_m}{\omega} \sin \omega t,$$

E_m/ω - амплитуда
потокосцепления.

**Построив кривую изменения
потокосцепления во времени
 $\psi(t)$ и отображая на
характеристику ряд точек этой
кривой, находим
соответствующие им точки
кривой тока.**

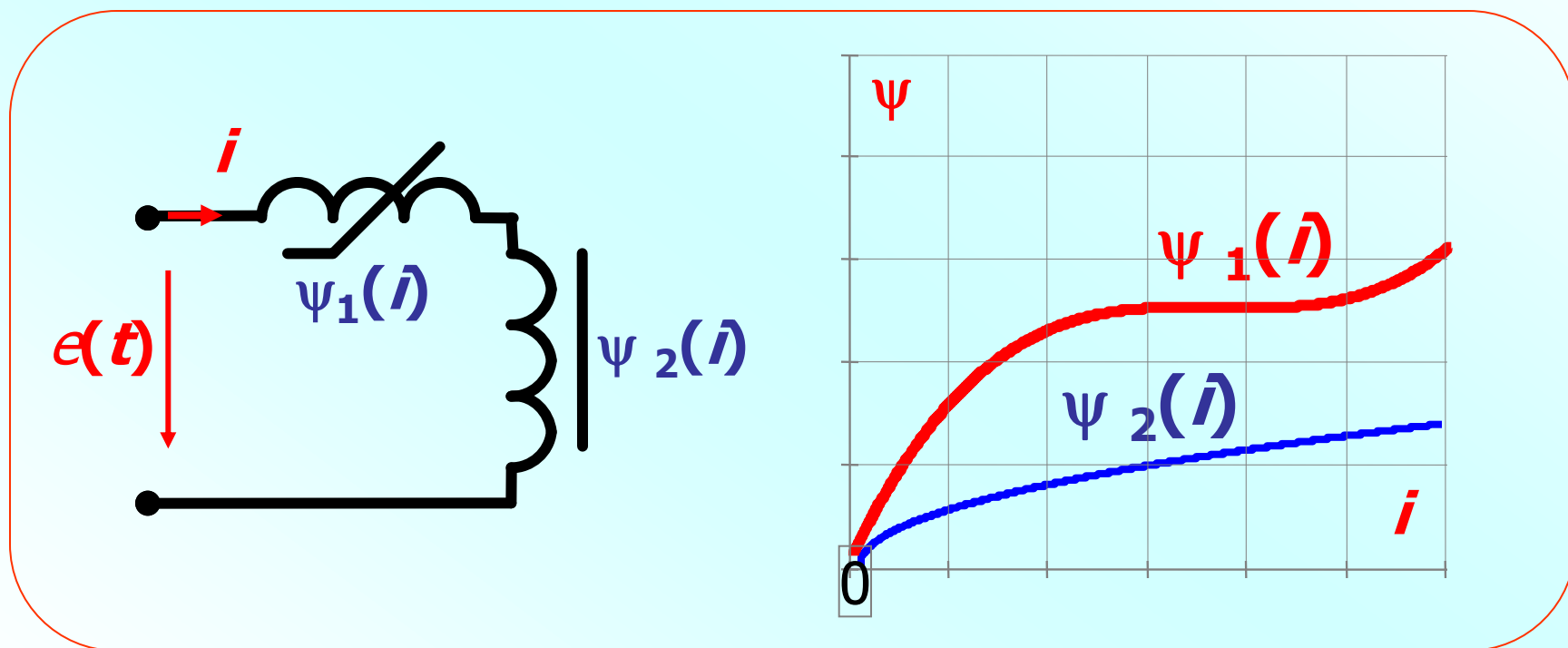
Построение кривой тока методом отображающей точки



Из-за нелинейной зависимости при **синусоидальном** потокосцеплении (напряжении) ток катушки **несинусоидальный**. При питании цепи от синусоидального источника **тока** в катушке будут несинусоидальными **потокосцепление** и напряжение.

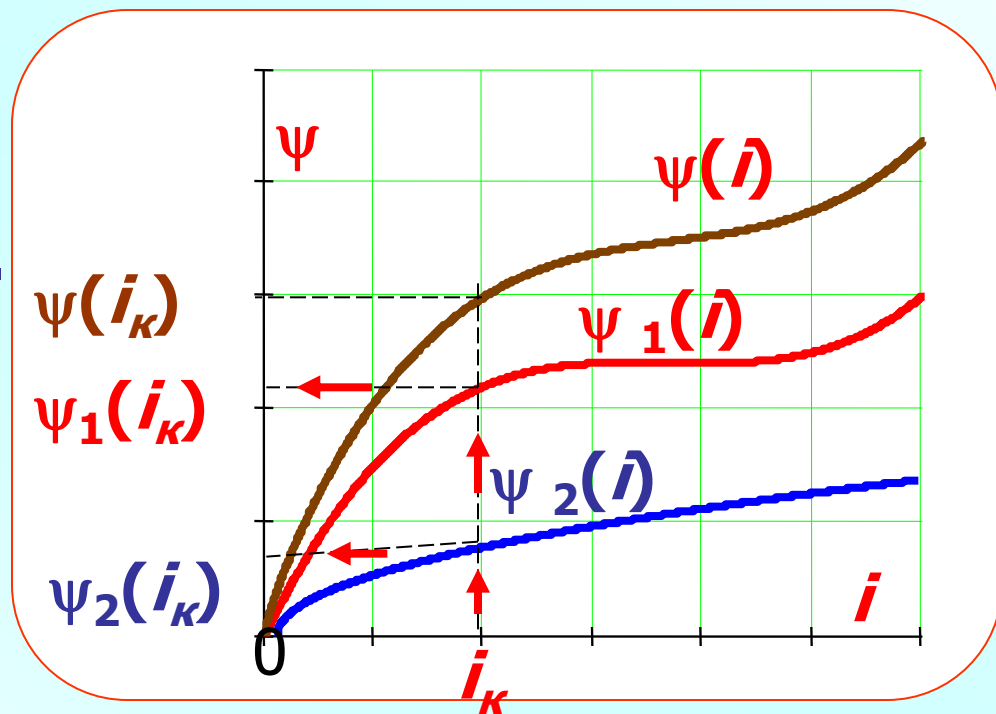
Несинусоидальные кривые тока и напряжения симметричны относительно оси абсцисс и не содержат четных гармоник, причем ток и потокосцепление за счет петли гистерезиса не совпадают по фазе.

Пример 2. Определить **входную ВБАХ** последовательно соединенных **НИЭ** с заданными $\psi_2(\bar{i})$ и $\psi_1(\bar{i})$.



Решение. При последовательном соединении **НИЭ** эквивалентная (входная) ВБАХ определяется суммированием ординат **ВБАХ НИЭ**.

Произвольно задавая значения тока, суммируем соответствующие им потокоцепления



Пример 3. Входная ВБАХ примера 2 аппроксимирована функцией $i = 4\psi^3$.
Определить ток цепи при входном напряжении $u(t) = 100\sin(100t)$.

Решение. Найдем закон изменения потокосцепления:

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \int u(t)dt = \int 100 \sin(100t)dt = \\ &= 1\sin(100t - 90^\circ) \quad \text{Вб}\end{aligned}$$

Закон изменения тока в цепи

$$i(t) = 4 \sin^3(100t - 90^\circ) \text{ А.}$$

Преобразуем выражение, учитывая равенство

$$\sin^3 x = 0,75 \sin x - 0,25 \sin 3x :$$

$$i(t) = 3 \sin(100t - 90^\circ) - 1 \sin(300t + 90^\circ) \text{ А.}$$

Действующее значение тока

$$I = \sqrt{\sum I_k^2} = \sqrt{\frac{3^2 + 1^2}{2}} = 2,24 \text{ А.}$$

Пример 4. Катушка индуктивности без потерь с ВБАХ

$$\psi(i) = 0,35i - 0,005i^3,$$

где ψ (Вб), i (А), подключена к источнику тока $J(t) = 4\sin 100t$, А.

Определить действующее значение напряжения на источнике.

Решение. Напряжение на источнике

$$u_J(t) = u_L(t) = d\psi / dt.$$

Изменение потокосцепления во времени:

$$\begin{aligned}\psi(t) &= 0,35 \cdot 4 \sin 100t - 0,005(4 \sin 100t)^3 = \\ &= 1,16 \sin 100t + 0,08 \sin 300t \quad \text{Вб}\end{aligned}$$

Закон изменения напряжения:

$$u_J(t) = 116 \cos 100t + 24 \cos 300t.$$

Действующее значение напряжения

$$U = \sqrt{\sum U_k^2} = \sqrt{\frac{116^2 + 24^2}{2}} = 83,7 \text{ В.}$$

Проверим?

Нелинейные магнитные цепи.

**Основным элементом
нелинейной катушки является
ф/м сердечник или
магнитопровод (МП).**

Назначение **МП** – концентрация магнитного потока.

МП бывают **разветвленными** и **неразветвленными**.

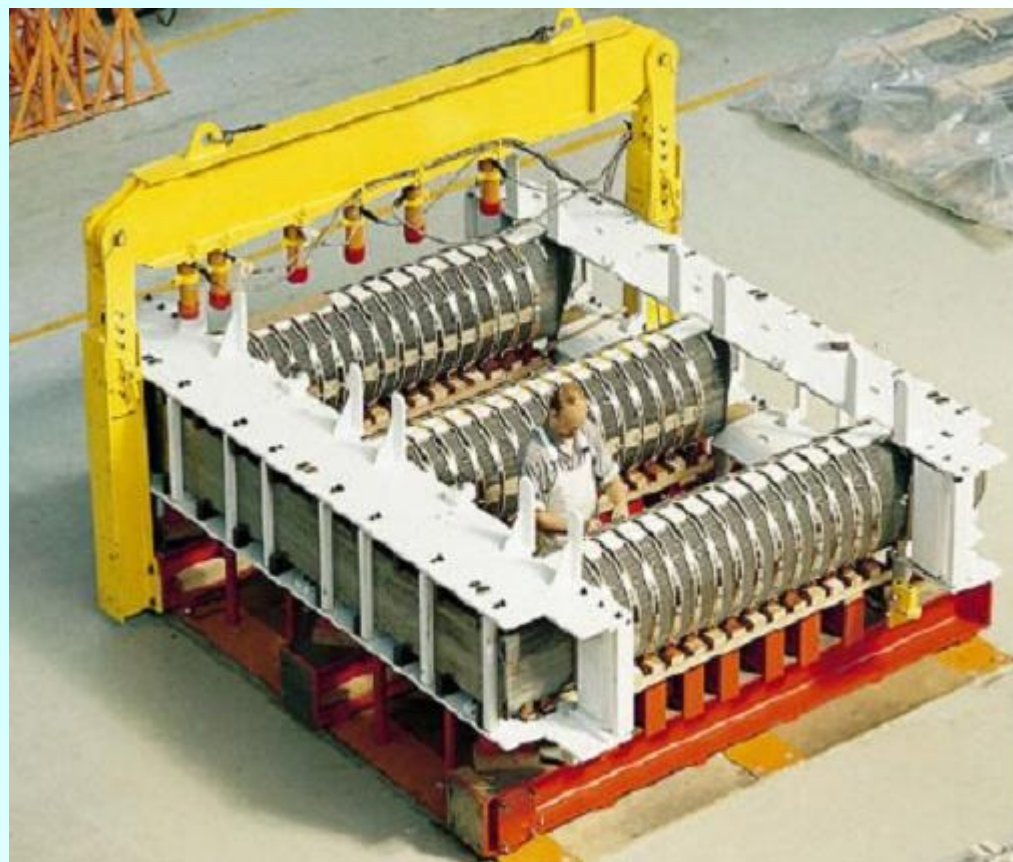
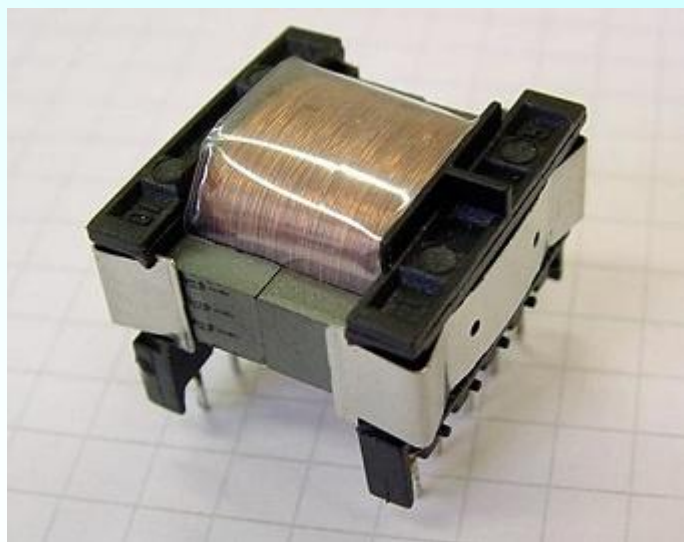
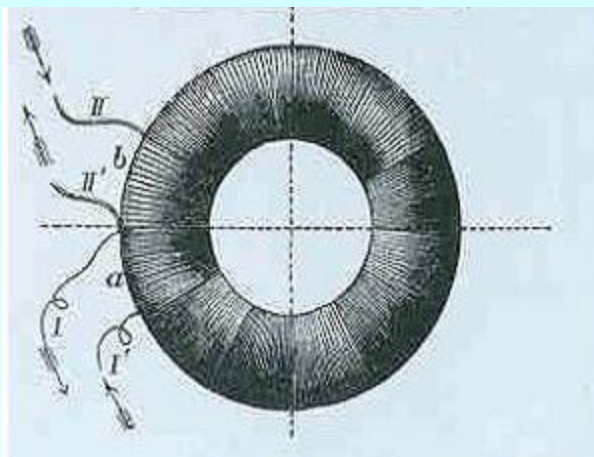
Их выполняют как из одного материала – их называют

однородными, так и из

различных – их называют

неоднородными

Примеры магнитопроводов



Устройства, состоящие из катушек с ф/м сердечниками или постоянных магнитов и магнитопроводов, концентрирующих магнитное поле, называют магнитными цепями (МЦ). МЦ – это электрические машины, магнето, электромагнитные реле, измерительные приборы и многое другое.

Различают две задачи анализа МЦ. Прямая задача – определение магнитодвижущих сил (МДС) в ф/м сердечнике известных геометрических размеров и кривой намагничивания по заданному магнитному потоку Φ или индукции B .

**Обратная задача анализа –
определение магнитного поля
(магнитной индукции или
потока) на участках
магнитопровода известных
геометрических размеров и
кривой намагничивания по
заданным МДС.**

Обе задачи **решаются** в предположении, что магнитные поля в сечениях отдельных участков магнитопроводов **однородные**.

Это выполняется, если:

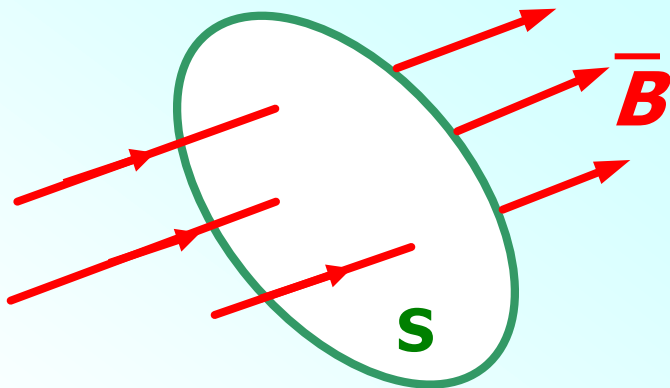
- а) поперечные **размеры** сердечника **малы** по сравнению с его длиной;
- б) **нет** глубокого **насыщения** материала сердечника и **нет** потоков рассеяния ($\mu \gg 1$);

в) величины зазоров пренебрежимо малы относительно поперечного сечения сердечника.

ГП намагничивания в расчетах заменяют основной кривой.

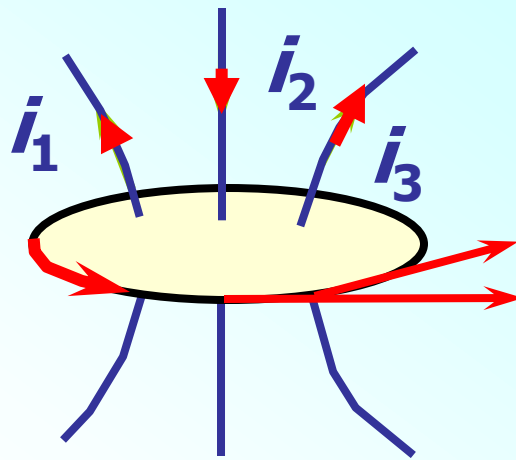
МДС и магнитные потоки принимаются постоянными. Для цепей с потоками невысоких частот расчет ведется в амплитудных значениях.

В основе расчета магнитной цепи лежат **принцип непрерывности магнитного потока** (магнитный поток сквозь замкнутую поверхность равен нулю)



$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

и закон полного тока (циркуляция вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру равен алгебраической сумме токов, охваченных этим контуром)



$$\oint_l \overline{H} \overline{d\ell} = \sum i;$$

$$\oint_l \overline{H} \overline{d\ell} = \sum_k \pm i_k = i_1 - i_2 + i_3.$$

Вводя понятия «**узел**» (место соединения трех и более стержней (**ветвей**) магнитопровода) и «**контур**» (замкнутый путь для магнитного потока) можно записать основные уравнения магнитной цепи:

$$\sum_{k=1}^m \Phi_k = \sum B_k S_k = 0, \quad (1)$$

где Φ_k - поток в k стержне;
 m - число стержней, сходящихся в узле;

$$\sum_{k=1}^n H_k \ell_k = \sum_{k=1}^n U_{mk} = F \quad (2)$$

где n - число участков цепи, образующих контур;

U_{mk} - падение магнитного напряжения на k - участке;

F - МДС контура, равная $F = Iw$;

ℓ - длина осевой линии участка.

Уравнения (1) и (2) - аналоги первого и второго законов Кирхгофа для магнитной цепи.

Закон Ома для магнитной цепи получается из анализа неразветвленной цепи:

$$\Phi = BS = \mu_a HS = \mu_a S \frac{wi}{l}.$$

Величина $\frac{l}{\mu_a S} = R_M$ (Гн⁻¹)

- магнитное сопротивление.

Оно прямо пропорционально длине магнитопровода и обратно пропорционально его сечению и абсолютной проницаемости μ/m материала. Подставляя, имеем

$$\Phi = wI / R_M, \text{ или } \Phi = F / R_M.$$

Таким образом, все основные уравнения МЦ аналогичны уравнениям электрической цепи.

Для воздушного зазора

$$\mu_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$$

поэтому

$$R_M = 0,8 \cdot 10^6 \frac{\ell}{S}.$$

**Для неразветвленной цепи из n –
участков магнитное сопротивление
будет определяться**

$$R_M = \sum_{j=1}^n R_{Mj}.$$

Сопротивление магнитной цепи определяет статическую индуктивность катушки:

$$L = \frac{\psi}{i} = \frac{\Phi \cdot W^2}{F} = \frac{W^2}{R_M}.$$

Так как уравнения **МЦ** аналогичны уравнениям резистивной цепи, их расчет выполняется методами, рассмотренными для резистивных цепей.

В отличие от резистивной цепи, расчет начинают с определения геометрических **размеров однородных **участков**.**

При этом удобно пользоваться схемами **замещения, представляя каждый **участок МП** магнитным **сопротивлением**, а катушку намагничивания – **МДС**.**

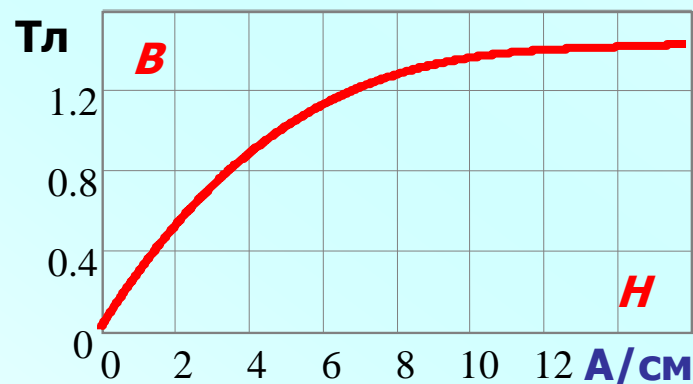
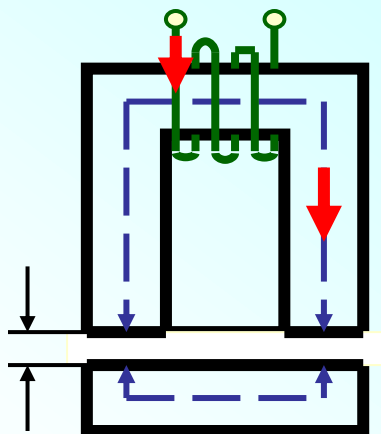
Порядок расчета **неразветвленной магнитной цепи:**

а) прямая задача (задан магнитный поток). Сначала определяют **индукцию** на участках цепи, а **затем** по кривым намагничивания – **напряженности.**

Суммируя магнитные напряжения (2), находят искомую МДС;

б) обратная задача (задана МДС).
Сначала **строят** магнитную
характеристику цепи $U_M = f(\Phi)$.
Для этого задают несколько
значений Φ и вычисляют
соответствующие им U_M , т.е.
решают несколько прямых задач).

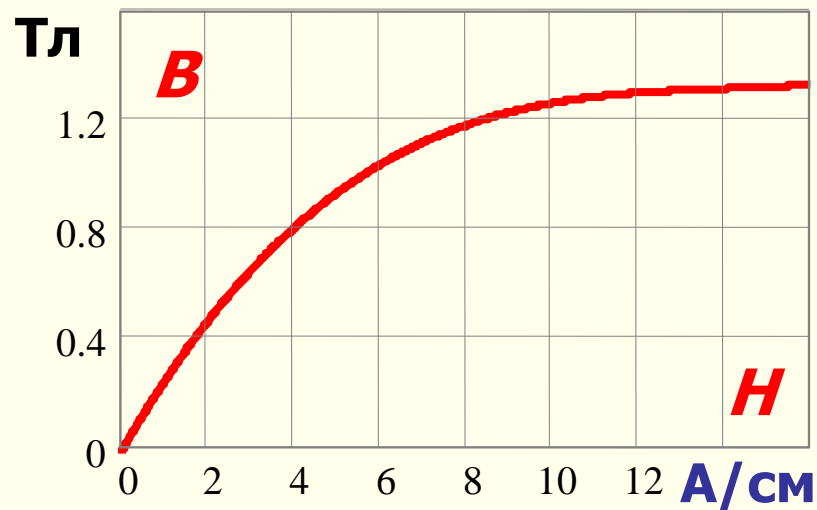
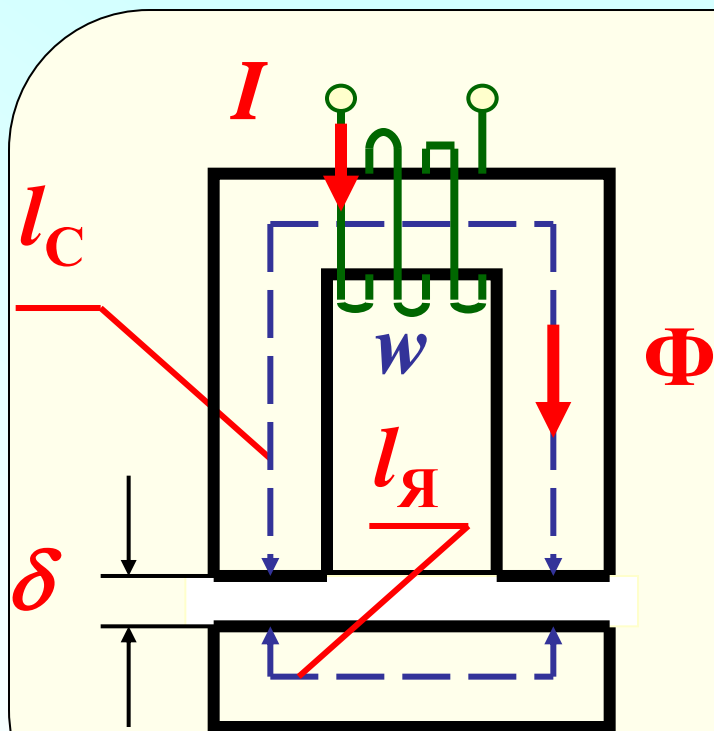
Пример 1. В воздушном зазоре электромагнита (э/м), состоящего из катушки, сердечника и якоря, требуется создать магнитную индукцию $B_{\delta} = 1 \text{ Тл}$. Кривая $B(H)$ и размеры э/м заданы.



Определить:

- 1) постоянный ток катушки, обеспечивающий заданную индукцию в зазоре;**
- 2) силу притяжения якоря к сердечнику.**

Дано: $w = 1000$ витков; $\delta = 1$ мм; $S_c = 5$ см²; $S_{\text{я}} = 6,25$ см²; $l_c = 20$ см; $l_{\text{я}} = 5$ см.



Решение. Пренебрегая искажением магнитного поля в зазоре и принимая сечение зазора равным сечению сердечника, определяем магнитный поток неразветвленного магнитопровода (на всех участках он одинаковый):

$$\Phi = B_{\delta} S_{\delta} = 1 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

По потоку определяем индукцию в якоре (в сердечнике она равна B_δ):

$$B_{\text{я}} = \frac{\Phi}{S_{\text{я}}} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{6,25 \cdot 10^{-4}} = 0,8 \text{ Тл.}$$

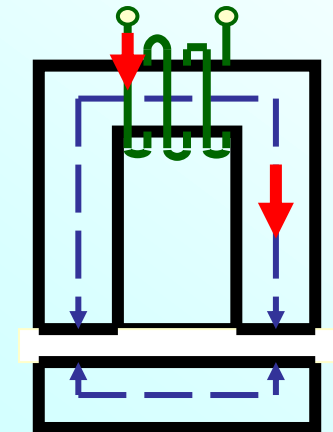
Напряженность магнитного поля в воздушном зазоре определяется

$$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} \approx 0,8 \cdot 10^6 \text{ А/м}$$

В сердечнике и якоре напряженность определяется по кривой $B(H)$:

$$H_c = 6 \text{ А/см}; \quad H_{я} = 4 \text{ А/см.}$$

Согласно (2), алгебраическая сумма магнитных напряжений контура равна МДС, откуда следует



$$\begin{aligned} F &= (2H_{\delta}\delta + H_c l_c + H_{я} l_{я}) = \\ &= (2 \cdot 0,8 \cdot 10^4 + 6 \cdot 20 + 4 \cdot 5) = 1740 \text{ А.} \end{aligned}$$

Находим ток катушки

$$I = \frac{F}{W} = \frac{1740}{1000} = 1,74 \text{ А.}$$

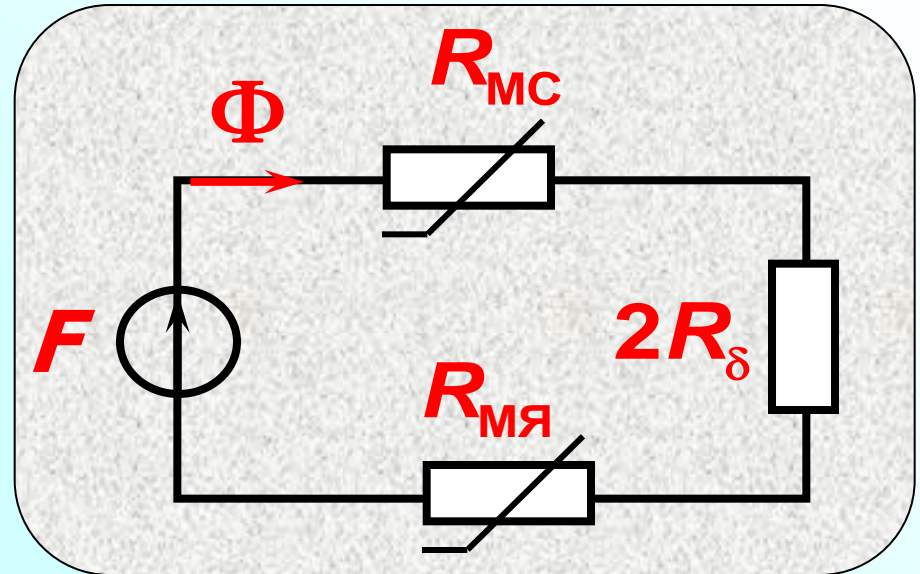
Сила притяжения якоря к сердечнику

$$\begin{aligned} f &= \frac{\partial W_M}{\partial \ell} \approx \frac{\partial}{\partial \ell} \left(\frac{B_\delta H_\delta}{2} S_\delta \delta \right) = \\ &= \frac{B_\delta^2 S_\delta}{2\mu_0} \approx 200 \text{ Н.} \end{aligned}$$

Пример 2. Определить статическую индуктивность катушки ($w=1000$ витков) и энергию в воздушном зазоре электромагнита **из примера 1** при постоянном токе **2,1 А.**

Решение. Составим схему замещения электромагнита, представив участки магнитопровода сопротивлениями, а катушку – **МДС (А).**

МДС катушки
 $F = Iw = 2100 \text{ А}$.



Магнитные сопротивления сердечника и якоря – нелинейные, они определяются положением рабочей точки на ВБАХ $\Phi(u_M)$, которое неизвестно.

По 2-му закону Кирхгофа

$$\begin{aligned} F &= (R_{MC} + R_{MЯ} + 2R_{\delta})\Phi = \\ &= H_c l_c + H_{я} l_{я} + 2H_{\delta} \delta. \end{aligned}$$

Это нелинейное уравнение можно решать графически или численно. Рассмотрим численное решение.

