

электротехника **Часть 2**



**лектор
Купцов
Анатолий
Михайлович**

© 2011 НИ ТПУ, ЭНИН, кафедра ЭСиЭ, Купцов А.М., доцент, к.т.н.

Литература

1. Демирчян К.С., Нейман Л.Р. и др. **Теоретические основы электротехники. Т.1.**- М.: Энергия, 2003. - 464 с.
2. Зевеке Г.В., Ионкин П. А. и др. **Основы теории цепей.** - М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
3. Купцов А. М. **Электротехника с элементами энергосбережения.** Уч. пособие. Томск: ТПУ, 2010.–372с.

4. Купцов А. М. Теоретические основы электротехники. Решения типовых задач. Ч.2. Учеб. пособие. Томск: Изд. ТПУ, 2001. – 139 с.

5. Сборник контрольных заданий по электротехнике с метод. указаниями и примерами. Томск: Изд.ТПУ, 2005.-76 с.

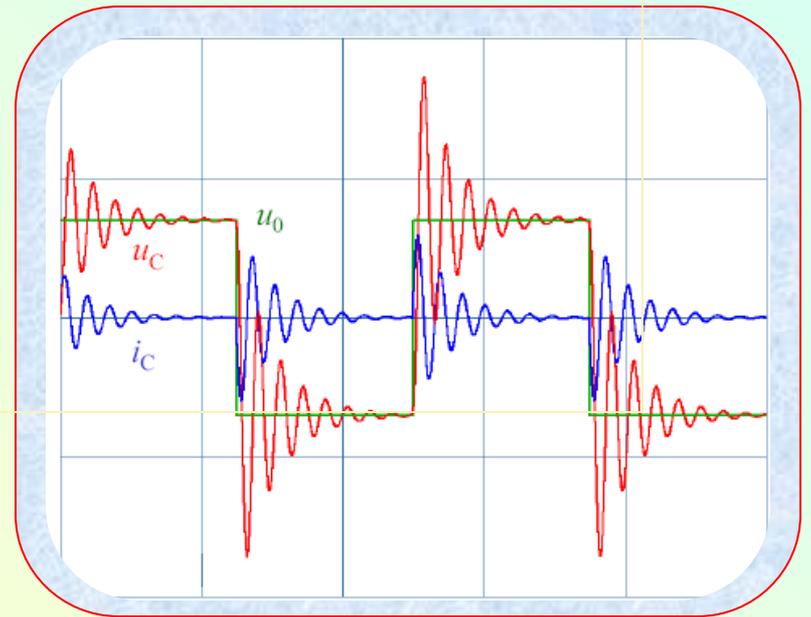
6. Руководство к лаб. работам по ТОЭ на учебном лаб. комплексе (ч.2). Томск: Изд. ТПУ, 2006. – 40 с.

Содержание

1. Законы коммутации	<u>12</u>
2. Начальные условия	<u>20</u>
3. Классический метод	<u>31</u>
4. Метод переменных состояния	<u>171</u>
5. Метод интегралов Дюамеля	<u>222</u>
6. Частотный и операторный методы	<u>264</u>
7. Цепи с некорректными коммутациями	<u>326</u>
8. Комбинированный метод	<u>355</u>
8. Интегрирующие и дифференцирующие цепи	<u>371</u>
9. Понятие об устойчивости	<u>378</u>

Переходные процессы

Процесс или режим, возникающий при переходе цепи от одного установившегося режима к другому, называют переходным

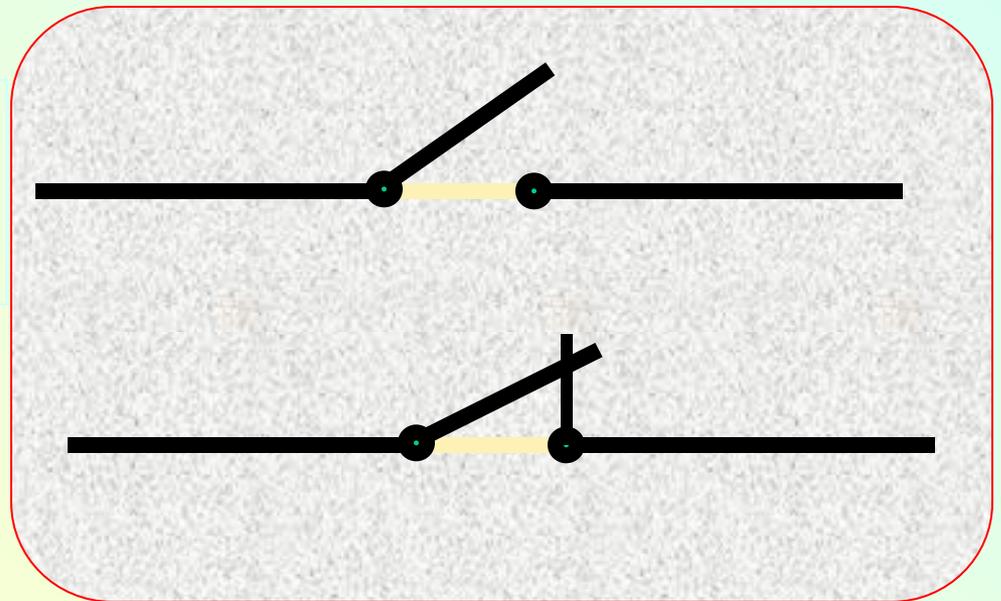


**Переходные процессы
возникают при коммутациях, под
которыми понимают включение
или отключение элементов цепи
или источников, а также при
коротких замыканиях и обрывах
проводов, при импульсных
воздействиях,
в том числе и при грозовых
разрядах**

На схемах коммутаторы изображают в виде ключей, указывающих их положение до коммутации.

1. Ключ замыкается

2. Ключ размыкается



Считается, что коммутация происходит мгновенно в момент времени $t=0$, т.е. временем самой коммутации пренебрегают.

Не учитывается электрическая дуга, почти всегда сопровождающая коммутацию

Для однозначного **определения** **начальных условий**, необходимых при решении дифференциальных уравнений, определяющих переходный процесс, различают моменты времени непосредственно перед коммутацией $t=0_-$ и сразу после нее $t=0_+$.

Время протекания
переходного процесса
определяется параметрами
цепи. При этом токи и
напряжения в переходном
режиме могут существенно
превышать установившиеся
значения.

Например:



Законы коммутации

Переходные процессы связаны с перераспределением энергии на реактивных элементах. Согласно **закону сохранения энергии** она не может изменяться мгновенно, т.е.:

$$\sum_{k=1} \Psi_k(0_-) i_{Lk}(0_-) = \sum_{k=1} \Psi_k(0_+) i_{Lk}(0_+);$$

$$\sum_{k=1} q_k(0_-) u_{Ck}(0_-) = \sum_{k=1} q_k(0_+) u_{Ck}(0_+).$$

Эти условия справедливы для каждой катушки индуктивности и каждого конденсатора. Если C_k и L_k постоянные, то:

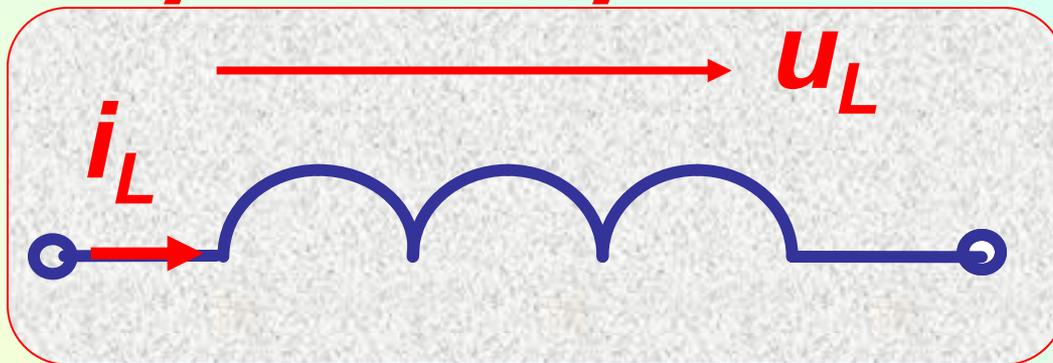
$$i_L(0_-) = i_L(0_+); \quad (1)$$

$$u_{Ck}(0_-) = u_{Ck}(0_+). \quad (2)$$

Равенства (1) и (2) известны как **законы коммутации**. Коммутации для которых они справедливы, называют **корректными**.

Покажем справедливость этих законов.

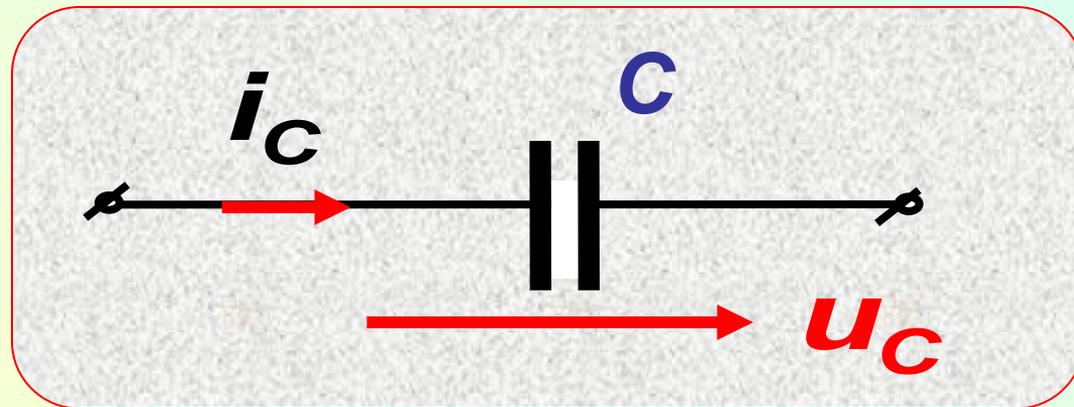
1) Для катушки индуктивности:



Если допустить мгновенное изменение тока, то мощность $p_L = d(W_M)/dt$ и напряжение на катушке $u_L = d(Li_L)/dt$ станут бесконечными, а это невозможно.

Следовательно: при корректной коммутации ток в катушке индуктивности (и ее потокосцепление) **скачком** измениться не могут.

2). Для конденсатора:

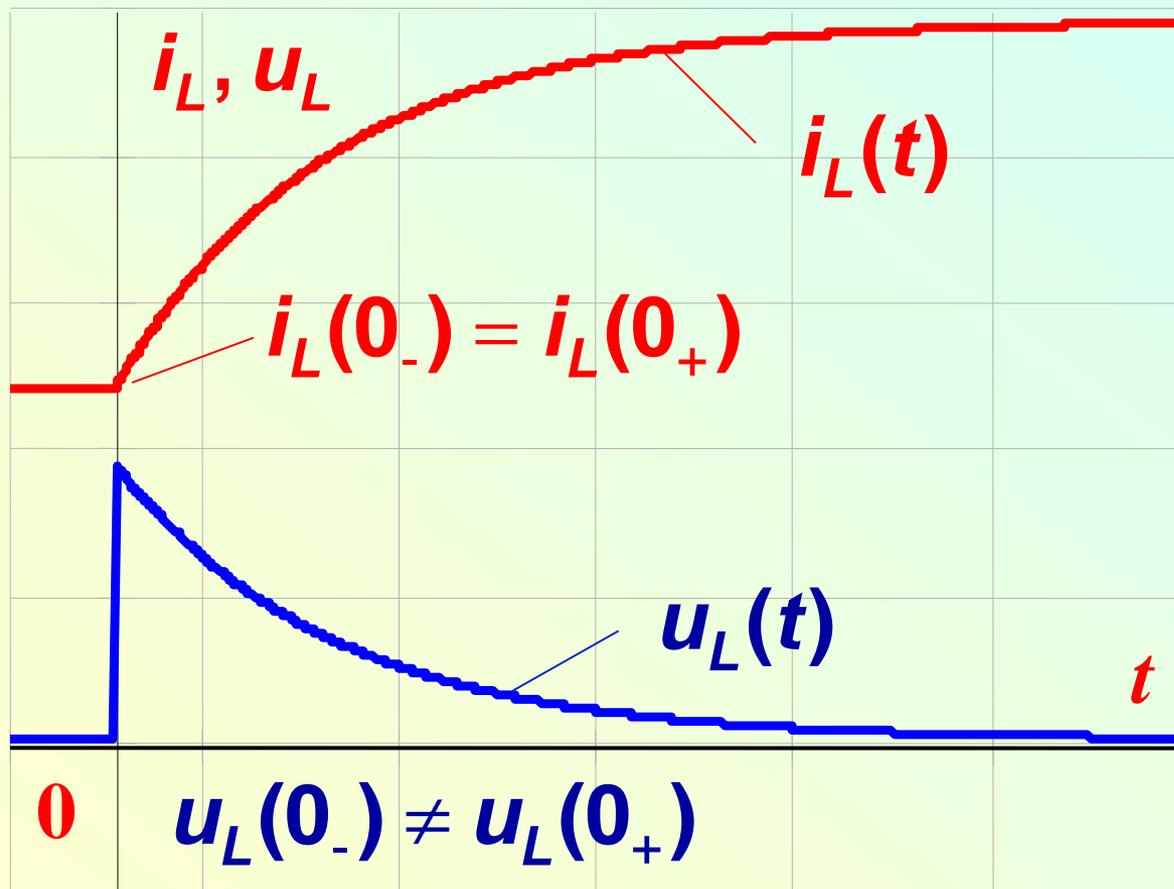


Если допустить мгновенное изменение напряжения, то мощность

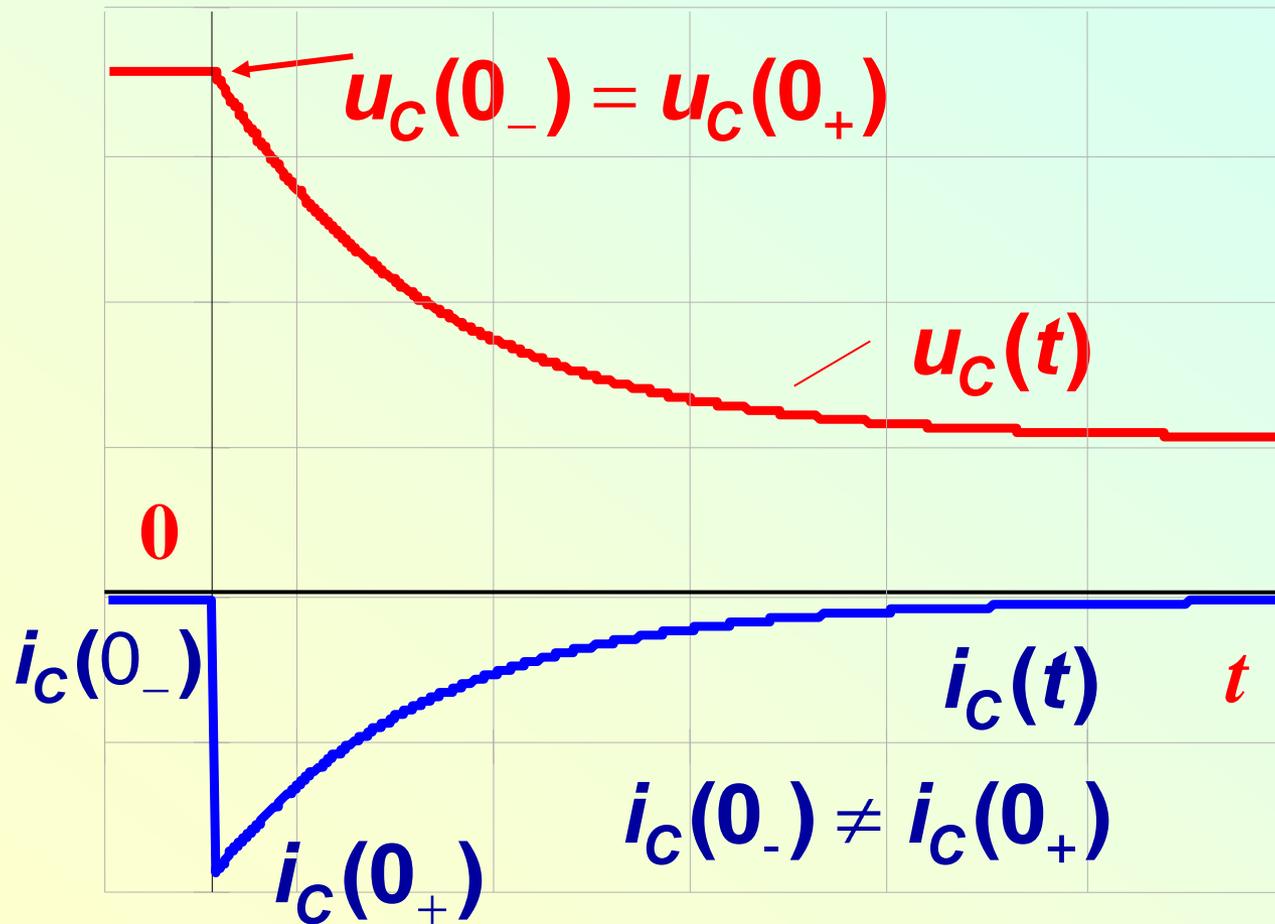
$p_C = d(W_C)/dt$ и ток $i_C = d(Cu_C)/dt$ станут бесконечными, что невозможно.

Таким образом, при корректной коммутации **напряжение и заряд на конденсаторе скачком измениться не могут.**

Пример изменения тока и напряжения на катушке индуктивности



Пример изменения напряжения и тока на конденсаторе



В цепях, образующих после коммутации **сечения** только из индуктивностей и источников тока, или контуры только из **емкостей** и источников ЭДС, законы коммутации **(1)** и **(2)** не **выполняется**.

Такие коммутации называют некорректными. При этом выполняются **обобщенные законы** коммутации в **форме:**

$$\Psi_k(0_-) = \Psi_k(0_+); \quad q_k(0_-) = q_k(0_+). \quad (3) \quad \img alt="green square with a black triangle pointing left" data-bbox="891 801 951 854"/>$$

Начальные условия

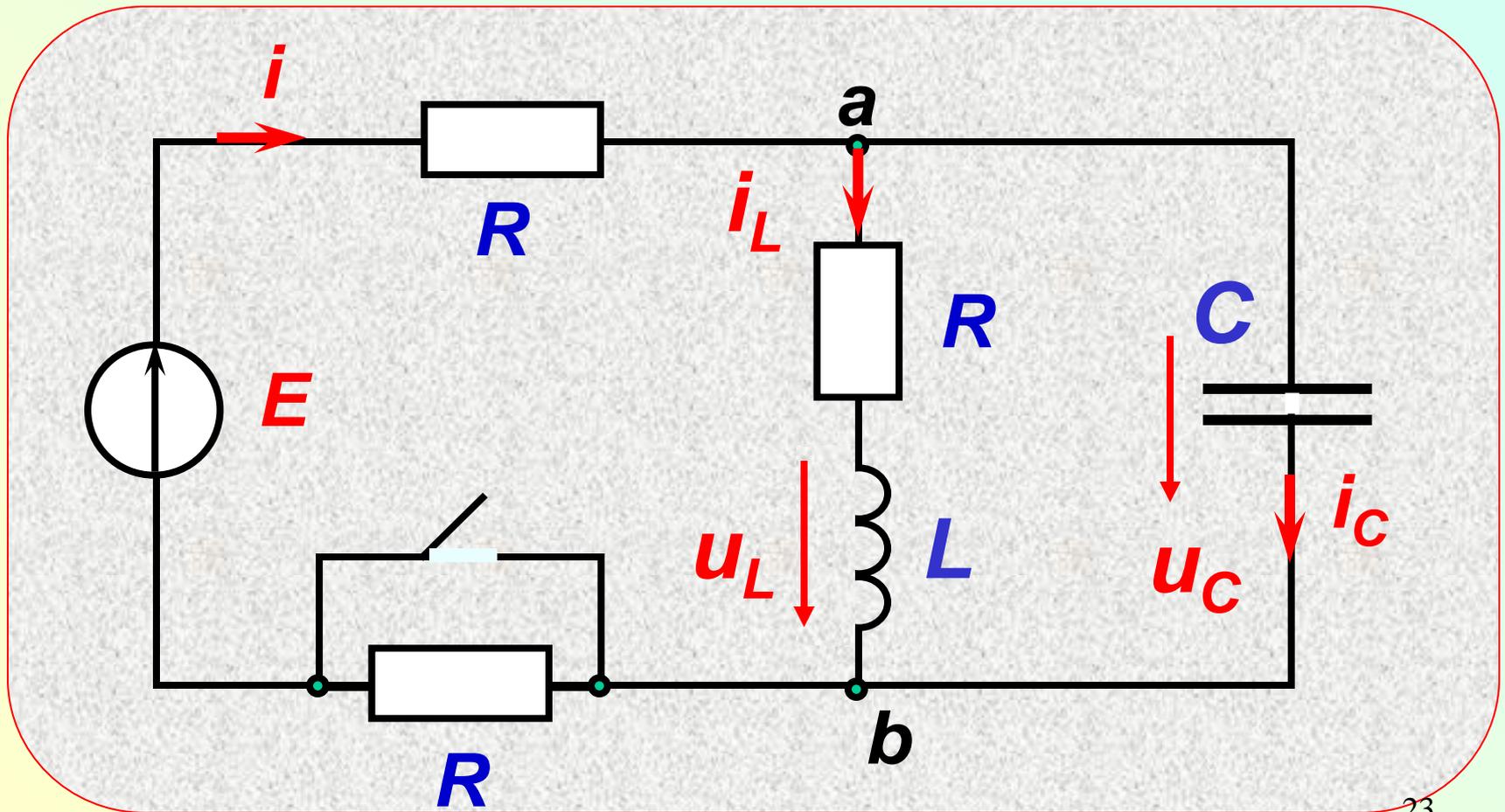
Токи и напряжения в переходном режиме связаны дифференциальными уравнениями. Для их решения необходимы начальные условия (НУ). НУ – это токи и напряжения (и их производные) в момент коммутации (t_{0+}). Различают независимые (ННУ) и зависимые начальные условия (ЗНУ).