В качестве нулевого приближения
возьмем значение потока, опреде-
ленного без учета сопротивлений
 Φ/m участков:

$$\Phi' = \frac{F}{2R_{M\delta}} = \frac{Iw\mu_0 S_{\delta}}{2\delta};$$

$$\Phi' = \frac{2100 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 1,256 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} \approx$$

$$\approx 6,66 \cdot 10^{-5} \text{ Вб.}$$

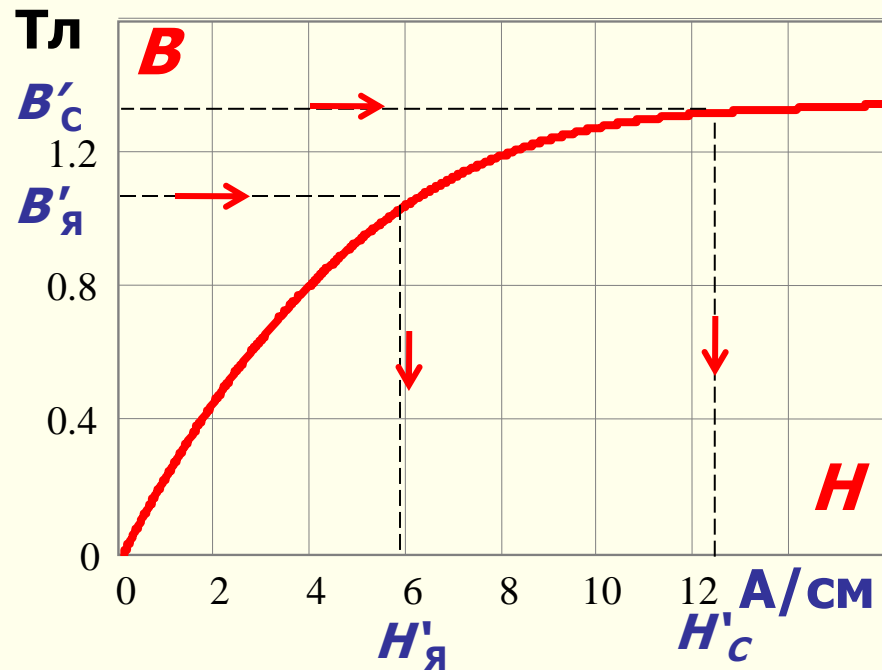
По нулевому приближению Φ' находим **индукции** на участках цепи, затем соответствующие им **напряженности** поля и магнитные **напряжения**.

Магнитные индукции в зазоре, сердечнике и якоре равны:

$$B'_{\delta} = B'_{\text{с}} = \Phi' / S_{\text{с}} = 1,33 \text{ Тл};$$

$$B'_{\text{я}} = \Phi' / S_{\text{я}} = 1,07 \text{ Тл}.$$

По кривой
 $B(H)$
находим:
 $H'_c = 12,5 \text{ А/см};$
 $H'_я = 6 \text{ А/см}.$



Подсчитываем магнитное падение напряжения в контуре:

$$\begin{aligned} u'_M &= H'_c l_c + H'_я l_я + \frac{2B'\delta}{\mu_0} = \\ &= 12,5 \cdot 20 + 6 \cdot 5 + 2100 = 2380 \text{ А.} \end{aligned}$$

Берем следующее значение потока (меньшее), например, $\Phi'' = 5 \cdot 10^{-4}$ Вб.

$$\begin{aligned} B'' &= \Phi'' / S_c = 1 \text{ Тл;} \\ B''_я &= \Phi'' / S_я = 0,8 \text{ Тл.} \end{aligned}$$

По кривой намагничивания находим:

$$H''_c = 5,5 \text{ А/см}; H''_я = 4 \text{ А/см}$$

и снова рассчитываем цепь:

$$u''_M = H''_c l_c + H''_я l_я + \frac{2B''\delta}{\mu_0} =$$
$$= 5,5 \cdot 20 + 4 \cdot 5 + \frac{2 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{1,256 \cdot 10^{-6}} = 1722 \text{ А.}$$

Получили $F'' < F$. Решение продолжаем. Окончательно получим.

$$\Phi = 5,9 \cdot 10^{-4} = 0,59 \text{ мВб.}$$

Статическая индуктивность катушки:

$$\begin{aligned} L_{\text{ст}} &= \frac{\Psi}{I} = W^2 \frac{\Phi}{F} = \\ &= 1000^2 \frac{5,9 \cdot 10^{-4}}{2000} = 0,295 \text{ Гн.} \end{aligned}$$

Энергия, сосредоточенная в зазоре,

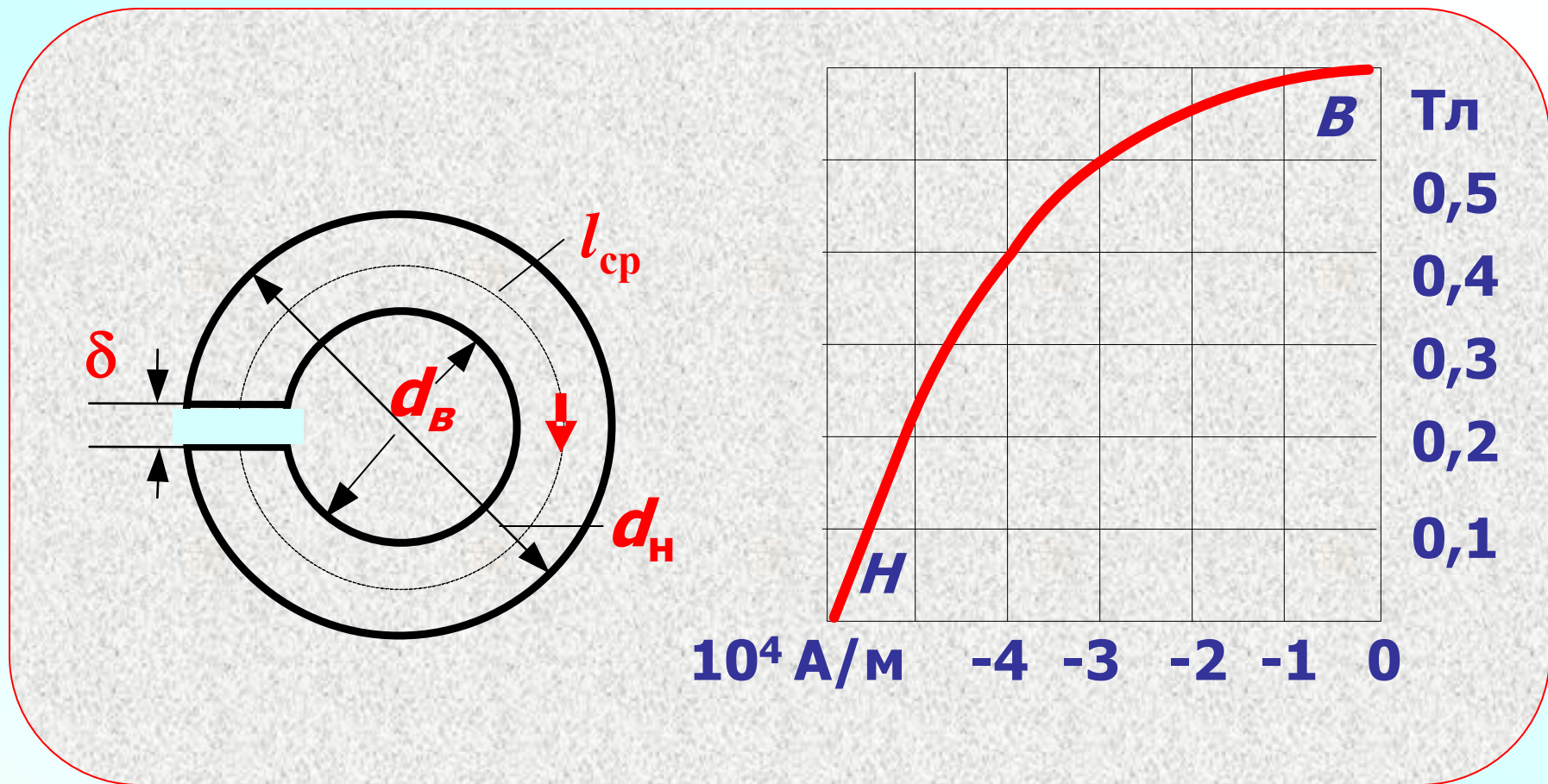
$$W_M = \frac{BH}{2} S \ell = \frac{B^2}{\mu_0} S \delta = \frac{\Phi F}{2}.$$

Численно:

$$W_M = \frac{0,59 \cdot 10^{-3} \cdot 2100}{2} = 0,62 \text{ Дж.}$$

Пример 3. Определить магнитный поток в зазоре постоянного магнита из магнитнотвердого сплава, кривая размагничивания которого задана.

Размеры магнитопровода: $d_B = 6 \text{ см}$;
 $d_H = 8 \text{ см}$; $\delta = 2 \text{ мм}$; толщина кольца
 $h = 1 \text{ см}$.



Решение. Определяем среднюю длину магнитопровода и его сечение:

$$l_{CP} = \pi \frac{d_H + d_B}{2} - \delta = 3,14 \frac{8 + 6}{2} - 2 = 20 \text{ см};$$

$$S = \frac{d_H - d_B}{2} h = \frac{8 - 6}{2} \cdot 1 = 1 \text{ см}^2.$$

Согласно (2) $H_\delta \delta + H l_{CP} = 0$, поэтому

$$H = -\frac{H_\delta \delta}{l_{CP}} = -\frac{B_\delta \delta}{\mu_0 l_{CP}}.$$

Принимая сечения магнита и воздушного зазора равными, имеем

$$B_{\delta} = B,$$

где B - индукция в теле магнита.

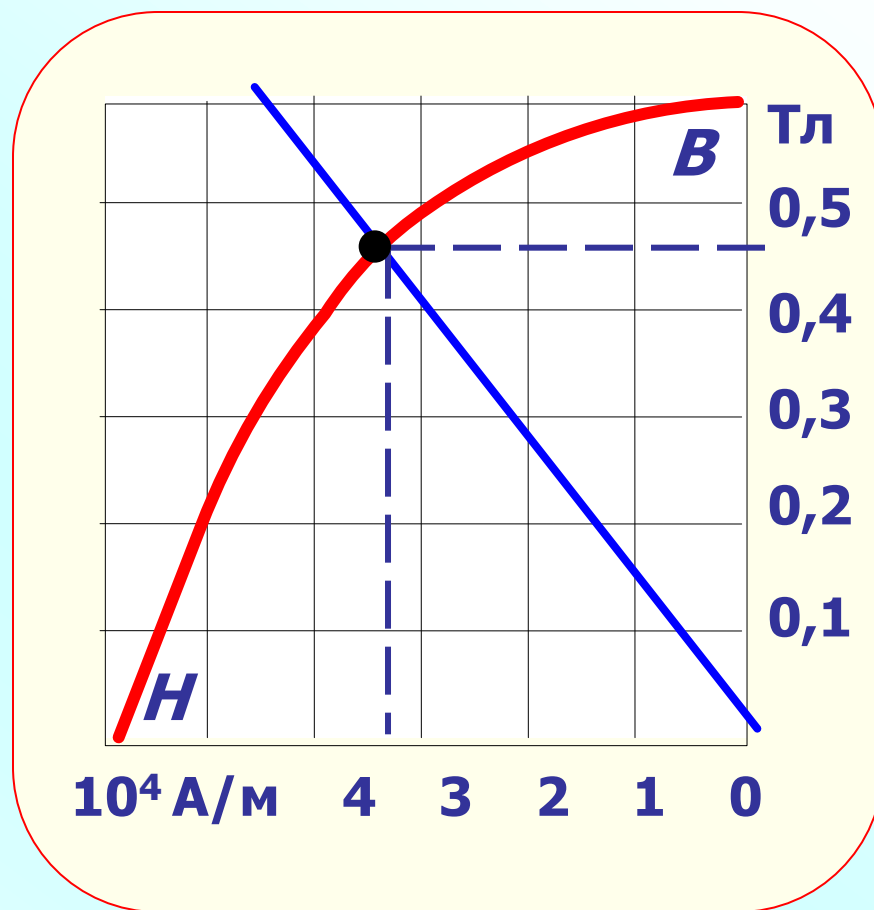
Тогда

$$\begin{aligned} H &= -\frac{B\delta}{\mu_0 l_{CP}} = -\frac{B \cdot 0,02}{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 0,2} = \\ &= -0,8 \cdot 10^5 \text{ В, А/м.} \end{aligned}$$

Это уравнение
прямой линии.
Построив ее, по-
лучаем решение:

$$B = 0,45 \text{ Тл};$$

$$\Phi = 0,45 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

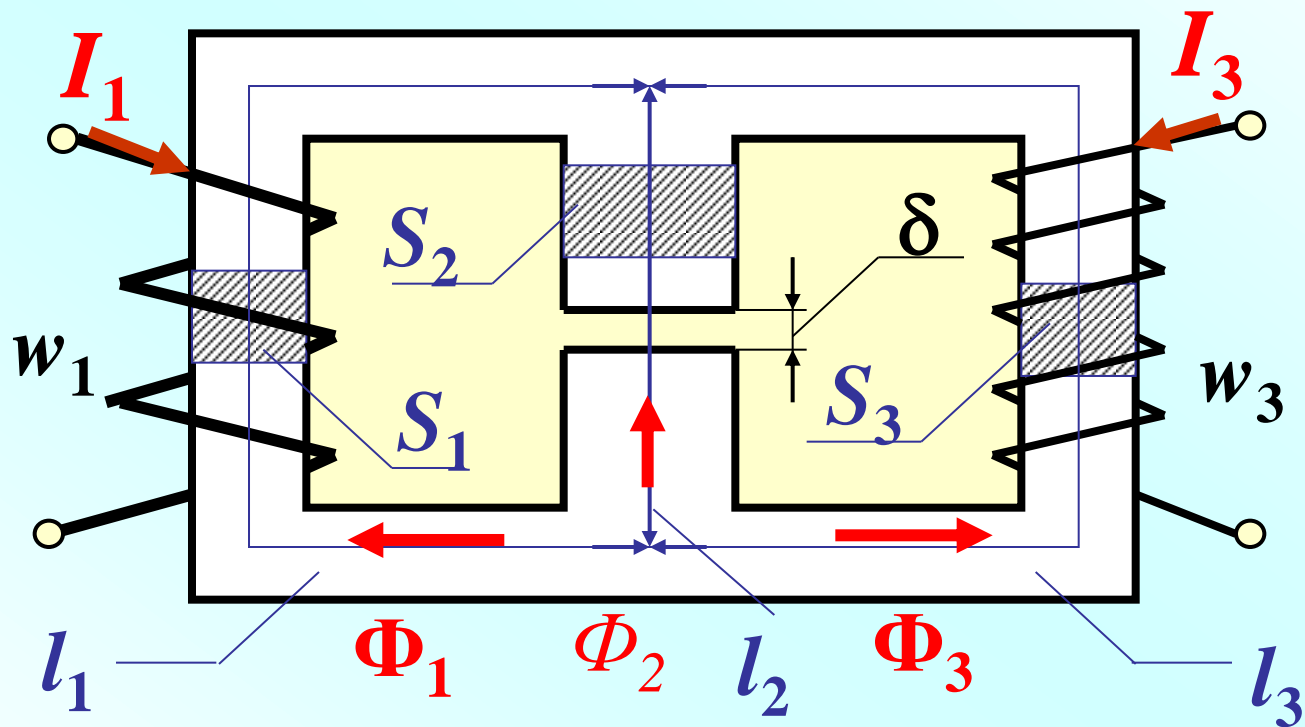


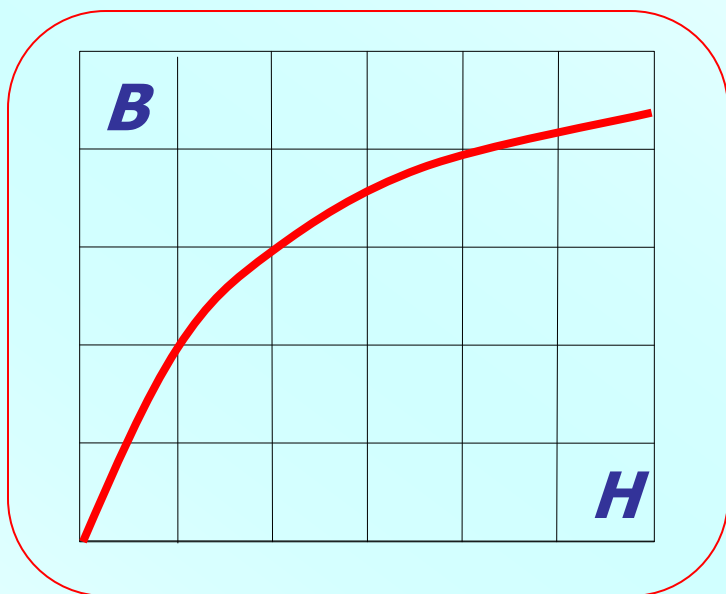
Разветвленная магнитная цепь

Пример 4. Определить магнитные потоки в стержнях разветвленного магнитопровода, полагая заданными:

МДС катушек, геометрические **размеры** магнитопровода и кривую намагничивания **$B(H)$** ф/м материала.

Магнитная цепь с двумя узлами

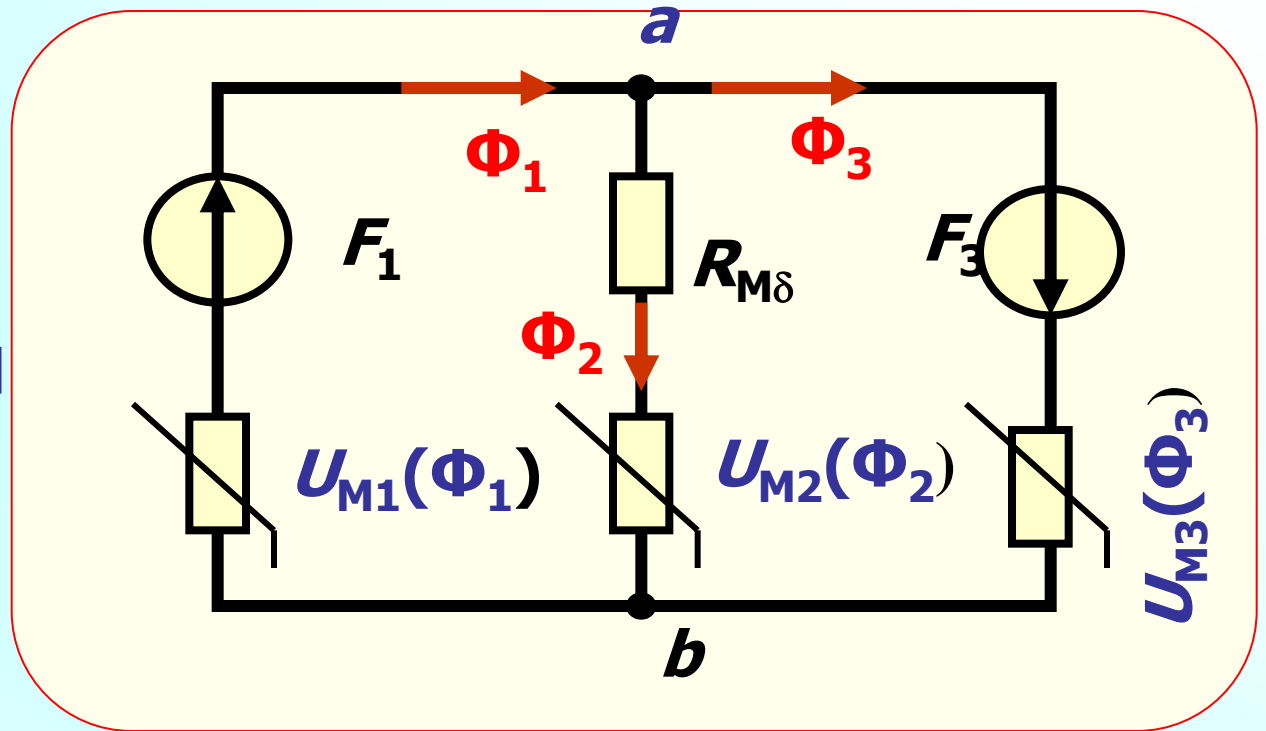




Кривая намагничивания

Решение. Разбиваем цепь на участки и составляем схему замещения, где каждый участок магнитопровода представлен **магнитным сопротивлением**, а катушки–источниками **МДС**.

Схема замещения



По законам Кирхгофа записываем уравнения взаимосвязи потоков ветвей с магнитным напряжением:

1. По второму закону Кирхгофа

$$U_M^{ab}(\Phi_1) = F_1 - U_{M1}(\Phi_1); \quad (1)$$

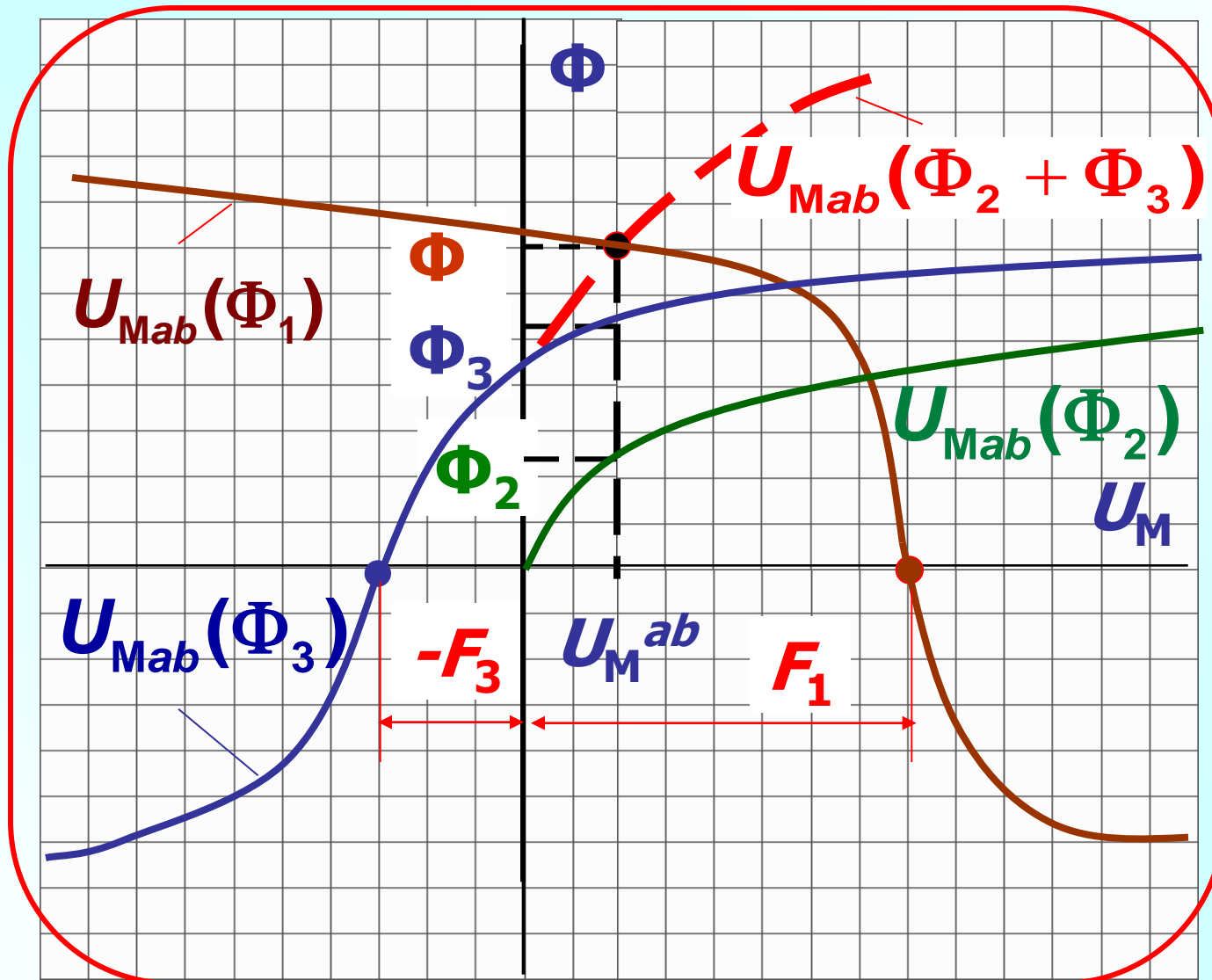
$$U_M^{ab}(\Phi_2) = U_{M2}(\Phi_2) + R_{M2}\Phi_2; \quad (2)$$

$$U_M^{ab}(\Phi_3) = U_{M3}(\Phi_3) - F_3. \quad (3)$$

2. По первому закону Кирхгофа

$$\begin{aligned} \sum \Phi(U_M^{ab}) = & -\Phi_1(U_M^{ab}) + \\ & +\Phi_2(U_M^{ab}) + \Phi_3(U_M^{ab}) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Графическое решение уравнений



Порядок расчета разветвленной МЦ

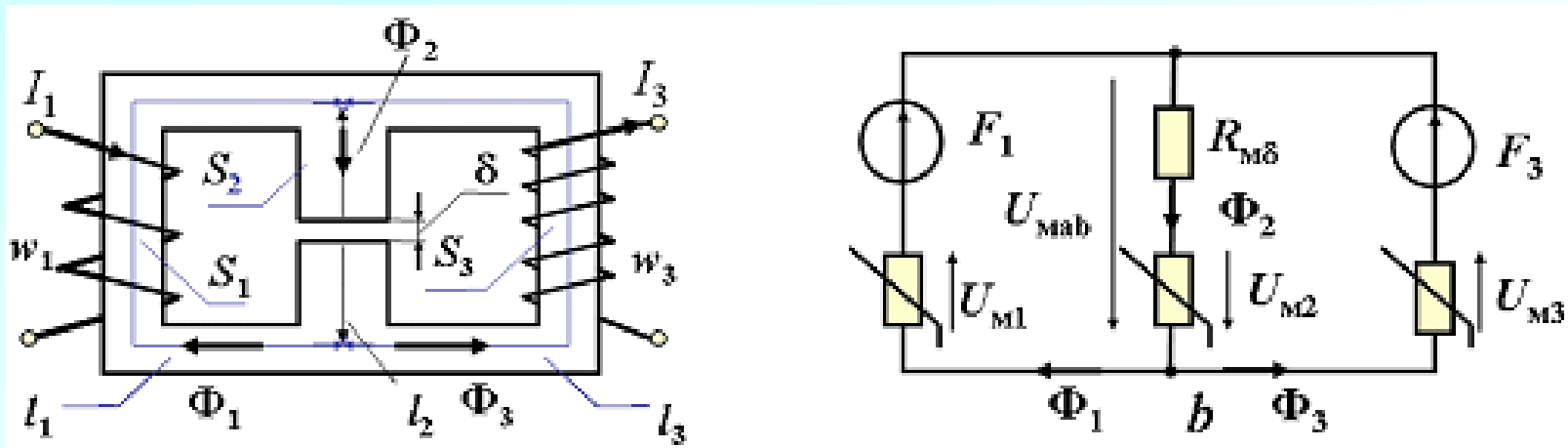
- 1) магнитопровод разбивается на участки из однородного материала с одинаковым сечением, в пределах которых векторы B и H постоянные;
- 2) составляется схема замещения, где участок магнитопровода представляется магнитным сопротивлением, а обмотка – источником МДС;

3) записываются уравнения по законам Кирхгофа для магнитной цепи;

4) систему уравнений решают известными методами.

Расчет магнитной цепи можно выполнить в системе **MathCAD**

Пример расчета магнитной цепи в системе MathCAD



ORIGIN := 1

$F_1 := 2000$ $F_3 := 1000$ $L_1 := 30$ $L_2 := 15$ $L_3 := 30$

$\delta := 0.2$ $S_1 := 1 \cdot 10^{-4}$ $S_2 := 2 \cdot 10^{-4}$ $S_3 := S_1$

$B := (0 \quad 0.5 \quad 1 \quad 1.2 \quad 1.3 \quad 1.4 \quad 1.5 \quad 1.6 \quad 1.65 \quad 1.7)$

H := $(0 \quad 1.7 \quad 5 \quad 8.4 \quad 11.4 \quad 15.8 \quad 25 \quad 43.7 \quad 58.8 \quad 77.8)$

Продолжение документа

$$n := 10 \quad k := 1..n$$

$$\Phi_1 := B \cdot S_1 \quad \Phi_2 := B \cdot S_2 \quad \Phi_3 := B \cdot S_3 \quad \mu_0 := 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$$

$$U_{m1} := H \cdot L_1 \quad U_{m2} := H \cdot L_2 \quad U_{m3} := H \cdot L_3 \quad U_{m\delta} := \frac{B \cdot \delta}{\mu_0 \cdot 100}$$

$$U_{m11} := F_1 - U_{m1} \quad U_{m22} := U_{m2} + U_{m\delta} \quad U_{m33} := F_3 - U_{m3}$$

$$St := \text{stack}(B, H, U_{m11}, \Phi_1, U_{m22}, \Phi_2, U_{m33}, \Phi_3)$$

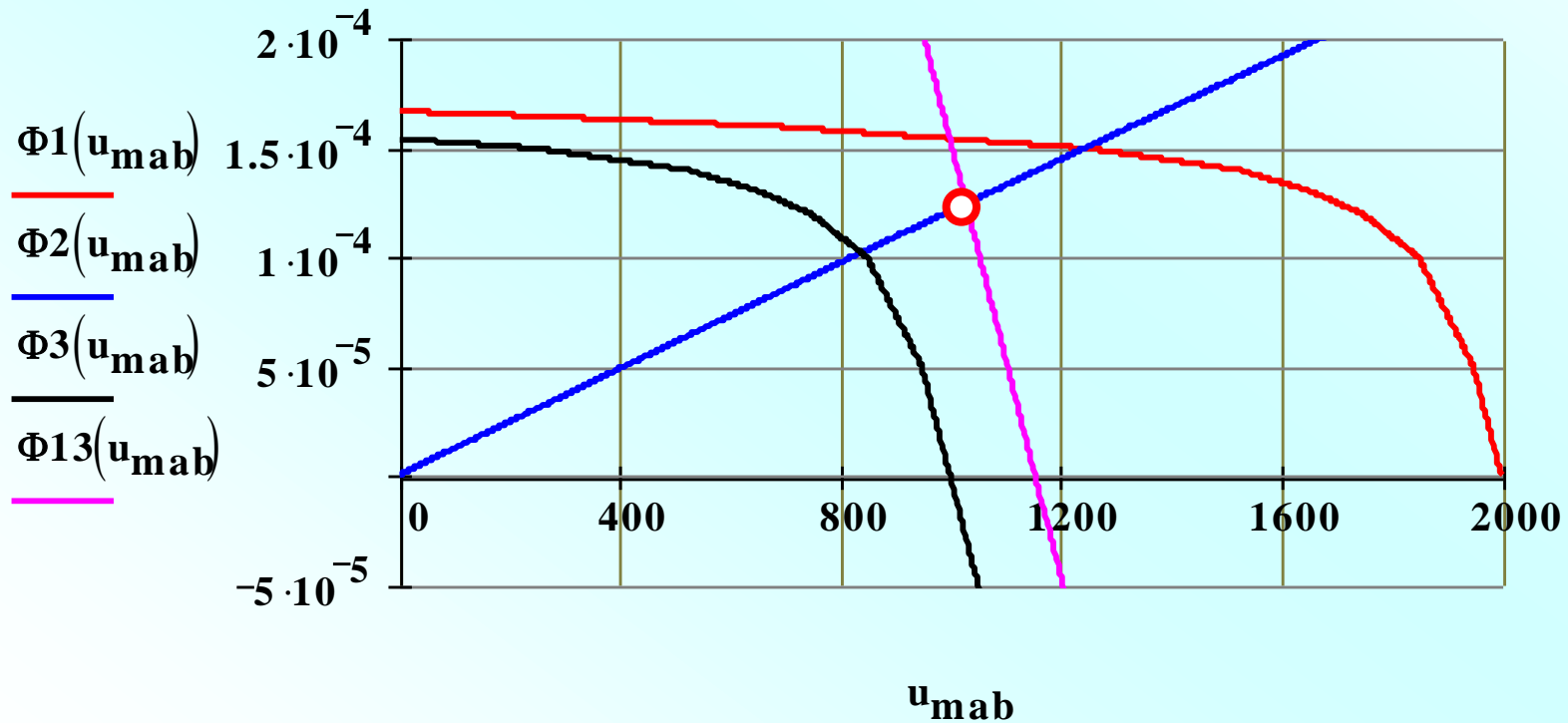
	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0.5	1	1.2	1.3	1.4	1.5
2	0	1.7	5	8.4	11.4	15.8	25
3	$2 \cdot 10^3$	$1.949 \cdot 10^3$	$1.85 \cdot 10^3$	$1.748 \cdot 10^3$	$1.658 \cdot 10^3$	$1.526 \cdot 10^3$	$1.25 \cdot 10^3$
4	0	$5 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$
5	0	821.275	$1.667 \cdot 10^3$	$2.036 \cdot 10^3$	$2.24 \cdot 10^3$	$2.465 \cdot 10^3$	$2.762 \cdot 10^3$
6	0	$1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$
7	$1 \cdot 10^3$	949	850	748	658	526	250
8	0	$5 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$

$$\underline{U_{m11}} := \text{reverse}(U_{m11}^T) \quad \underline{U_{m22}} := U_{m22}^T \quad \underline{U_{m33}} := \text{reverse}(U_{m33}^T)$$

$$\underline{\Phi_1} := \text{reverse}(\Phi_1^T) \quad \underline{\Phi_2} := \Phi_2^T \quad \underline{\Phi_3} := \text{reverse}(\Phi_3^T)$$

$$\Phi 1(u_{\text{mab}}) := \text{linterp}(U_{m11}, \Phi_1, u_{\text{mab}}) \quad \Phi 2(u_{\text{mab}}) := \text{linterp}(U_{m22}, \Phi_2, u_{\text{mab}})$$

$$\Phi 3(u_{\text{mab}}) := \text{linterp}(U_{m33}, \Phi_3, u_{\text{mab}}) \quad \Phi 13(u_{\text{mab}}) := \Phi 1(u_{\text{mab}}) + \Phi 3(u_{\text{mab}})$$



$$u_{mab} := 1028 \quad \Phi 1(u_{mab}) = 1.54 \times 10^{-4} \quad \Phi 2(u_{mab}) = 1.245 \times 10^{-4}$$

$$\Phi 3(u_{mab}) = -2.745 \times 10^{-5} \quad \Phi 1(u_{mab}) - \Phi 2(u_{mab}) + \Phi 3(u_{mab}) = 2.05 \times 10^{-6}$$

$$u_{mab} := 100$$

$$\text{Given} \quad \Phi 13(u_{mab}) - \Phi 2(u_{mab}) = 0$$

$$u_{mab} := \text{Find}(u_{mab}) \quad u_{mab} = 1.03 \times 10^3$$

Пересечение кривых $\Phi_{13}(u_{mab})$ и $\Phi_2(u_{mab})$ определяет межузловое напряжение $u_{mab} = 1028 \text{ A}$.

Численное решение приводит к тому же результату.

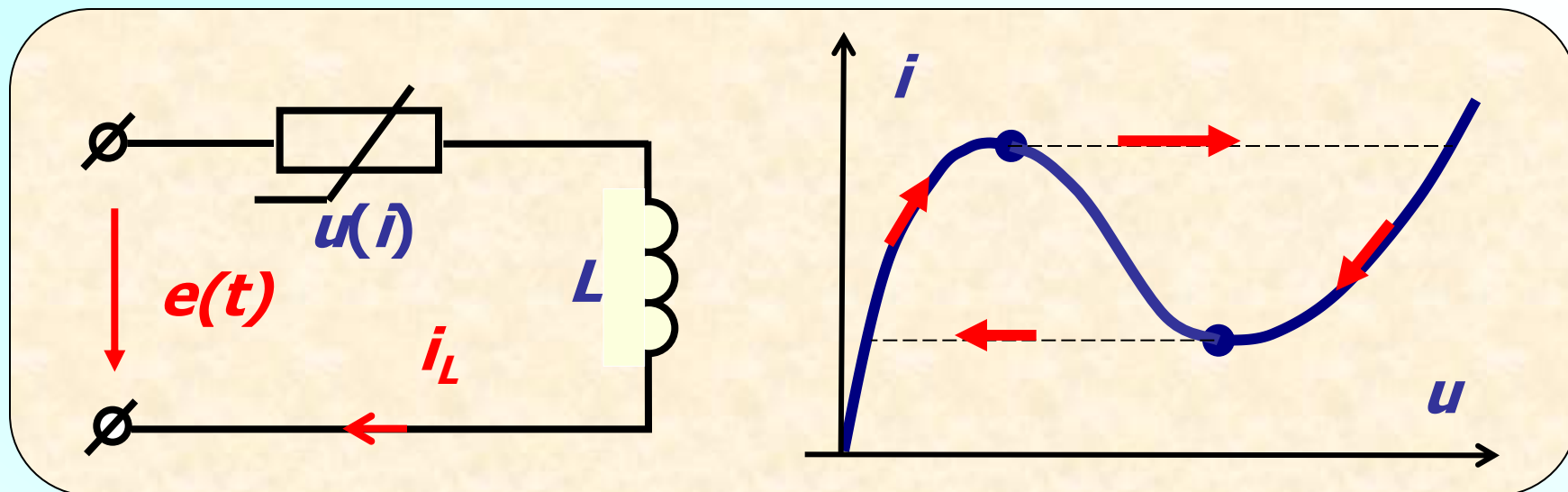
Нелинейные динамические цепи

1. Примеры формирования уравнений состояния 294
2. Численные методы решения 304
3. Метод кусочно-линейной аппроксимации 312
4. Метод дискретных резистивных схем 335



Нелинейные цепи, содержащие разнородные элементы (смешанные цепи), описываются системой **нелинейных дифференциальных уравнений (НДУ)**, пригодных для анализа как переходных, так и периодических процессов. Такие цепи называют **динамическими (НДЦ)**.

Формирование уравнений НДЦ – сложная и трудоемкая задача. При этом не всегда удастся выбрать переменные, однозначно определяющие состояние цепи. Например, в цепи с нелинейным резистором, имеющим немонотонную характеристику, управляемую напряжением (L-типа).



Ток индуктивности **нельзя использовать в качестве переменной состояния, т.к. **он многозначен**, а напряжение на резисторе - потому что оно **изменяется скачком**.**

Аналогичная ситуация возникает при анализе **дуальной** цепи из параллельно соединенных **источника тока**, резистора с **ВАХ**, управляемой током (**S -типа**), и **емкости**.

В этом случае **напряжение** - многозначная функция, а **ток** может изменяться **скачком**.

Таким образом, динамические цепи, содержащие сечения из катушек индуктивности и управляемых напряжением резисторов (**ВАХ I -типа**), а также контуры из конденсаторов и управляемых током резисторов (**ВАХ S -типа**), нельзя описывать привычными переменными состояния u_C и i_L .

Для всех других **НДЦ** напряжение u_C (или q) и ток i_L (или ψ) однозначно определяют поведение цепи с любого момента времени и **могут быть выбраны переменными состояния.**

Выбор переменных диктуется соображениями **простоты записи** уравнений и определяется видом **аппроксимации** характеристик.

Если характеристики заданы в форме $i_L(\psi)$ и $u_c(q)$, то в качестве переменных целесообразно выбирать потокосцепление ψ и заряд q , и наоборот. При необходимости переменные состояния можно заменить, используя известные взаимосвязи:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du_c} \frac{du_c}{dt} = C_D \frac{du_c}{dt};$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{di_L} \frac{di_L}{dt} = L_d \frac{di_L}{dt},$$

где C_d и L_d – дифференциальные параметры: емкость и индуктивность.

Уравнения состояния **НДЦ** можно получить непосредственно из уравнений, записанных по законам Кирхгофа.

Для **сложных цепей** можно использовать **графы**.

Эффективен метод эквивалентных резистивных схем. В первых двух случаях из системы уравнений исключаются все **неизвестные, не являющиеся** переменными состояния. В схемах замещения индуктивные и емкостные элементы заменяются источниками.

Если в схеме резистивная часть цепи нелинейная, принцип наложения не используется. Только в простейших случаях возможно аналитическое решение уравнений состояния, поэтому, в основном, используются приближенные и качественные методы анализа.

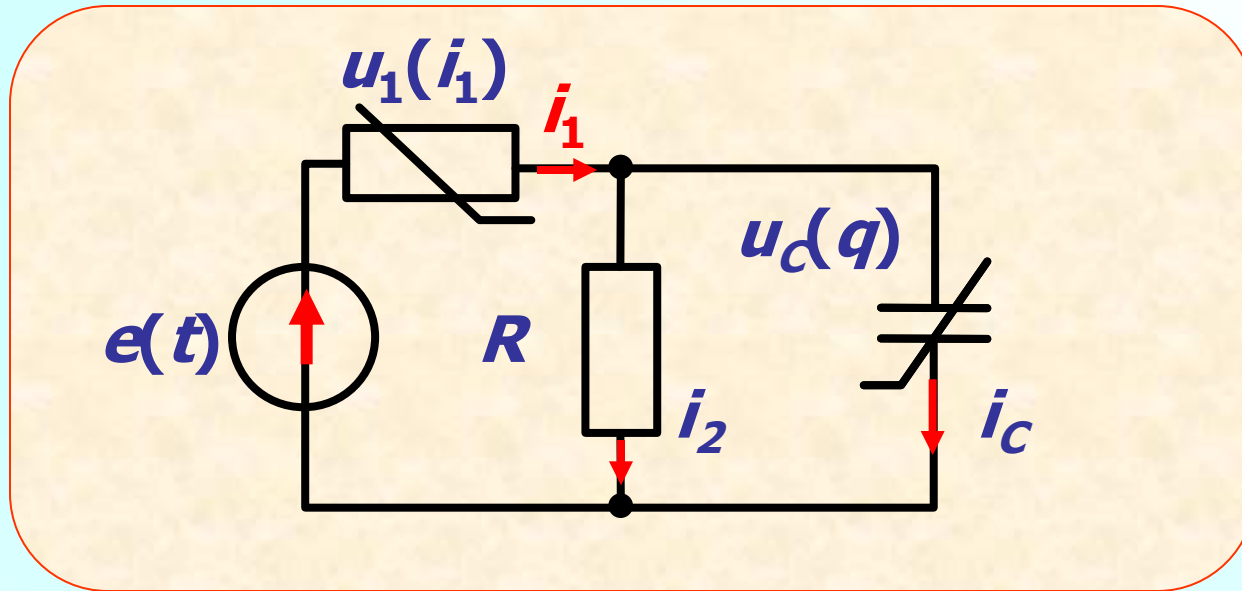
Из приближенных методов нам известны: графический, кусочно – линейной аппроксимации и **численный**.

Качественный анализ (оценка характера процесса) выполняется построением **фазовых траекторий в пространстве состояний**.

Траектории содержат ту же информацию, что и решение, но в них исключено время. Для их построения задают фиксированное время и вычисляют соответствующие переменные состояния, которые являются координатами траекторий. Подробнее фазовые траектории рассматриваются в теории нелинейных колебаний.

Примеры формирования уравнений состояния

ПРИМЕР 1. Составить уравнения состояния цепи, содержащей нелинейный емкостный накопитель $u_c(q) = aq^3$, нелинейный резистор $i_1(u_1) = bu_1^{1/3}$, где a и b – коэффициенты, а также линейный резистор R и источник ЭДС $e(t)$.



РЕШЕНИЕ. В качестве переменной состояния выбираем заряд. Записываем уравнения по законам Кирхгофа:

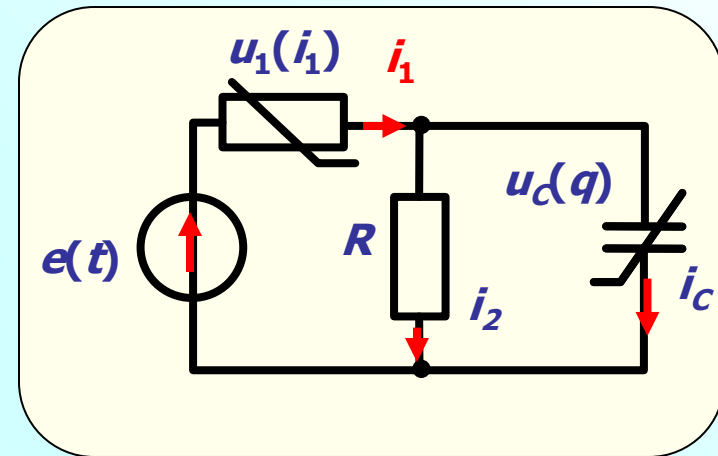
$$-i_1 + i_2 + i_c = 0;$$

Учитывая характеристику $i_1(u_1)$ и взаимосвязь $i_c = dq/dt$, имеем:

$$u_1 + u_c - e(t) = 0;$$

$$i_2 R - u_c = 0.$$

$$\frac{dq}{dt} = bu_1^{1/3} - i_2.$$



Исключаем из уравнения u_1 и i_2 :

$$\begin{aligned} dq/dt &= b[e(t) - u_c]^{1/3} - u_c/R = \\ &= b[e(t) - aq^3]^{1/3} - aq^3/R. \end{aligned}$$

При необходимости уравнение можно переписать для напряжения u_c :

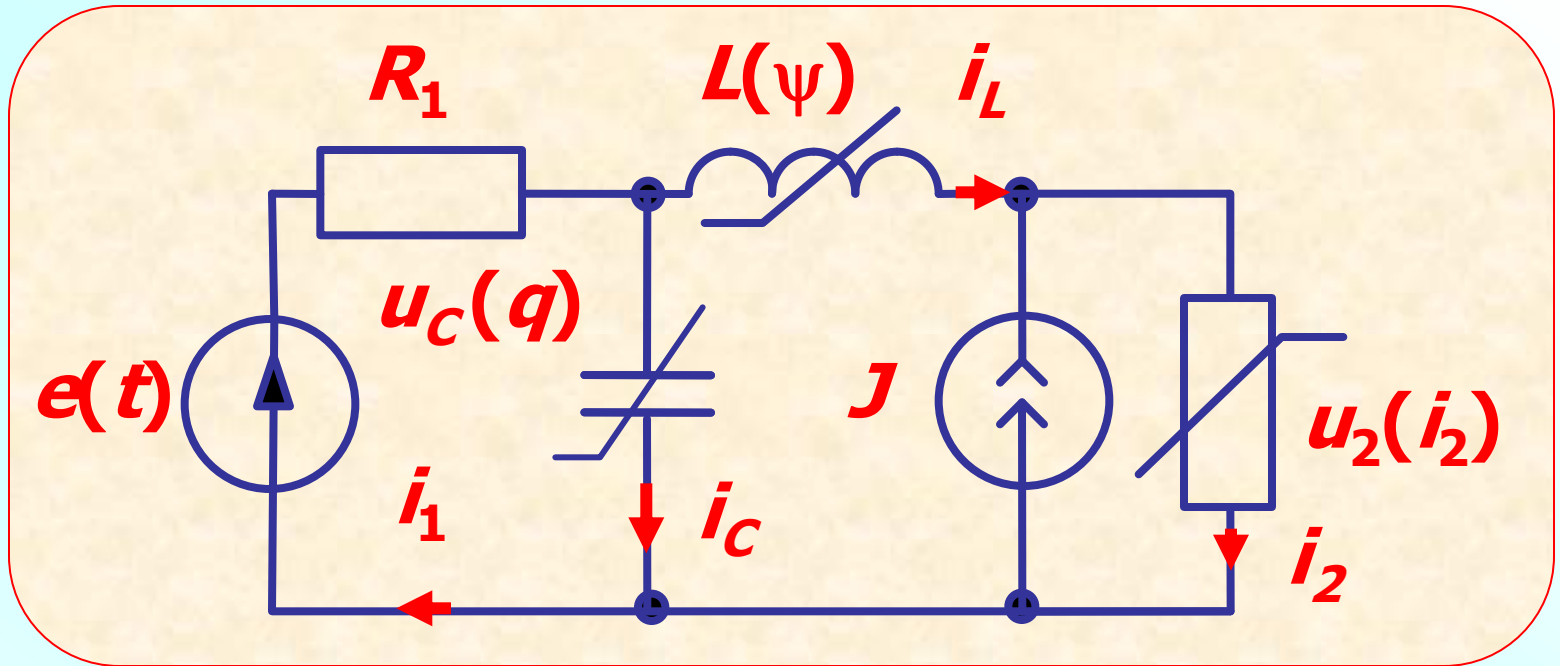
$$du_c / dt = \frac{b}{C_D} [e(t) - u_c]^{1/3} - \frac{1}{RC_D} u_c,$$

где

$$C_D = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{3aq^2}.$$

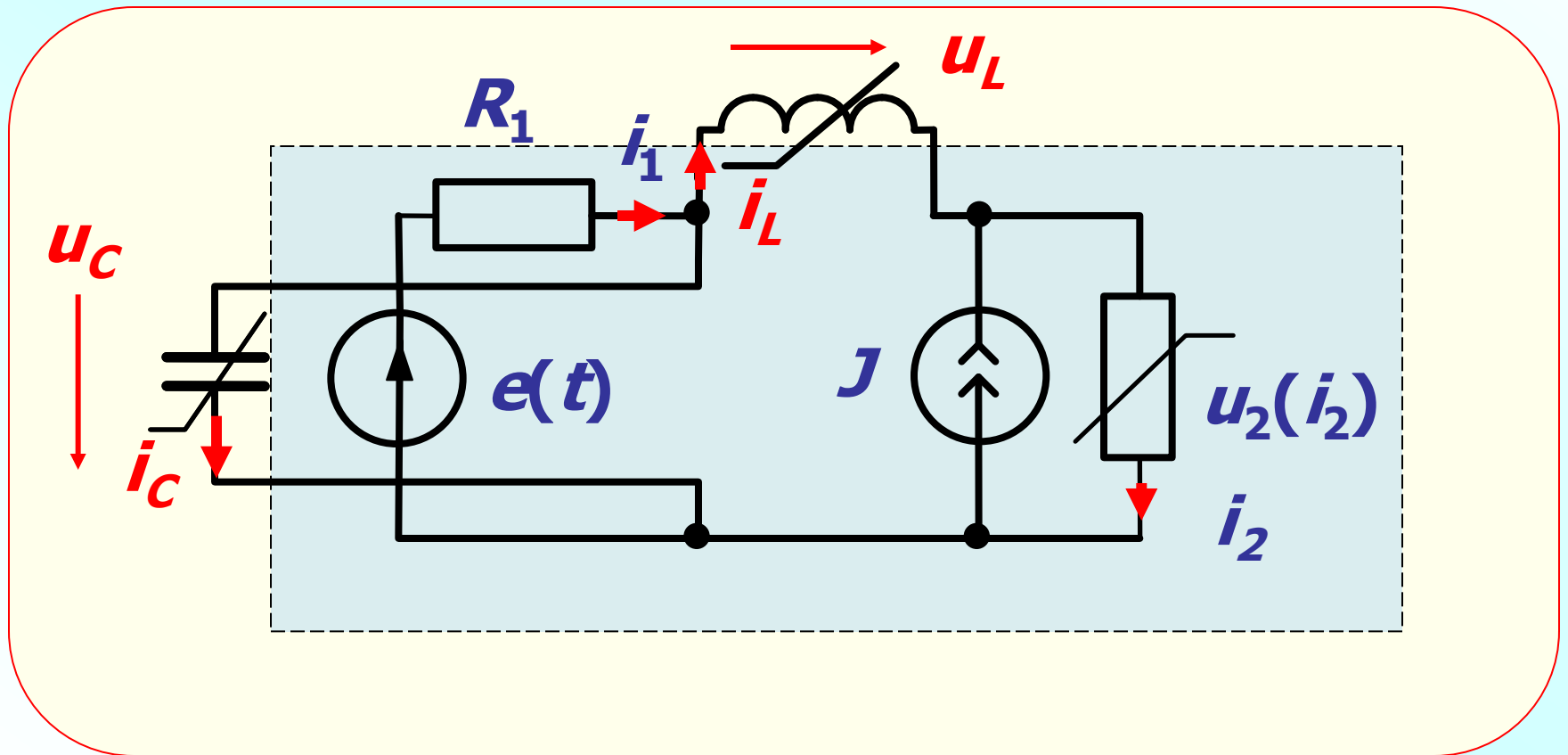
Пример 2. Составить уравнения состояния цепи с нелинейным резистором $u_2(i_2)$, нелинейной емкостью $u_c(q)$, нелинейной индуктивностью $L(\psi)$ и линейным резистором R_1 .

Характеристики элементов и источников ЭДС $e(t)$ и тока J полагать известными.



РЕШЕНИЕ. В качестве переменных состояния принимаем q и ψ . Исходную цепь разбиваем на две подцепи:

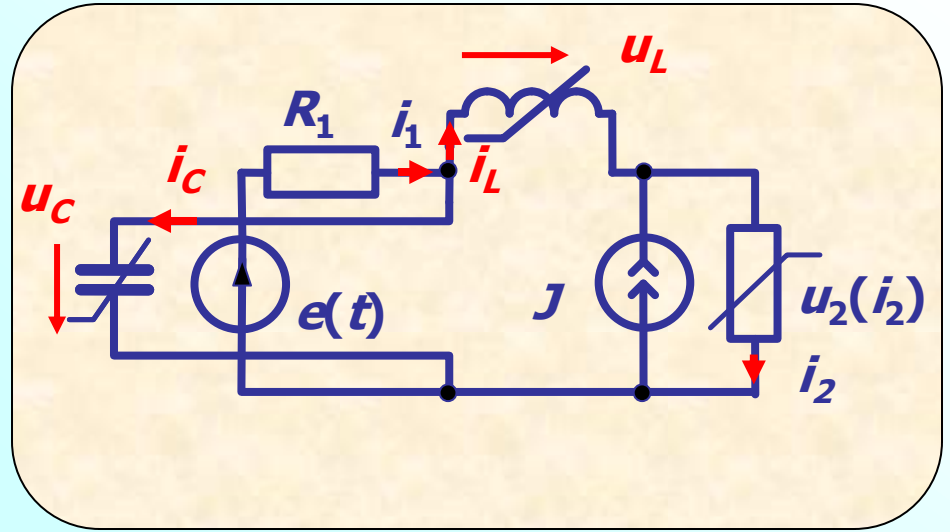
- 1) состоящую из накопителей энергии;
- 2) - из резисторов и источников.



Выражаем ток i_C и напряжение u_L через выбранные переменные q и ψ . При этом напряжение емкости рассматривается как источник ЭДС (заряда), а ток индуктивности – как источник тока (потокосцепления). Для данной схемы:

$$i_c = \frac{dq}{dt} = i_1 - i_L(\psi),$$

$$i_1 = \frac{e(t) - u_c(q)}{R_1};$$



$$u_L = \frac{d\psi}{dt} = u_c(q) - u_2(i_2),$$

$$i_2 = i_L(\psi) + J.$$

Исключая из уравнений i_1 и i_2 , получаем систему уравнений состояния:

$$\frac{dq}{dt} = -u_c(q) \frac{1}{R_1} - i_L(\psi) + e(t) \frac{1}{R_1};$$

$$\frac{d\psi}{dt} = u_c(q) - u_2 [i_L(\psi) + J].$$

Метод наложения применять нельзя!

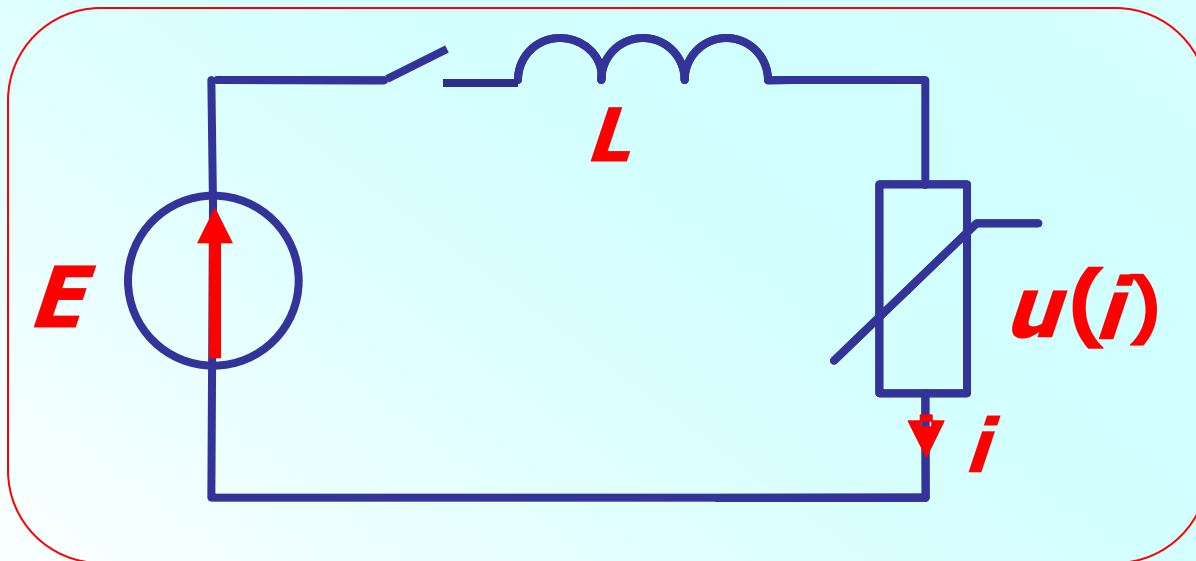
Численные методы решения уравнений состояния.



Численные методы решения **НДУ**, как и линейных, основаны на методах приближенного интегрирования.

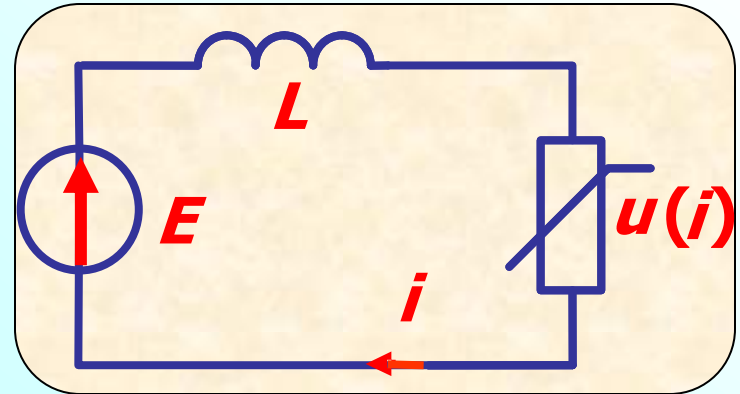
Самый простой – **явный метод Эйлера**, в котором **НДУ** заменяются приближенными алгебраическими уравнениями с конечным приращением величин за малый интервал времени.

ПРИМЕР 1. Определить закон изменения тока в цепи последовательно соединенных катушки индуктивности $L=0,1$ Гн и нелинейного резистора $u(i)=4i^2$ (u - вольты, i - амперы), при включении ЭДС $E=16$ В.



РЕШЕНИЕ. Переменная состояния – ток i . Уравнение состояния:

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} (E - 4i^2).$$



Начальное условие для тока: $i(0)=0$.
Чтобы выбрать шаг интегрирования, оцениваем время переходного процесса: $i(\infty)=2 \text{ А}; R(\infty)=E/i(\infty)=8 \text{ Ом};$
 $\tau=L/R=0,0125 \text{ с.}$

Можно принять $\Delta t = \tau/2,5 = 0,005 \text{ с.}$

Для тех, кто не понял:

$$**E = u(i) + u_L; \quad u_L(\infty) = 0;**$$

$$**u(i) = 4i^2 = E;**$$

$$**i(\infty) = \sqrt{16 / 4} = 2 \text{ A.}**$$

$$**R(\infty) = E / i(\infty) = 16 / 2 = 8 \text{ Ом}**$$

$$**p = -R / L \quad \tau = |1 / p|**$$

Вычисляем приращение тока на первом интервале интегрирования:

$$\Delta i_{0+1} \approx \frac{1}{0,1} (16 - 4 \cdot 0) \cdot 0,005 = 0,8 \text{ А.}$$

По приращению находится ток в конце данного интервала

$$i_{0+1} = i_0 + \Delta i_{0+1} = 0,8 \text{ А,}$$

а затем, если надо, по заданной ВАХ напряжение $u(i_{0+1})$.