ННУ— это значения **токов** в катушках индуктивности и напряжений на конденсаторах, которые в момент коммутации непрерывны.

ННУ определяются расчетом докоммутационных схем в установившихся режимах .

Все остальные токи, напряжения (и их производные) – **ЗНУ**. Они находятся расчетом послекоммутационной цепи в момент времени t_{0+} с учетом найденных **ННУ**. При этом полезно использовать схемы замещения, заменяя индуктивности источниками тока $i_L(0)$, а емкости – источниками ЭДС $u_C(0)$.

Пример1. Определить независимые и зависимые начальные условия, если:
 $E=300$ В; $R=100$ Ом.



Независимые НУ $u_C(0)$ и $i_L(0)$ определяются в схеме до коммутации.

Коммутация корректная и можно использовать равенства (1) и (2). ЭДС в цепи постоянная, поэтому индуктивный элемент замыкаем, емкостный – размыкаем. Тогда:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = i_L(0) = \frac{E}{3R} = 1 \text{ A};$$

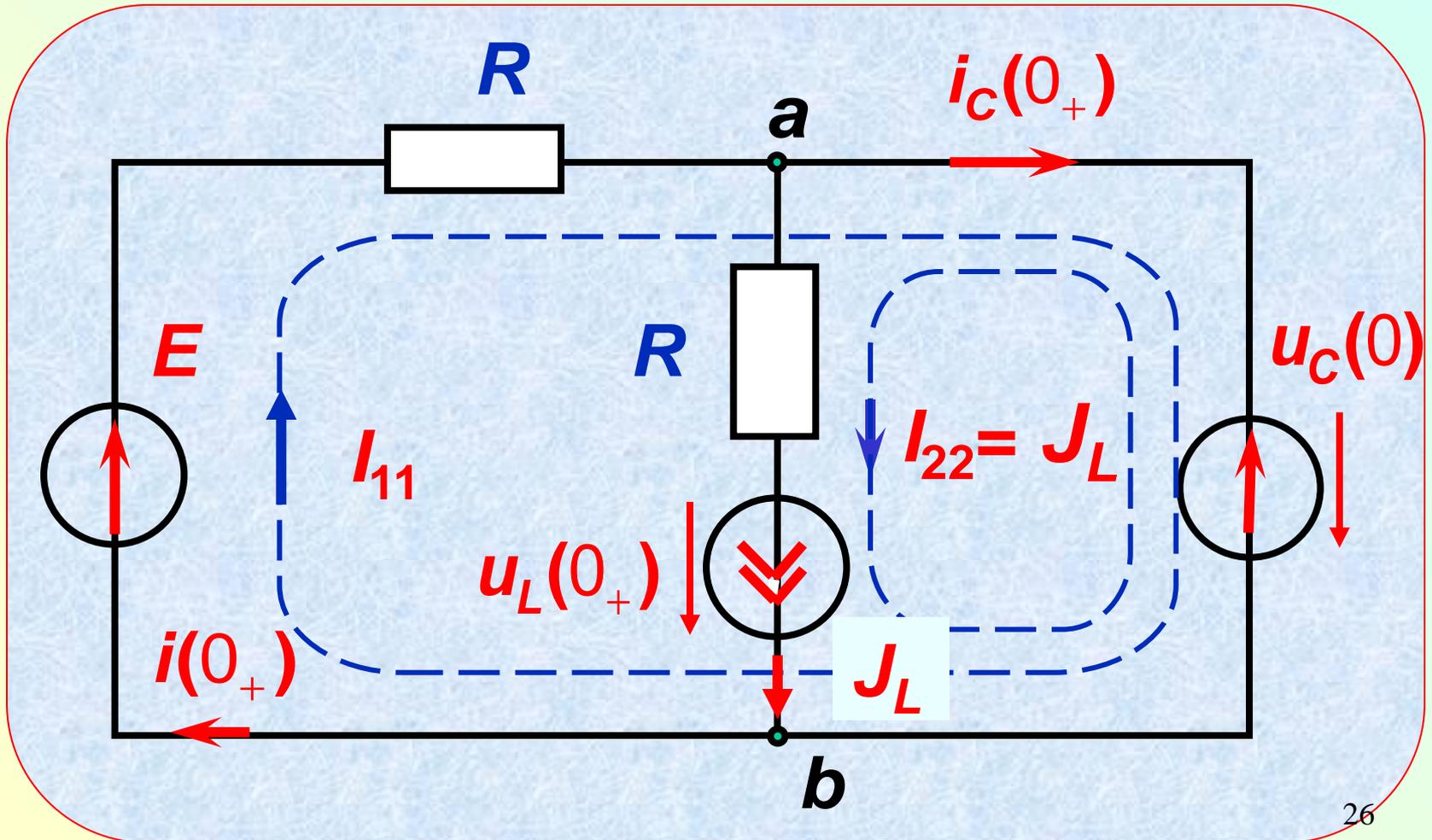
$$u_C(0_-) = u_C(0) = i_L(0_-)R = 100 \text{ В.}$$

Для определения **ЗНУ** на основании (1) и (2) составим схему замещения для после коммутационного режима с дополнительными источниками: **ЭДС** - вместо емкости и источником тока - вместо **ИНДУКТИВНОСТИ**:

$$J_L = i_L(0_-) = i_L(0_+) = 1 \text{ A}$$

$$E_C = u_C(0_+) = u_C(0_-) = 100 \text{ В.}$$

Схема замещения для определения зависимых НУ



Из контурного уравнения

$$RI_{11} + 0 \cdot I_{22} = E - E_C,$$

где $I_{22} = J_L = 1$ А, находим:

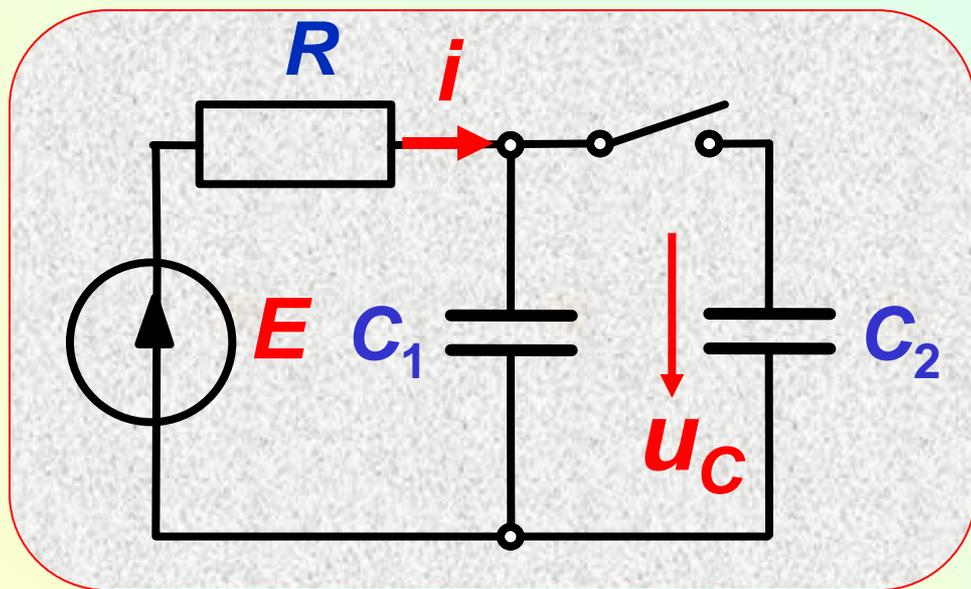
$$i(0_+) = I_{11} = 2 \text{ А}, \quad i_C(0_+) = I_{11} - I_{22} = 1 \text{ А}.$$

Согласно второму закону Кирхгофа

$$u_L(0_+) = u_C(0) - Ri_L(0).$$

Численно: $u_L(0_+) = 100 - 100 \cdot 1 = 0.$

Пример 2. Определить ток источника ЭДС и напряжение на емкости C_2 сразу после коммутации.



Решение. Цепь с некорректной коммутацией, поэтому используем

обобщенный закон коммутации:

$$q_1(0_-) = q_1(0_+) + q_2(0_+).$$

Учитывая

$$u_C(0_-) = E; \quad u_{C_1}(0_+) = u_{C_2}(0_+) = u_C(0_+),$$

получаем: $C_1 E = C_1 u_C(0_+) + C_2 u_C(0_+);$

$$u_C(0_+) = E \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

Ток источника:

$$i(0_+) = \frac{E - u_C(0_+)}{R} = \frac{EC_2}{R(C_1 + C_2)}.$$

Методы расчета переходных процессов во временно'й области
Это методы, использующие в расчете мгновенные значения величин, т.е. временные зависимости. Сюда относятся методы: классический, интеграла Дюамеля (наложения) и переменных состояния.



Классический метод расчета переходных процессов

1. Анализ простейших RL – цепей
2. Анализ простейших RC – цепей
3. Неразветвленная RLC - цепь
4. Алгебраизация дифференциальных уравнений
5. Переходные процессы в цепях с взаимной индуктивностью
6. Определение параметров цепи по графикам ПП

1. Классический метод

Суть метода в интегрировании дифференциального уравнения n -го порядка, составленного относительно искомой величины по законам Кирхгофа для цепи после коммутации.

В общем виде оно записывается

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k f(t)}{dt^k} = F(t). \quad (4)$$

Общее решение уравнения (3) отыскивается в виде суммы частного решения неоднородного уравнения ($F(t) \neq 0$) и общего решения однородного уравнения ($F(t) = 0$).

Частное решение $f_{пр}(t)$ определяет **принужденный** режим, задаваемый источниками энергии $F(t)$. **Общее** решение $f_{св}(t)$ определяет поведение цепи без источников энергии при заданных начальных условиях. Таким образом,

$$f(t) = f_{пр}(t) + f_{св}(t).$$

Для нахождения **общего решения** (**свободных составляющих**) нужно найти корни **характеристического уравнения** (p_k), которое получается из дифференциального (4) заменой производных на оператор p :

$$\sum_{k=0}^n a_k p^k = 0. \quad (5)$$

Решения записываются:
если корни вещественные разные

$$f_{св}(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t};$$

если корни вещественные равные,

$$f_{св}(t) = \sum_{k=1}^n A_k t^{k-1} e^{p_k t};$$

**если корни комплексно сопряжен-
ные**

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{св},$$

где δ - коэффициент затухания ;
 $\omega_{св}$ – угловая частота свободных колебаний, то для каждой пары

$$f_{св}(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_{св}t + \gamma).$$

Здесь A_k, A, γ – постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий.

Замечание. 1. С течением времени $f_{\text{св}}(t)$ затухает, исчезая при $t \rightarrow \infty$.

2. Характеристическое уравнение **проще** получить путем алгебраизации системы однородных дифференциальных уравнений (**для свободных составляющих**), заменив операции дифференцирования на p , а интегрирования на $1/p$.

Приравняв главный определитель системы нулю, получим характеристическое уравнение: $\Delta(p) = 0$.

Ввиду прямой зависимости между главным определителем системы и входным сопротивлением (проводимостью), характеристическими также будут уравнения

$$Z(p) = 0; \quad Y(p) = 0,$$

полученные заменой $j\omega$ на p .

Принужденные составляющие $f_{пр}(t)$ в цепи с источниками постоянных и периодических ЭДС и токов – это **установившиеся значения** после коммутации. Их расчет выполняется методами, рассмотренными в первой части курса.

Порядок расчета переходного процесса классическим методом

1. Записывается полное решение искомой величины в виде суммы составляющих $f(t) = f_{пр}(t) + f_{св}(t)$.
2. Определяются независимые начальные условия расчетом режима до коммутации.
3. Расчетом режима после коммутации находятся принужденные составляющие.

4. Составляется характеристическое уравнение (**оно одно для всех величин**) и находятся его корни.
5. **С учетом корней** записываются выражения для свободных составляющих.
6. Постоянные интегрирования, входящие в эти выражения, **находятся из начальных условий** .

Порядок цепи определяется степенью дифференциального уравнения цепи. Он соответствует числу необъединяемых накопителей энергии – реактивных элементов **L** и **C** после коммутации

Цепь с одним накопителем энергии -
цепь первого порядка описывается
линейным дифференц. уравнением

$$a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = F(t).$$

Характеристическое уравнение

$$a_1 p + a_0 = 0, \quad \text{где}$$

$$p = -a_0 / a_1 \quad \text{- корень уравнения}$$

**Искомое решение записывается
в форме:**

$$f(t) = f_{\text{пр}}(t) + f_{\text{св}}(t) = f_{\text{пр}}(t) + Ae^{pt},$$

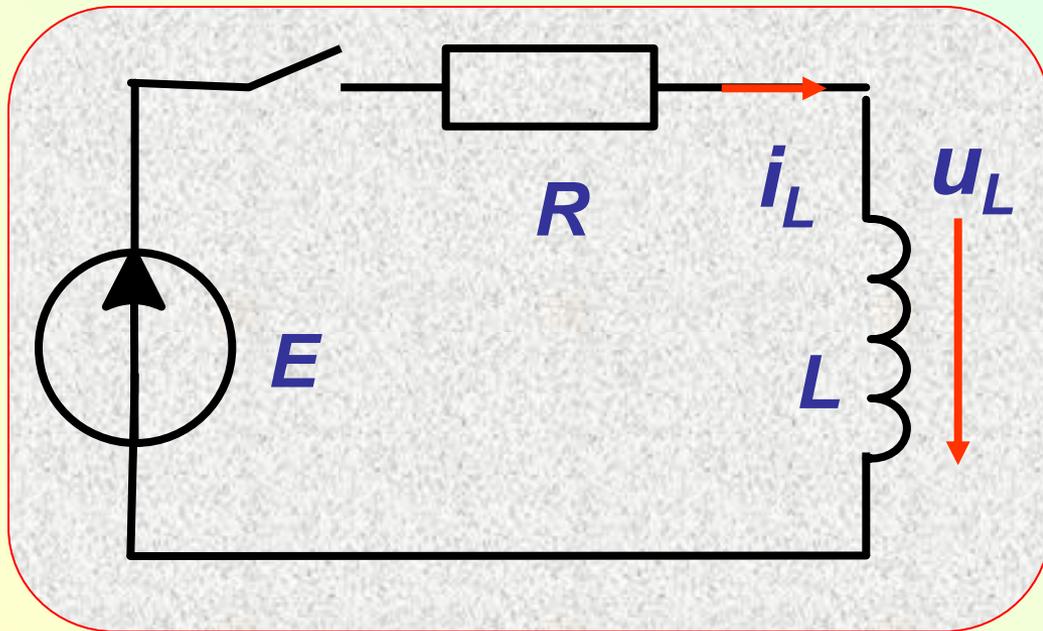
**где $f_{\text{пр}}(t)$ - принужденная
составляющая;**

**$f_{\text{св}}(t)$ - свободная
составляющая;**

A - постоянная интегрирования.

Анализ простейших RL - цепей

Пример 1. Цепь с известными параметрами R и L подключается к источнику постоянной ЭДС E



Найти ток $i_L(t)$
и напряжение $u_L(t)$

Решение. Уравнение цепи после коммутации (ключ замкнут):

$$u_L + u_R = L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = E.$$

Его решение в общем виде:

$$i_L(t) = i_{Lпр}(t) + i_{Lсв}(t).$$

Принужденная составляющая (ключ замкнут) определяется без учета индуктивного элемента:

$$i_{Lпр}(t) = E / R.$$

Свободная составляющая

$$i_{L_{св}}(t) = Ae^{pt},$$

где p - корень характеристического уравнения;

A - постоянная интегрирования.

Характеристическое уравнение получаем из однородного дифференциального, заменяя d/dt на p :

$$Lp + R = 0$$

Его решение: $p = -R / L, [p] = c^{-1}$.

До коммутации $I_L(0)=0$ – независимое начальное условие. Поэтому:

$$i_L(0) = E/R + A = 0; \quad A = -E/R.$$

Таким образом,

$$i_L(t) = E/R(1 - e^{-(R/L)t}).$$

Напряжение $u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = Ee^{-(R/L)t}$.

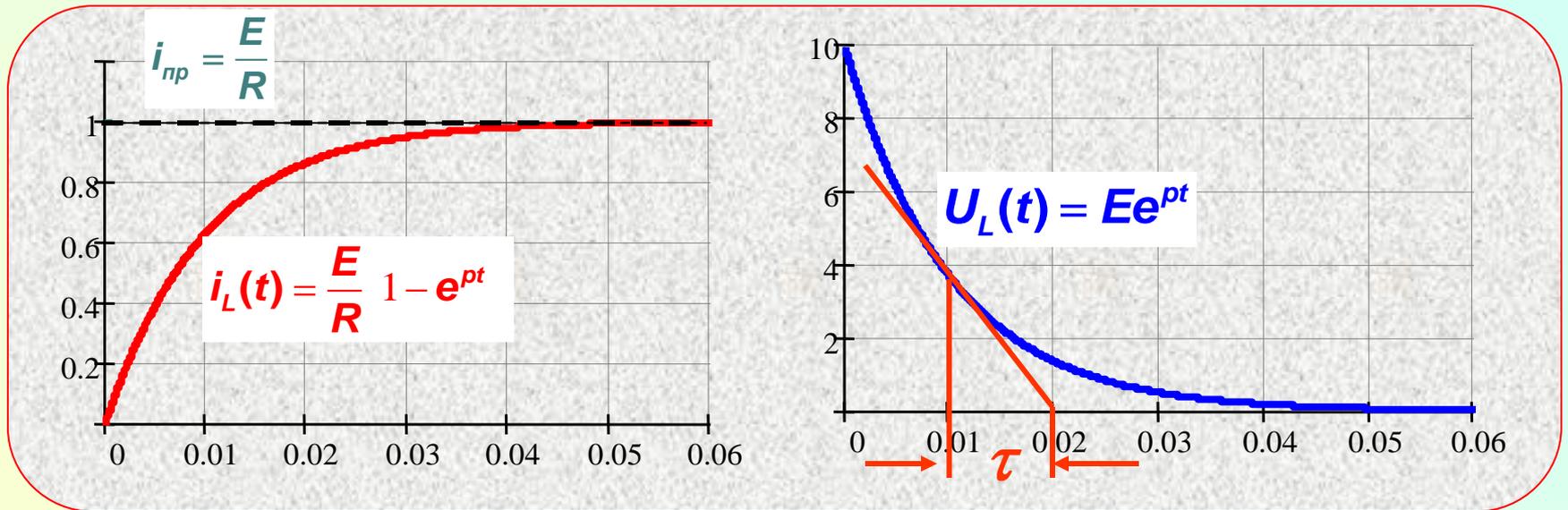
Величина $|1/p| = \tau$ имеет размерность времени. τ - постоянная времени.

Постоянная времени численно равна интервалу времени, в течение которого свободная составляющая уменьшается в **$e \approx 2,71$** раз.
В данном примере:

$$i_{LCB}(\tau) = -(E/R)e^{-1} = -i_{CB}(0)/e.$$

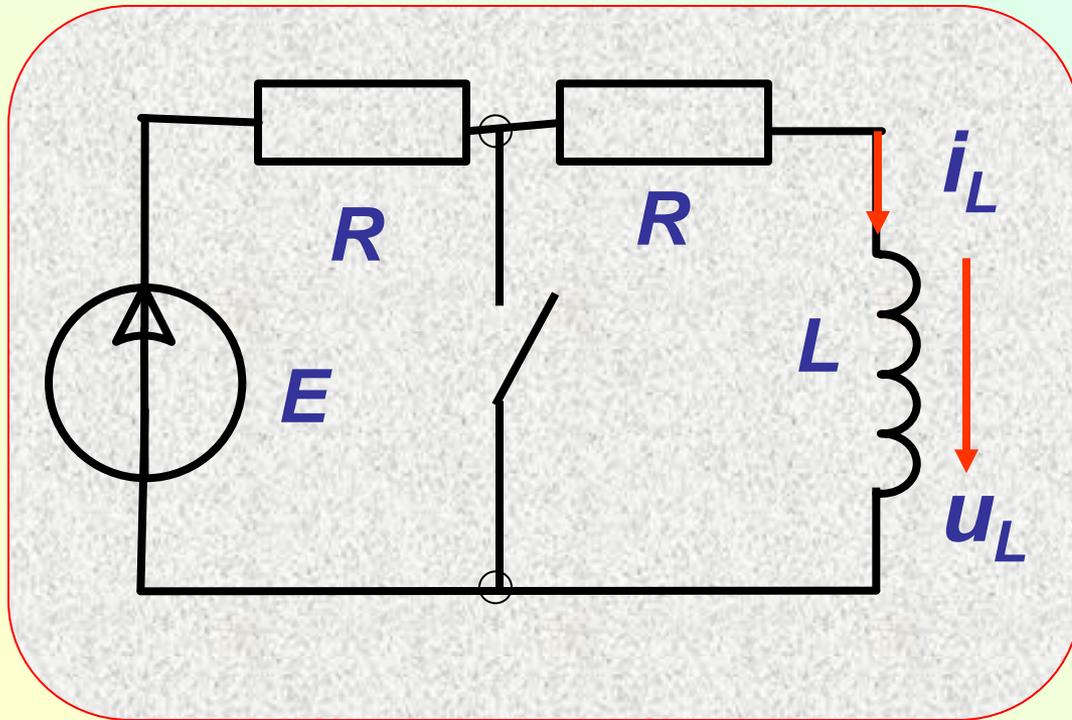
Практически свободная составляющая затухает за **5τ** . За **3τ** - на 80 %

Графики изменения тока и напряжения в RL -цепи



Если в любой точке кривой графика свободной составляющей провести касательную, то **подкасательная определит постоянную времени**

Пример 2. Короткое замыкание в *RL*-цепи. Параметры цепи заданы.