Приращение на втором интервале:

$$\Delta i_{1+1} \approx \frac{1}{0,1} (16 - 4 \cdot 0,8) \cdot 0,005 = 0,64 \text{ А},$$

а ток будет: $i_2 = 0,8 + 0,64 = 1,44 \text{ А}.$

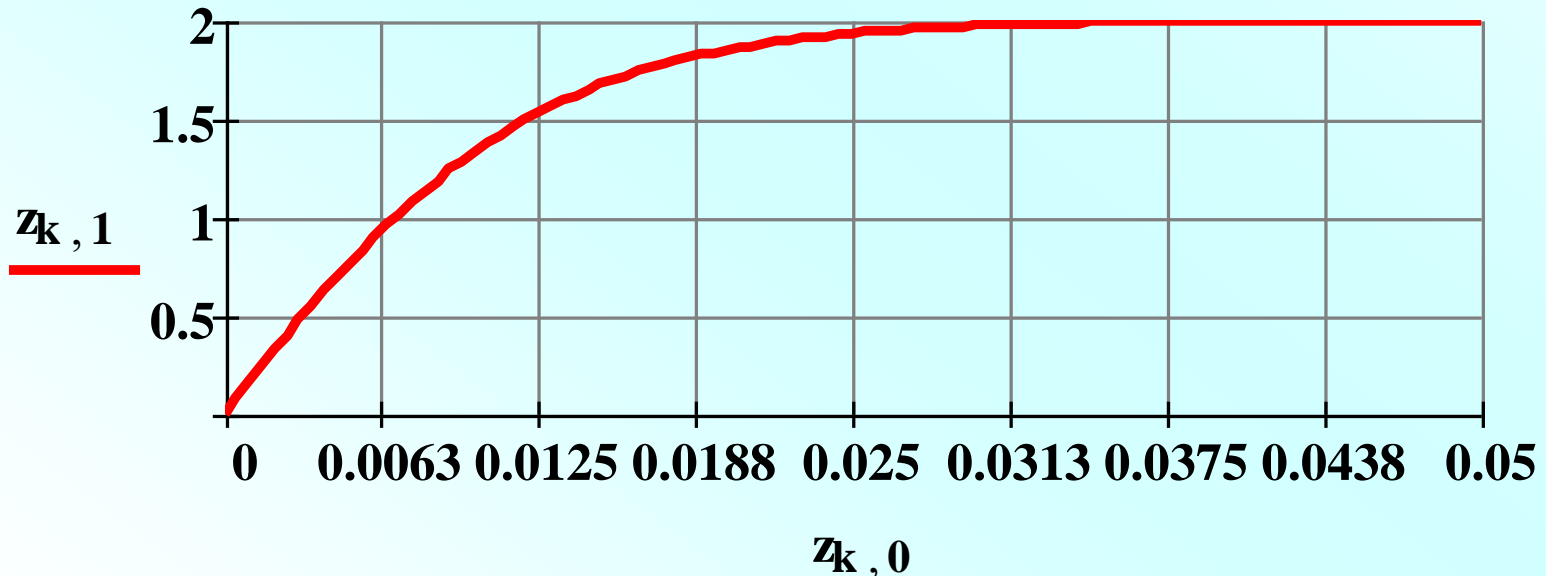
Переходя от интервала к интервалу, находим закон изменения тока.

В конце ПП он будет равен: $i_{10} \cong 2 \text{ А}.$

Данный метод – метод последовательных интервалов. В конце расчета он накапливает *max* ошибку.

Более точный расчет выполняется по методу Рунге-Кутты в **MathCAD**, как показано ниже (**тот же пример**).

$L := 0.1$ $E := 16$ $u(i) := 4 \cdot i^2$ $D(t, i) := \frac{1}{L}(E - 4 \cdot i^2)$
 $i := 0$ $z := \text{rkfixed}(i, 0, 0.05, 100, D)$ $k := 0 .. \text{rows}(z) - 1$



Метод кусочно-линейной аппроксимации.

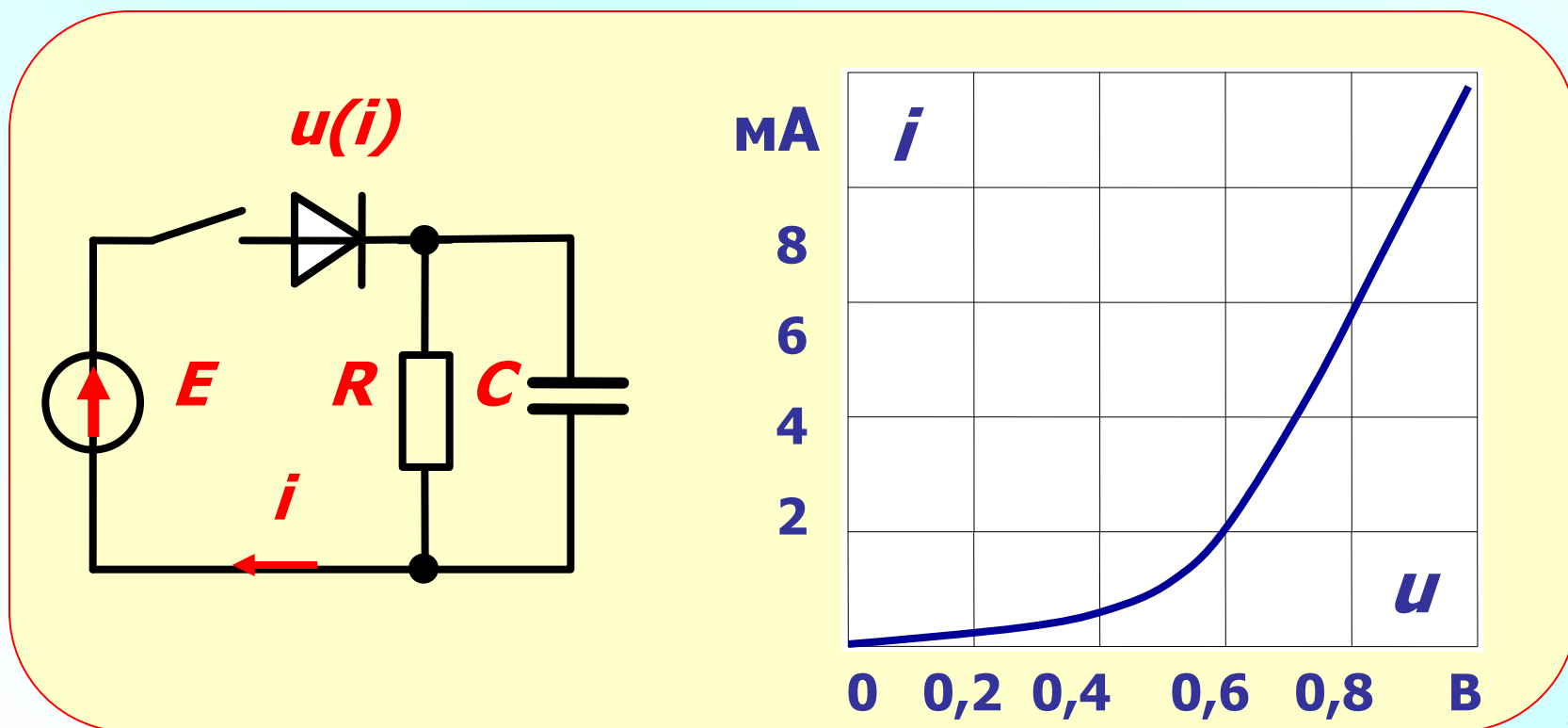
С помощью кусочно-линейной аппроксимации решение системы нелинейных уравнений сводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений на каждом из линейных участков аппроксимированной характеристики.

Переход к каждому новому линейному интервалу приводит к изменению коэффициентов в уравнениях системы **при непрерывности самих переменных **состояния**.**

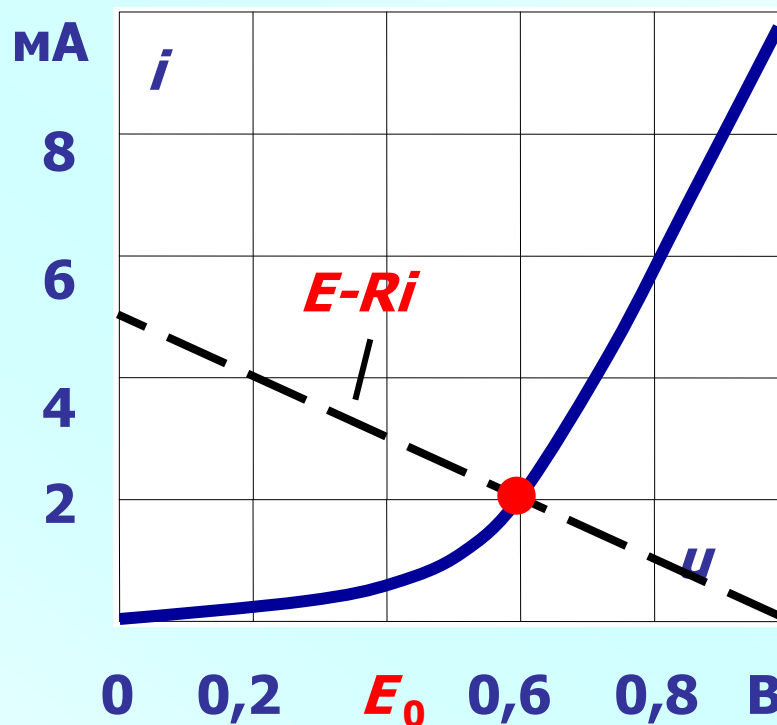
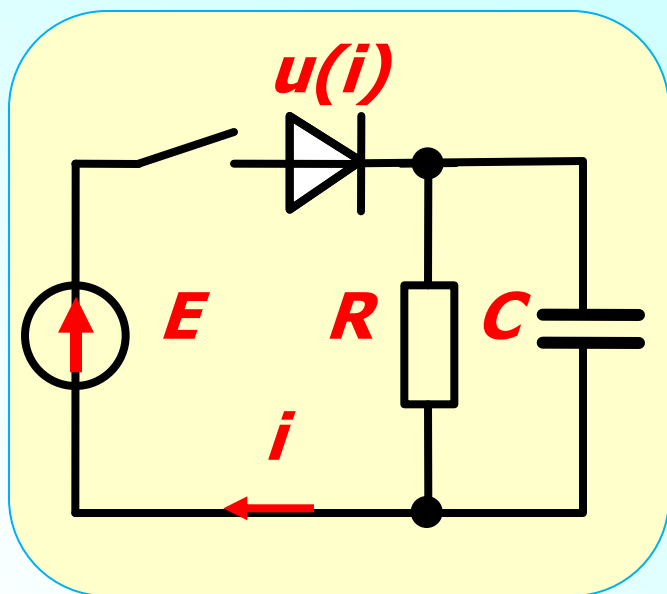
Это обстоятельство используется для определения начальных условий, необходимых при интегрировании уравнений на новом интервале.

Решения для переменных состояния на соседних участках при таком способе получаются сопряженными (припасованными), поэтому метод называют также **методом припасовывания**. Если характеристика НЭ аппроксимируется только **одним линейным** участком, метод называют - **методом условной линеаризации**.

ПРИМЕР 1. В цепи диода с известной ВАХ найти время, в течение которого напряжение u_C возрастет до половины установленного значения: $E=1$ В; $R=200$ Ом; $C=100$ мкФ.



РЕШЕНИЕ. Ток емкости в установившемся режиме равен нулю; рабочая точка *a* лежит на пересечении ВАХ диода и ВАХ ЭДС с резистором ($E - Ri$)

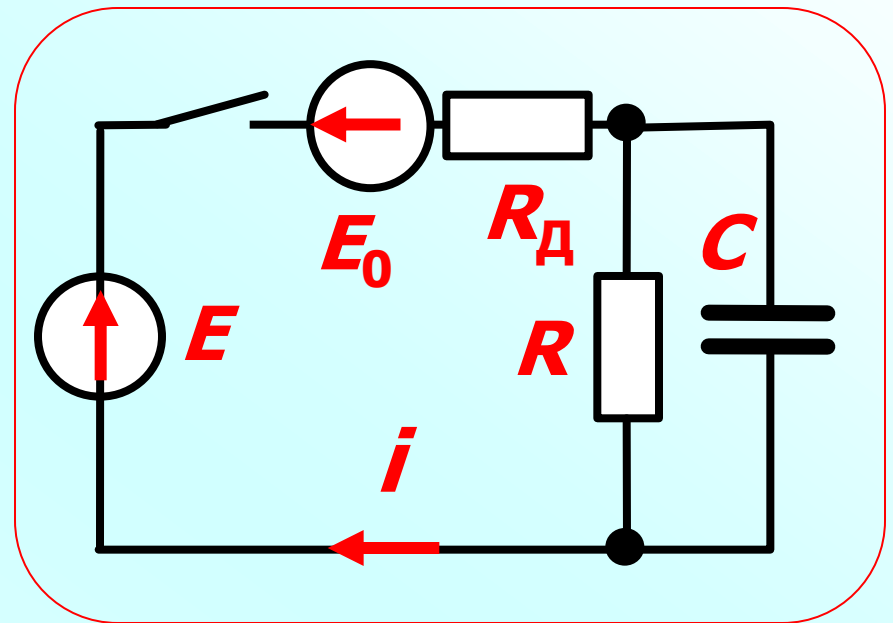
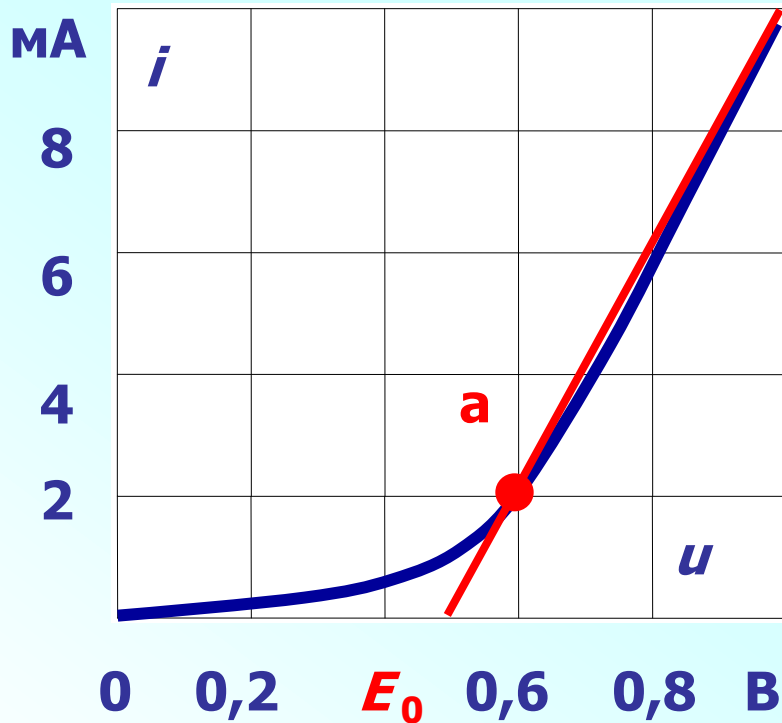


Установившийся ток диода **2 мА**;
напряжение на диоде $u_d = 0,6$ В;
напряжение на емкости $E - u_d =$
 $= 1 - 0,6 = 0,4$ В.

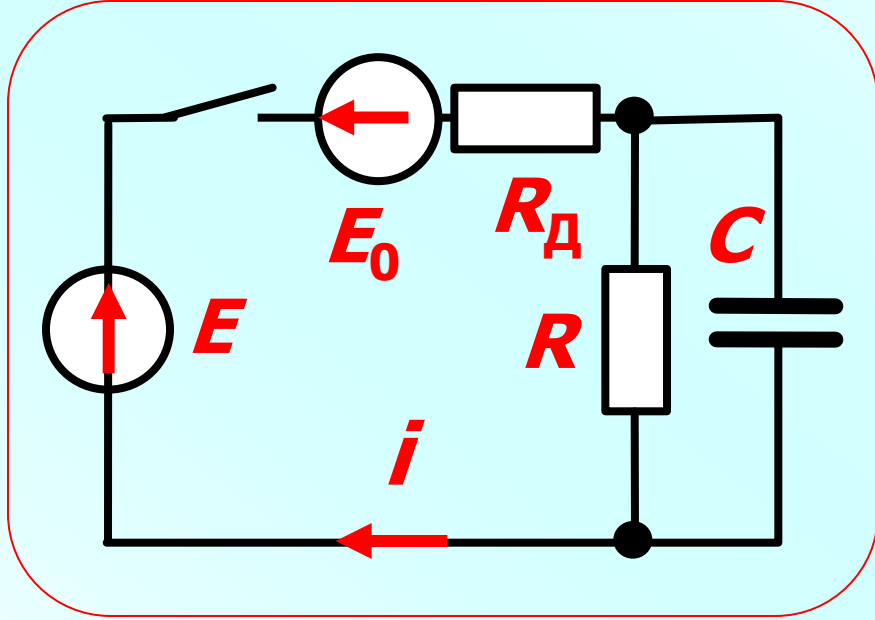
При $t=0$ (емкость не заряжена) ток диода равен **10 мА**.

Рабочий участок ВАХ диода аппроксимируем одной прямой линией и по ней определяем параметры схемы замещения диода.

Дифференциальное сопротивление диода $R_D=50$ Ом и ЭДС $E_0=0,5$ В.



С учетом найденных параметров составляем линейную схему замещения.



Расчет схемы:

$$u_C(t) = u_{\text{СПР}} + Ae^{pt},$$

$$u_C(0) = 0; u_{\text{СПР}} = 0,4 \text{ В};$$

$$A = u_C(0) - u_{\text{СПР}}(0) = -0,4;$$

$$p = -\frac{R + R_D}{RR_D C} = -250 \text{ с}^{-1}. \quad \text{Окончательно:}$$

$$u_C(t) = 0,4(1 - e^{-250t}) \text{ В.}$$

Время, в течение которого $u_c(t)$ достигает половины установившегося значения, определится из уравнения

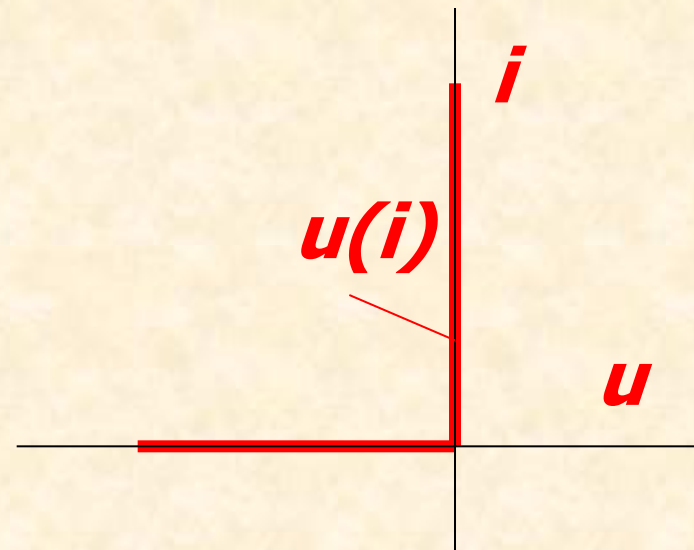
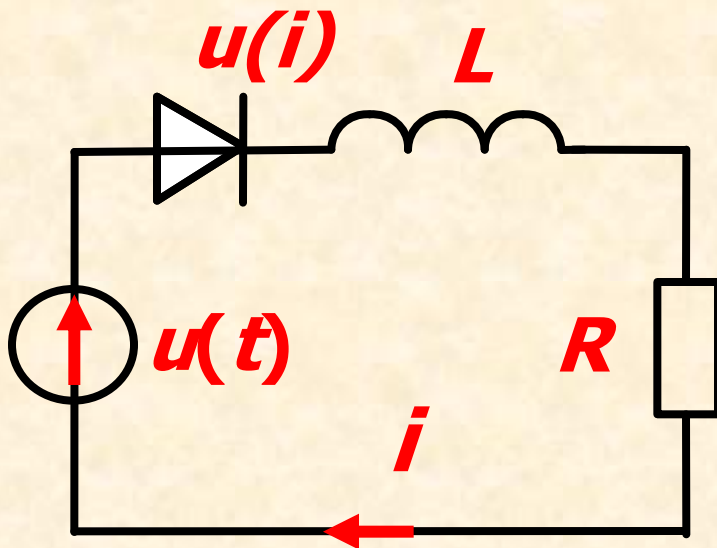
$$0,2 = 0,4(1 - e^{-250t}) \text{ В.}$$

Решая его, находим:

$$e^{-250t} = 1 - \frac{0,2}{0,4} = 0,5; \quad -250t = \ln(0,5);$$

$$t = \frac{-1}{250} \ln(0,5); \quad t = 2,8 \text{ мс.}$$

ПРИМЕР 2. Однополупериодный выпрямитель с индуктивным фильтром $L=0,5$ Гн работает на активную нагрузку $R=10$ Ом при входном напряжении $u(t)=10\sin 100t$ В. ВАХ диода можно считать идеальной.



Определить закон изменения тока во времени и построить его график.

Решение. Уравнение цепи согласно второму закону Кирхгофа

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_D = u(t).$$

Когда диод открыт (участок **0,1**), его напряжение $u_D = 0$ и уравнение цепи

$$Ri + L \frac{di}{dt} = u(t).$$

Его решение известно:

$$i(t) = I_m \left[\sin(\omega t - \varphi) + \sin \varphi \cdot e^{\rho t} \right],$$

где:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10^2 + 50^2}} = 0,196 \text{ A};$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R} = \arctg \left(\frac{50}{10} \right) = 78,7^\circ =$$
$$= 1,373 \text{ рад}; \quad \rho = -R/L = -20 \text{ с}^{-1}.$$

В момент времени $t_1 = \theta_1 / \omega$,

где θ_1 - угол отсечки, ток становится равным нулю и диод закрывается.

Угол отсечки находится из уравнения

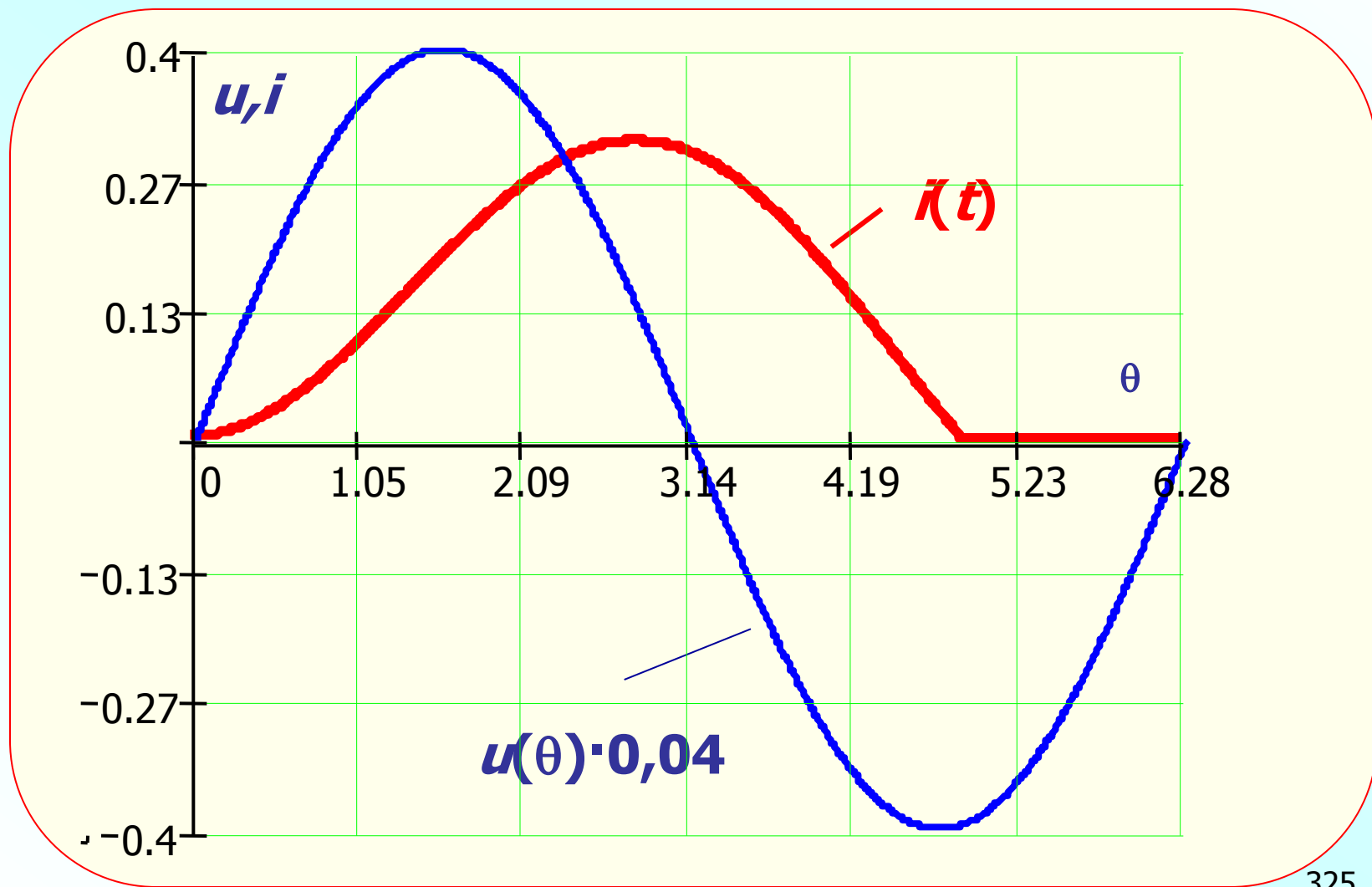
$$\sin(\theta_1 - \varphi) + \sin \varphi \cdot e^{p\theta_1 / \omega} = 0,$$

которое можно решить графически, или численно, учитывая, что $\theta_1 > \pi$.

Решая, находим $\theta_1 = 4,893$ рад,

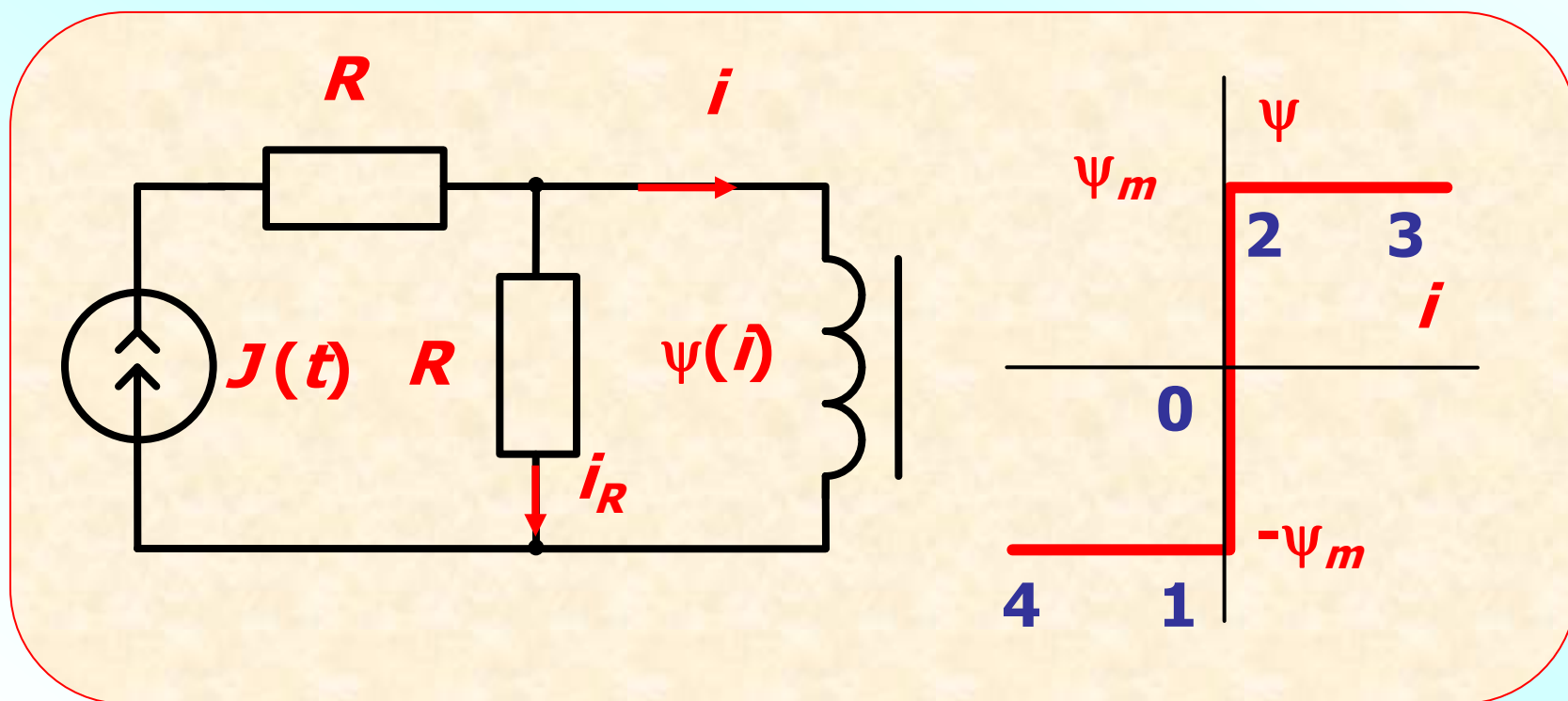
или $\theta_1 = 257,7$.

Графики изменения входного напряжения и тока



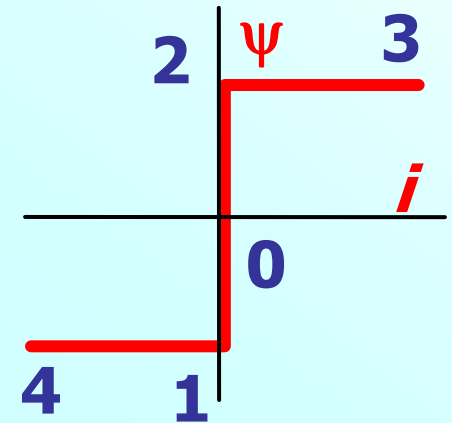
ПРИМЕР 3. Цепь с нелинейной индуктивностью (**ВБАХ задана**) питается от источника синусоидального тока

$$J(t) = 0,1 \sin 1000 t \text{ A.}$$

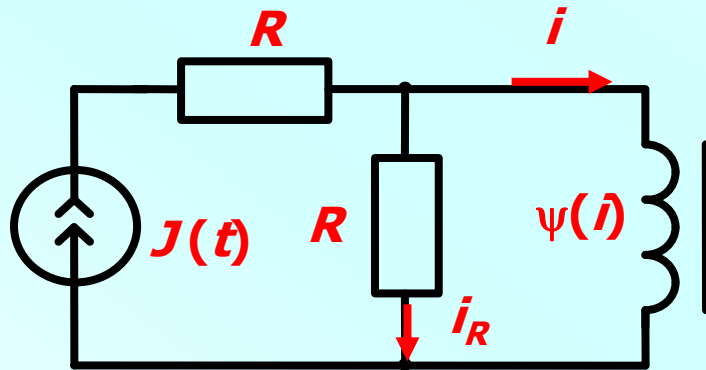


Построить кривые изменения потоко-
сцепления и тока нелинейной индук-
тивности во времени, если линейный
резистор $R = 600$ Ом; $\psi_m = 0,01$ Вб.

РЕШЕНИЕ. По ВБАХ видно,
что потокосцепление НИ
изменяется при токе $i=0$
(участок перемагничива-
ния 1,2), что равносильно
ее обрыву.



На этом участке ($i = 0$) уравнения цепи записываются:



$$i_R = J(t);$$

$$\frac{d\psi}{dt} = RJ(t).$$

В областях насыщения (горизонтальные участки ВБАХ) катушку можно считать короткозамкнутой

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} = 0.$$

Уравнение цепи для этих (2,3) и (1,4) участков записывается:

$$J(t) = i.$$

Закон изменения потокосцепления на участке перемагничивания (1,2):

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int RJ(t)dt = \frac{I_m R}{\omega} (-\cos \omega t) + C_1 = \\ &= 0,06 \sin(\omega t - 90^\circ) + C_1; \quad C_1 = \text{const}. \end{aligned}$$

Из условия

$$\psi(0) = -\psi_m = 0,06 \sin(-90^\circ) + C_1$$

следует: $C_1 = -0,01 + 0,06 = 0,05$ Вб.

Таким образом,

$$\psi(\omega t) = 0,06 \sin(\omega t - 90^\circ) + 0,05 \text{ Вб.}$$

Длительность интервала перемагничивания (участок 1,2) определяется из условия

$$\psi(\omega t_1) = \psi_m = 0,06 \sin(\omega t_1 - 90^\circ) + 0,05.$$

Обозначив $\omega t_1 = \theta_1$, получим

$$\theta_1 = \arcsin \left(\frac{\psi_m - 0,05}{0,06} \right) + 90^\circ = 146,4^\circ.$$

В радианах $\theta_1 = 0,841$ рад.

На участке насыщения (2,3) ток катушки равен току источника:

$$i = 0,1 \sin \omega t.$$

Насыщение длится до момента времени, пока $i(t) \neq 0$.

При $\omega t_2 = \theta_2 = \pi$ ток катушки станет равным нулю и **начнется перемагничивание** от ψ_m до $-\psi_m$ (участок 2,1). Закон изменения $\psi(t)$ здесь такой же, как на участке 1,2, но с другой постоянной интегрирования:

$$\psi(t) = \int RJ(t)dt = 0,06 \sin(\omega t - 90^\circ) + C_2.$$

Найдем C_2 из условия $\psi(\pi) = \psi_m$:

$$C_2 = \psi_m - 0,06 \sin 90^\circ = 0,01 - 0,06 = -0,05 \text{ Вб.}$$

Таким образом, на участке 2,1

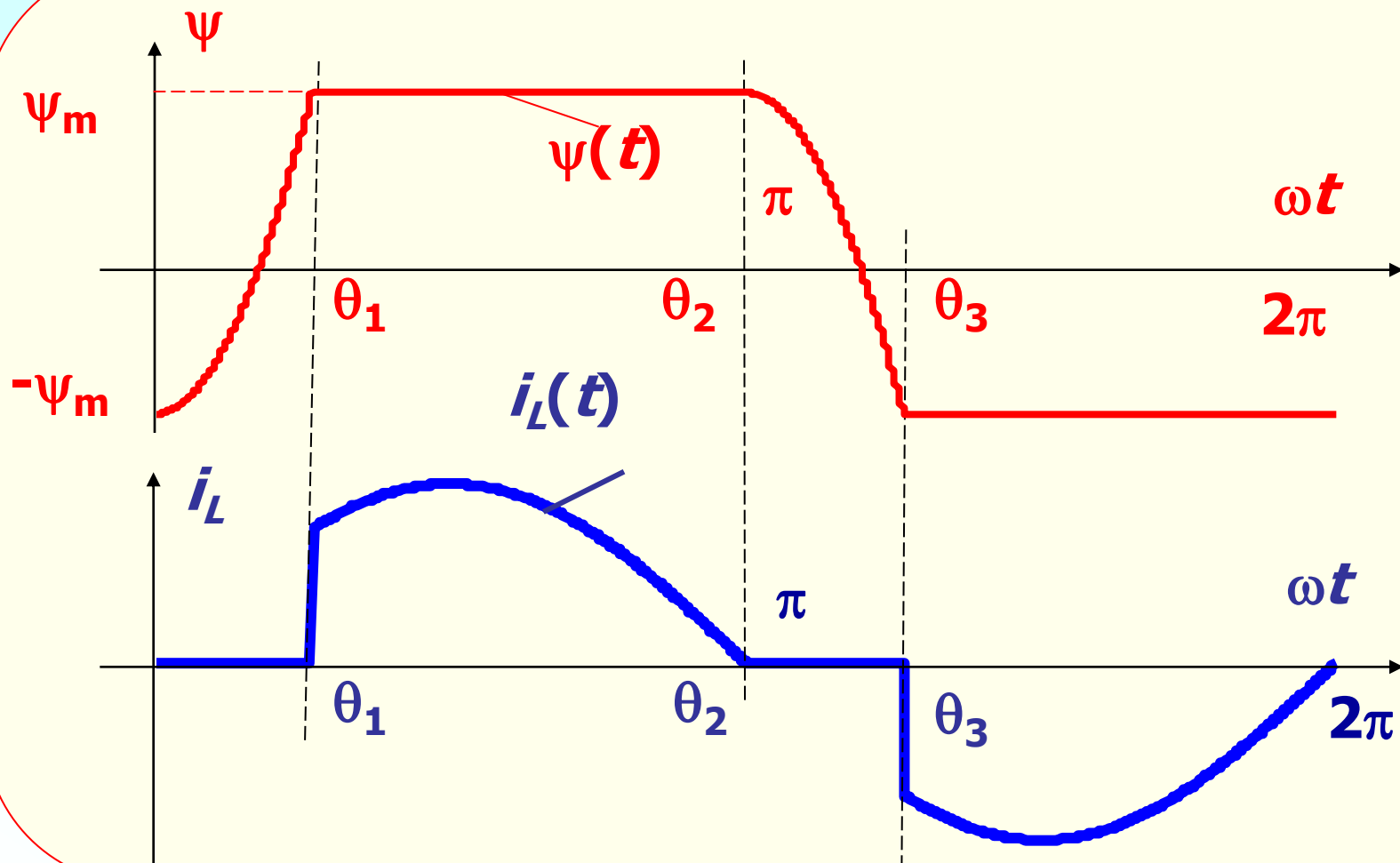
$$\psi(t) = 0,06 \sin(\omega t - 90^\circ) - 0,05 \text{ Вб.}$$

Переход на участок насыщения 1,4 происходит, когда $\psi(t)$ достигает значения $-\psi_m$:

$$-\psi_m = 0,06 \sin(\theta_3 - 90^\circ) - 0,05;$$

$$\theta_3 = \omega t_3 = 228,2^\circ = 3,981 \text{ рад.}$$

Кривые изменения потокосцепления и тока



Анализ нелинейных динамических цепей методом дискретных схем замещения

Дискретные схемы уже использовались в расчете переходных процессов **в линейных цепях.**

Эти схемы (модели) составляются на основе дискретизации процесса и линеаризации характеристик на каждом малом интервале (**h**) времени.

Параметры схем определяются выбранным алгоритмом интегрирования. Наиболее простые схемы получаются при использовании метода **Эйлера**. Определим их для интегрирования, например, по неявному методу **Эйлера** :

$$\frac{dx_{k+1}}{dt} \approx (x_{k+1} - x_k) / h = f'(x_{k+1}, t_{k+1}).$$

Для напряжения на емкости имеем

$$u_{k+1} = u_k + h \frac{du_{k+1}}{dt}.$$

Так как ток емкостного элемента

$$i_c = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du_c} \cdot \frac{du_c}{dt} = C_D \frac{du_c}{dt},$$

то

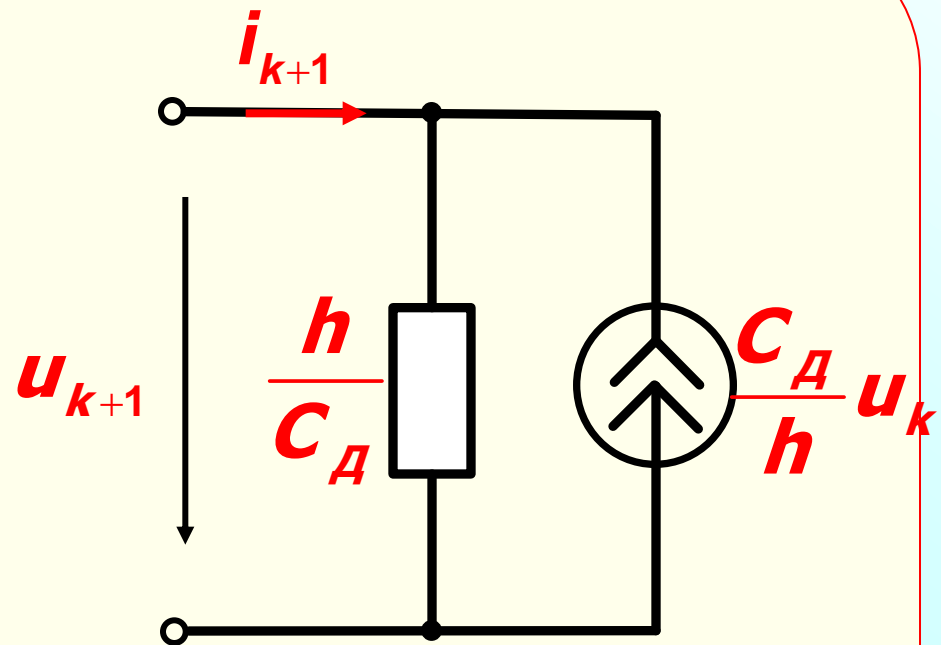
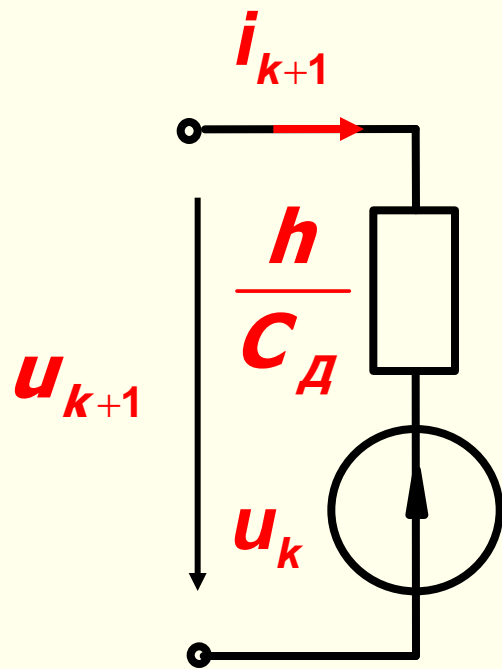
$$\frac{du_c}{dt} = \frac{i_c}{C_D}.$$

Таким образом, напряжение емкости на $k+1$ интервале на основе **неявного метода Эйлера** записывается

$$u_{k+1} = u_k + \frac{h}{C_D} i_{k+1}.$$

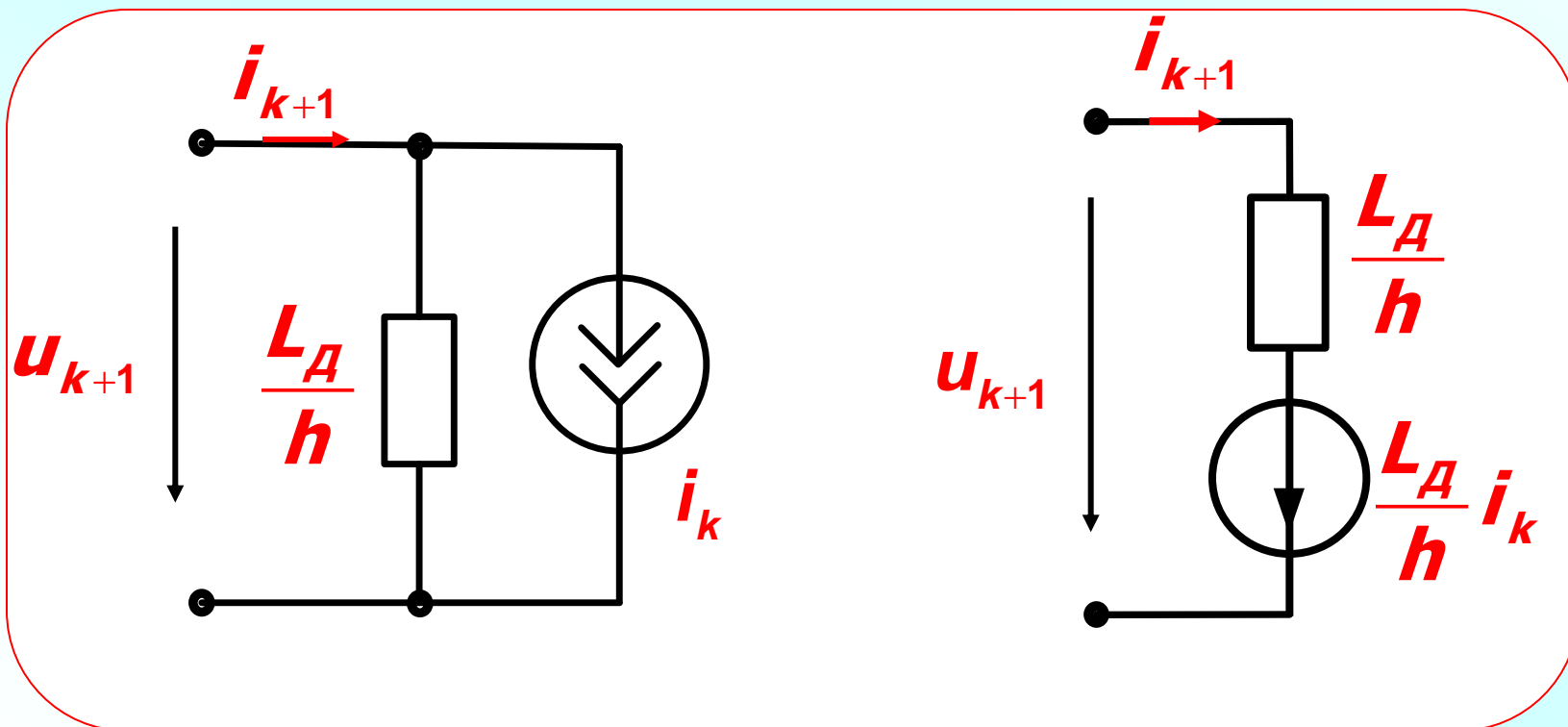
Коэффициент h / C_D имеет размерность Ом и моделируется резистивным элементом ($h / C_D = c / \Phi = \text{Ом}$).

Эквивалентные резистивные схемы

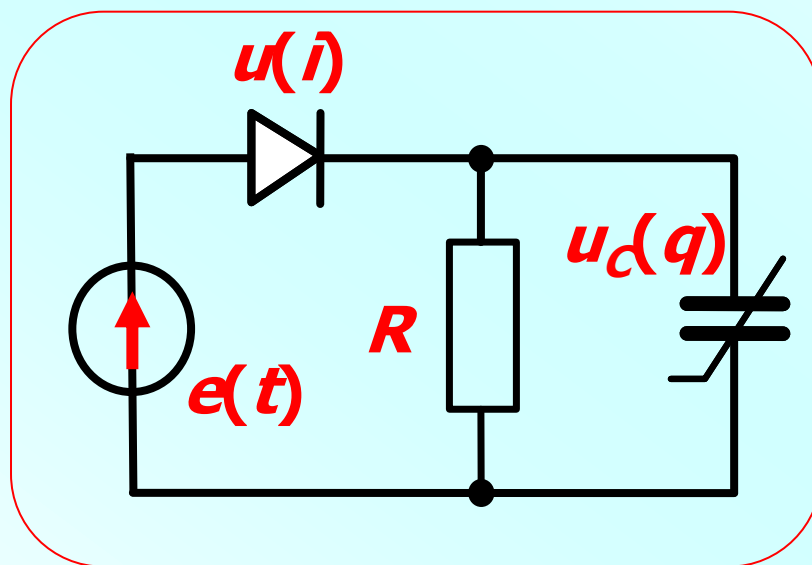


Ток индуктивности на $k+1$ интервале определяется $i_{k+1} = i_k + (h / L_d)u_{k+1}$.

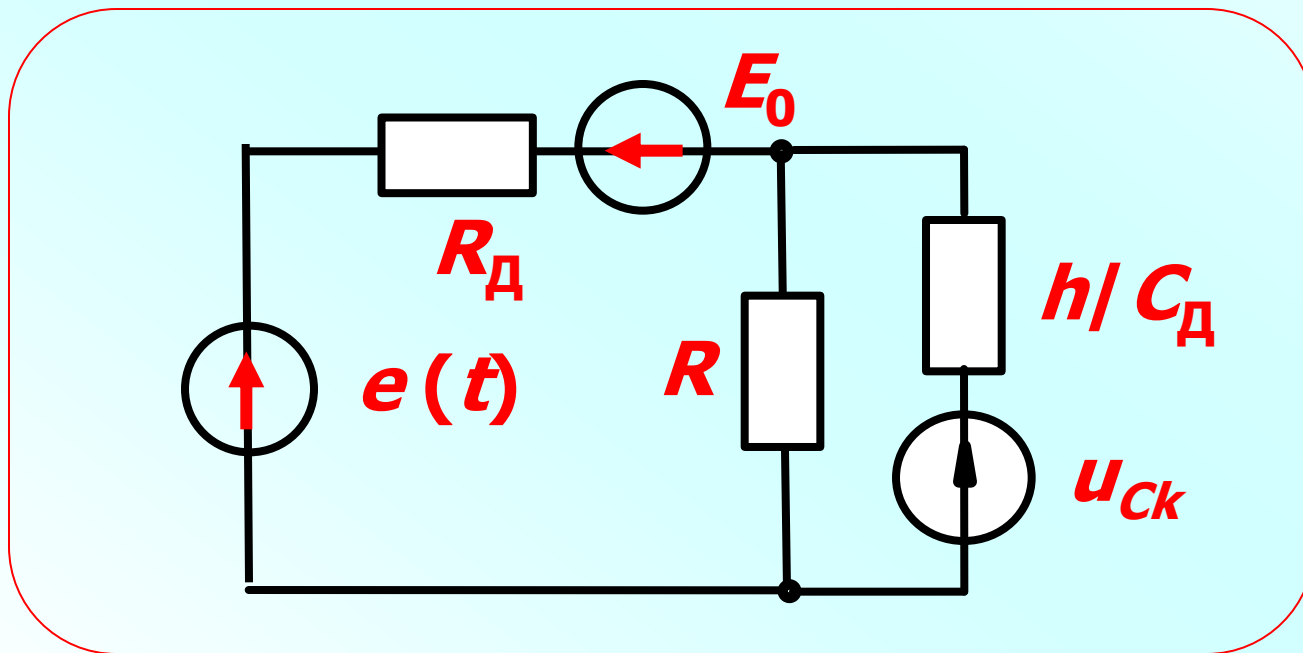
Данному уравнению соответствуют схемы



Пример. Составить дискретную модель нелинейной цепи для $k+1$ интервала интегрирования.



РЕШЕНИЕ. Заменяем нелинейные элементы линейными моделями. Линейную схему замещения рассчитываем известными методами



Приближенные методы расчета периодических режимов

1. Метод гармонической
линеаризации 351
2. Метод эквивалентных синусоид 361

Если **все** нелинейные элементы цепи являются **инерционными**, то при действии синусоидальных источников ЭДС и тока одинаковой частоты **токи и напряжения** во всех ветвях цепи будут также **синусоидальными**. Это позволяет использовать для записи уравнений состояния **символическую** (комплексную) форму.

В комплексной форме записи уравнения становятся алгебраическими, но нелинейными.

При этом комплексные сопротивления (проводимости) элементов будут функциями действующих значений токов (напряжений) этих элементов.

Методы решения **нелинейных** комплексных уравнений такие же, как и **функциональных** уравнений, рассмотренных раньше. В цепях с **безынерционными** элементами при гармонических воздействиях токи и напряжения – несинусоидальные и **комплексный метод неприменим.**

Однако имеется широкий класс **НЦ**, где главную роль в электромагнитных процессах играет **первая гармоника**, частота которой совпадает с частотой входного сигнала. При этом **высшие гармоника** практически **не влияют** на режим цепи. **Это** относится к цепям с **обратными связями и фильтрами низших частот**, цепям со слабо насыщающимися **трансформаторами** и т.д.

В таких цепях для приближенного анализа **периодических** процессов несинусоидальные токи (напряжения) заменяются **эквивалентными синусоидами**, замещающими действительные кривые токов и напряжений. Затем к ним применяют, как и в расчете инерционных цепей, **комплексный метод** расчета.

Возможны два подхода в выборе эквивалентных синусоид:

1) характеристика нелинейного элемента представляется **аналитическим** выражением, связывающим между собой **амплитуды первых** гармоник тока и напряжения.

Такой метод расчета называют **частотным** методом или методом **гармонической линеаризации.**

2) используются характеристики нелинейных элементов, снятые экспериментально для **первых** гармоник или для **действующих значений** (это метод эквивалентных синусоид).

1. Метод гармонической линеаризации

Нелинейный элемент заменяют эквивалентным **комплексным сопротивлением**, являющимся функцией частоты и амплитуды **первой** гармоники (без учета высших гармоник).

Замена производится по принципу гармонического баланса: амплитуда **напряжения (тока) на эквивалентном сопротивлении **приравнивается** амплитуде **напряжения** (тока) **основной** гармоники на **НЭ**. Разделив первые гармоники **напряжения** и **тока**, получают **эквивалентное** сопротивление, зависящее от амплитуды входного **напряжения** (тока).**

Например, для нелинейного резистора с ВАХ для мгновенных значений

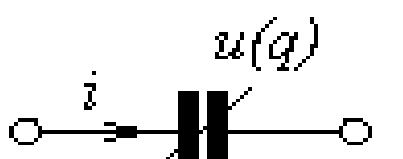
$u = ai + bi^3$ при синусоидальном токе $i(t) = I_m \sin \omega t$ получаем:

$$\begin{aligned} u(i) &= aI_m \sin \omega t + bI_m^3 \sin^3 \omega t = \\ &= (aI_m + \frac{3b}{4} I_m^3) \sin \omega t - \frac{b}{4} I_m^3 \sin 3\omega t; \end{aligned}$$

$$R(I_m) = \frac{u(i)}{I_m \sin \omega t} = a + \frac{3b}{4} I_m^2.$$

Имеются таблицы эквивалентных сопротивлений **НЭ** с разнообразными характеристиками, включая характеристики с гистерезисными петлями. Для **НЭ** с симметричными характеристиками и слабым насыщением, аппроксимированными двучленом $f(x) = ax \pm bx^3$, комплексные параметры приведены ниже.

Эквивалентные сопротивления НЭ

НЭ и вид аппроксимации	Комплексный параметр
 $i(u) = au + bu^3$	$Y(U_m) = \frac{i(u)}{U_m} = a + \frac{3}{4} bU_m^2$
 $\psi = ai - bi^3$	$\underline{Z}_L = j\omega \left(a - \frac{3}{4} bI_m^2 \right)$
 $u = aq + bq^3$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega} \left(a + \frac{3bI_m^2}{4\omega^2} \right)$

ПРИМЕР. Методом гармонической
линеаризации найти ток в цепи после-
до-вательно соединенных резистора
 $R = 200 \text{ Ом}$; емкости $C = 5 \text{ мкФ}$;
нелинейной индуктивности с ВБАХ
 $\psi(i) = 0,4i - 0,04i^3 \text{ Вб}$ (i в амперах)
и источника ЭДС $e(t) = 100 \sin 1000t \text{ В}$.
При какой частоте возникнет резонанс
на первой гармонике?

РЕШЕНИЕ. Заменим нелинейную индуктивность эквивалентной

$$L_{\text{э}} = 0,4 - \frac{3}{4} 0,04 I_m^2 = 0,4 - 0,03 I_m^2.$$

Ее комплексное сопротивление

$$\underline{Z}_{L_{\text{э}}} = j\omega L_{\text{э}} = j(400 - 30 I_m^2) \text{ Ом.}$$

Ток цепи в комплексной форме:

$$\dot{I}_m \left(R + j\omega L_{\text{э}} - j \frac{1}{\omega C} \right) = \dot{E}_m.$$

I_m - комплексная амплитуда первой гармоники. Ее модуль определяется уравнением

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L_{\text{э}} - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

Численно:

$$I_m = \frac{100}{\sqrt{200^2 + (200 - 30I_m^2)^2}}$$

**Уравнение решается методом итерации по известным алгоритмам.
Можно воспользоваться MathCad:**

$l_m := 0.5$ **Given**

$$l_m = \frac{100}{\sqrt{200^2 + (200 - 30 \cdot l_m^2)^2}}$$

$x := \text{Find}(l_m)$ $x = 0.357$

Начальная фаза комплексной амплитуды определяется

$$\varphi = \mathit{arctg} \frac{X_{L_3} - X_C}{R} = \mathit{arctg} \frac{196,18}{200} = 44,46^\circ.$$

Резонансную частоту находим по известному соотношению

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_3 C}} = \frac{1}{\sqrt{(0,4 - 0,03 \cdot 0,357^2) 5 \cdot 10^{-6}}} \approx \approx 710 \text{ рад/с.}$$

2. Метод эквивалентных синусоид

В этом методе несинусоидальные токи и напряжения заменяют синусоидами, которые выбираются в зависимости от поставленной задачи. При расчете радиотехнических систем в качестве эквивалентных синусоид принимают первые гармоники тока (напряжения), на частоту которых настраивают резонансные контуры.

При расчете **электрических** цепей, содержащих катушки со сталью, используются **действующие значения**.

У эквивалентных синусоид тот же период, что и у несинусоидальных, но угол сдвига фаз определяется по принципу **энергетического** баланса

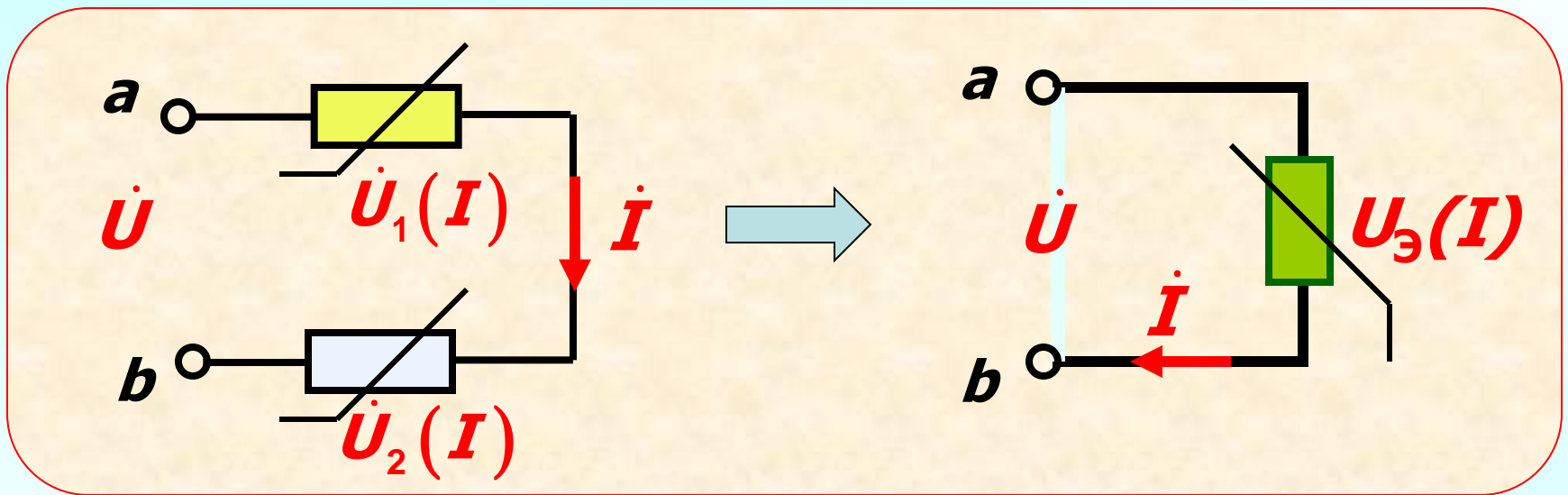
$\varphi = \arccos[P/(UI)]$, что обеспечивает в цепи ту же активную мощность **P** .