Найти ток
 $i_L(t)$ и
напряжение
 $u_L(t)$

Решение. Уравнение состояния цепи после коммутации будет

$$u_L + u_R = L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0.$$

Искомое решение по-прежнему

$$i_L(t) = i_{Lпр}(t) + i_{Lсв}(t),$$

но принужденная составляющая равна нулю, так что

$$i_L(t) = i_{Lсв}(t) = Ae^{pt}.$$

Свободная составляющая

$$i_{L_{св}}(t) = Ae^{pt}$$

определяется корнем характеристического уравнения p и постоянной интегрирования A .

Характеристическое уравнение и его корень такие же, как в предыдущем примере

$$Lp + R = 0 \quad p = -R / L, \quad [p] = c^{-1}.$$

A определяется из начального условия для тока i_L :

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = E/2R;$$

$$i_{L\text{св}}(0_+) = Ae^{p0}; \quad A = E/2R.$$

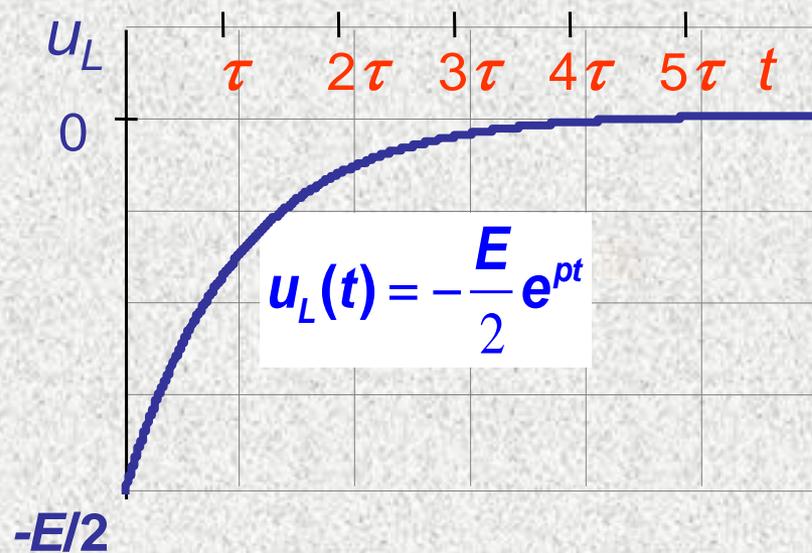
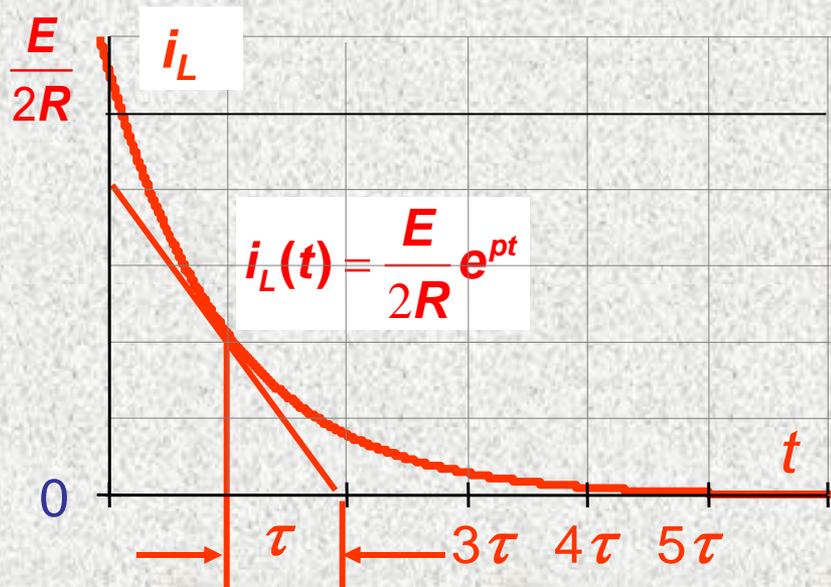
Таким образом, искомый ток

$$i_L(t) = \frac{E}{2R} e^{pt} = \frac{E}{2R} e^{-t/\tau}.$$

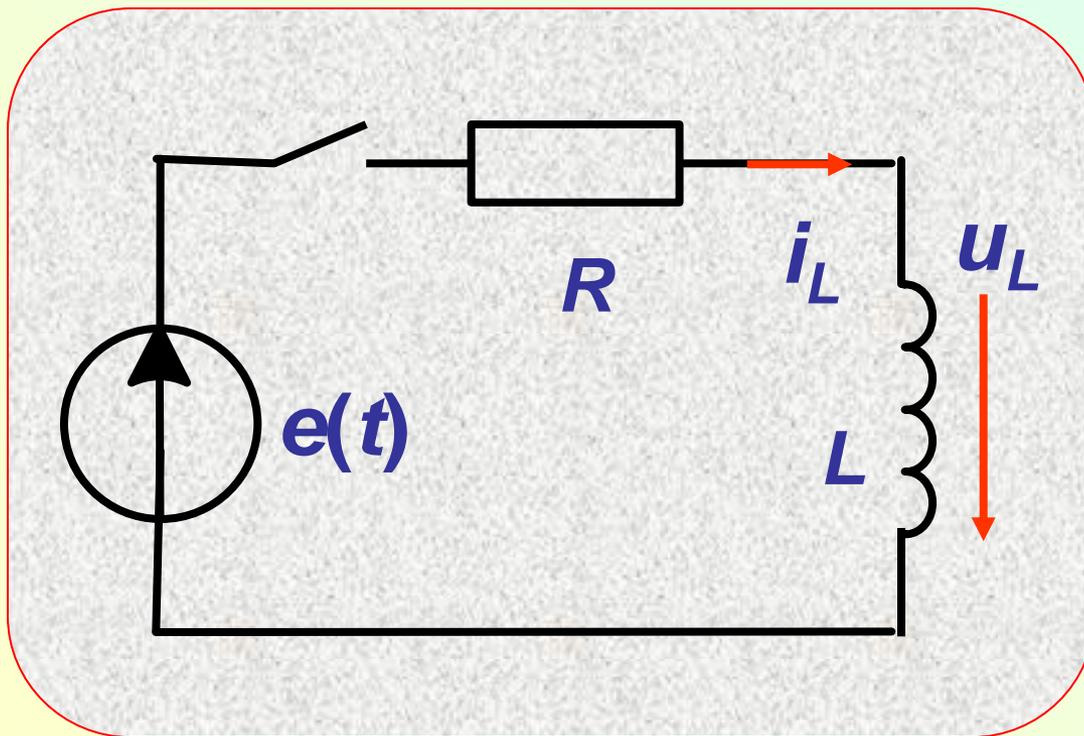
Напряжение на индуктивном элементе

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = -\frac{LE}{2R\tau} e^{-t/\tau} = -\frac{E}{2} e^{-(R/L)t}$$

Графики изменения i_L и u_L



Пример 3. Цепь с элементами R и L подключается к источнику синусоидальной ЭДС $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$.



Найти ток
 $i_L(t)$ и
напряжение
 $u_L(t)$

Решение. После коммутации (ключ замкнут) уравнение состояния цепи:

$$u_L + u_R = L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = e(t).$$

Его решение в общем виде :

$$i_L(t) = i_{Lпр}(t) + i_{Lсв}(t).$$

Принужденную составляющую можно рассчитать комплексным методом

$$i_{L_{\text{пр}}} = \frac{\dot{E}_m}{R + j\omega L} = \frac{E_m e^{j\psi}}{Z e^{j\varphi}} = I_m e^{j(\psi - \varphi)},$$

откуда $i_{\text{пр}}(t) = I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi)$.

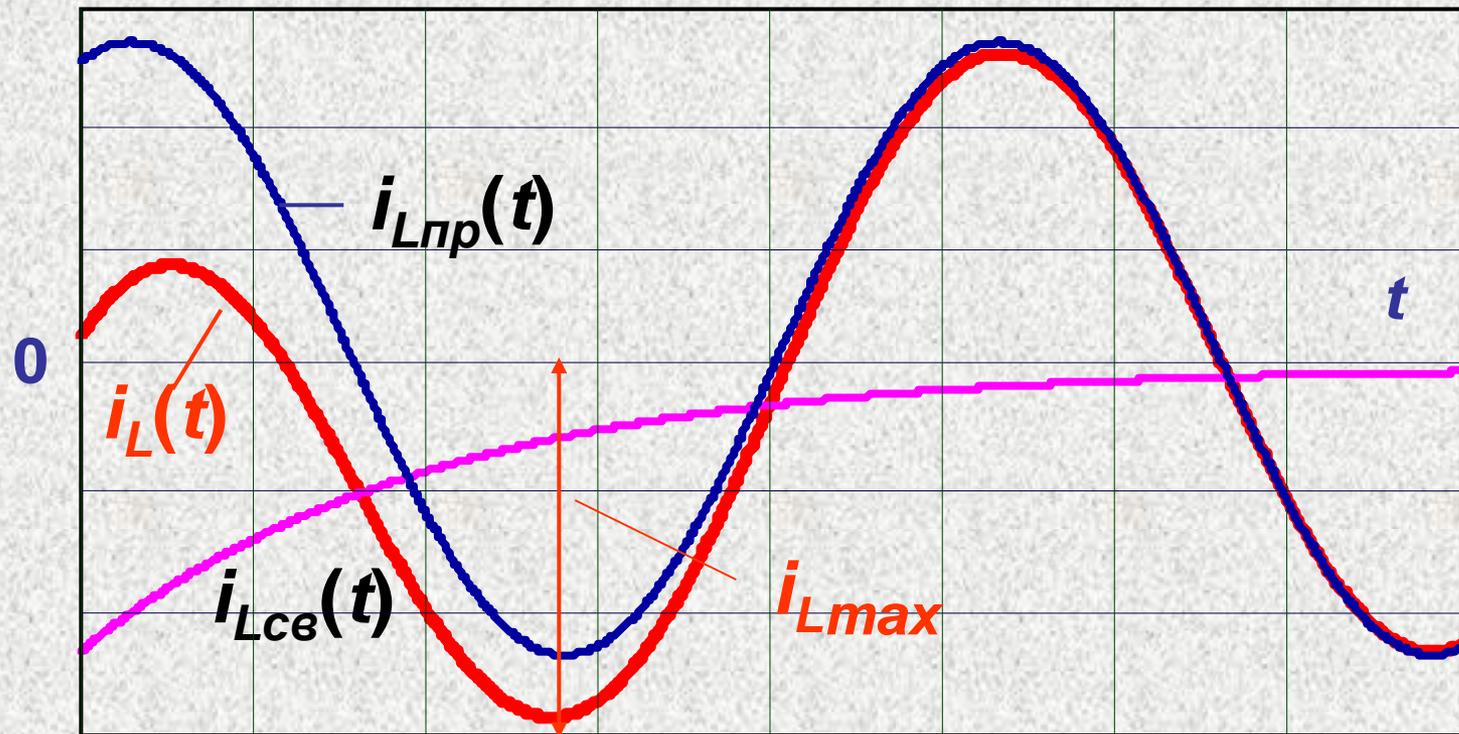
Постоянная интегрирования

$$A = i_L(0) - i_{L_{\text{пр}}}(0) = -I_m \sin(\psi - \varphi).$$

Таким образом,

$$i_L(t) = I_m [\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}].$$

График изменения тока



Если $\psi - \varphi = 0$, то $A = 0$ – переходный процесс отсутствует;

при $\psi - \varphi = \pm\pi/2$ $A = A_{max} = I_m$

- переходный процесс проявляется наиболее сильно.

Если $\tau \gg 2\pi/\omega$, то через $T/2$ после коммутации ток может достигать удвоенного значения амплитуды принужденного тока.

Напряжение на индуктивности

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} =$$

$$= E_m \left[\frac{\omega L}{Z} \cos(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{R}{Z} \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau} \right].$$

Обозначив $\frac{\omega L}{Z} = \sin \varphi$; $\frac{R}{Z} = \cos \varphi$,

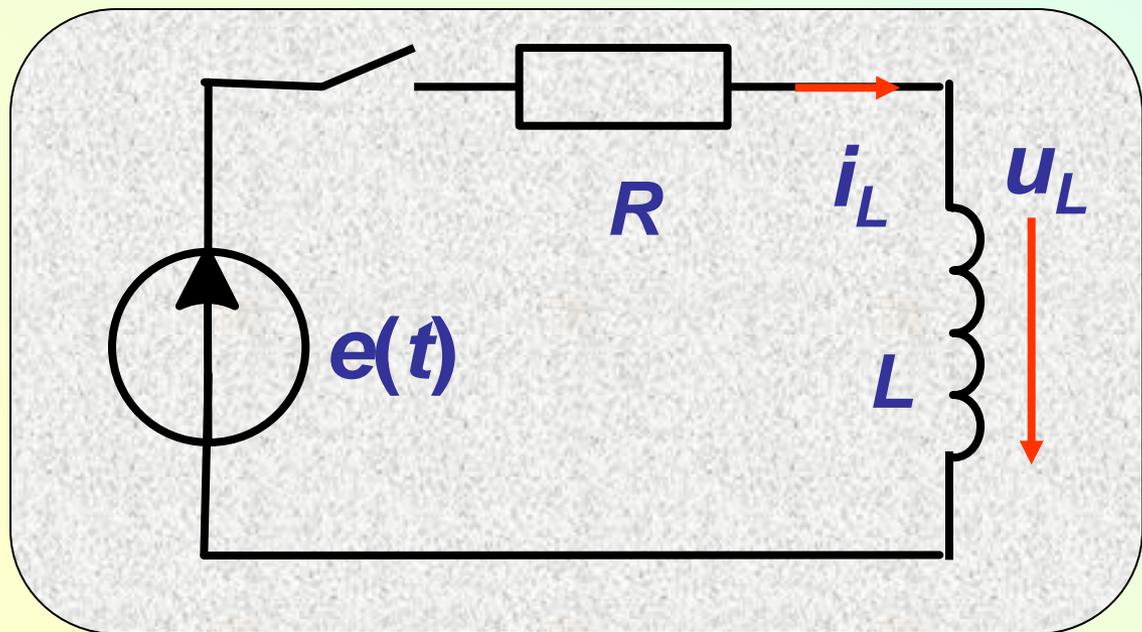
получим:

$$u_L(t) = E_m \left[\sin \varphi \cos(\omega t + \psi - \varphi) + \cos \varphi \sin(\psi - \varphi) e^{-t/\tau} \right].$$

В момент времени $t=0_+$ индуктивный элемент эквивалентен разрыву цепи и на нем падает все напряжение источника. В этом можно убедиться, подставив в полученное уравнение время $t=0$, что дает:

$$u_L(0_+) = E_m \sin \psi.$$

Пример 4. Цепь с параметрами R и L подключается к источнику ЭДС $e(t) = kt$.



Найти ток $i_L(t)$ и напряжение $u_L(t)$

Решение. После коммутации (ключ замкнут) уравнение состояния цепи

$$u_L + u_R = L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = kt.$$

Его решение в общем виде:

$$i_L(t) = i_{Lпр}(t) + i_{Lсв}(t).$$

Принужденную составляющую находим в форме линейной функции (по виду воздействия)

$$i_{Lпр}(t) = m + nt,$$

где m, n - коэффициенты, подлежащие определению. Подставляя это выражение в дифф. уравнение, получаем:

$$nL + Rm + Rnt = kt.$$

Сравнивая левую и правую части уравнения, находим:

$$n = k/R; \quad m = -nL/R = -kL/R^2.$$

Таким образом,

$$i_{Lпр}(t) = k(t - L/R)/R.$$

Корень характеристического уравнения прежний, поэтому:

$$i_L(t) = k(t - \tau) / R + Ae^{-t/\tau}.$$

Постоянную интегрирования найдем из условия $i_L(0)=0$.

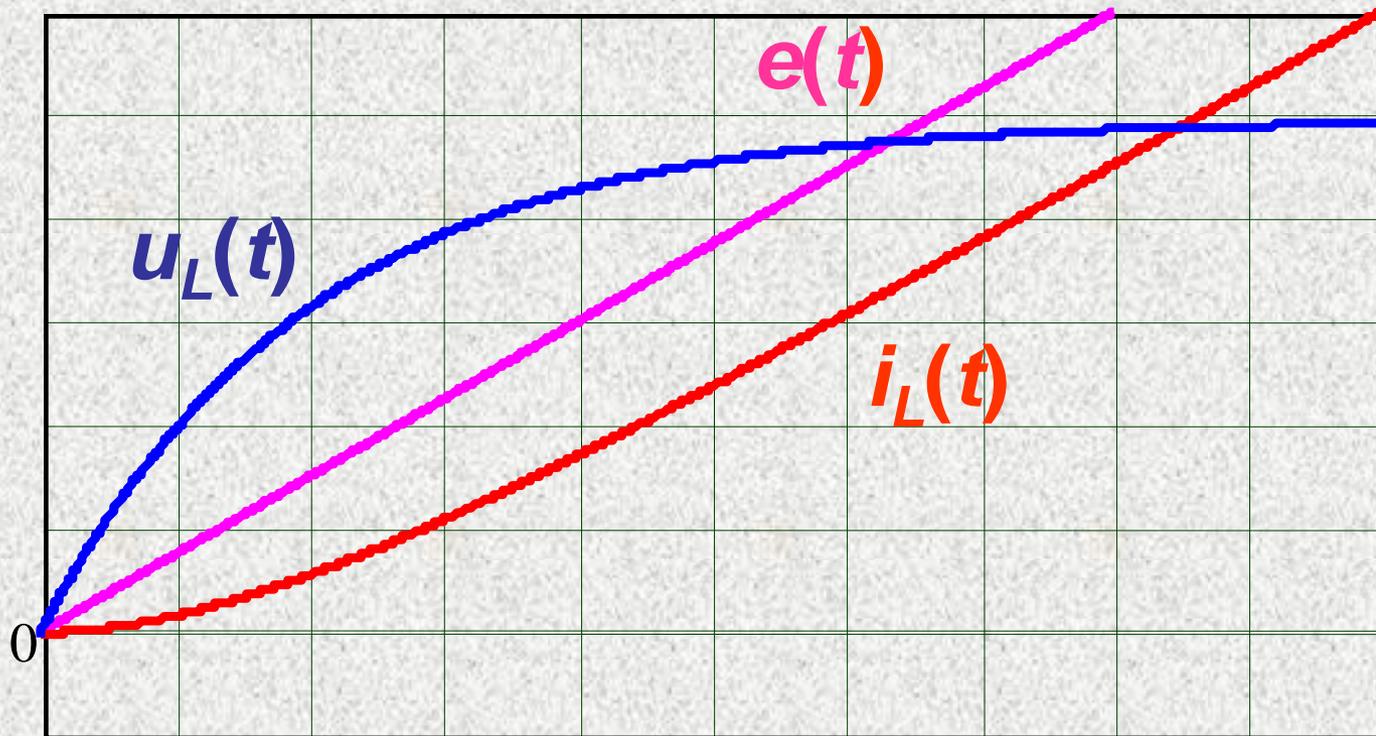
$$0 = \frac{k}{R}(-\tau) + A; \quad A = k\tau / R.$$

Окончательно:

$$i_L(t) = kt / R - k\tau(1 - e^{-t/\tau}) / R.$$

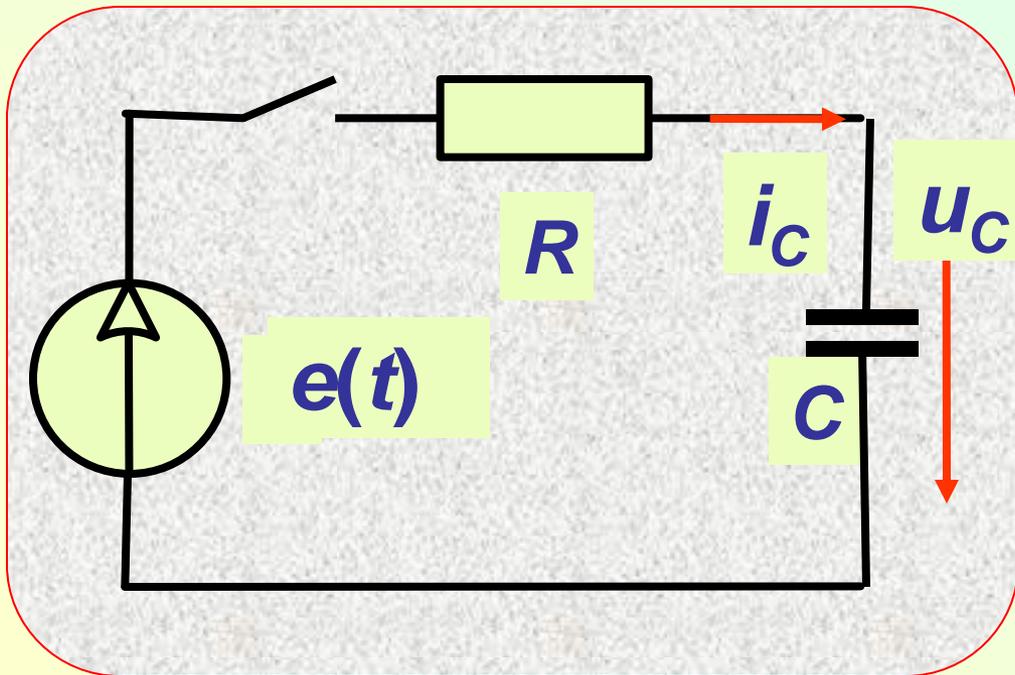
$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = k\tau(1 - te^{-t/\tau}).$$

Графики изменения тока и напряжений



Анализ простейших RC - цепей

Пример 5. Цепь с элементами R и C подключается к источнику синусоидальной ЭДС $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$.