Переход к эквивалентным синусоидам равносильно допущению, что для мгновенных значений цепь является линейной, но между действующими значениями или первыми гармониками зависимость нелинейная, иными словами, цепь считается условно-нелинейной.

НЭ задаются **ВАХ** и **ФАХ** для **первых гармоник** или для **действующих значений** соответственно.

Иногда используют характеристики для **активных** и **реактивных составляющих** тока (напряжения), а также для **комплексных сопротивлений** элементов. Переход к эквивалентным синусоидам позволяет использовать **символический метод** расчета и **векторные диаграммы**.

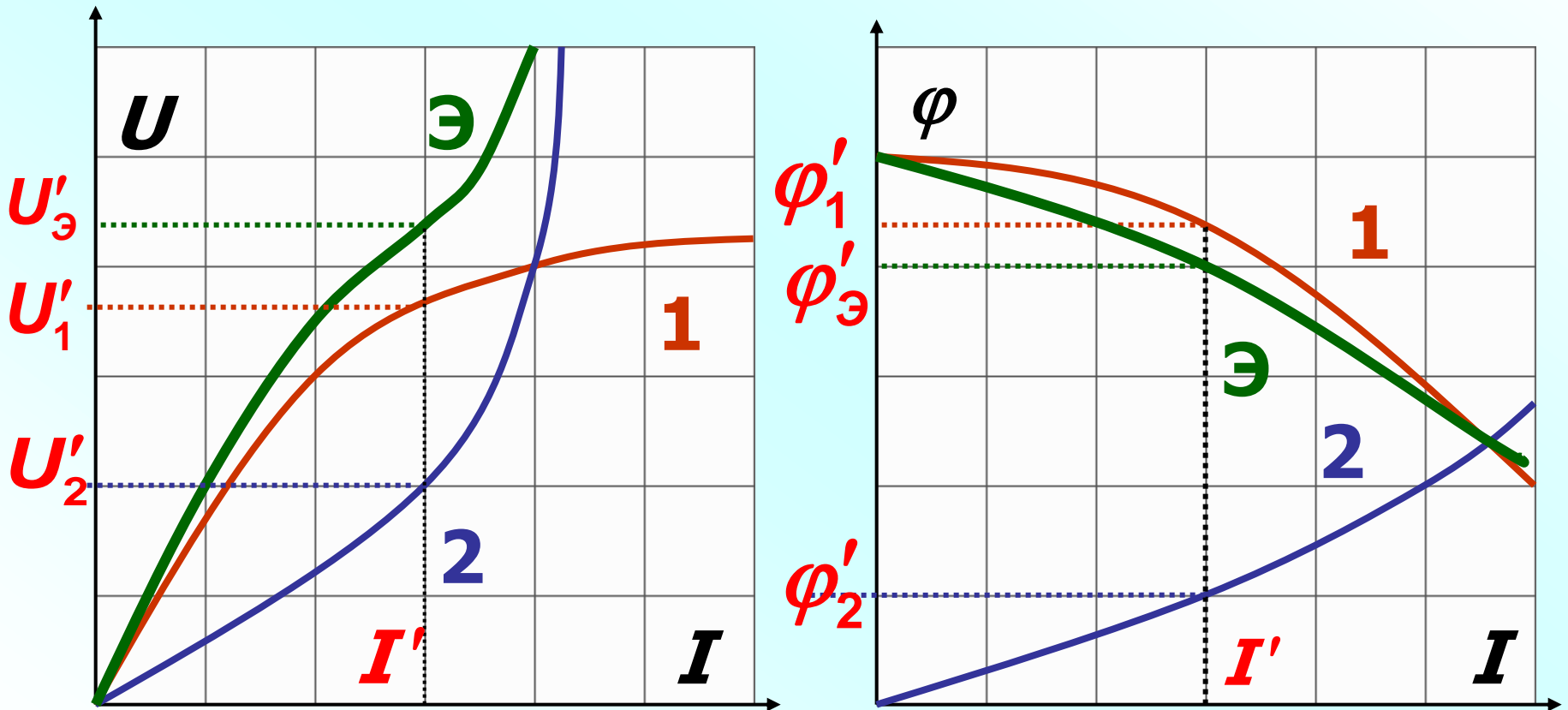
Например, при последовательном соединении двухполюсников (НЭ):



при $\dot{I} = I e^{j0^\circ}$ по второму закону Кирхгофа имеем:

$$U_3(I) e^{j\varphi_3(I)} = U_1(I) e^{j\varphi_1(I)} + U_2(I) e^{j\varphi_2(I)}.$$

Задавая ряд значений тока и вычисляя комплексные напряжения, находят ВАХ и ФАХ эквивалентного НЭ.



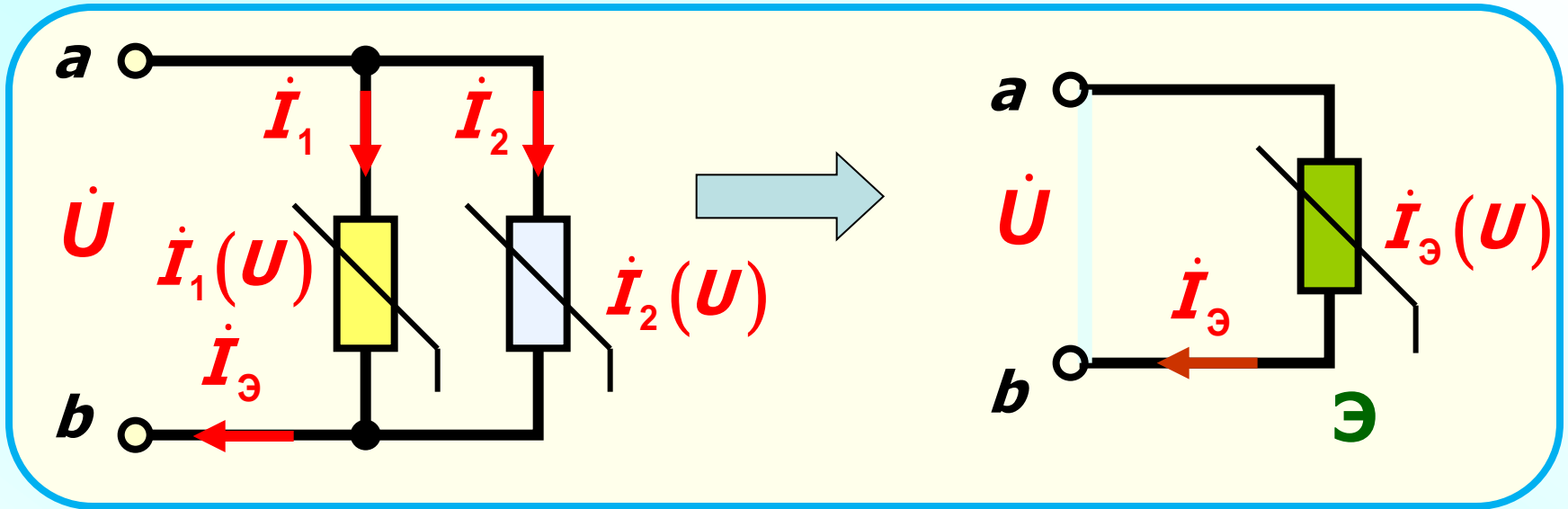
Для тех, кто не понял:

определив для I' по ВАХ и ФАХ соответствующие напряжения и их фазы, эквивалентное напряжение находим по векторным диаграммам или в комплексной форме

$$\dot{U}'_{\Sigma} e^{j\varphi'_{\Sigma}} = U'_1 e^{j\varphi'_1} + U'_2 e^{j\varphi'_2}.$$

Затем берется I'' и снова вычисляется эквивалентное напряжение.

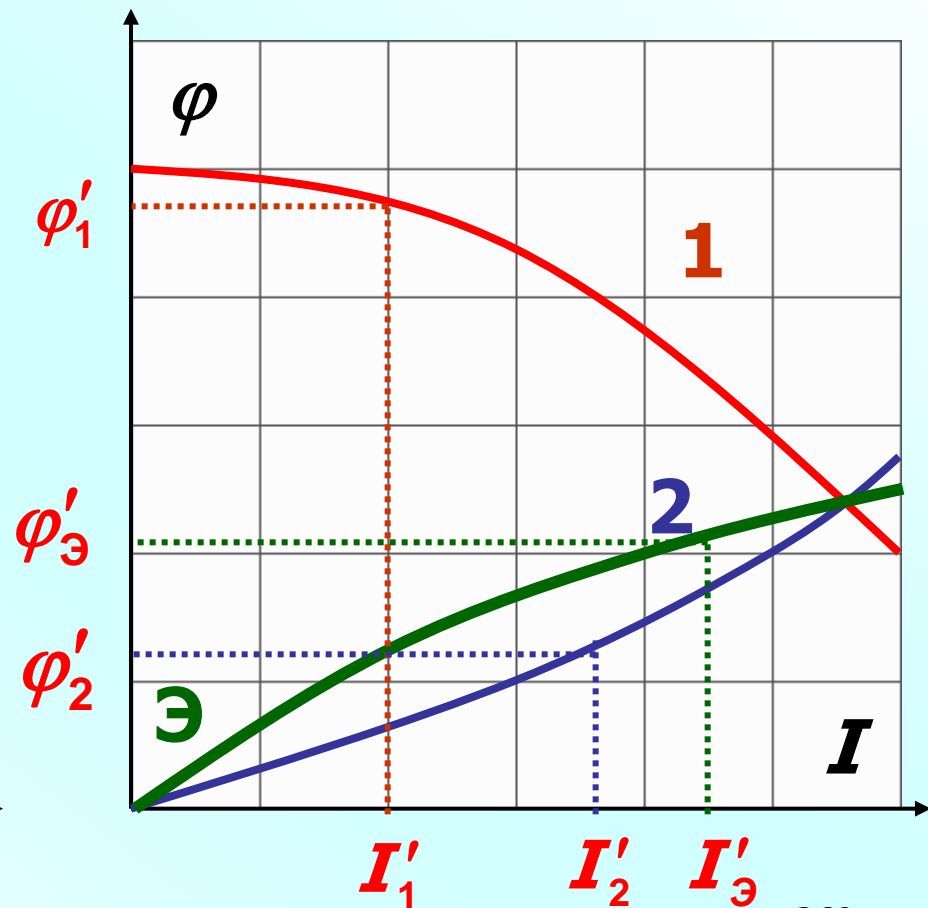
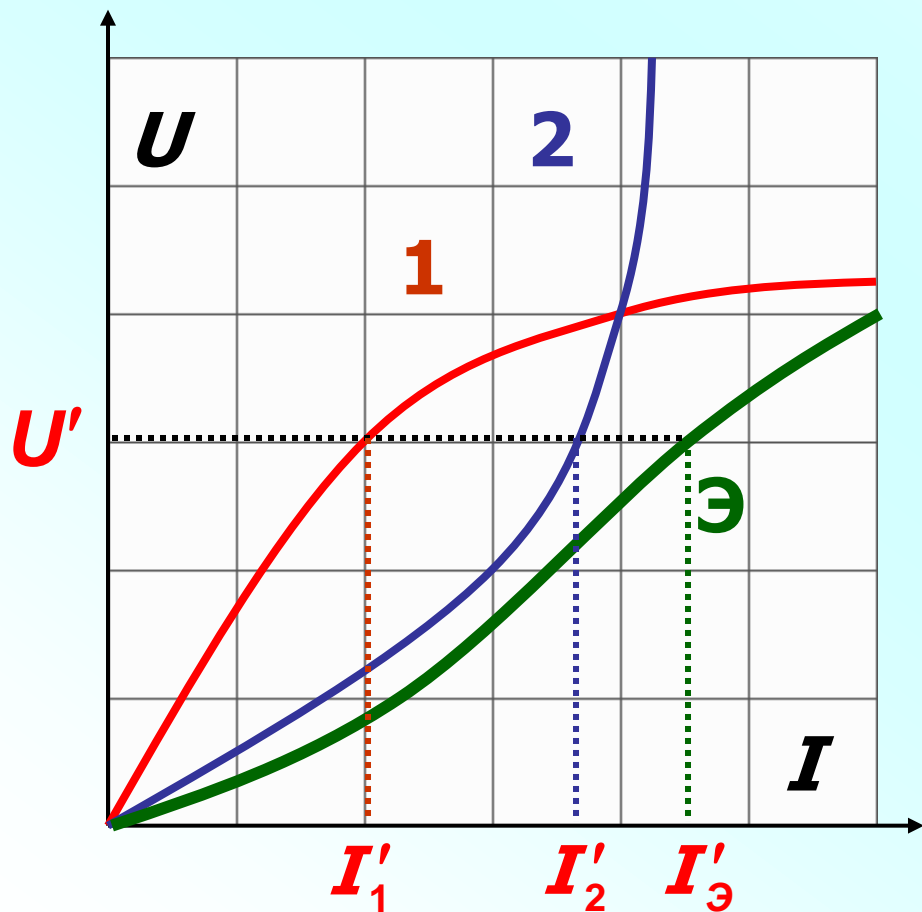
При параллельном соединении НЭ:



приняв $\dot{U}_{ab} = U e^{j0^\circ}$ по первому закону Кирхгофа имеем:

$$\begin{aligned}
 I_3(U) e^{-j\varphi_3(I_3)} &= \\
 &= I_1(U) e^{-j\varphi_1(I_1)} + I_2(U) e^{-j\varphi_2(I_2)}.
 \end{aligned}$$

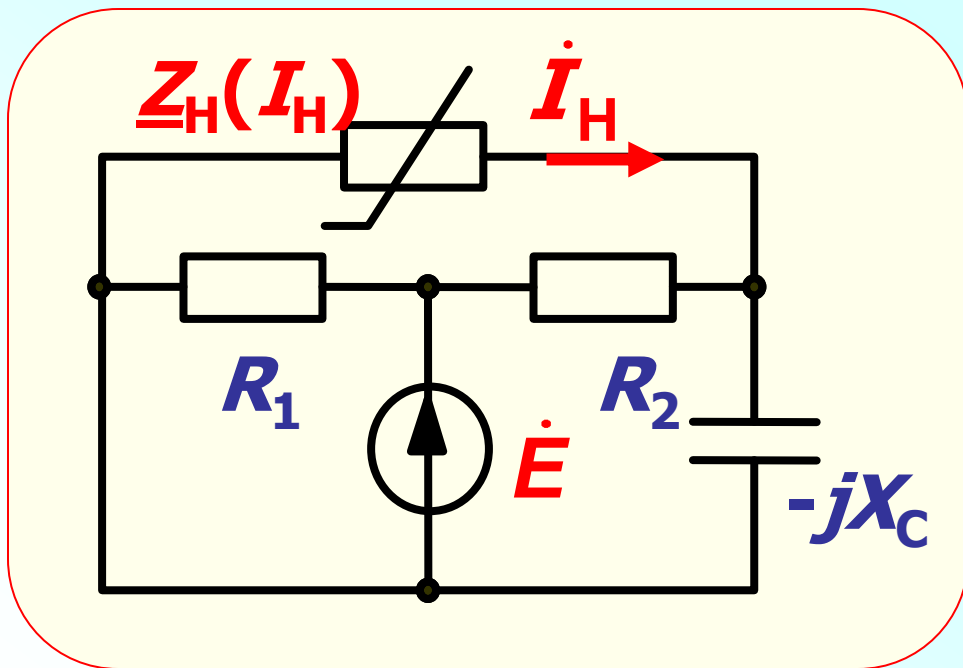
Задавая ряд значений напряжений и вычисляя комплексные токи, находят ВАХ и ФАХ эквивалентного НЭ.



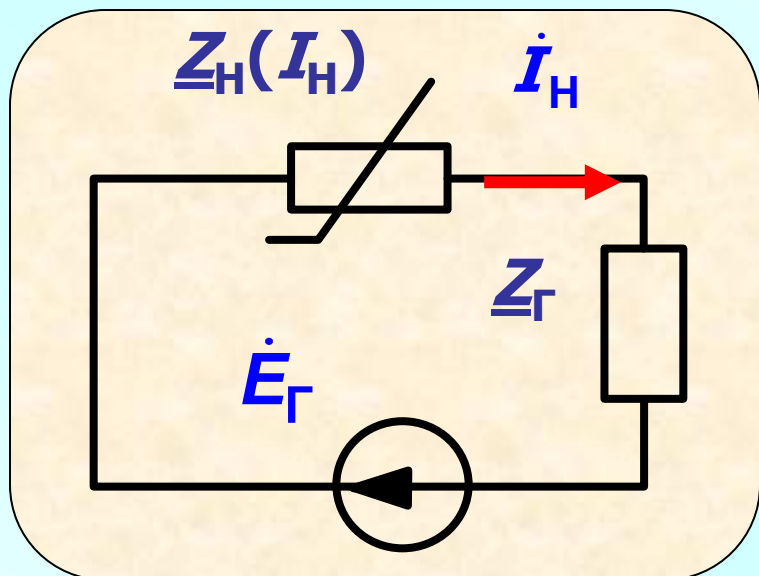
ПРИМЕР 1. Цепь, состоящая из резисторов $R_1=320$ Ом; $R_2=650$ Ом, конденсатора $C=24,6$ мкФ, условно-нелинейного элемента с заданными ВАХ и ФАХ для действующих значений эквивалентных синусоид питается от источника ЭДС $e(t) = \sqrt{2} \cdot 400 \sin 500 t$ В.

Найти ток нелинейного элемента.

I, A	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1
U, B	60	70	80	85	90
φ	85	70	55	50	48



РЕШЕНИЕ.
 Линеиную часть
 цепи заменяем
 эквивалентным
 источником
 (E_r и \underline{Z}_r).



$$\dot{E}_\Gamma = \dot{U}_{xx} = -\dot{I}'_C(-jX_C);$$

$$\dot{I}'_C = \frac{\dot{E}}{R_2 - jX_C};$$

$$\underline{Z}_\Gamma = \frac{R_2(-jX_C)}{R_2 - jX_C}.$$

Численно:

$$\dot{I}'_C = \frac{400e^{j0^\circ}}{650 - j \frac{1}{500 \cdot 24,6 \cdot 10^{-6}}} = 0,61e^{j7,15^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{E}_r = -0,61 e^{j7,15^\circ} (-j 81,3) = 49,7 e^{j97,15^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{Z}_r = \frac{650(-j81,3)}{650 - j81,3} \approx 80,67 e^{-j82,87^\circ} \text{ Ом.}$$

Дальнейший расчет эквивалентной схемы ведем в комплексной форме. Нелинейное уравнение цепи:

$$\dot{I}_H [\underline{Z}_r + \underline{Z}_H(\dot{I}_H)] = \dot{E}_r.$$

Нелинейное уравнение решается методом итерации, например, по формуле:

$$j_{H(k+1)} = \frac{\dot{E}_\Gamma}{\underline{Z}_\Gamma + \underline{Z}_{H(k)}},$$

где k – номер шага итерации.

Принимая за нулевое приближение ток $I_{H(0)} = 0,5$ А и учитывая ВАХ и ФАХ НЭ, находим:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{H(0)} &= \frac{U_{H(0)}}{I_{H(0)}} e^{j\varphi(0)} = \frac{70}{0,5} e^{j70^\circ} = \\ &= 140 e^{j70^\circ} \text{ Ом.} \end{aligned}$$

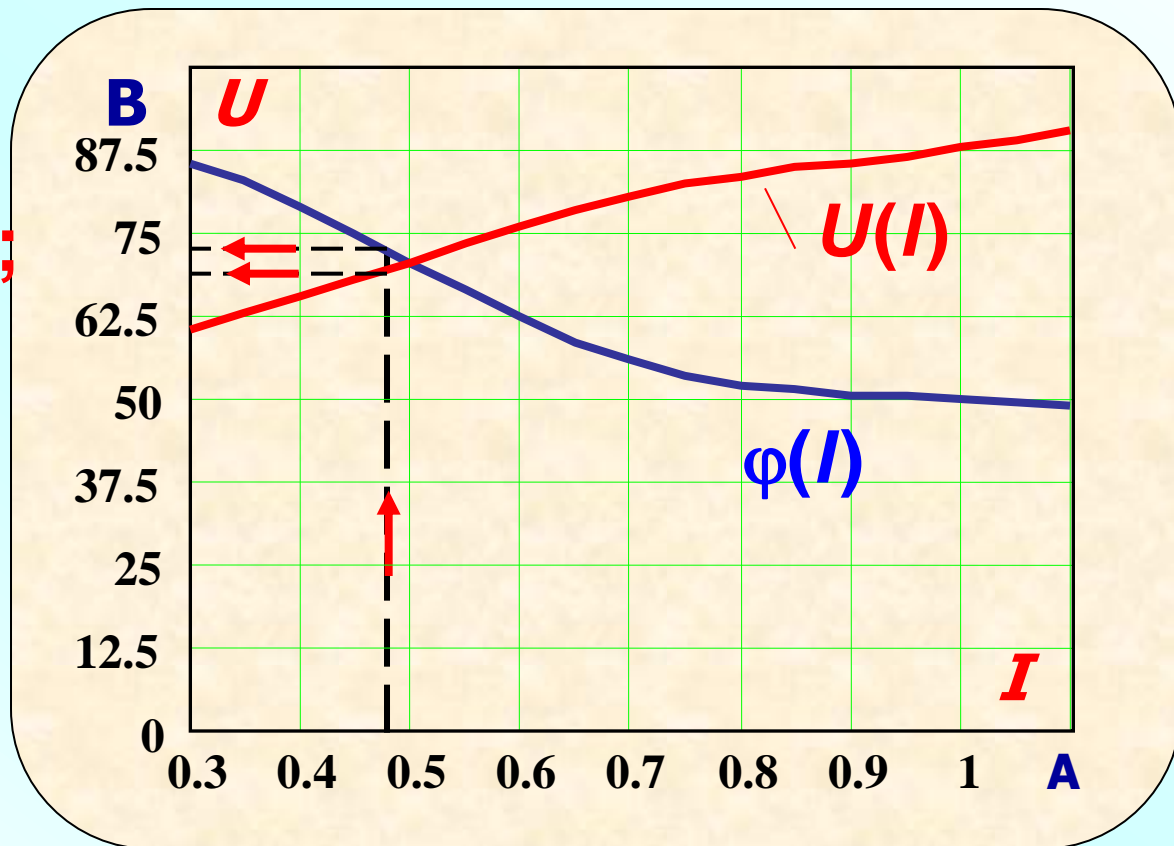
Подставляя найденное сопротивление в уравнение для тока, получаем

$$\dot{I}_{H(1)} = 0,484 e^{j81,1^\circ} \text{ А.}$$

По **ВАХ** и **ФАХ** для модуля тока $I_{H(1)}$ определяем напряжение и фазовый угол напряжения:

$$U(0,484) = 69,1 \text{ В};$$

$$\varphi(0,484) = 71,4^\circ$$



Затем находим сопротивление **НЭ**

$$\underline{Z}_{Н(1)} = \frac{U_{Н(1)}}{I_{Н(1)}} e^{j\varphi(1)} = \frac{69,1}{0,484} e^{j71,4^\circ} = 121 e^{j71,4^\circ} \text{ Ом,}$$

после чего снова вычисляем ток

$$\dot{I}_{Н(2)} = 0,633 e^{j52,3^\circ} \text{ А.}$$

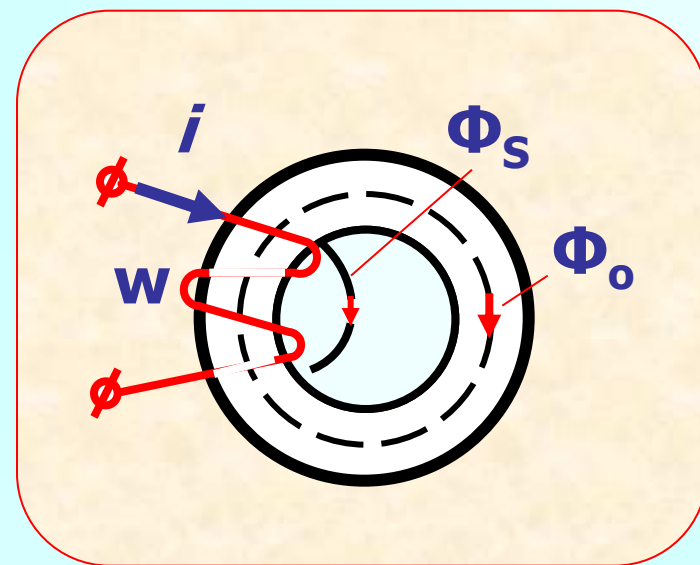
Повторяя вычисления, находим
третье приближение для тока

$$\dot{I}_{Н(3)} = 0,649 e^{j78,45^\circ} \text{ А.}$$

Получив хорошее совпадение с предыдущим результатом, можно **прекратить расчеты **или** проверить решение в MathCAD.**

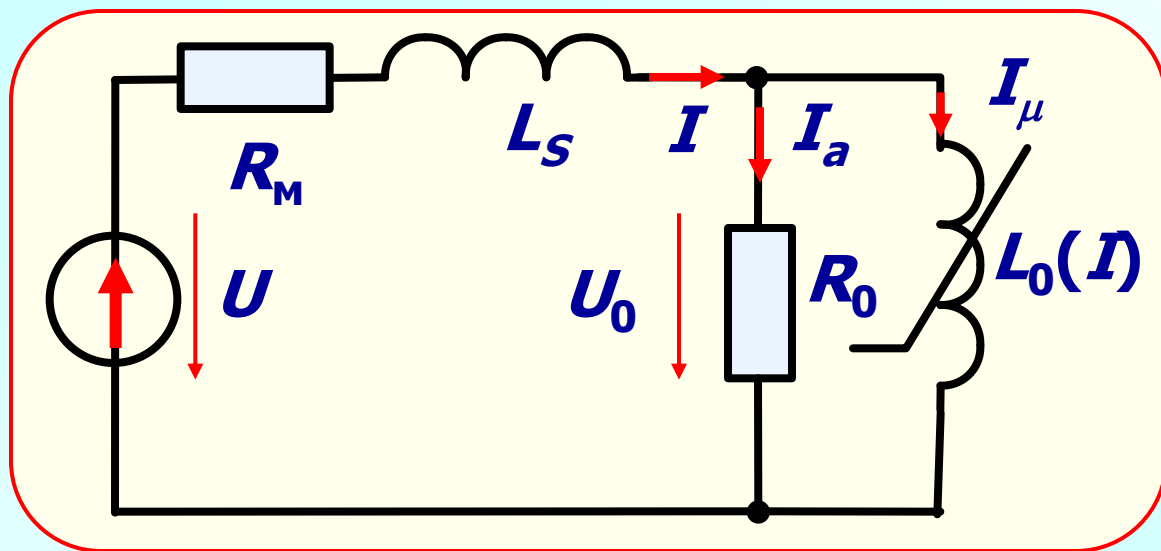
ПРИМЕР 2. Катушка с магнитопроводом из трансформаторной стали включена в промышленную сеть с напряжением **220 В**. Ток катушки **5А**; активная мощность **150 Вт**.

Сопротивление обмотки постоянному току **4 Ом**, индуктивное сопротивление рассеяния **12 Ом**.



Определить потери в стали (R_0) и намагничивающий ток (I_μ). Несинусоидальностью тока пренебречь.

РЕШЕНИЕ. Воспользуемся схемой замещения катушки с сердечником с параллельным контуром намагничивания.



R_M, R_0 - потери в меди и в стали;

L_S - индуктивность рассеяния;

$L_0(I)$ - индуктивность, обусловленная потоком в магнитопроводе;

I_a - активная составляющая тока;

I_μ - ток намагничивания магнитопровода; I - ток катушки.