Найти
напряжение
 $u_C(t)$ и ток
 $i_C(t)$

Решение. Уравнение цепи после коммутации:

$$u_R + u_C = RC \frac{du_C}{dt} + u_C = e(t).$$

Его решение в общем виде :

$$u_C(t) = u_{Cпр}(t) + Ae^{pt}.$$

Характеристическое уравнение и его решение:

$$RCp + 1 = 0; \quad p = -1/RC; \quad \tau = RC.$$

Постоянную интегрирования находим из начального условия:

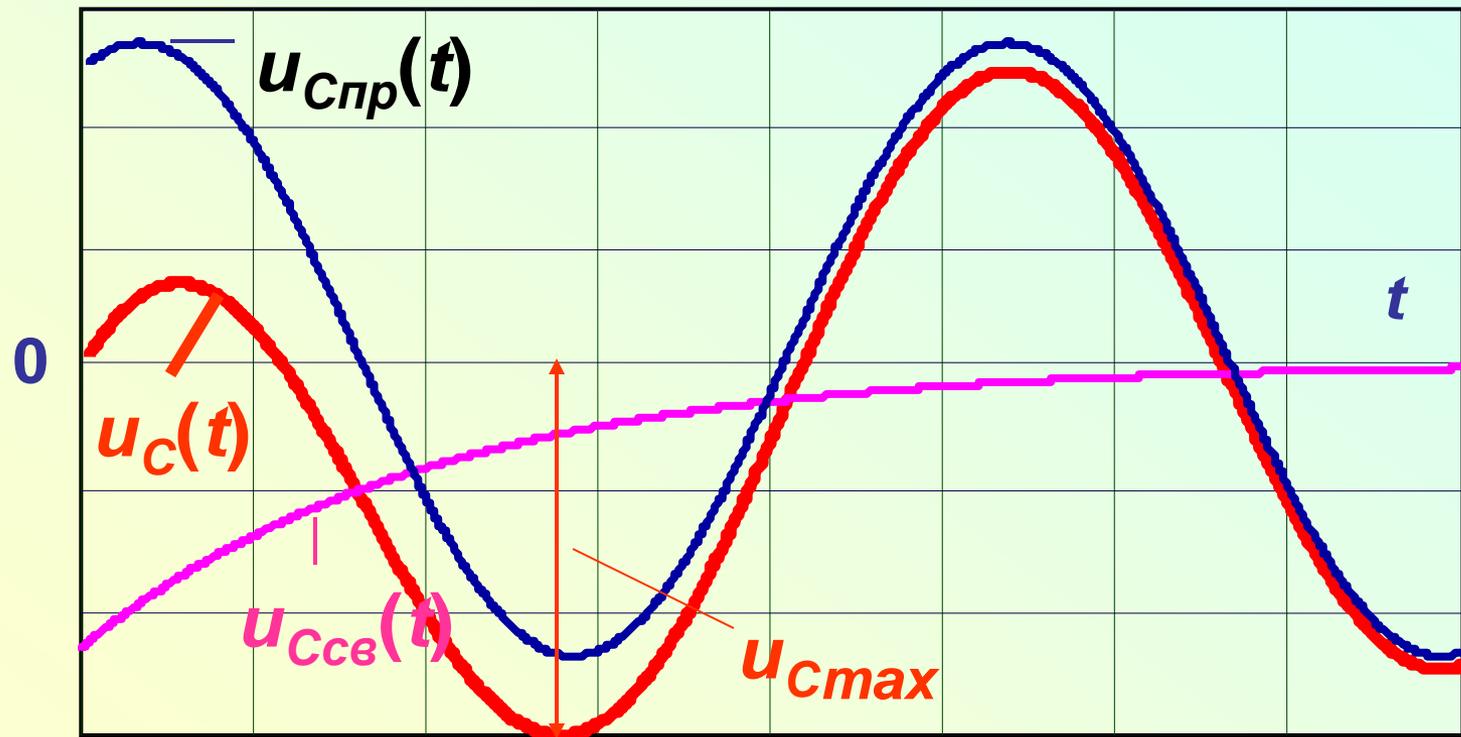
$$t = 0 \rightarrow u_C = 0. \quad A = u_C(0) - u_{Cпр}(0);$$

$$A = -\frac{E_m}{Z\omega C} \sin(\psi - \varphi - \pi/2).$$

Таким образом,

$$u_C(t) = \frac{E_m}{Z\omega C} [\sin(\omega t + \psi - \varphi - \pi/2) - \sin(\psi - \varphi - \pi/2)e^{-t/\tau}].$$

График изменения напряжения на емкости



Ток в емкости $i_c(t) = C \frac{du_c}{dt} =$
 $= \frac{E_m}{Z} \cos(\omega t + \psi - \varphi - \pi/2) +$
 $+ \frac{E_m}{Z\omega CR} \sin(\psi - \varphi - \pi/2) e^{-t/\tau}].$

Обозначив $\frac{1}{Z\omega C} = \sin \varphi;$ $\frac{R}{Z} = \cos \varphi,$
получим:

$$i_c(t) = \frac{E_m}{R} [\cos \varphi \cdot \sin(\omega t + \psi - \varphi) + \sin \varphi \cdot \cos(\psi - \varphi) e^{-t/\tau}].$$

В момент времени $t=0_+$ незаряженный емкостный элемент эквивалентен короткому замыканию и напряжение на нем равно нулю. Ток цепи в этот момент времени будет определяться

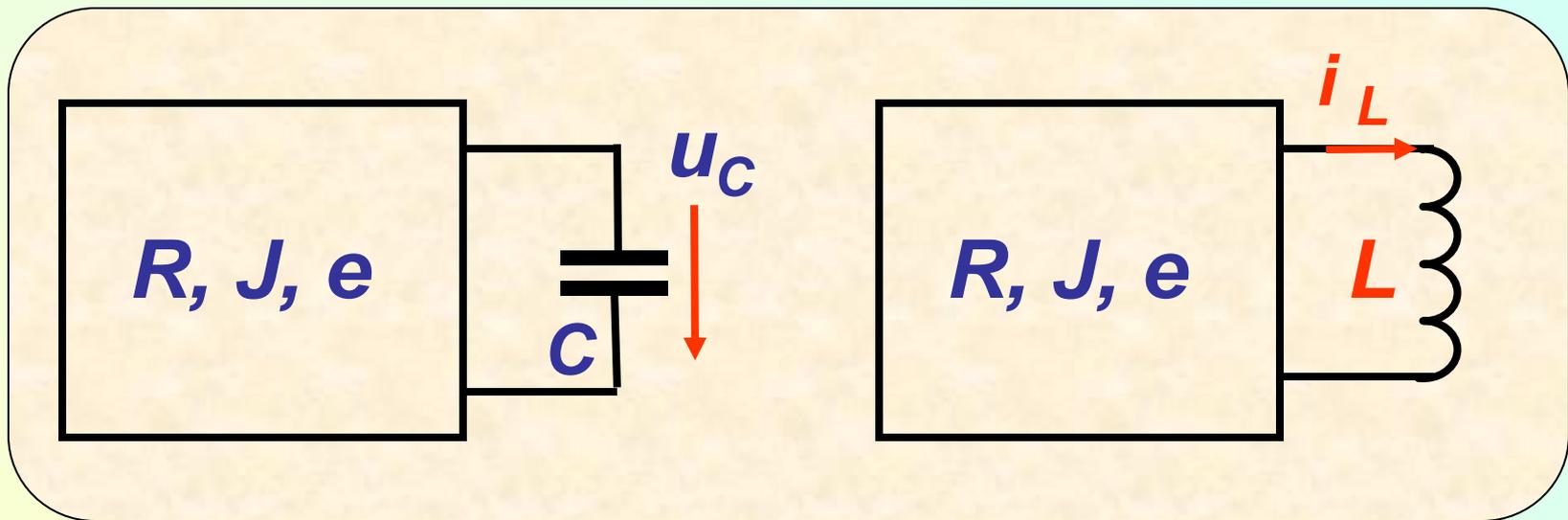
$$i_c(0_+) = \frac{E_m}{R} \sin \psi.$$

Лекция № 3

Продолжение темы

**Классический метод
расчета переходных
процессов**

Расчет разветвленных цепей первого порядка

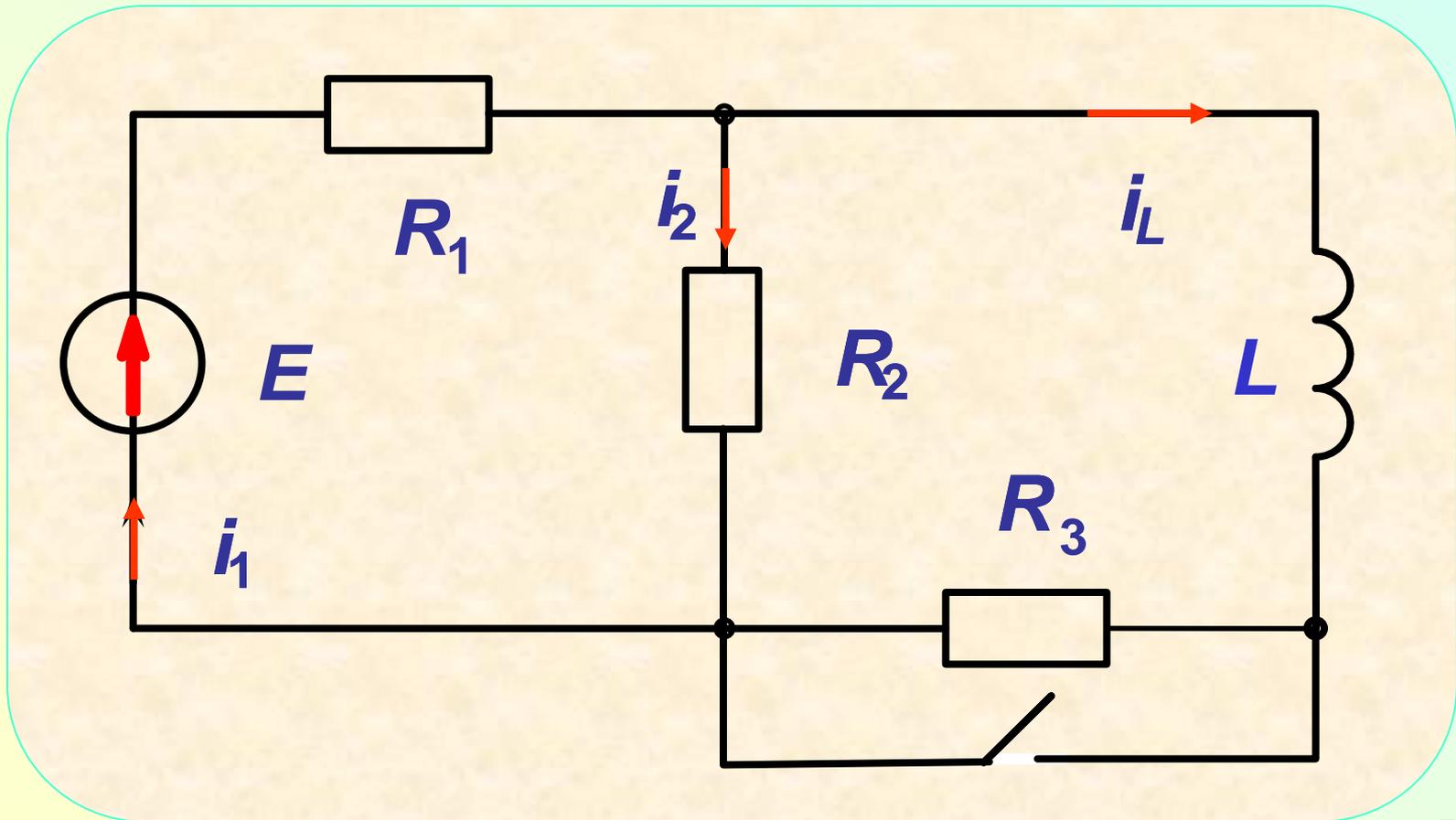


По отношению к накопителю энергии
любая сложная цепь может быть
представлена **ЭКВИВАЛЕНТНЫМ**
ИСТОЧНИКОМ

Иными словами, цепь приводится к простейшим RC и RL -цепям. Все полученные в примерах формулы могут быть использованы при расчете соответствующих напряжений и токов.

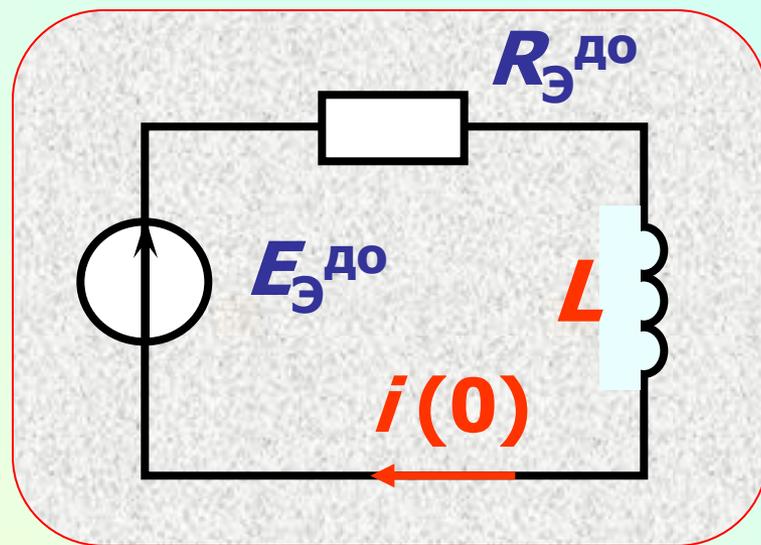
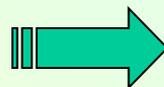
При определении корней или постоянных времени нужно учитывать эквивалентное сопротивление $R_{ЭКВ}$

Пример 6. Найти ток i_L в цепи с элементами $R_1 = R_3 = 100$ Ом; $R_2 = 25$ Ом; $L = 1$ Гн; $E = 100$ В.



Решение. 1. Определим ННУ $i_L(0)$ в схеме до коммутации, свернув ее до эквивалентной:

$E_{\text{Э}}^{\text{до}}$ и $R_{\text{Э}}^{\text{до}}$ –
параметры до
коммутации



$$E_{\text{Э}}^{\text{до}} = ER_2 / (R_1 + R_2);$$

$$R_{\text{Э}}^{\text{до}} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) + R_3$$

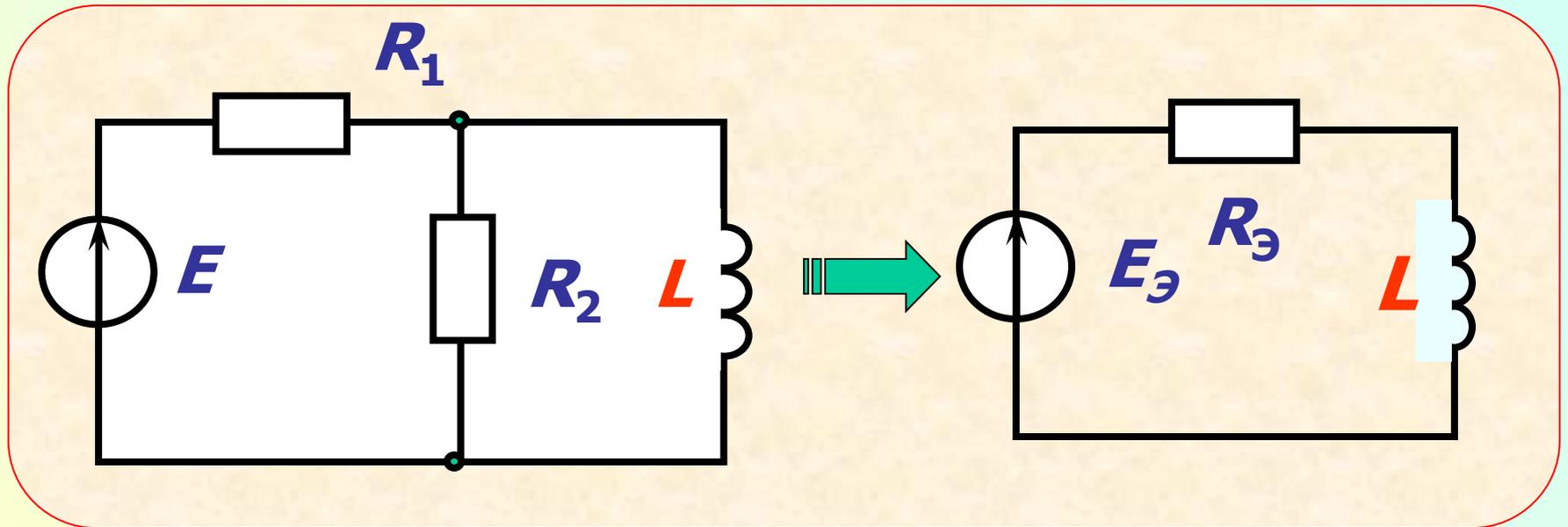
Подставляя числа, найдем:

$$E_{\text{Э}}^{\text{до}} = 20 \text{ В}; R_{\text{Э}}^{\text{до}} = 120 \text{ Ом.}$$

Искомый ток

$$\begin{aligned} i_L(0) &= E_{\text{Э}}^{\text{до}} / R_{\text{Э}}^{\text{до}} = \\ &= 20 / 120 = 0,167 \text{ А} \end{aligned}$$

2. Найдем эквивалентные параметры схемы после коммутации.



$$E_3 = ER_2 / (R_1 + R_2);$$

$$R_3 = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$$

**В числах: $E_{\text{Э}} = 20 \text{ В}; R_{\text{Э}} = 20 \text{ Ом};$
 $\tau = L / R_{\text{Э}} = 1 / 20 = 0,05 \text{ с.}$**

**Полное решение (в общем виде)
записывается**

$$\mathbf{i_L(t) = i_{Lпр}(t) + i_{Lсв}(t),}$$

Принужденная составляющая:

$$\mathbf{i_{Lпр} = E_{\text{Э}} / R_{\text{Э}} = 20 / 20 = 1 \text{ А.}$$

Постоянная интегрирования:

$$\begin{aligned} A &= i_L(0) - i_{L\text{пр}}(0) = \\ &= 0,167 - 1 = -0,833 \text{ А.} \end{aligned}$$

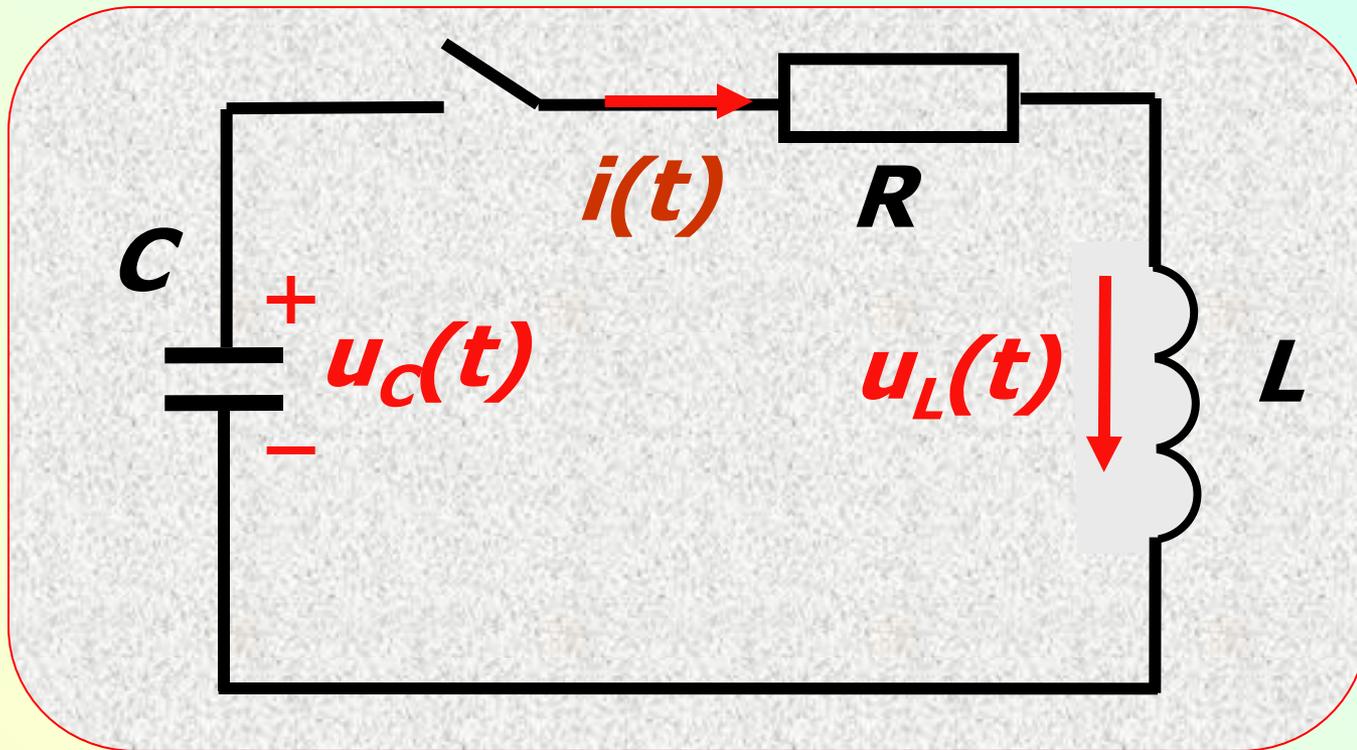
Окончательно записываем:

$$i_L(t) = 1 - 0,833e^{-20t} \text{ А.}$$

Анализ переходных процессов в неразветвленной RLC- цепи (цепь второго порядка)

Заряд и разряд конденсатора в цепи последовательно соединенных катушки индуктивности и резистора – одна из классических задач расчета переходных процессов.

1. Разряд конденсатора на последовательно соединенные ***RL***



Заданы: $R; L; C; u_C(0) = U_0$

**Уравнение для напряжений
записываем по второму
закону Кирхгофа:**

$$u_L + u_R + u_C = L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = 0,$$

где $i = C \frac{du_C}{dt} = 0$

Исключая u_C , получаем

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = 0;$$

ИСКЛЮЧИВ ТОК -

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0;$$

если учесть $Cu_C = q$, имеем

$$LC \frac{d^2 q}{dt^2} + RC \frac{dq}{dt} + q = 0$$

Для всех трех дифференциальных уравнений характеристическое уравнение одно

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0.$$

Его решение известно

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Если $R > 2\sqrt{LC}$, то корни разные вещественные и отрицательные

Если $R = 2\sqrt{L/C}$ - корни равные вещественные и отрицательные.

При $R < 2\sqrt{L/C}$ корни комплексно-сопряженные.

Для всех корней **общее решение** однородного дифференциального уравнения **можно** записать

$$i_{CB} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

В нашем случае принужденная составляющая отсутствует:

$$**i(t) = i_{CB}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} .**$$

Для определения постоянных интегрирования нужны два начальных условия:

$$**i_{CB}(0) = A_1 + A_2 ;**$$

$$**\left. \frac{di_{CB}}{dt} \right|_{t=0_+} = p_1 A_1 + p_2 A_2 .**$$

Независимое НУ для тока
известно $i(0) = 0$.

Второе - зависимое НУ (производная тока в момент коммутации)
найдем из исходного уравнения
цепи:

$$U_L(0_+) = L \frac{di}{dt} \Big|_{t=0_+} = -u_C(0) - Ri(0);$$

$$di / dt \Big|_{t=0_+} = -U_0 / L.$$

**После подстановки
начальных условий получаем
систему уравнений**

$$**A_1 + A_2 = 0;**$$

$$**p_1 A_1 + p_2 A_2 = -U_0 / L.**$$

Решение системы

$$A_1 = -A_2 = \frac{U_0}{L(p_2 - p_1)}.$$

Ток разряда конденсатора

$$i(t) = \frac{U_0}{L(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Выражение для тока позволяет записать напряжение $u_L(t)$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{U_0}{(p_2 - p_1)} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}).$$

Напряжение на конденсаторе найдем из исходного уравнения, записанного по второму закону Кирхгофа

$$u_C(t) = -Ri - u_L(t).$$

$$u_C(t) = \frac{-U_0}{(p_2 - p_1)} \cdot$$

$$\left[\left(\frac{R}{L} + p_1 \right) e^{p_1 t} - \left(\frac{R}{L} + p_2 \right) e^{p_2 t} \right].$$

**По теореме Виета $p_1 + p_2 = -R/L$,
поэтому**

$$u_C(t) = \frac{U_0}{(p_2 - p_1)} \left[p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t} \right].$$

1. Апериодический разряд конденсатора

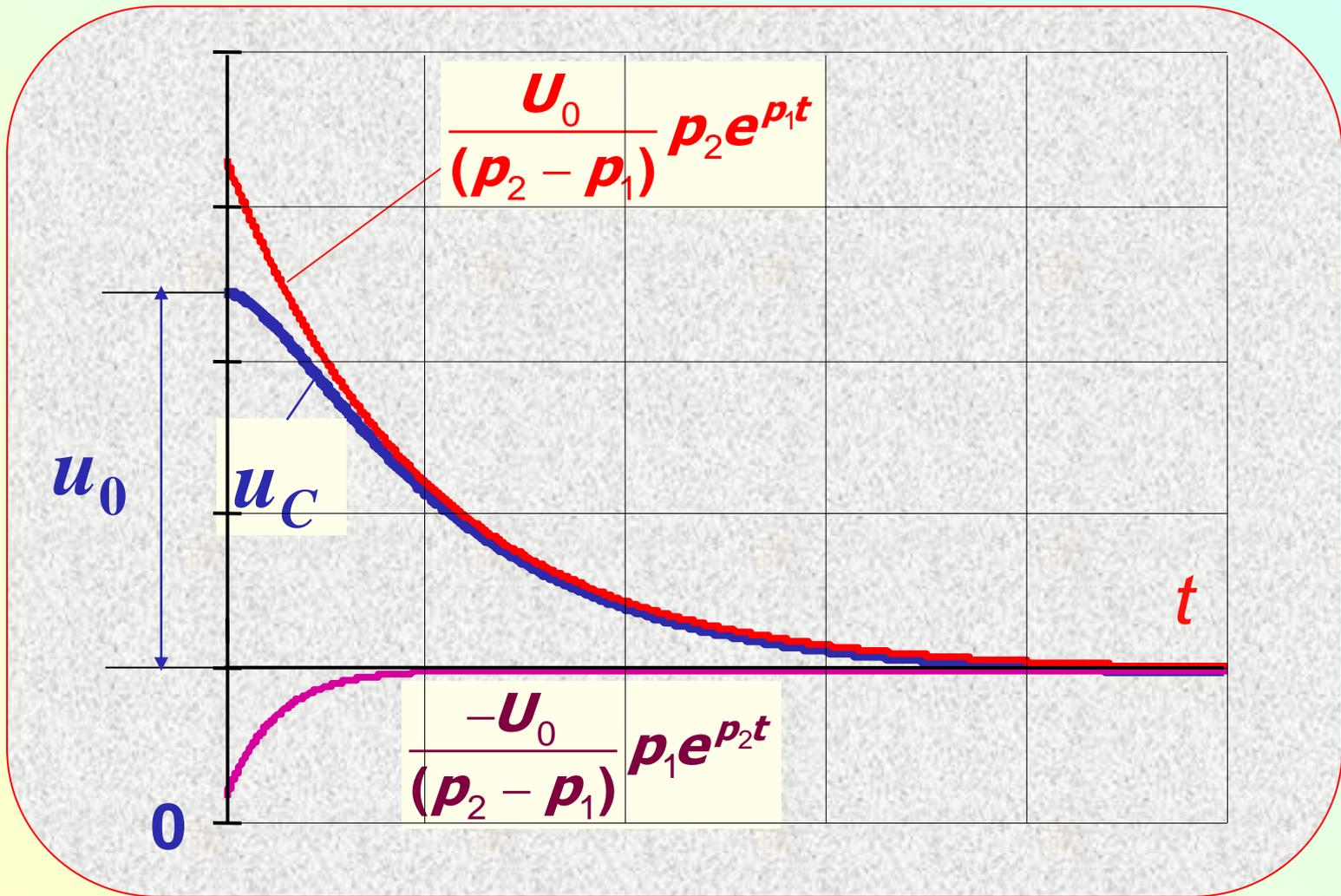
Такой разряд характерен для контура низкой добротности

$$Q < 0,5; R < 2\sqrt{L/C}.$$

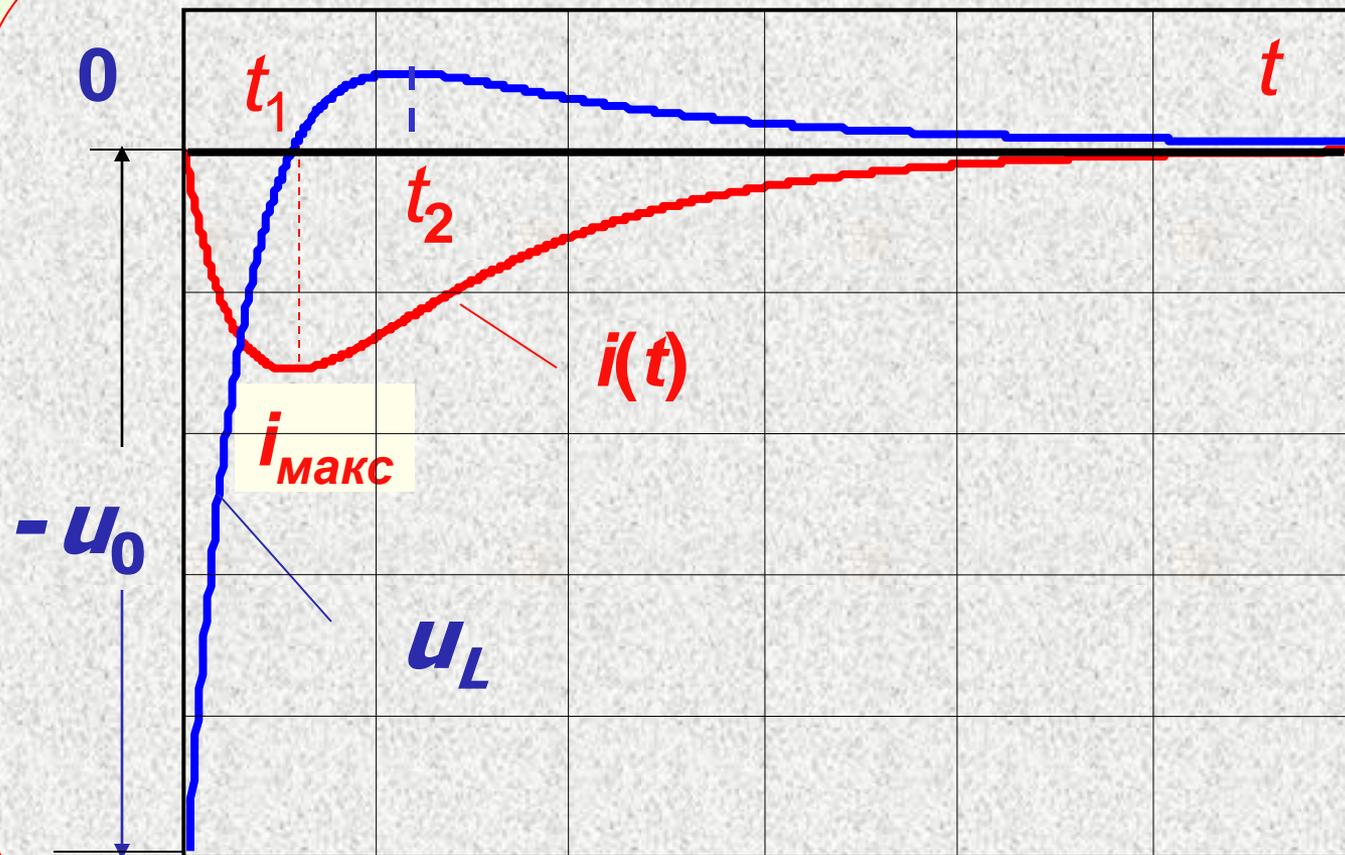
Напряжение на конденсаторе монотонно убывает до нуля, не изменяя своего знака (без перезарядки).

Энергия, запасенная в конденсаторе, почти вся сразу поглощается резистором

График изменения напряжения на конденсаторе



Графики изменения тока и напряжения на индуктивности



Ток разряда, противоположно направленный по отношению к напряжению конденсатора, быстро возрастает до максимума, а затем медленно убывает до нуля. Максимум достигается в момент времени t_1 , которое определяется из условия $\frac{di(t)}{dt} = 0$.

Дифференцируя, получаем

$$t_1 = \frac{1}{p_1 - p_2} \ln(p_2 / p_1).$$

Напряжение на индуктивности принимает в момент коммутации значение $u_L(0_+) = -U_0$. Затем, нарастая, в момент времени t_1 , изменяет свой знак. Максимум напряжения достигается в момент времени t_2 , который определяется из условия

$$\frac{du_L(t)}{dt} = 0.$$

При $t > t_2$ все величины затухают с постоянной времени $\tau_2 = |1/p_2|$

2. Предельный апериодический (критический) разряд

Такой разряд характерен для контура с добротностью $Q = 0,5$. Напряжение и ток в контуре изменяются, как и в предыдущем случае, монотонно. Энергия в индуктивности **практически не запасается** и сразу поглощается резистором.

Расчетные соотношения для тока и напряжений контура получаются из предыдущих формул предельным переходом $p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow p$.
Например для тока:

$$i(t) = \lim_{p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow p} \frac{U_0}{L(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) =$$
$$= -\frac{U_0}{L} t e^{pt}.$$

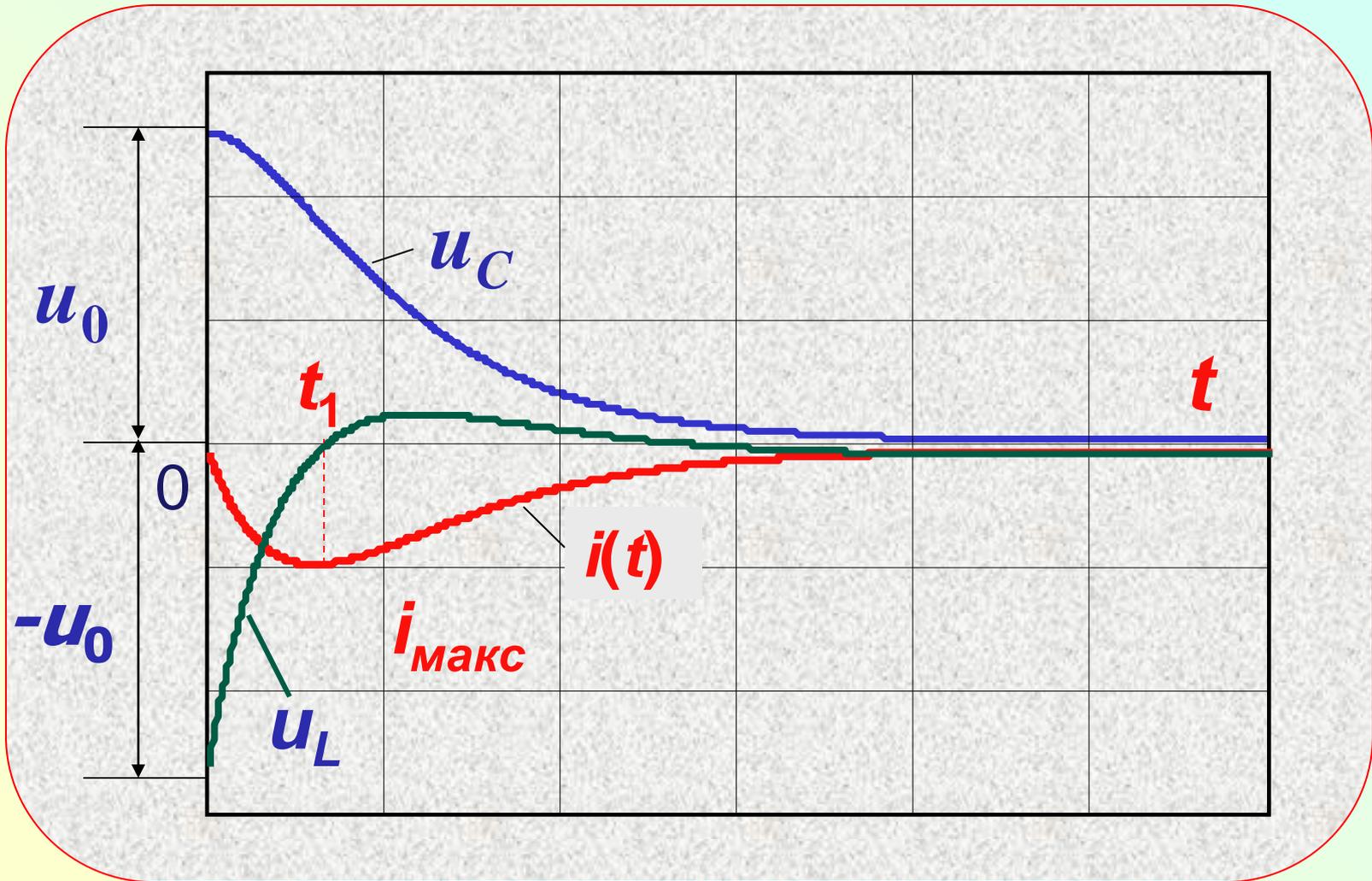
Напряжение на индуктивности:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -U_0(pt + 1)e^{pt},$$

**а напряжение на емкости
проще найти по второму
закону Кирхгофа для контура:**

$$u_C(t) = -(Ri + u_L) = U_0(1 - pt)e^{pt}.$$

Графики изменения тока и напряжений



3. Колебательный (периодический) разряд

Такой разряд характерен для контура с высокой добротностью $Q > 0,5$, когда корни комплексно – сопряженные. Формулы для напряжений и тока остаются справедливыми, но их лучше представить в тригонометрических функциях.

Обозначим корни в форме

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = -\delta \pm j\omega_{CB}.$$

Подстановка корней в уравнение для тока приводит к виду:

$$\begin{aligned} i(t) &= -\frac{U_0}{L\omega_{CB}} e^{-\delta t} \left(\frac{e^{j\omega_{CB}t} - e^{-j\omega_{CB}t}}{2j} \right) = \\ &= \frac{U_0}{\omega_{CB}L} e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_{CB}t + \pi). \end{aligned}$$

Напряжение на индуктивности:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{U_0}{\omega_{CB} \sqrt{LC}} e^{-\delta t} \sin(\omega_{CB} t - \psi),$$

где $\psi = \text{arctg}(\omega_{CB} / \delta)$.