Пусть $\dot{U} = U$, тогда ток $\dot{I} = I e^{-j\varphi}$, где

$$\varphi = \arccos \frac{P}{UI} = \arccos \frac{150}{220 \cdot 5} = 82,2^\circ$$

Напряжение U_0 найдем по второму закону Кирхгофа:

$$\dot{U}_0 = \dot{U} - \dot{I} (R_M + j\omega L_S);$$

$$\dot{U}_0 = 220 - 5 e^{-j82,2^\circ} (4 + j12) = 158 e^{j4,2^\circ} \text{ В.}$$

Потери в стали определяются из общей активной мощности

$$P_0 = P - R_M I^2 = 150 - 4 \cdot 5^2 = 50 \text{ Вт.}$$

По потерям в стали определяется ток активных потерь I_a , а затем ток намагничивания I_μ

$$I_a = P_0 / U_0 = 50 / 158 = 0,317 \text{ А,}$$

$$I_\mu = \sqrt{I^2 - I_a^2} = \sqrt{5^2 - 0,317^2} = 4,99 \text{ А.}$$

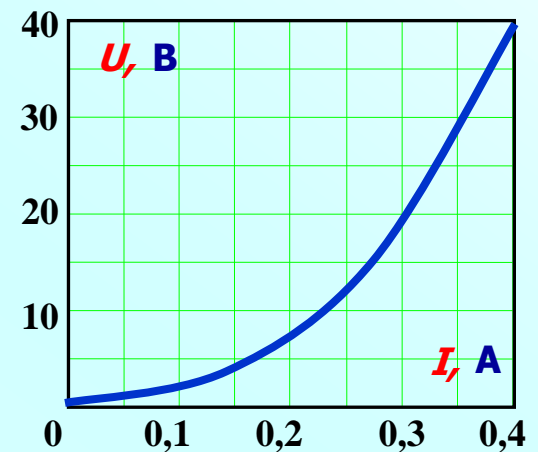
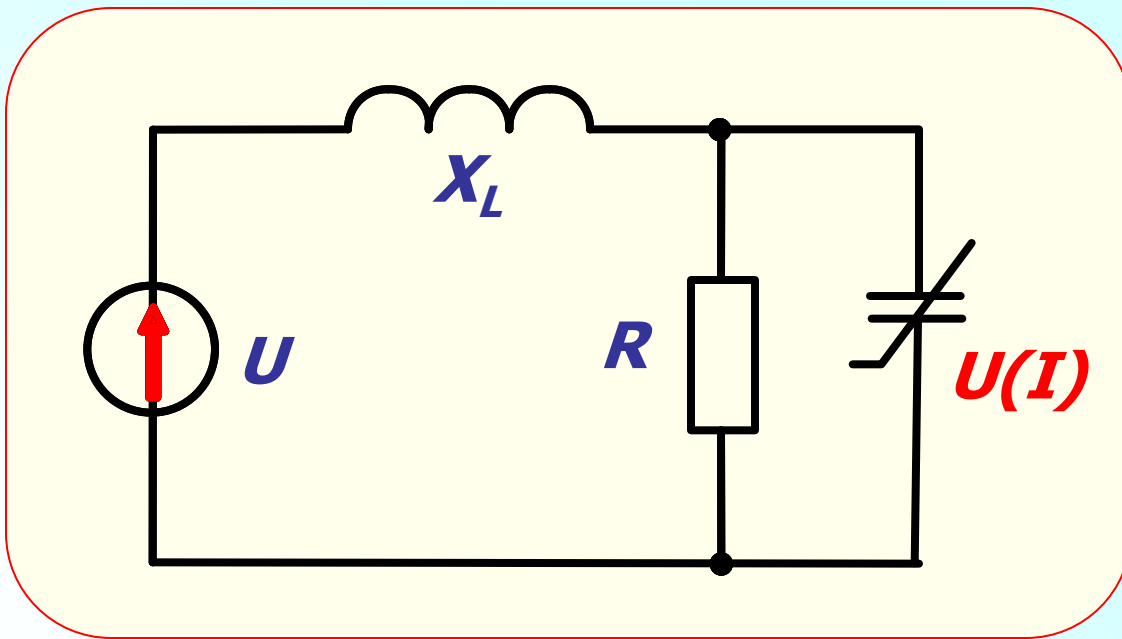
Замечание. Потери в сердечнике из ферромагнитного материала связаны с перемагничиванием сердечника. В диапазоне $B_m = 1,0-1,6$ Тл площадь петли гистерезиса пропорциональна этим потерям:

$$P_{\Gamma} = k_{\Gamma} f B_m^2 G.$$

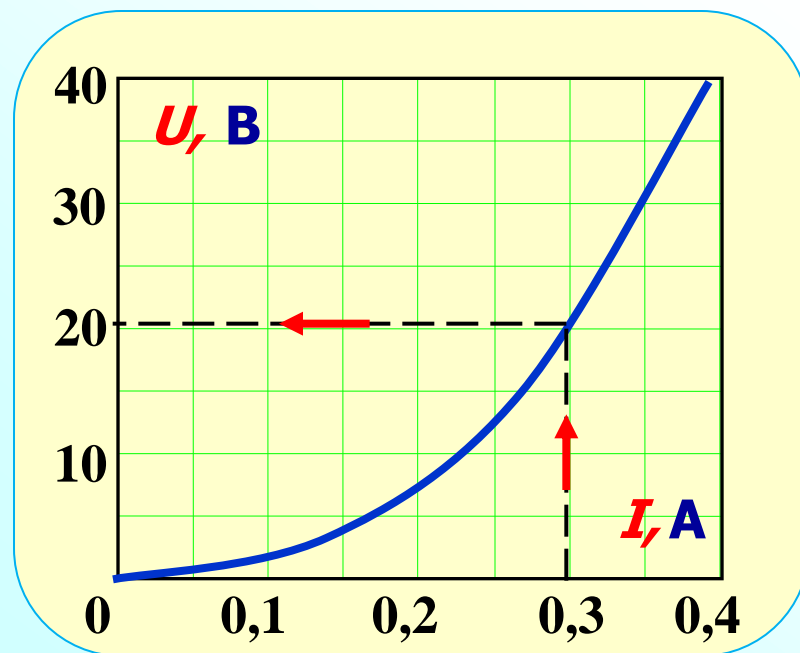
Потери на вихревые токи:

$$P_{\text{В}} = k_{\text{В}} f^2 B_m^2 G.$$

ПРИМЕР 3. Ток инерционного нелинейного конденсатора с заданной ВАХ для действующих значений равен **0,3 А**. Определить действующее значение входного напряжения ($R=X_L=50\text{ Ом}$)



РЕШЕНИЕ. По ВАХ конденсатора определяем его напряжение при заданном токе: $U_C = 20$ В.



Затем находим ток резистора (он совпадает по фазе с напряжением конденсатора)

$$I_R = \frac{U_C}{R} = \frac{20}{50} = 0,4 \text{ А.}$$

Ток катушки определяем в комплексной форме с учетом того, что ток конденсатора опережает напряжение на угол 90° :

$$\dot{I}_L = 0,4 + j0,3 = 0,5e^{j36,87^\circ} \text{ А.}$$

Входное напряжение:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= U_C + jX_L \cdot \dot{I}_L = 20 + j50(0,4 + j0,3) = \\ &= 5 + j20 = 20,6e^{j76^\circ} \text{ В; } U = 20,6 \text{ В.} \end{aligned}$$

Приближенный анализ цепей с нелинейной ИНДУКТИВНОСТЬЮ

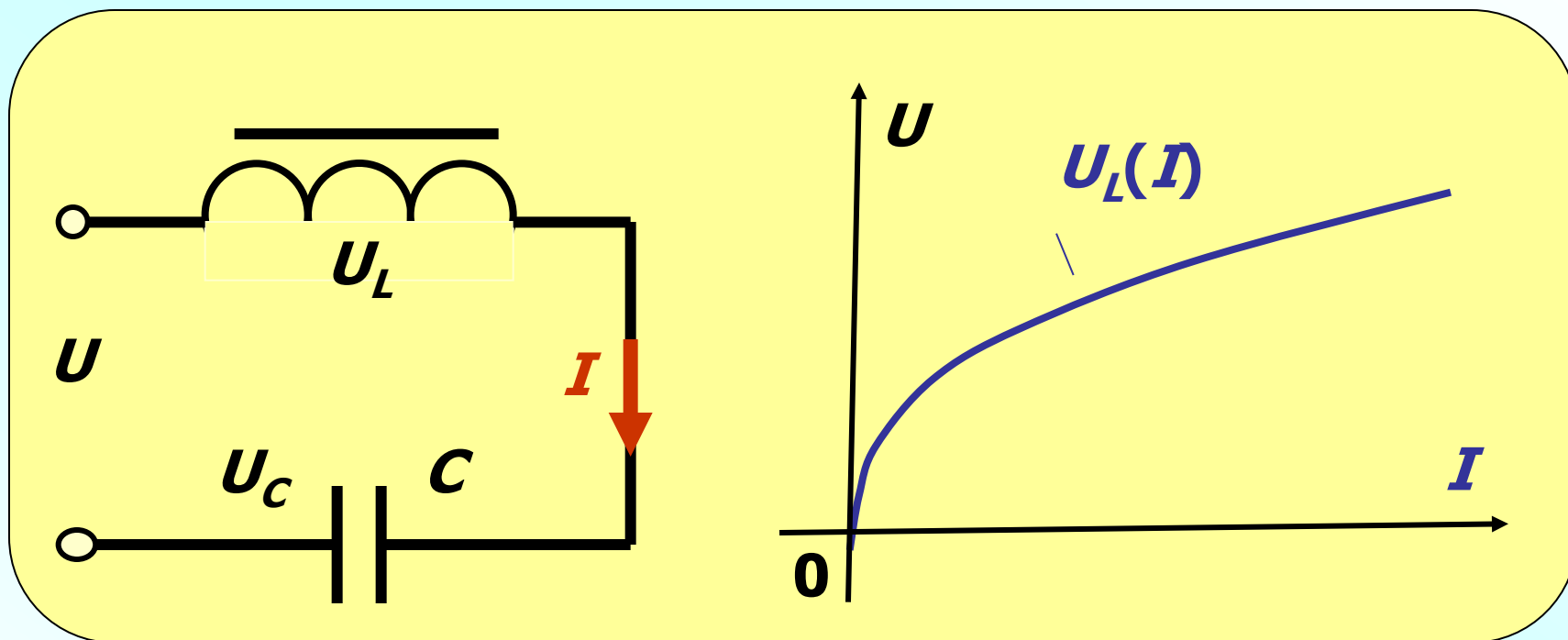
- 1. Феррорезонанс напряжений**
- 2. Феррорезонанс токов**
- 3. Субгармонические колебания**

Если колебательный контур содержит катушку с ферромагнитным сердечником, то при изменении входного **напряжения (тока) в нем возможен резонанс, названный **феррорезонансом**.**

В последовательном контуре возникает ф/резонанс напряжений, в параллельном – ф/резонанс ТОКОВ.

Для анализа ф/резонансов используется метод эквивалентных синусоид с ВАХ, как правило, для действующих значений.

Феррорезонанс напряжений.



Найдем зависимость между входным напряжением U (ЭДС) и током I

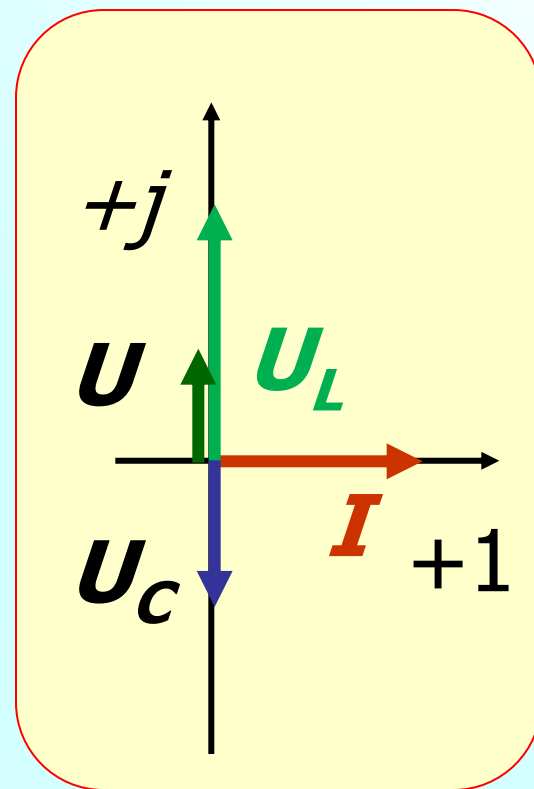
Основное внимание будем обращать на **качественную** сторону явлений и на их **практическое** использование. Для упрощения анализа **пренебрежем активными потерями.** Тогда сопротивления катушки и конденсатора для эквивалентных синусоид **U** и **I** будут чисто **реактивными.**

При сделанных допущениях напряжения U_L и U_C находятся в противофазе, поэтому

$$\dot{U} = \dot{U}_L + \dot{U}_C;$$

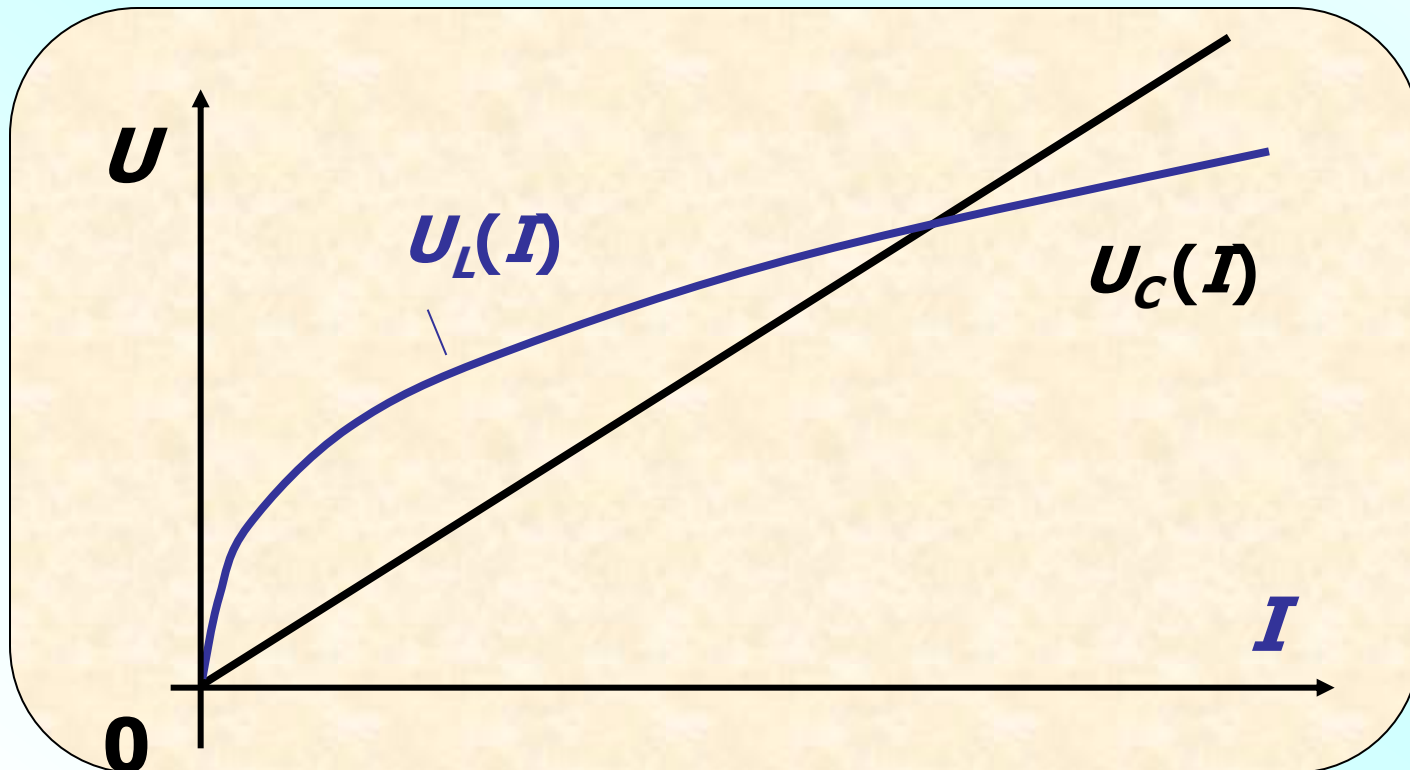
$$U = |U_L - U_C|.$$

Векторная диаграмма

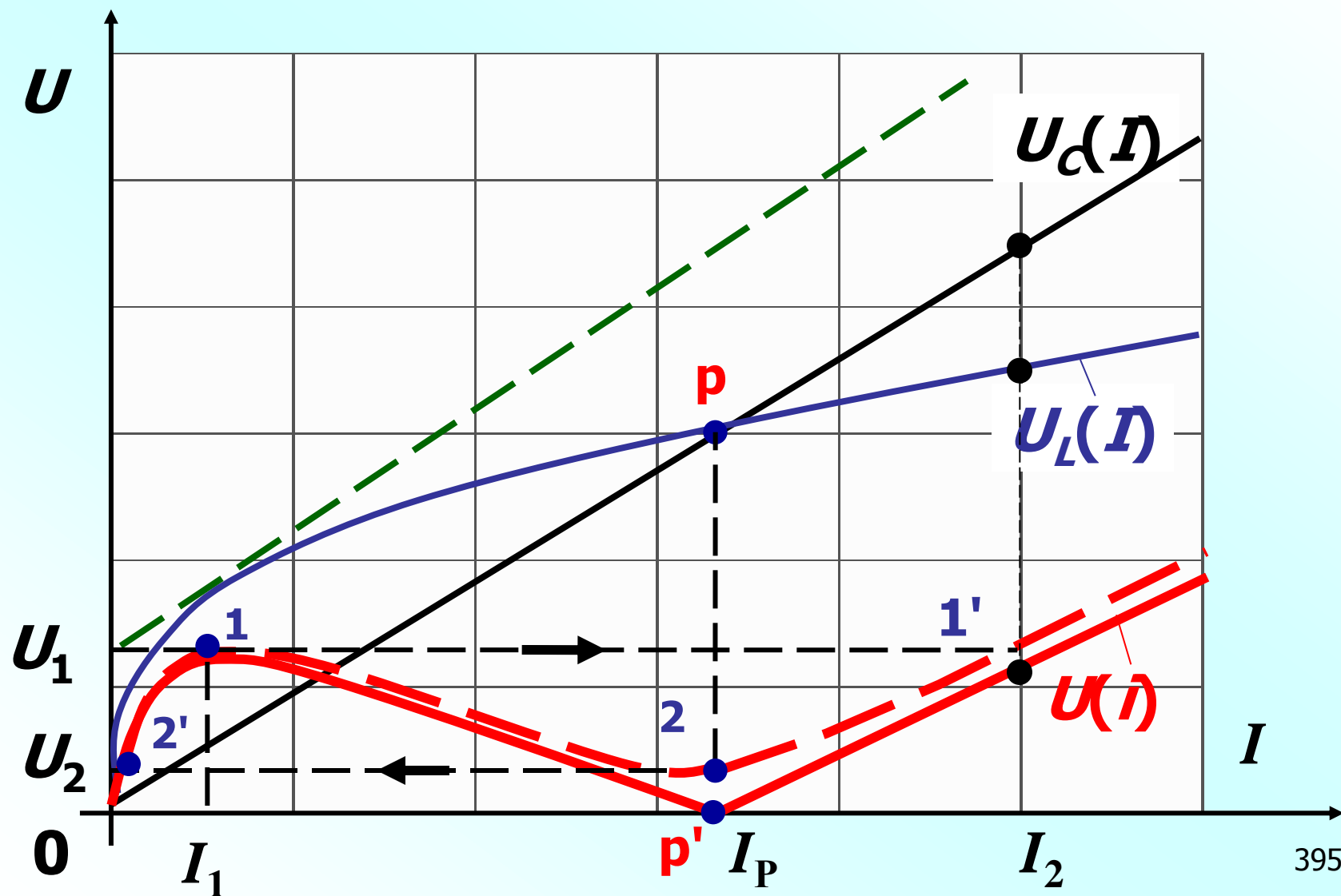


ВАХ линейного конденсатора $U_c(I)$ представляет собой прямую линию:

$$U_c(I) = \frac{1}{2\pi fC} I.$$



Эквивалентную ВАХ найдем, вычитая ординаты ВАХ элементов:



Полученная кривая
неоднозначна по напряжению и
имеет **падающий участок** (точки
1 и p'), соответствующий
неустойчивому режиму работы
цепи: при увеличении тока **I**
напряжение **U** уменьшается.

В точке резонанса ρ напряжения U_L и U_C компенсируют друг друга и результирующее U падает до нуля (из-за пренебрежения потерями).

В реальной цепи **минимум** напряжения отличен от нуля (показано пунктирной линией).

При плавном увеличении входного напряжения цепи от нуля до U_1 (питание от источника ЭДС) ток сначала плавно увеличивается до I_1 , а затем скачком изменяется до I_2 (от точки **1** до точки **1'**), после чего вновь плавно возрастает.

При уменьшении напряжения (после скачка) плавное уменьшение тока происходит до точки **2**, из которой при напряжении U_2 произойдет скачок тока.

Таким образом, участок **1,1',2** является **нерабочим**.

При малых значениях входного U (до броска тока) сопротивление цепи - **индуктивное** и ток I отстает по фазе от U на угол 90° , после броска ток становится **емкостным**, опережая напряжение на угол 90° . Таким образом, броски тока сопровождаются **опрокидыванием фазы**.

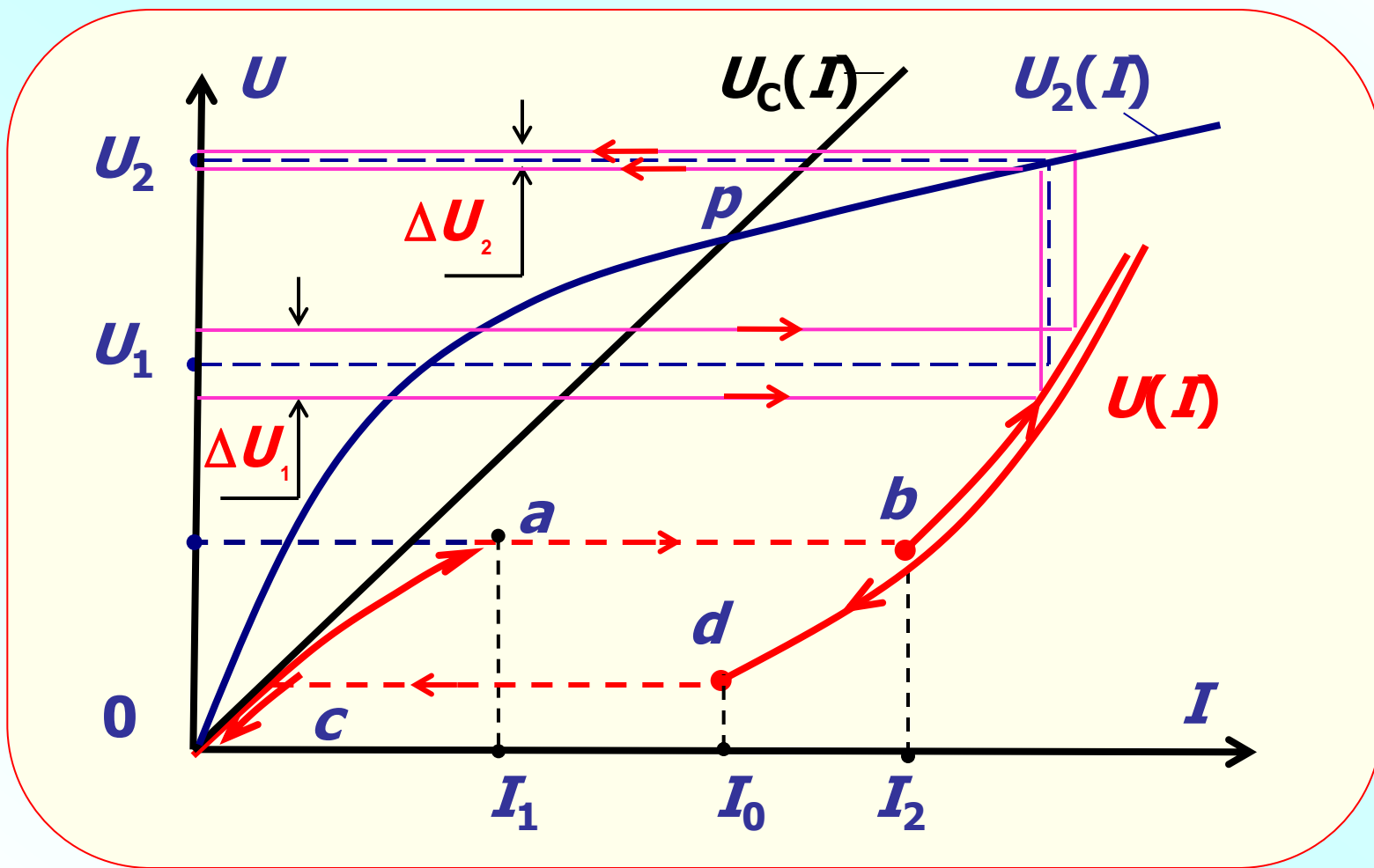
Одновременно со скачком тока скачком изменяются напряжения U_L и U_C : незначительно U_L и резко U_C . Чтобы снять неустойчивые участки ВАХ контура (полностью без скачков), нужно **питать его от источника тока**. Тогда каждому значению тока будет соответствовать только одно значение напряжения.

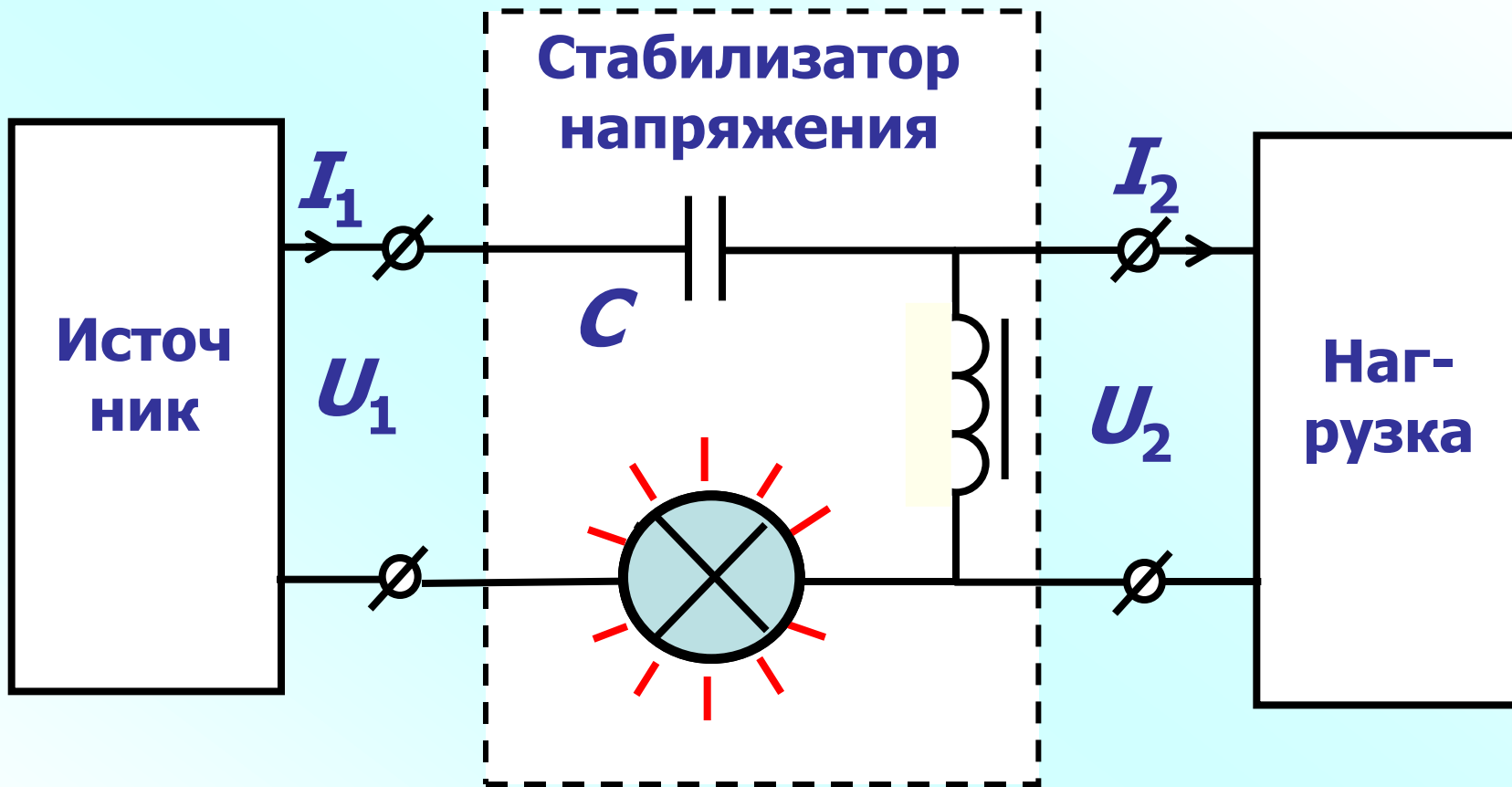
Скачкообразные изменения тока (или напряжения) при плавном изменении напряжения (или тока) называют релейным или триггерным эффектом.

Малое изменение напряжения на катушке при значительном изменении входного напряжения используется в феррорезонансных **стабилизаторах напряжения**, имеющих высокие стабилизационные свойства. Коэффициент стабилизации напряжения определяется:

$$k_{\text{СТ}} = \frac{\Delta U_1}{U_1} : \frac{\Delta U_2}{U_2}.$$

Принцип стабилизации напряжения

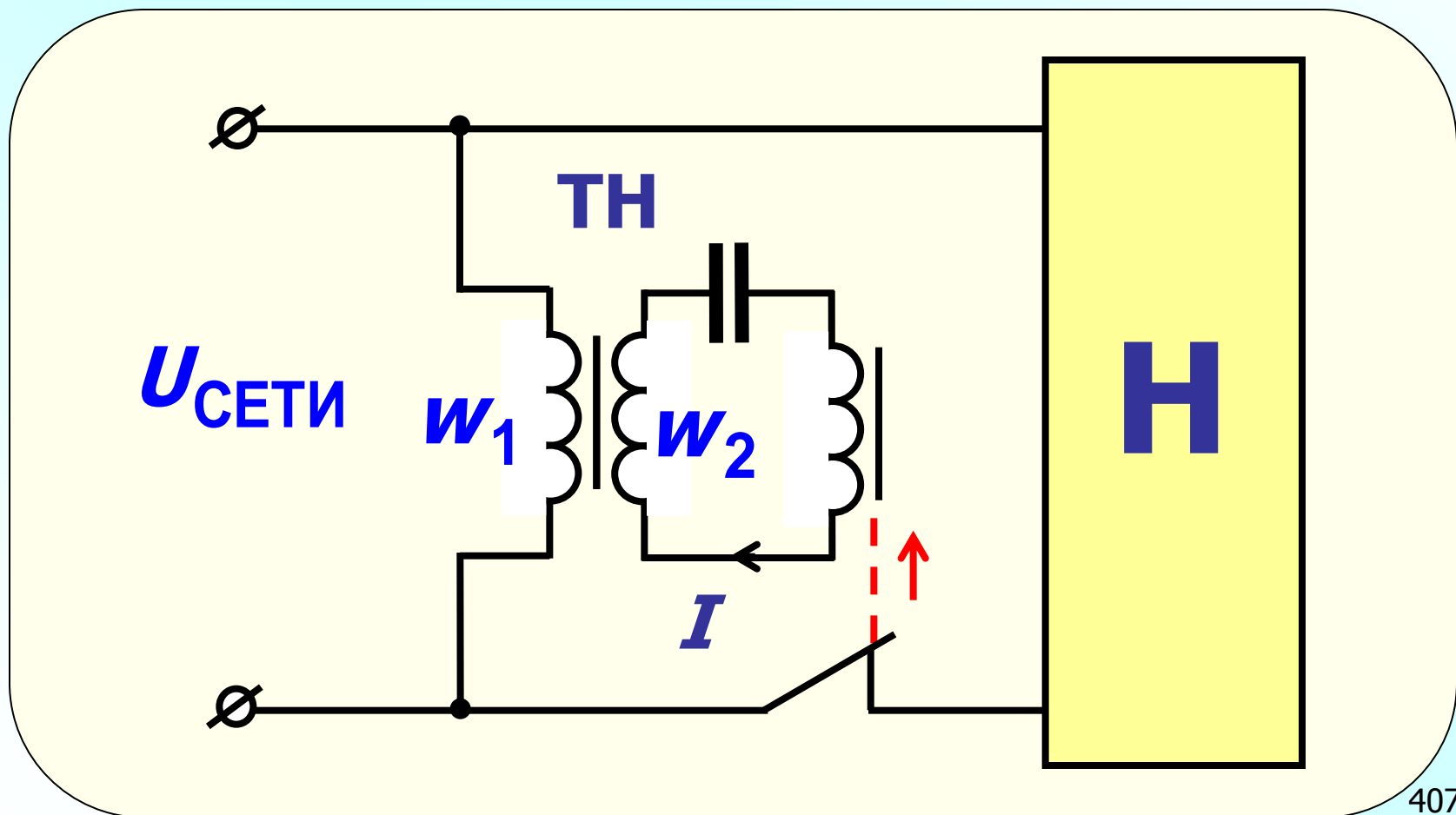




Недостаток такого стабилизатора – несинусоидальное выходное напряжение:

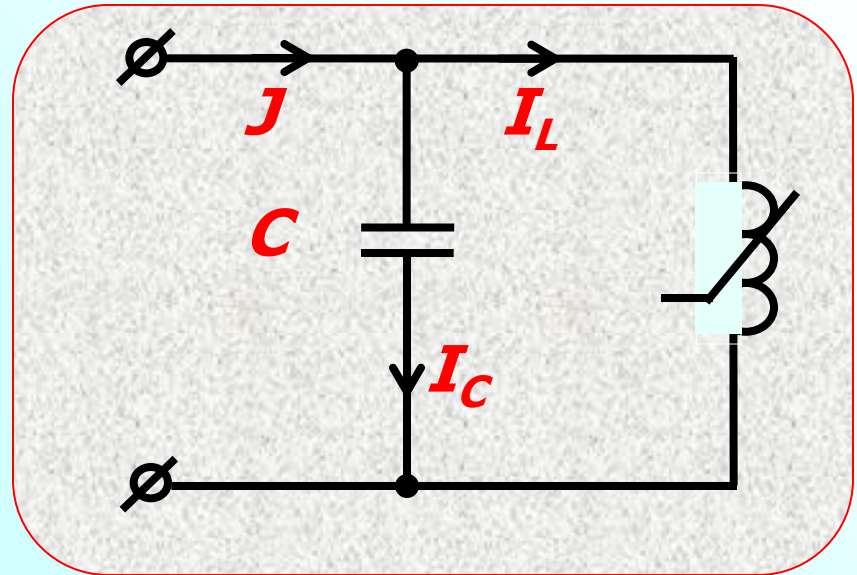


Феррорезонанс напряжения можно использовать для защиты от повышения напряжения в сети



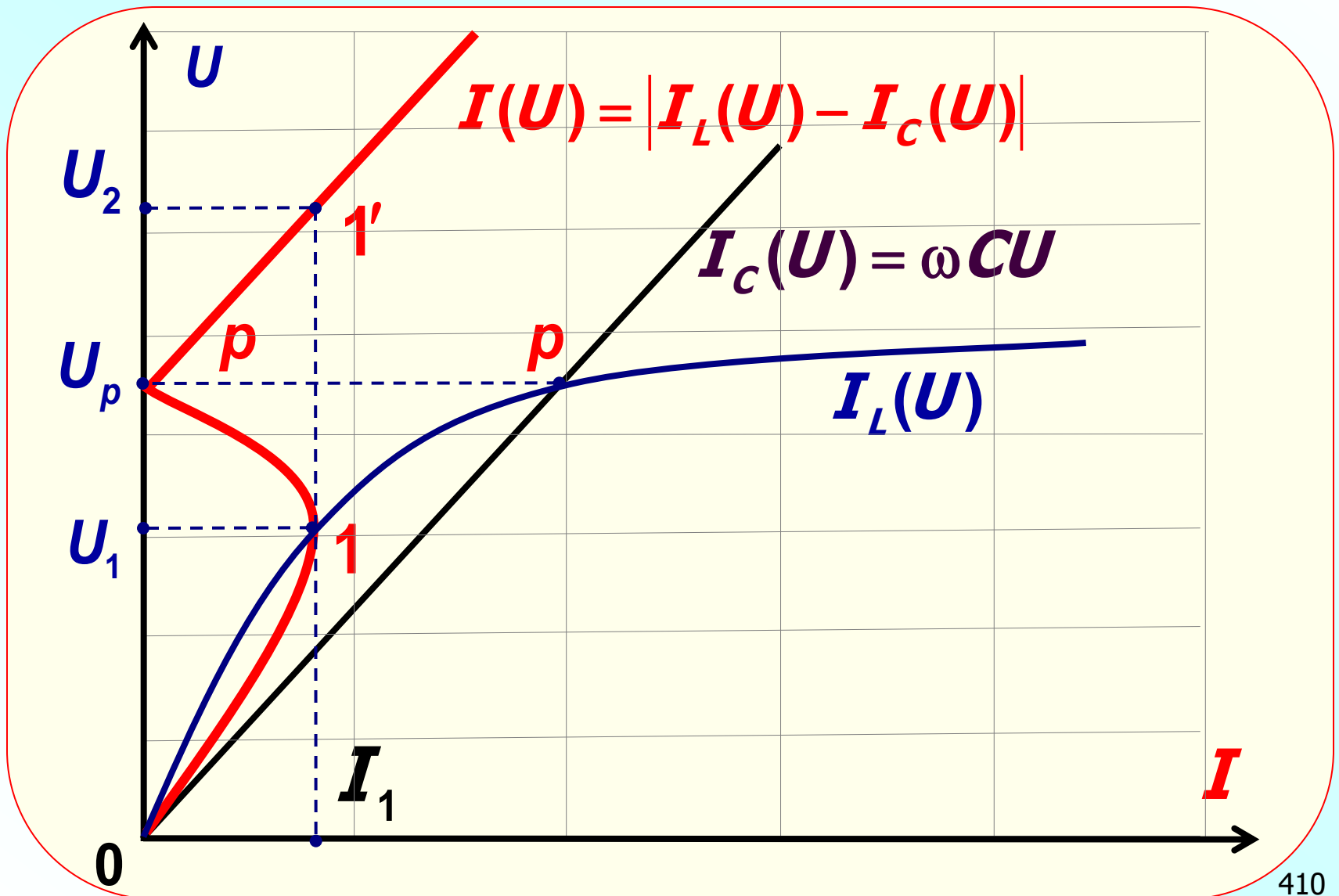
Согласно принципу дуальности в параллельном колебательном контуре, состоящем из катушки с ферромагнитным сердечником и линейного конденсатора, будет иметь место **феррорезонанс токов**, сопровождающийся бросками входного напряжения при питании цепи от источника тока $J(t)$.

Параллельный колебательный контур



Как и в последовательном контуре, в параллельном контуре феррорезонанс токов возможен, когда кривые $U_L(I)$ и $U_C(I)$ пересекаются.

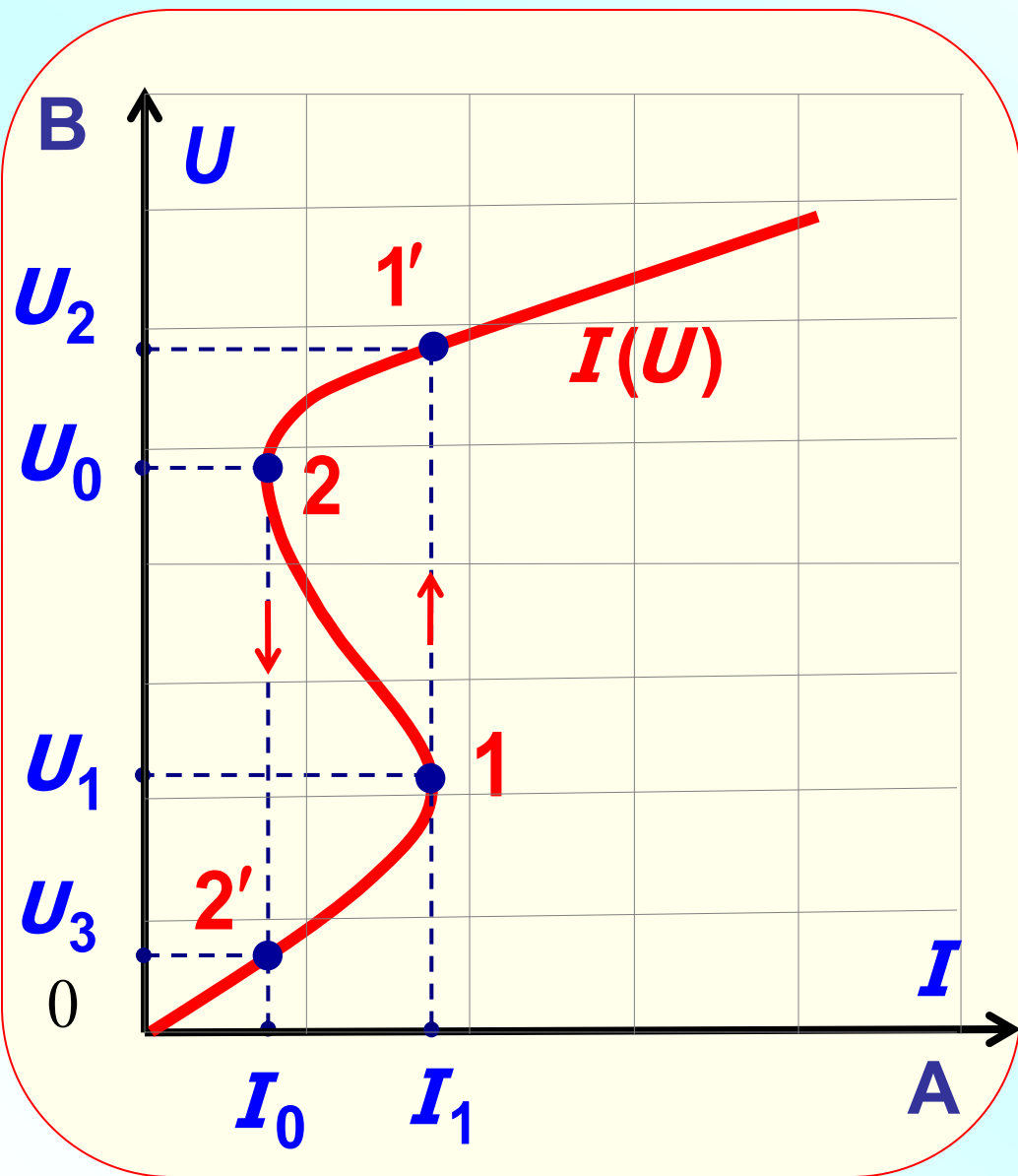
ВАХ параллельного контура



**ВАХ контура с потерями можно
рассчитать по формуле**

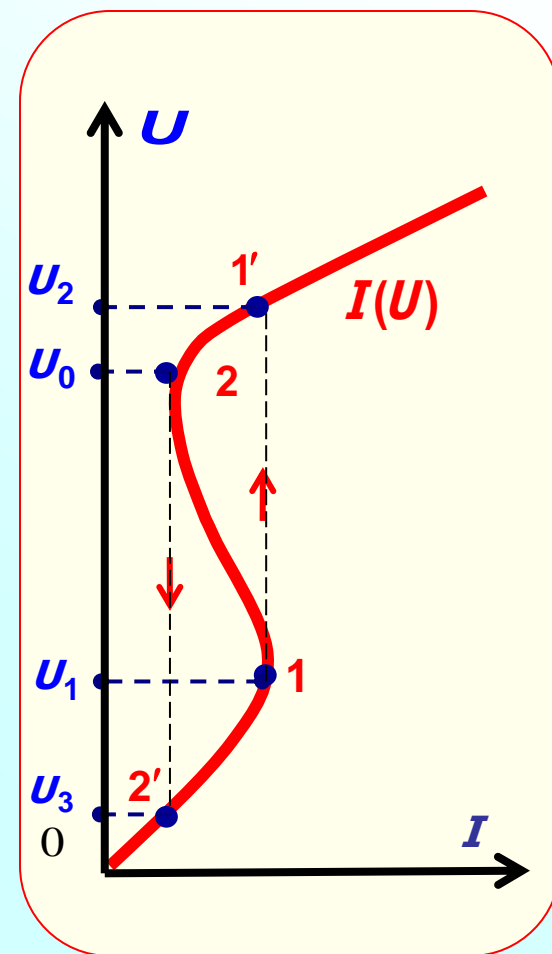
$$I(U) = \sqrt{U^2 g_a^2 + [I_L(U) - \omega CU]^2},$$

где $g_a \approx I_a / U_0$ - проводимость,
характеризующая
потери энергии в
катушке.

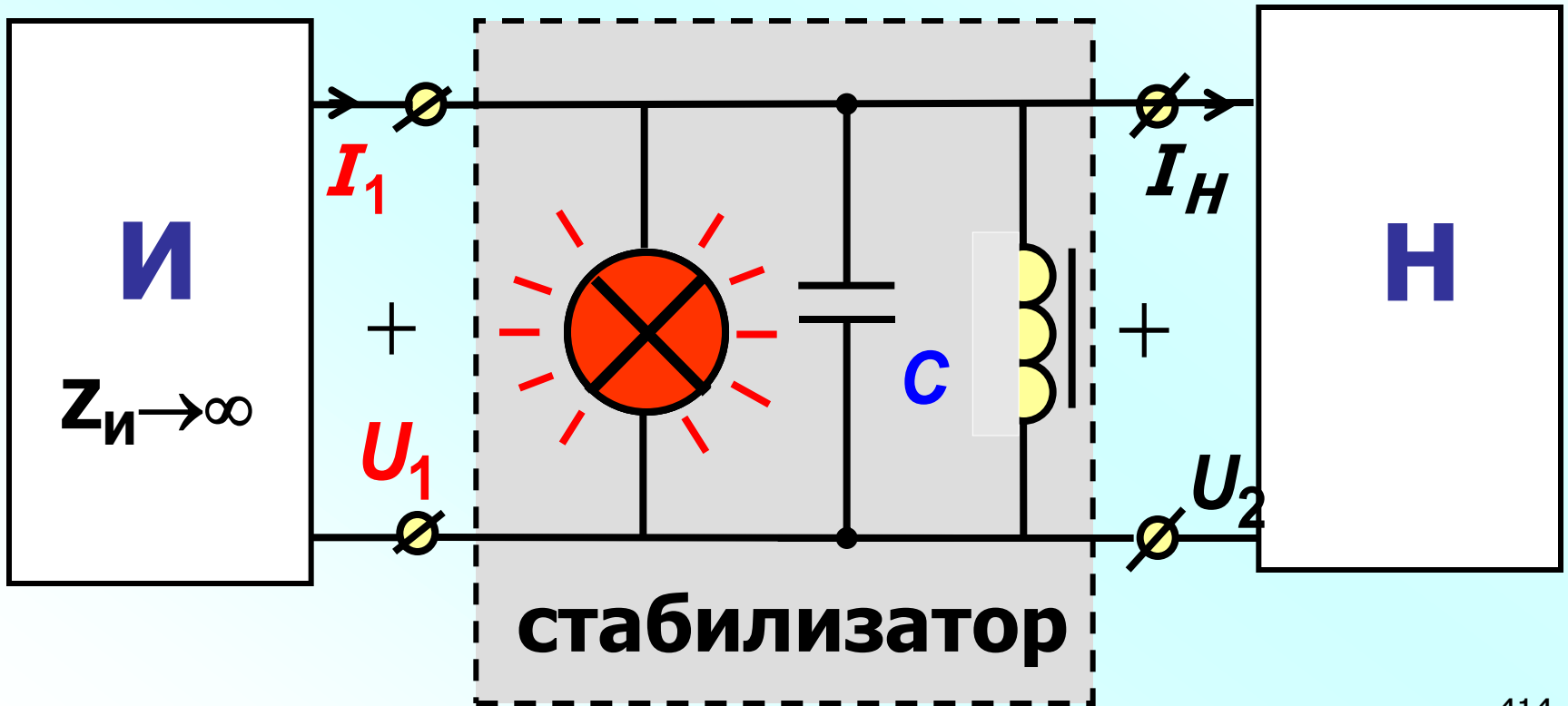


ВАХ $I(U)$ параллельного контура с учетом активных потерь энергии

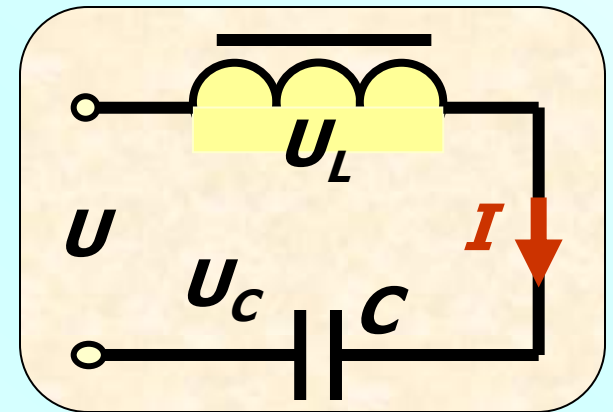
Участки **1,1'** и **2,2'** ВАХ - **неустойчивые**: при увеличении тока источника тока происходит бросок напряжения из точки **1** в точку **1'**, а при уменьшении тока - из точки **2** в точку **2'**. При питании цепи от источника ЭДС можно снять характеристику полностью.



Феррорезонанс токов применяется для стабилизации напряжения источников с большим внутренним сопротивлением



ПРИМЕР 1. Нелинейная катушка индуктивности (**ВАХ задана**), резистор $R = 20$ Ом и линейный конденсатор $X_C = 200$ Ом соединены последовательно и подключены к синусоидальному напряжению. Пренебрегая потерями в сердечнике, **определить** напряжение U , при котором ток увеличивается скачком и величину скачка тока.

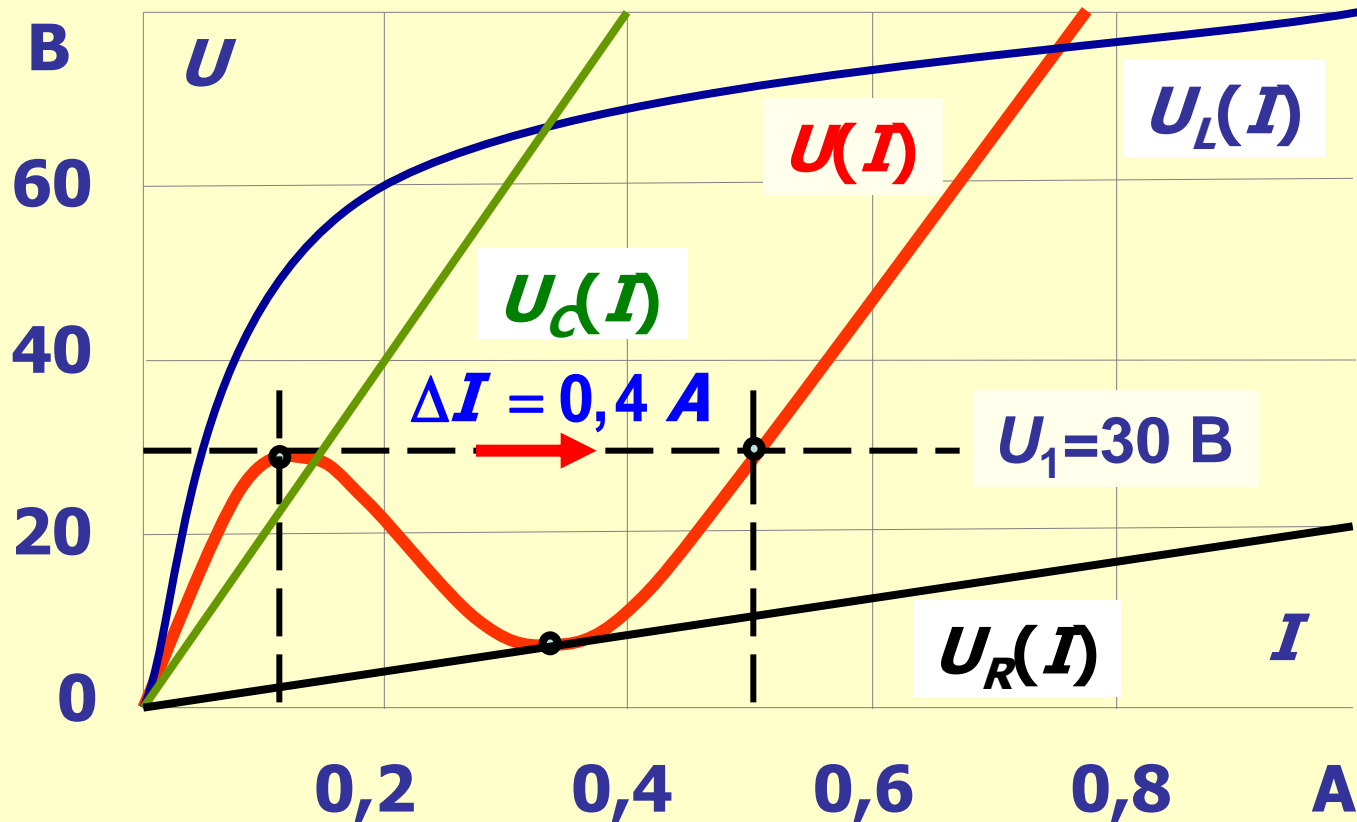


РЕШЕНИЕ. Задавая ряд значений тока, по **ВАХ** определяем напряжения на катушке, а затем входное напряжение по формуле

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \\ &= \sqrt{(RI)^2 + [U_L(I) - I / \omega C]^2}. \end{aligned}$$

На одном графике с **ВАХ** катушки строим **ВАХ** конденсатора и резистора.

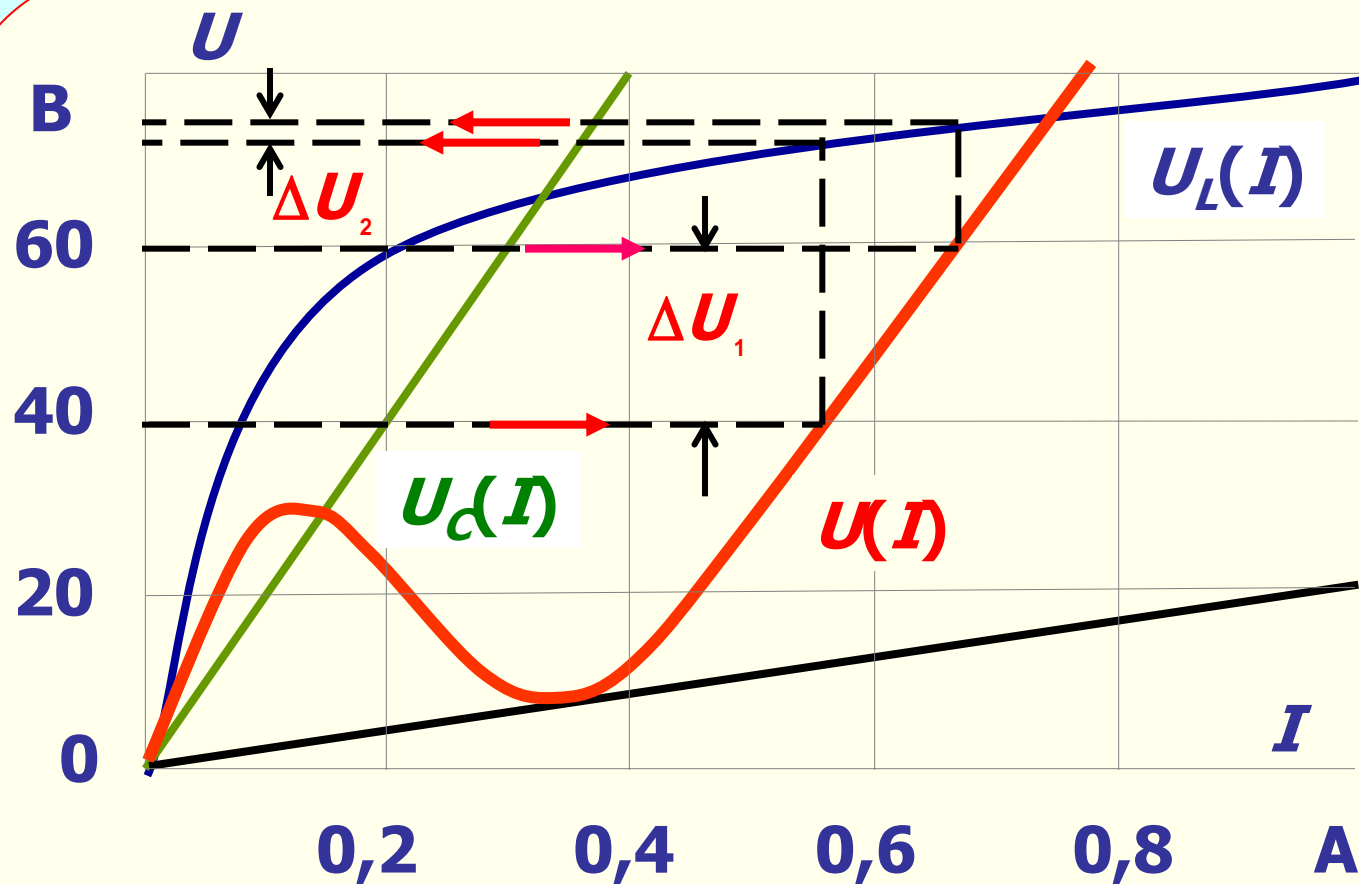
Вольтамперные характеристики элементов и искомое напряжение



ПРИМЕР 2. Последовательно соединенные нелинейная катушка, конденсатор и резистор, **ВАХ** которых для действующих значений заданы, используются в качестве стабилизатора напряжения.

Определить коэффициент стабилизации при изменении входного напряжения U от **40** до **60** В.

Решение.



Пояснение к решению. Начинаем с построения входной **ВАХ** цепи. Затем по заданному разбросу входного напряжения $\Delta U_1 = 20$ В находим **выходное** напряжение, которое снимается с катушки ($\Delta U_2 = 2,5$ В) и подсчитываем коэффициент стабилизации:

$$k_{\text{СТ}} = \frac{\Delta U_1}{U_1} : \frac{\Delta U_2}{U_2} = \frac{20}{50} : \frac{2,5}{76} = 12,16.$$

Субгармонические колебания

В феррорезонансной цепи, как правило, возникает резонанс на первой гармонике или на высоких частотах. Однако могут возникать и колебания, частота которых меньше частоты входного сигнала.

Колебания, частота которых в 2, 3, 5 и т.д. раз меньше частоты источника, называют субгармоническими.

Субгармонические колебания получают при помощи специального источника энергии с частотой субгармоники.

**После отключения источника
возникшие колебания
устойчиво сохраняются за счет
преобразования энергии
гармоники, частота которой
близка к частоте резонанса.**

**В линиях электропередач,
содержащих реакторы и
конденсаторы,
субгармонические колебания
могут появляться и без
дополнительного источника.**

**Пренебрежение
субгармоническими
колебаниями может привести к
перенапряжениям на
элементах энергосистемы.
На практике субгармонические
колебания используют в
делителях частоты.**

ПРИМЕР 3. В последовательном контуре, состоящим из катушки, **ВБАХ** которой $\psi(i) = 0,4i - 0,03i^3$ (Вб, А) и линейного конденсатора установились субгармонические колебания с частотой $\omega = \omega_n/3$ (ω_n - частота источника). Определить величину емкости, если напряжение источника

$$u(t) = 24,7 \cos 314t \text{ В.}$$

РЕШЕНИЕ. Принимая в общем виде ток феррорезонансной цепи на частоте ω синусоидальным

$$i(t) = I_m \sin \omega t,$$

находим потокосцепление

$$\begin{aligned} \psi(i) &= 0,4 I_m \sin \omega t - 0,03 I_m^3 \sin^3 \omega t = \\ &= I_m \sin \omega t (0,4 - 0,0225 I_m^2) + \\ &+ 0,0075 I_m^3 \sin 3\omega t. \end{aligned}$$

и напряжение на катушке

$$\frac{d\psi(i)}{dt} = (0,4 - 0,0225I_m^2)\omega I_m \cos \omega t + \\ + 0,0225\omega I_m^3 \cos 3\omega t.$$

Напряжение на конденсаторе

$$u_C(t) = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t - 90^\circ) = -\frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t.$$

На резонансной частоте индуктивное и емкостное напряжения равны друг другу $|u_L(\omega)| = |u_C(\omega)|$, т.е.

$$\begin{aligned} (0,4 - 0,0225 I_m^2) \omega I_m \cos \omega t &= \\ &= \frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$C = \frac{1}{\omega^2 (0,4 - 0,0225 I_m^2)}.$$

Напряжение источника компенсируется напряжением катушки той же частоты, поэтому

$$24,7 \cos 3\omega t = 0,0225 I_m^3 \cos 3\omega t.$$

Отсюда находим амплитуду тока

$$I_m^3 = \frac{24,7}{0,0225\omega} = 10,49; \quad I_m = 2,19 \text{ А,}$$

а затем емкость конденсатора

$$C = \frac{1}{314^2 / 9(0,4 - 0,0225 \cdot 2,19^2)} =$$
$$= 312,6 \cdot 10^{-6} = 312,6 \text{ мкФ.}$$