Напряжение на конденсаторе

$$u_C(t) = U_0 e^{-\delta t} \left(\frac{\delta + j\omega_{CB}}{2j\omega_{CB}} e^{j\omega_{CB} t} + \frac{\delta}{\omega_{CB}} \frac{e^{j\omega_{CB} t} - e^{-j\omega_{CB} t}}{2j} \right) =$$

$$= U_0 e^{-\delta t} \left(\cos \omega_{CB} t + \frac{\delta}{\omega_{CB}} \sin \omega_{CB} t \right).$$

После некоторых преобразований:

$$u(t) = \frac{U_0}{\sin \psi} e^{-\delta t} \sin(\omega_{CB} t + \psi).$$

Иногда свободные составляющие сразу записывают в форме

$$f_{CB}(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega_{CB} t + \gamma),$$

где A и γ - постоянные, которые определяются из начальных условий

Из приведенных формул следует, что δ - коэффициент, определяющий затухание;

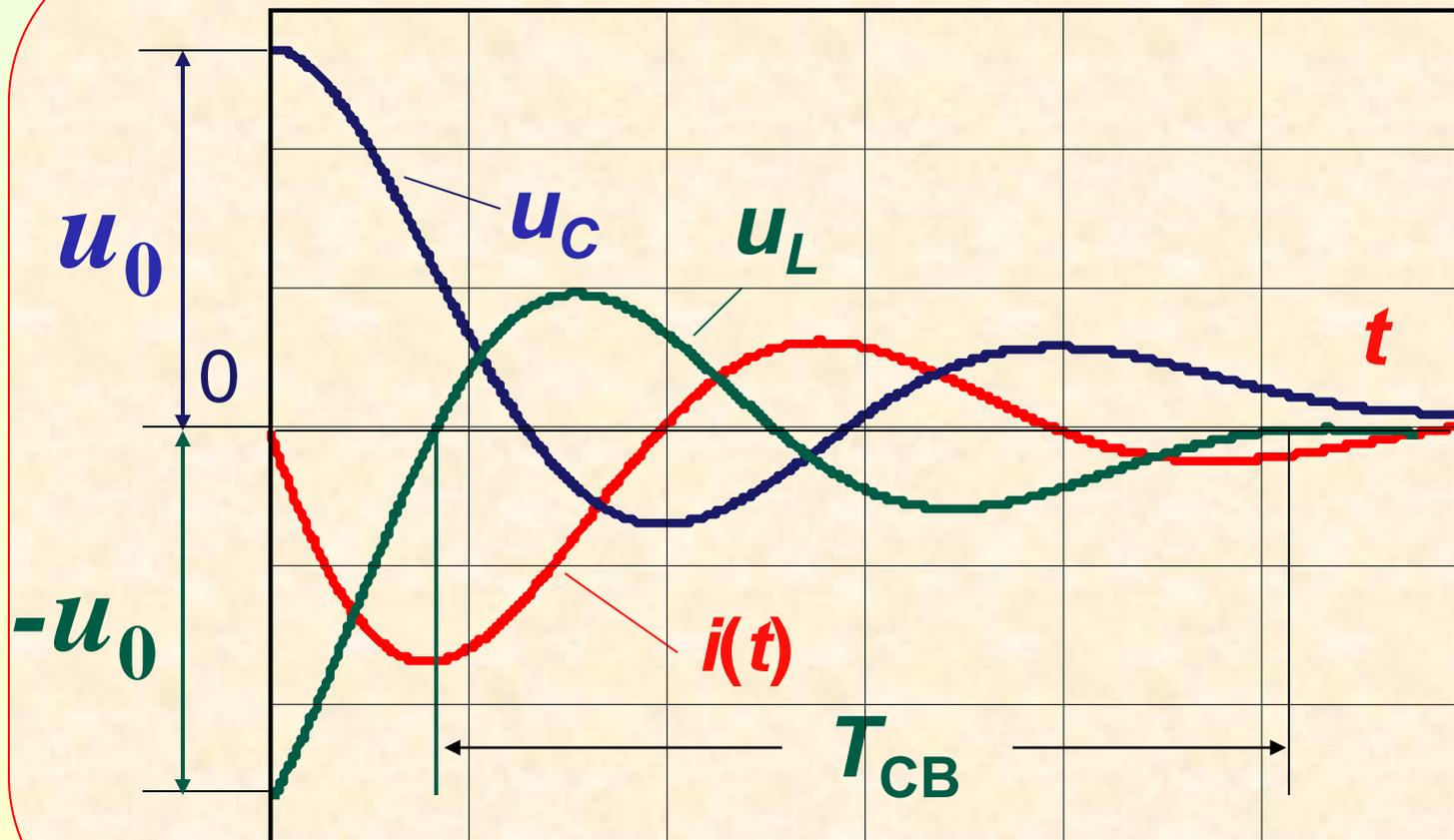
обратная величина $1/\delta = \tau$ - постоянная времени;

ω_{CB} - угловая частота собственных, или свободных, колебаний

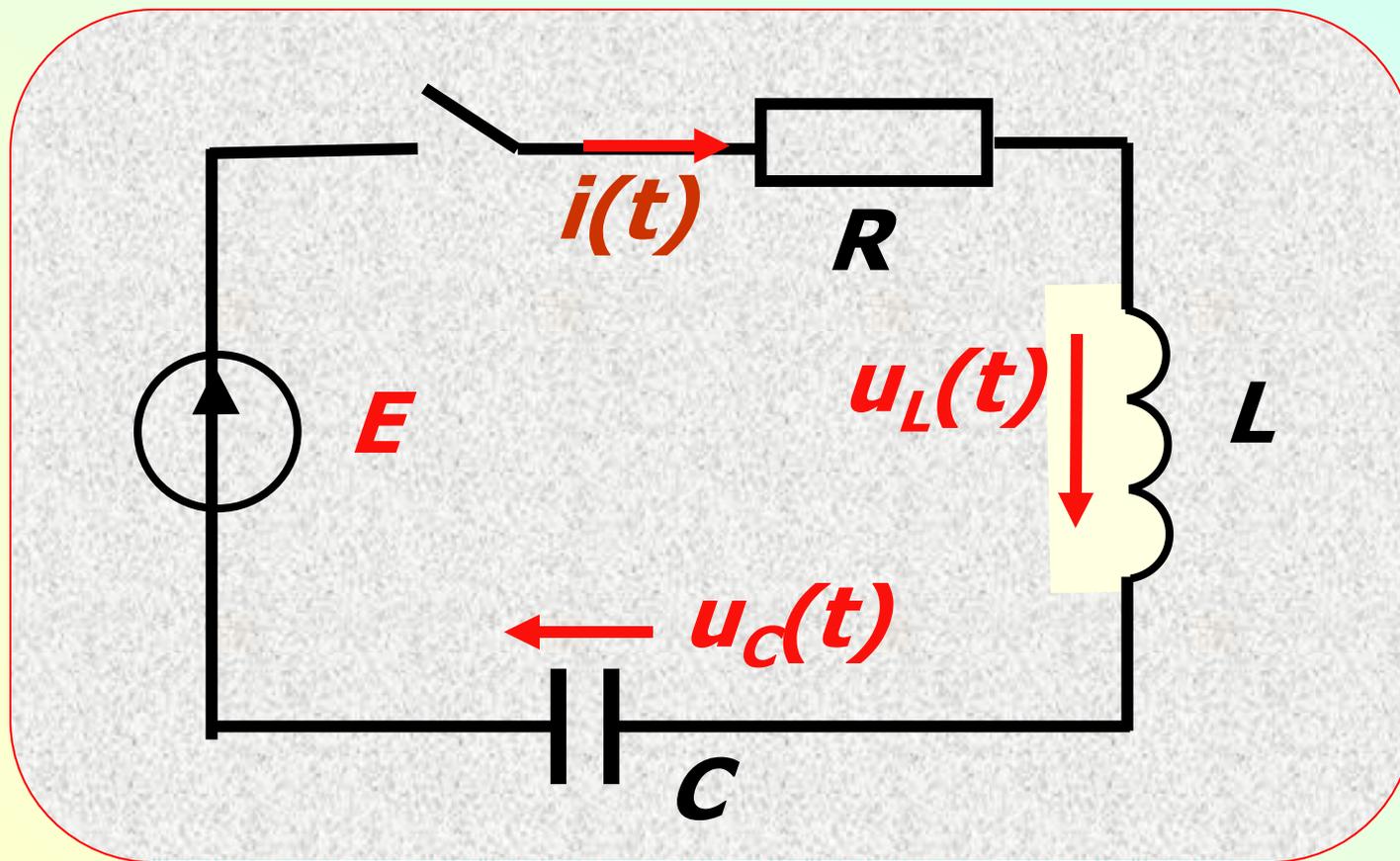
контура; T_{CB} - период свободных колебаний, равный

$$T_{CB} = \frac{2\pi}{\omega_{CB}}.$$

Графики изменения тока и напряжений



Подключение *RLC*-цепи к источнику постоянного напряжения



В первом уравнении изменилась только правая часть

$$**Ri + u_C + L \frac{di}{dt} = E; \quad i = C \frac{du_C}{dt}**$$

Дифференцируя первое из уравнений и исключая du_C / dt , найдем

$$**LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = C \frac{dE}{dt} = 0.**$$

Это уравнение совпадает с уравнением тока разряда конденсатора; его решение содержит только две экспоненциальные составляющие с теми же корнями. **Независимые НУ** для тока $i(t)$ и для напряжения U_C – нулевые. Зависимое начальное условие - производную тока – найдем из первого уравнения системы, учитывая $U_C = 0$:

$$R \cdot 0 + 0 + L \frac{di}{dt} = E; \quad di / dt \Big|_{t=0_+} = E / L.$$

Постоянные интегрирования образуют систему уравнений

$$A_1 + A_2 = 0; \quad p_1 A_1 + p_2 A_2 = E / L,$$

отличающуюся от предыдущего случая знаком правой части.

Таким образом, решение для тока отличается от предыдущего только знаком:

$$i(t) = \frac{-E}{L(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Напряжение на индуктивности

$$u_L(t) = \frac{-E}{(p_2 - p_1)} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}).$$

Напряжение на конденсаторе находим по второму закону Кирхгофа:

$$u_C(t) = E - \frac{E}{(p_2 - p_1)} [p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}].$$

Наличие в формуле для u_C слагаемого E показывает, что это решение неоднородного дифференциального уравнения.

E – принужденная составляющая.

Поскольку формулы для тока и напряжений подобны формулам для разряда конденсатора, их анализ приведет к тем же результатам.

При комплексных сопряженных корнях напряжение на конденсаторе имеет вид:

$$u_C(t) = E - \frac{E}{\sin \psi} e^{-\delta t} \sin(\omega_{CB} t + \psi).$$

Как и в предыдущем случае, оно представляется синусоидой с угловой частотой ω_{CB} и затуханием δ .

Скорость затухания свободных колебаний характеризуется отношением напряжений в моменты времени t и $t+T_{CB}$.

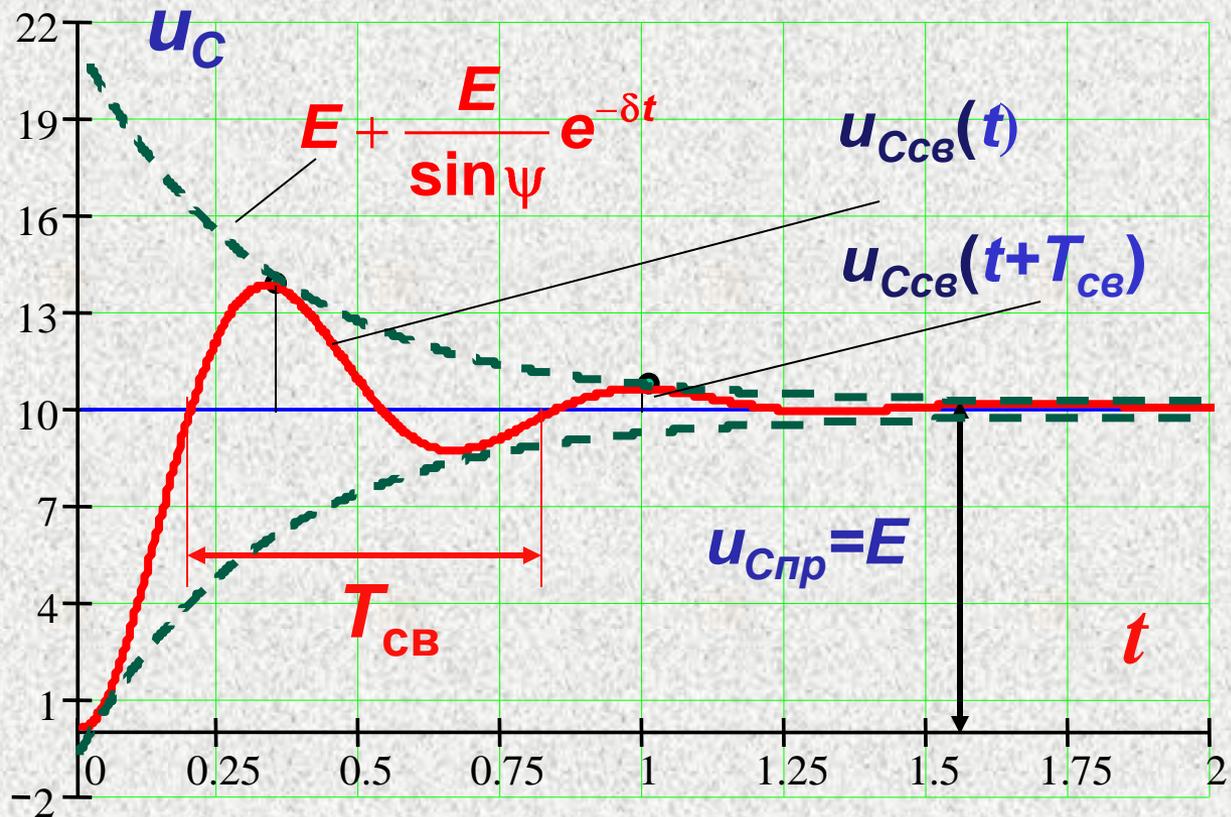
$$\frac{u_{CCB}(t)}{u_{CCB}(t + T_{CB})} = e^{\delta T_{CB}}.$$

Это отношение называют декрементом колебания, зависящим только от параметров контура. Иногда затухание колебаний характеризуют логарифмическим декрементом

$$\Delta = \ln \frac{u_{CCB}(t)}{u_{CCB}(t + T_{CB})}$$

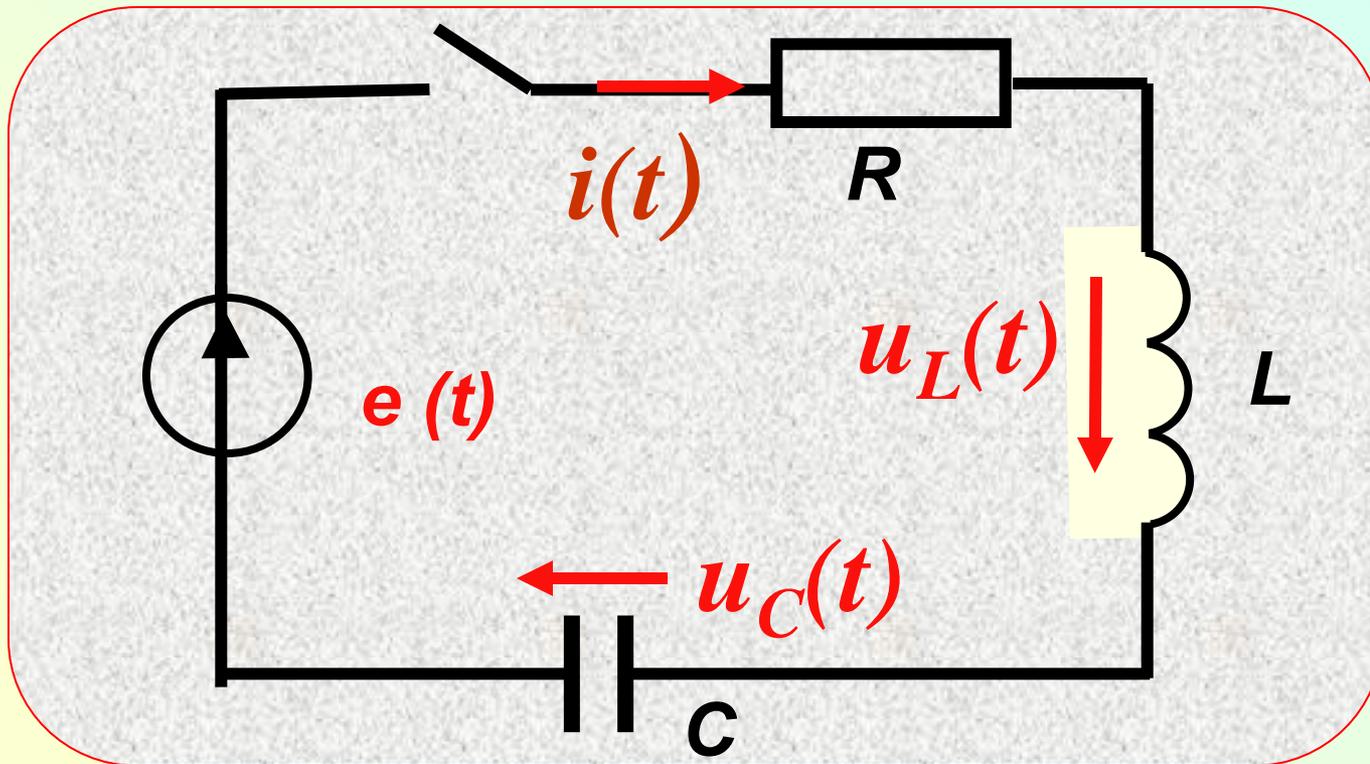
При $\delta=0$ получаем незатухающие гармонические колебания

График изменения напряжения $u_c(t)$



Подключение RLC -цепи к источнику синусоидального напряжения

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$$



Уравнения, определяющие переходный процесс, записываются

$$**Ri + u_c + L \frac{di}{dt} = e(t); i = C \frac{du_c}{dt}.**$$

Однородное дифференциальное и характеристическое уравнения останутся прежними:

$$**LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = 0;**$$

$$**LCp^2 + RCp + 1 = 0.**$$

Изменяются принужденные составляющие и зависимые НУ. Например, для тока:

$$i_{np}(t) = \frac{E_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \varphi);$$

ЗНУ -
$$di/dt \Big|_{t=0_+} = \frac{E_m \sin \psi}{L},$$

где
$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2};$$

$$\varphi = \text{arctg}\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right).$$

Определение постоянных интегрирования аналогично предыдущим случаям, но выражения получаются более громоздкими. Так для тока:

$$A_1 = \frac{-I_m}{(p_1 - p_2)} (p_1 \sin \psi_i + \frac{\omega_0^2}{\omega} \cos \psi_i),$$

$$A_2 = \frac{I_m}{(p_1 - p_2)} (p_2 \sin \psi_i + \frac{\omega_0^2}{\omega} \cos \psi_i),$$

$$I_m = E_m / Z;$$

$$\psi_i = \psi - \varphi; \quad \omega_0^2 = 1 / LC.$$

Для колебательного контура с малыми потерями $d \ll \omega$ формулы упрощаются.

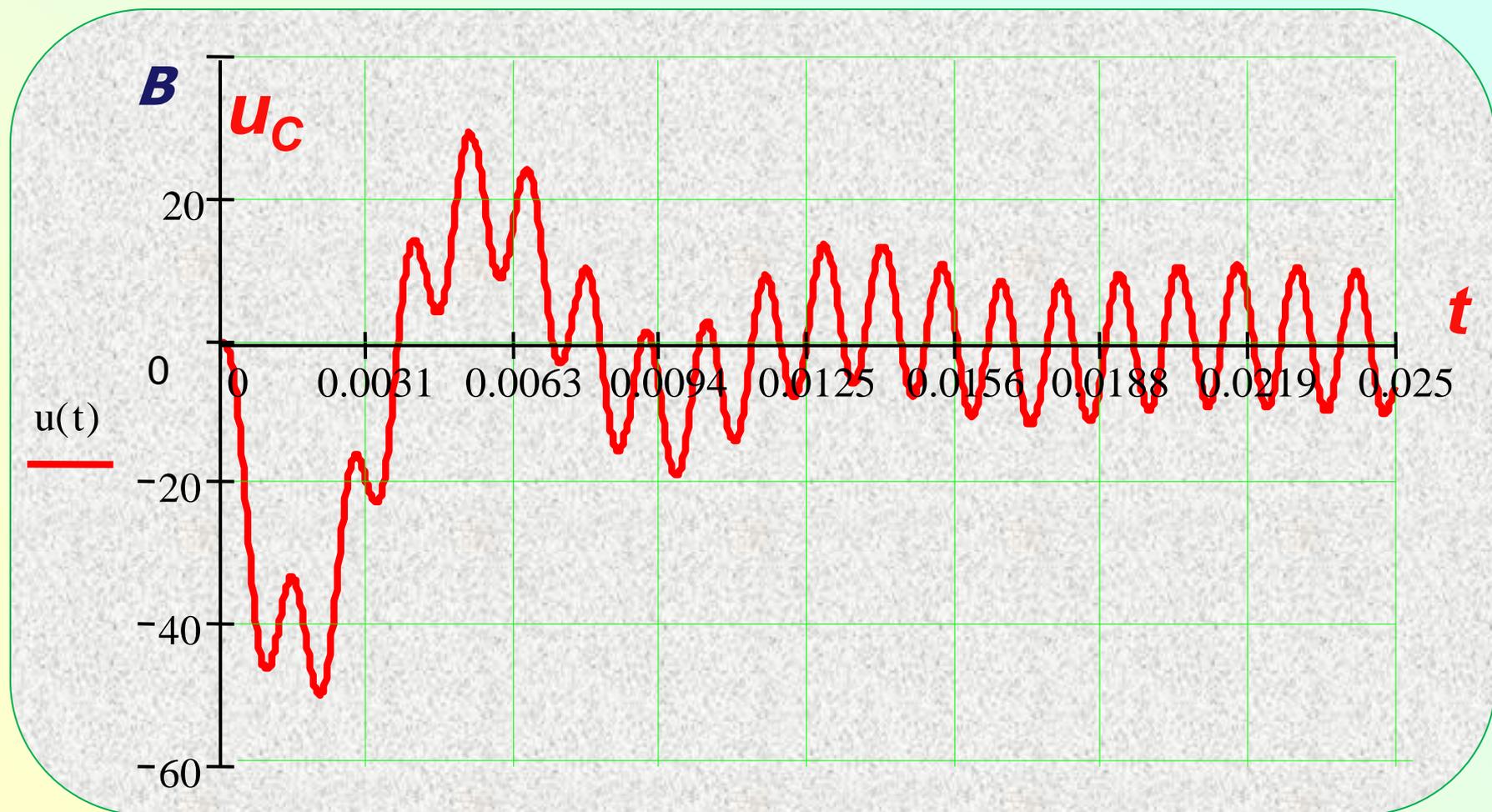
Если $\omega \gg \omega_0$; $\psi = \varphi + \pi / 2 \approx \pi$, то напряжение на конденсаторе будет

$$u_C(t) = U_m \sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} U_m e^{-\delta t} \cdot \sin \omega_0 t,$$

где $U_m = I_m / \omega C$.

При этом напряжение на конденсаторе может во много раз превышать установившиеся значения. Приведенный ниже пример подтверждает сказанное.

График изменения $u_C(t)$ для данных:
 $\omega = 5000$ рад/с; $\omega_0 = 800$ рад/с; $U_m = 10$ В.



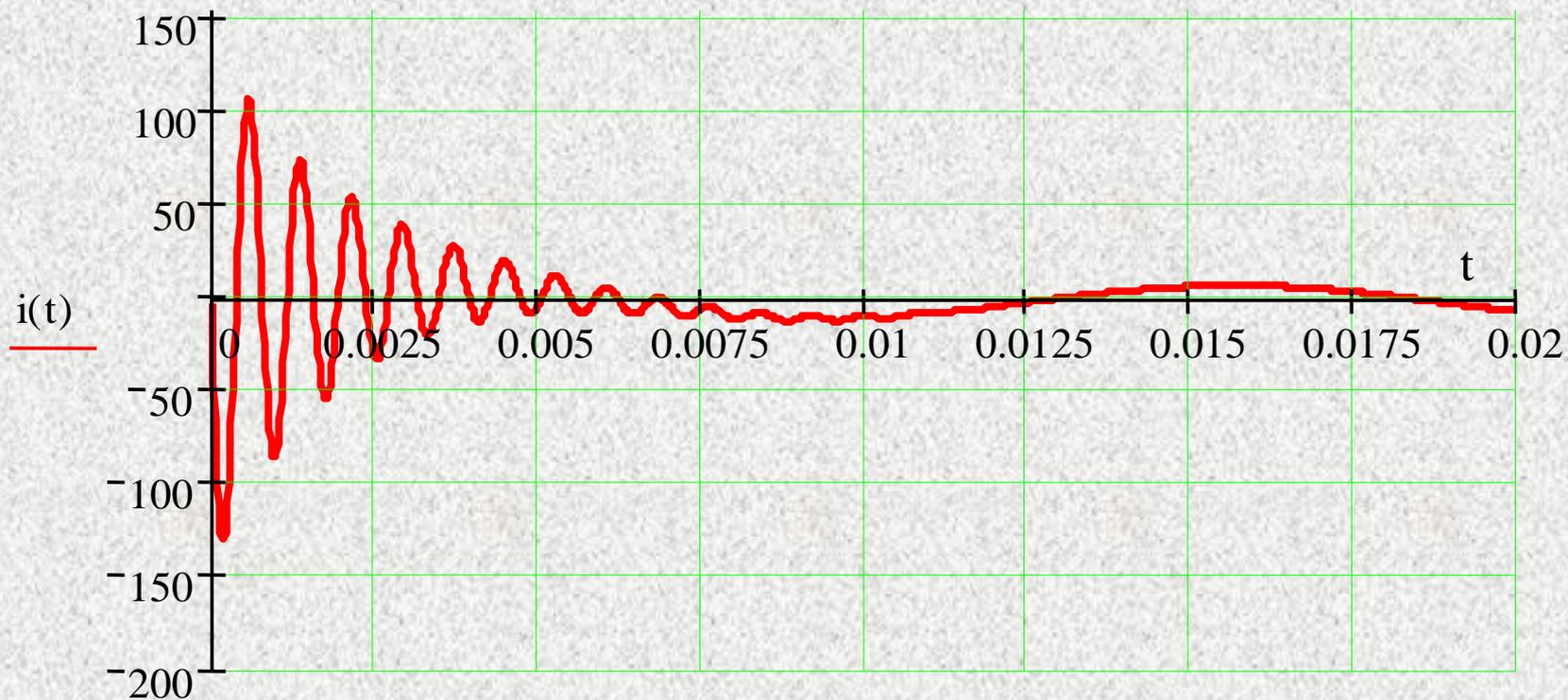
Если

$$\omega \ll \omega_0; \psi = \varphi \approx -\pi / 2,$$

$$i(t) = I_m \sin \omega t - \frac{\omega_0}{\omega} I_m e^{-\delta t} \cdot \sin \omega_0 t.$$

При этом ток в переходном режиме может во много раз превышать установившиеся значения. Приведенный ниже пример подтверждает сказанное.

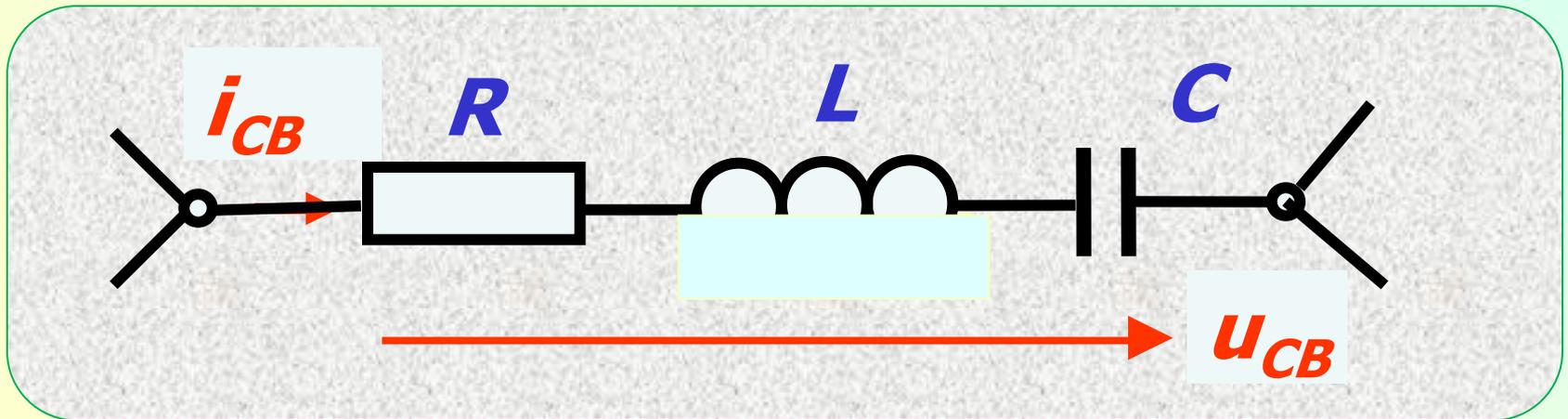
График изменения $i(t)$ для данных:
 $\omega=500$ рад/с; $\omega_0=8000$ рад/с; $I_m=10A$



Алгебраизация дифференциальных уравнений.

Недостаток классического метода расчета переходных процессов – в необходимости решать систему дифференциальных уравнений для получения характеристического уравнения. Однако характеристическое уравнение можно составить без записи дифференциального уравнения.

Покажем это, на примере уравнений для свободных составляющих пассивной цепи (без источников), в каждой ветви которой имеется только свободная составляющая тока $i_{CB} = Ae^{pt}$



Напряжение на зажимах ветви

$$u_{CB} = Ri_{CB} + L \frac{di_{CB}}{dt} + \frac{1}{C} \int i_{CB} dt \rightarrow$$
$$\rightarrow \left(R + pL + \frac{1}{pC} \right) i_{CB}, = Z(p) i_{CB},$$

Выражение для $Z(p)$ совпадает с выражением комплексного сопротивления ветви $Z(j\omega)$, где множитель $j\omega$ заменен на p .

Свободные напряжения ветвей удовлетворяют второму закону Кирхгофа

$$\mathbf{B} \mathbf{u}_{\text{CB}} = \mathbf{B} \mathbf{Z}(\mathbf{p}) \mathbf{i}_{\text{CB}} = \mathbf{0}.$$

Для контурных токов имеем:

$$\mathbf{B} \mathbf{Z}(\mathbf{p}) \mathbf{B}^T \mathbf{i}_{\text{CB}}^k = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Z}^k(\mathbf{p}) \mathbf{i}_{\text{CB}}^k = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{Z}^k(\mathbf{p}) = \mathbf{B} \mathbf{Z}(\mathbf{p}) \mathbf{B}^T$ –

матрица, совпадающая с матрицей комплексных контурных сопротивлений при замене \mathbf{p} на $j\omega$.

Система уравнений имеет ненулевое решение, если определитель системы равен нулю:

$$\Delta^k(p) = \det Z^k(p) = 0.$$

Данное уравнение – характеристическое. Аналогично оно получается из узловых уравнений цепи:

$$\Delta^y(p) = \det Y^y(p) = 0,$$

где $Y^y(p) = AY(p)A^T$ совпадает с узловой матрицей.

**Полученные уравнения
эквивалентны уравнениям**

$$Z_{BX}(p) = 0; \quad Y_{BX}(p) = 0,$$

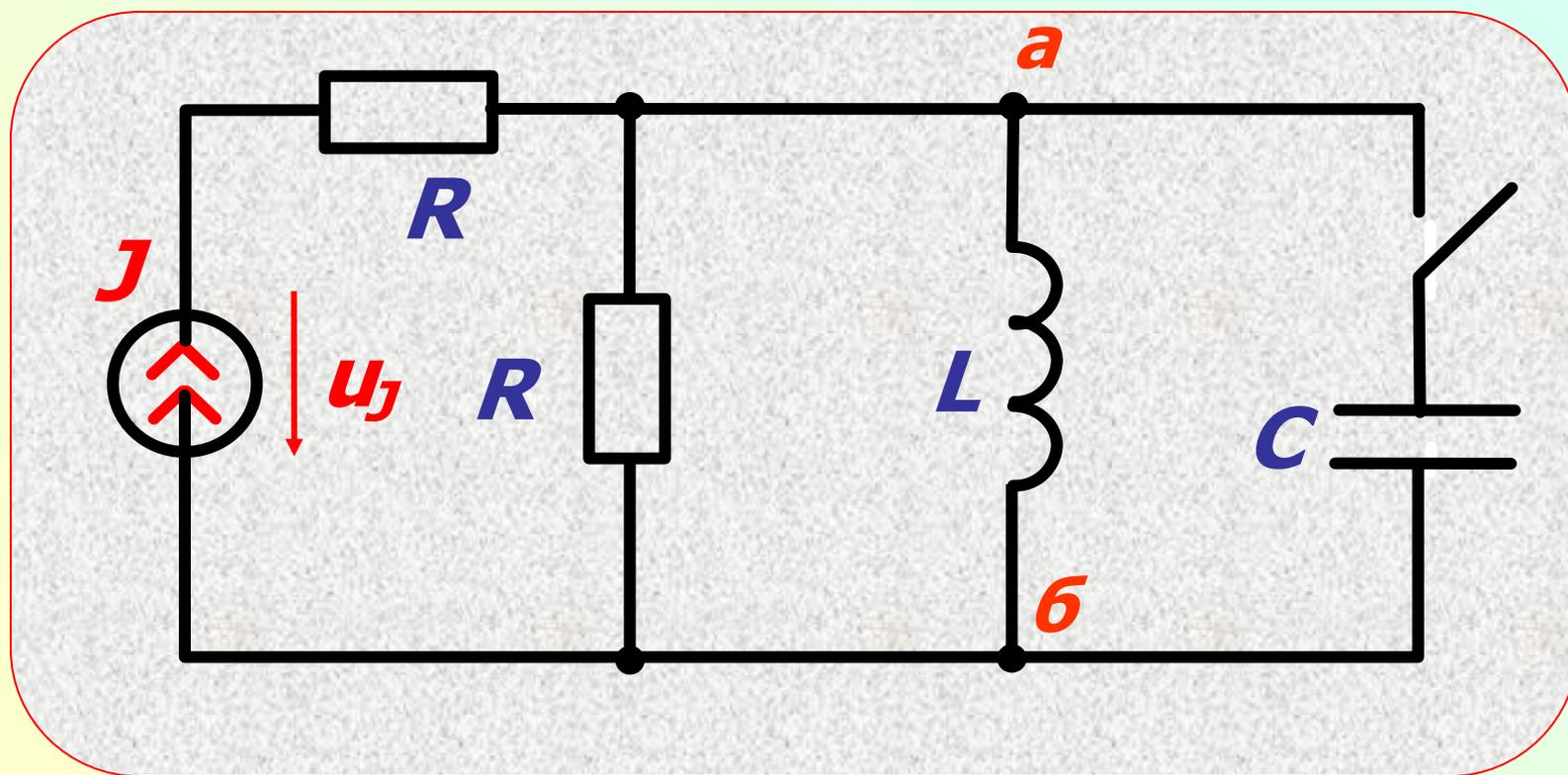
где $Z_{BX}(p)$ - входное

**сопротивление схемы относительно
любых двух зажимов,
получающихся размыканием любой
ветви схемы;**

$Y_{ВХ}(p)$ - входная проводимость
схемы относительно произвольной
пары узлов.

Корни характеристического
уравнения называют
собственными частотами цепи,
поскольку они определяют характер
свободных процессов.

Пример 1. Определить корни характеристического уравнения цепи, если $R=40$ Ом; $L=0,1$ Гн; $C=10$ мкФ.



Решение. 1. Входное сопротивление цепи со стороны ключа:

$$Z(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} + \frac{Rj\omega L}{R + j\omega L}.$$

Заменяя в выражении $j\omega$ на p и приравнявая его нулю, получаем:

$$Z(p) = \frac{1}{pC} + \frac{RpL}{R + pL} = 0;$$

$$p^2 LCR + pL + R = 0;$$

$$p_1 = -500 \text{ с}^{-1}; p_2 = -2000 \text{ с}^{-1}$$

2. Входное сопротивление цепи относительно разрыва в ветви с индуктивностью:

$$Z(j\omega) = pL + \frac{R \cdot 1 / j\omega C}{R + 1 / j\omega C}$$

Заменяя $j\omega$ на p и приравнивая его нулю, получаем

$$Z(p) = pL + \frac{R / pC}{R + 1 / pC} = 0;$$

$$p^2 LCR + pL + R = 0$$

- прежнее уравнение.

3. Межузловая проводимость цепи относительно узлов *a, б.*

$$Y(j\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C.$$

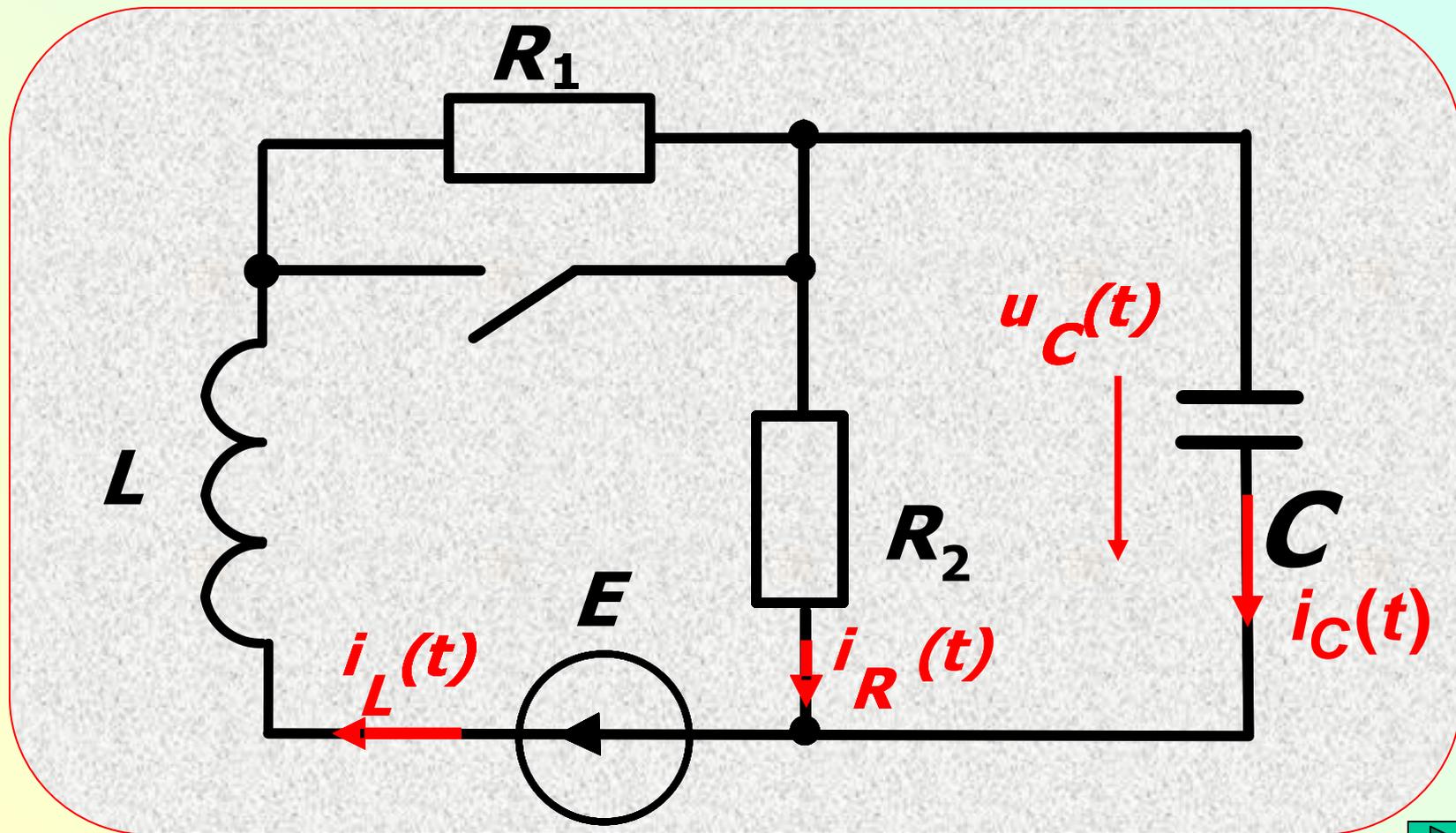
Заменяя в выражении $j\omega$ на p и приравнявая его нулю, получаем

$$Y(p) = \frac{1}{R} + \frac{1}{pL} + pC = 0,$$

$$p^2 LCR + pL + R = 0$$

- прежнее уравнение.

Пример 2. Определить закон изменения напряжения $u_C(t)$.



Дано: $E = 10 \text{ В}; R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом};$
 $L = 0,008 \text{ Гн}; C = 100 \text{ мкФ}.$

Решение. 1. Рассматриваем режим до коммутации (ключ разомкнут) и находим **независимые НУ:**

$$u_C(0) = R_2 E / (R_1 + R_2) = 5 \text{ В};$$

$$i_L(0) = E / (R_1 + R_2) = 10 / 20 = 0,5 \text{ А}.$$

Напряжение $u_C(t)$ записываем в форме:

$$u_C(t) = u_{Cпр}(t) + u_{ССВ},$$

где $u_{ССВ}(t)$ – определяется с учетом вида корней.

Найдем их, с помощью алгебраизации дифференциальных уравнений.

2. Уравнения цепи после коммутации:

$$R_2 i_L + L \frac{di_L}{dt} - R_2 i_C = E$$

$$-R_2 i_L + \frac{1}{C} \int i_C dt + R_2 i_C = 0$$

Для свободных составляющих имеем:

$$(R_2 + pL)i_L - R_2 i_C = 0;$$

$$-R_2 i_L + \left(R_2 + \frac{1}{pC}\right)i_C = 0$$

Определитель системы:

$$\Delta(p) = \begin{pmatrix} R + pL & -R \\ -R & R + \frac{1}{pC} \end{pmatrix}$$

Приравнивая нулю, получим

$$\begin{aligned} R^2 + RpL + \frac{R}{pC} + \frac{L}{C} - R^2 &= \\ &= \frac{p^2 LCR + pL + R}{pC} = 0 \end{aligned}$$

В числовой форме

$$8 \cdot 10^{-6} p^2 + 0,008 p + 10 = 0;$$

$$p^2 + 1000 p + 1,25 \cdot 10^6 = 0.$$

Решая, находим:

$$p_{1,2} = -1000 / 2 \pm \sqrt{500^2 - 1,25 \cdot 10^6};$$

$$p_1 = -500 + j1000 \text{ с}^{-1};$$

$$p_2 = -500 - j1000 \text{ с}^{-1}.$$

Корни комплексные сопряженные,
поэтому

$$u_C(t) = u_{Cnp}(t) + Ae^{-\delta t} \sin(\omega_{CB}t + \gamma).$$

Для определения постоянных
интегрирования A и γ составляем два
уравнения (при $t=0_+$):

$$u_C(0) = u_{Cnp}(0) + A \sin \gamma.$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{du_{Cnp}}{dt} + A\omega_{CB} \cos \gamma - A\delta \sin \gamma.$$

Сначала найдем принужденную составляющую напряжения 

$$u_{\text{спр}}(t) = E = 10 \text{ В},$$

а затем производную $\frac{du_c}{dt} = \frac{i_c(0_+)}{C}$,

определив ток конденсатора по первому закону Кирхгофа:

$$i_c(0_+) = i_L(0) - u_c(0)/R.$$

Численно: $i_c(0_+) = 0,5 - 5/5 = 0 \text{ А}.$

Таким образом, $5 = 10 + A \sin \gamma$.

$$0 = 0 + A\omega_{CB} \cos \gamma - A\delta \sin \gamma.$$

Решая, находим: $\operatorname{tg} \gamma = \omega_{CB} / \delta$;

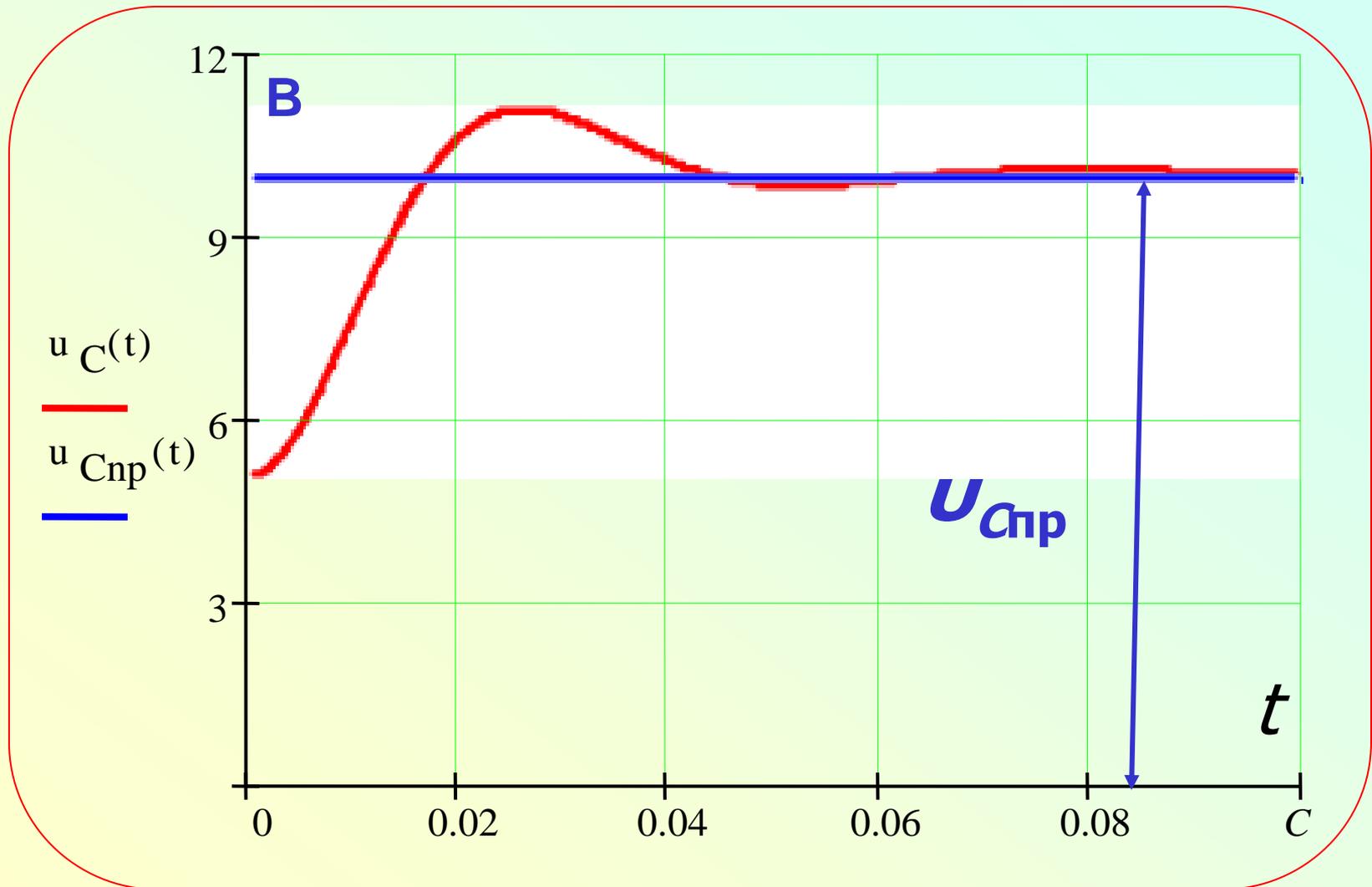
$$\gamma = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(1000 / 500) = 63,43^\circ;$$

$$A = -5 / \sin \gamma = -5 / \sin 63,43^\circ = -5,59 \text{ В}.$$

С учетом постоянных записываем окончательное решение

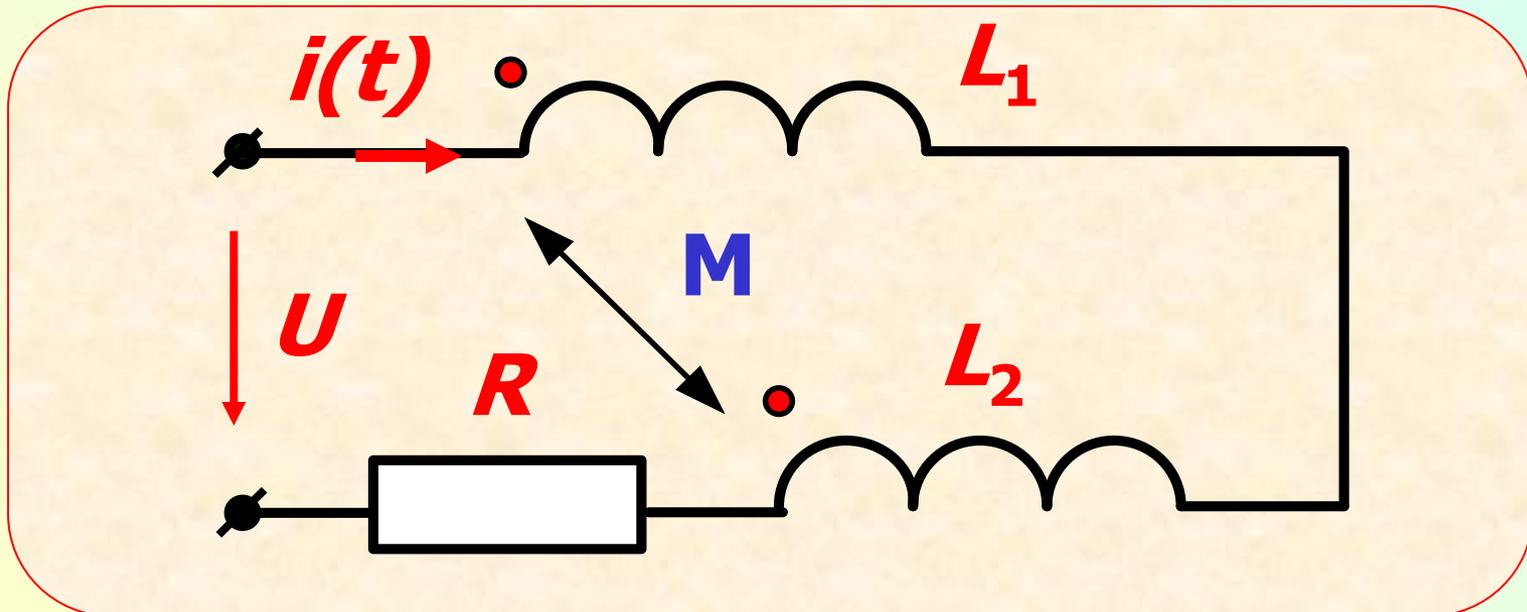
$$u_C(t) = 10 - 5,59e^{-500t} \sin(1000t + 63,43^\circ) \text{ В}.$$

График изменения напряжения



Переходные процессы в цепях с взаимной индуктивностью

Пример 1. Определить ток в цепи с взаимной индуктивностью при подключении ее к источнику $U=const$.



Дано: $U=100$ В; $R=40$ Ом; $L_1=0,1$ Гн;
 $L_2=0,4$ Гн; коэффициент связи
 $k=0,25$.

Найти ток $i(t)$.

Решение. Уравнение цепи:

$$(L_1 + L_2 - 2M)di / dt + Ri = U,$$

где $M = k\sqrt{L_1L_2} =$
 $= 0,25\sqrt{0,1 \cdot 0,4} = 0,5$ Гн.

Характеристическое уравнение

$$(L_1 + L_2 - 2M)p + R = 0.$$

Его корень $p = -100 \text{ с}^{-1}$.

Полное решение для тока

$$i(t) = i_{np}(t) + Ae^{-pt},$$

где

$$i_{np}(t) = I_{np} = U / R =$$
$$= 100 / 40 = 2,5 \text{ А.}$$

Постоянную интегрирования A найдем из условия $i(0) = 0$:

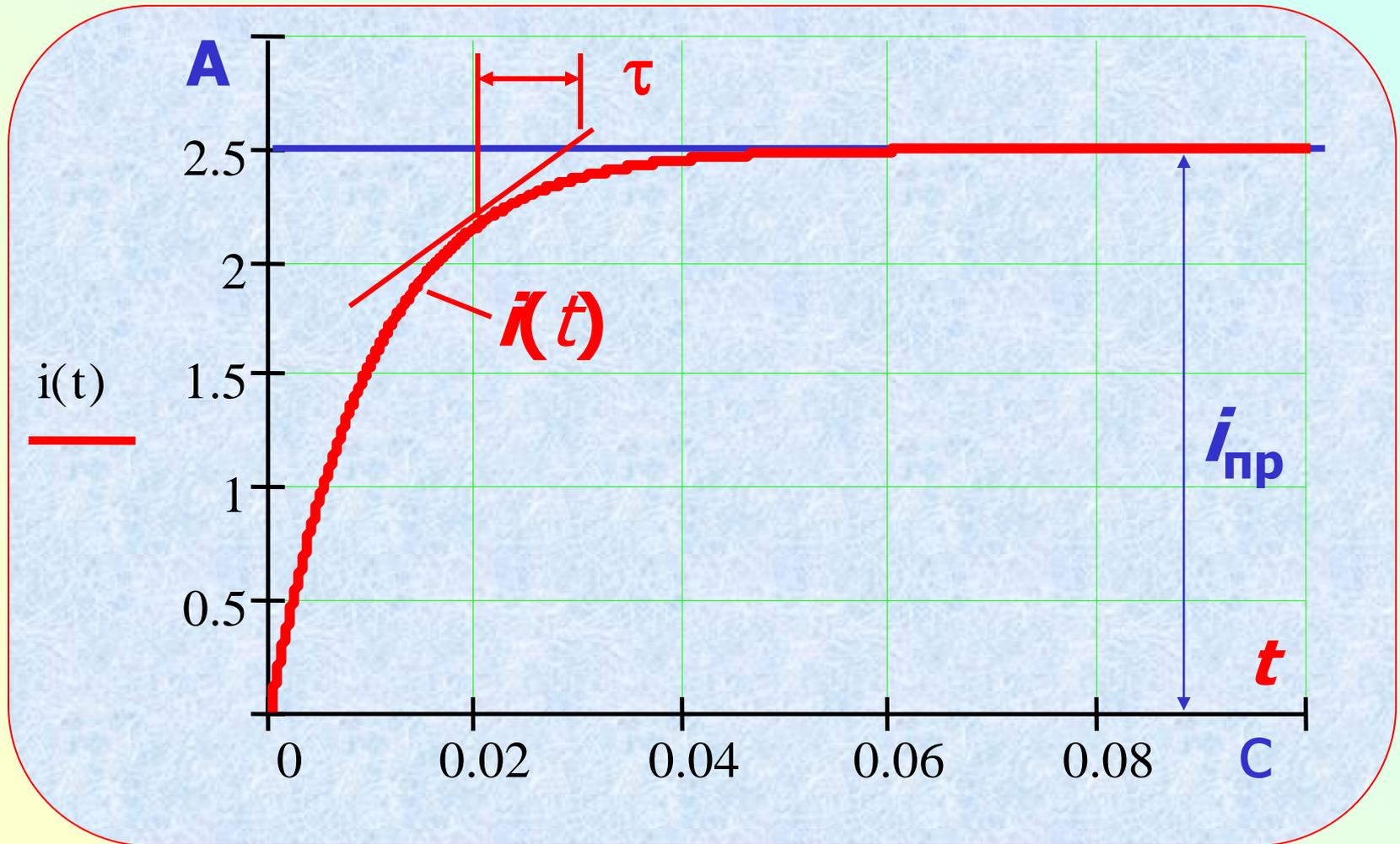
$$0 = i_{пр}(0) + A; \quad A = -i_{пр} = -2,5 \text{ А.}$$

Решение для искомого тока:

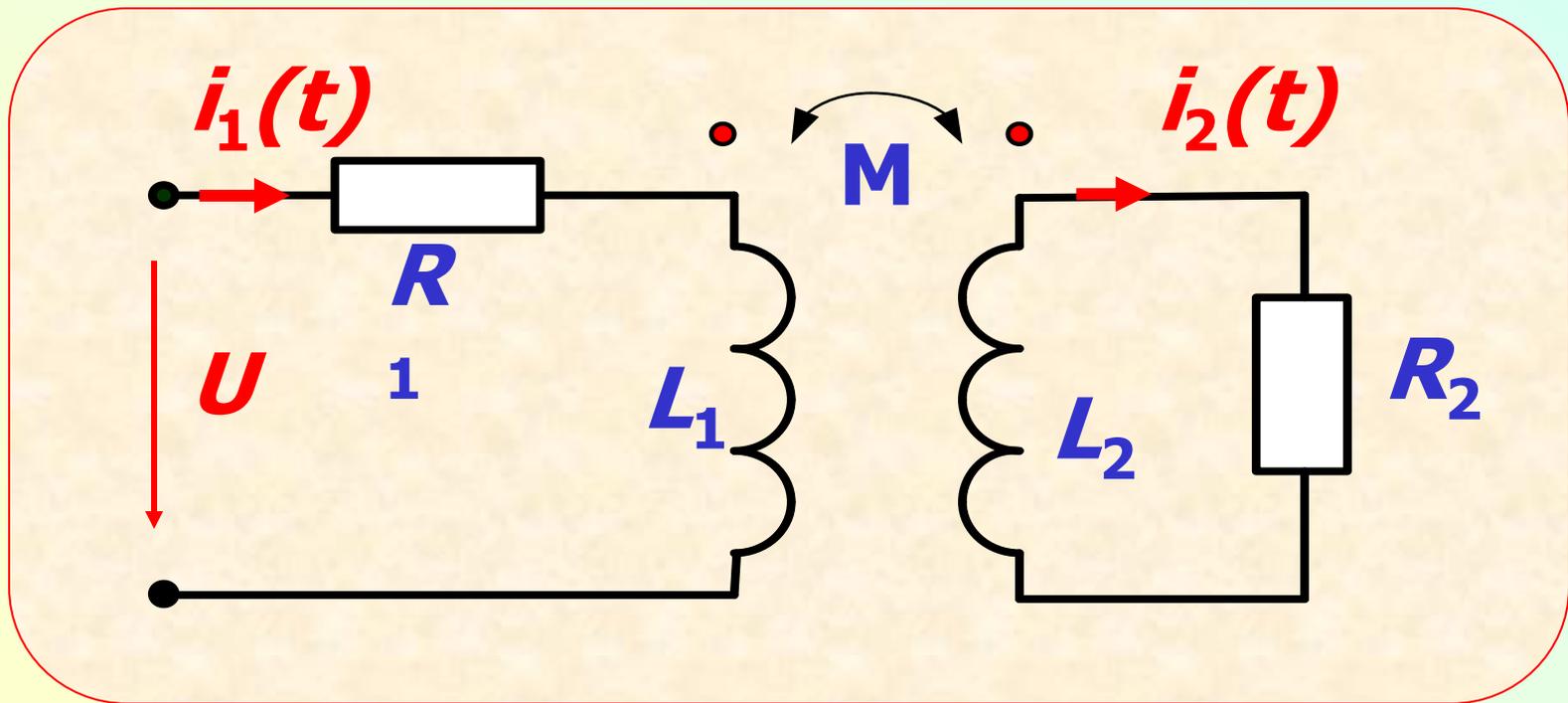
$$i(t) = 2,5(1 - e^{-100t}).$$

Вывод. *Наличие индуктивной связи не увеличивает числа корней характеристического уравнения.*

График изменения тока



Пример 2. Определить закон изменения тока $i_2(t)$, если: $U=100$ В; $R_1 = R_2 = 100$ Ом; $L_1 = L_2 = 3$ М; $M=0,15$ Гн.



Решение. Уравнения цепи с учетом встречного включения катушек

$$R_1 i_1 + L_1 di_1 / dt - M di_2 / dt = U;$$

$$M di_1 / dt + R_2 i_2 + L_2 di_2 / dt = 0.$$

Определитель системы уравнений

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} R_1 + pL_1 & -pM \\ -pM & R_2 + pL_2 \end{vmatrix}$$

Приравнивая его нулю, получаем

$$p^2(L_1L_2 - M^2) + p(R_2L_1 + R_1L_2) + R_1R_2 = 0$$

Подставляем числовые данные:

$$p^2 + 1500p + 500000 = 0;$$

$$p_1 = -500\text{с}^{-1}; \quad p_2 = -1000\text{с}^{-1}.$$

Полное решение для искомого тока записываем в форме

$$i_2(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

Для момента времени $t=0_+$ имеем:

$$i_2(0) = 0 = A_1 + A_2;$$

$$i_2'(0_+) = p_1 A_1 + p_2 A_2.$$

Производную $i_2'(0_+)$ найдем решением исходной системы уравнений с учетом независимых НУ:

$$L_1 di_1(0_+) / dt - M di_2(0_+) / dt = U$$

$$-M di_1(0_+) / dt + L_2 di_2(0_+) / dt = 0.$$

Исключая di_1 / dt получаем:

$$di_2(0_+) / dt = - \frac{MU}{L_1 L_2 - M^2},$$

Численно $di_2(0_+) / dt = -250.$

Получили систему уравнений

$$0 = A_1 + A_2$$

$$-250 = -500A_1 - 1000A_2.$$

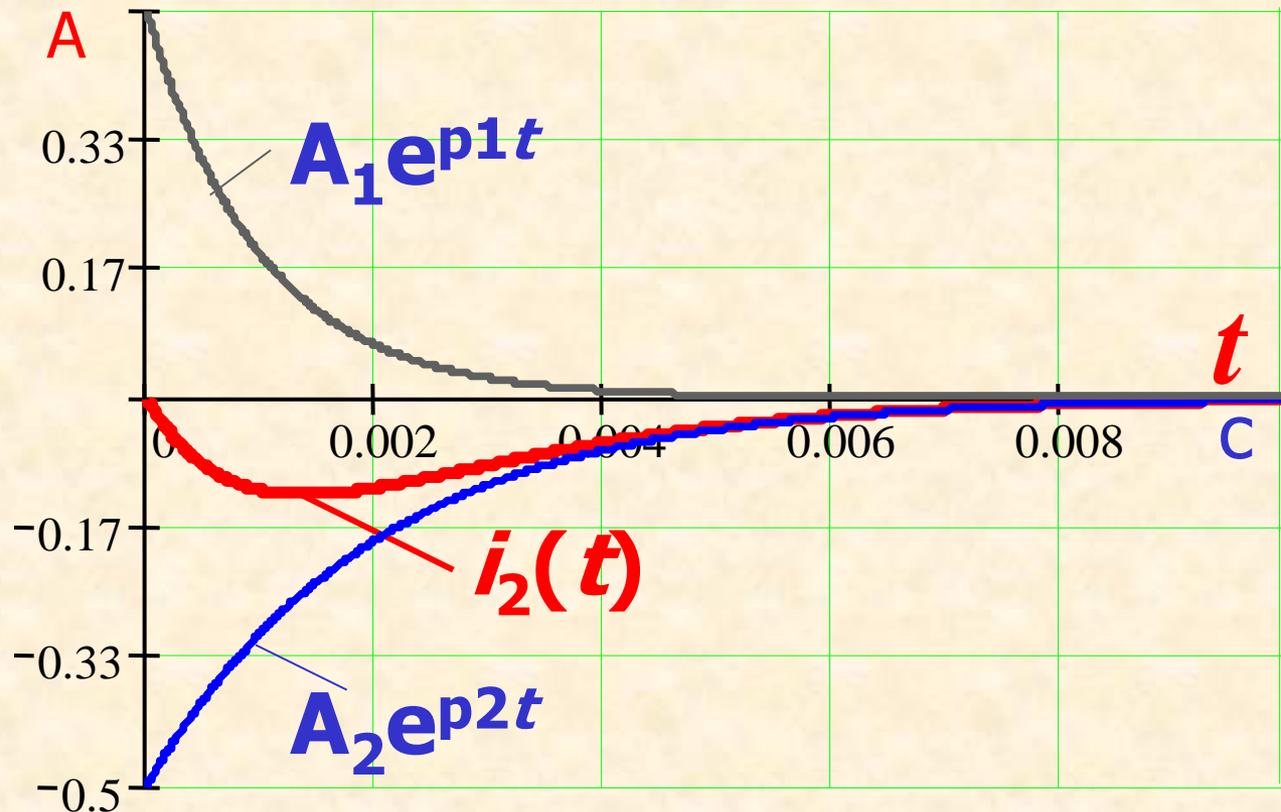
Решая, находим:

$$A_1 = -0,5; \quad A_2 = 0,5.$$

Таким образом,

$$i(t) = -0,5 e^{-500t} + 0,5 e^{-1000t} \text{ A.}$$

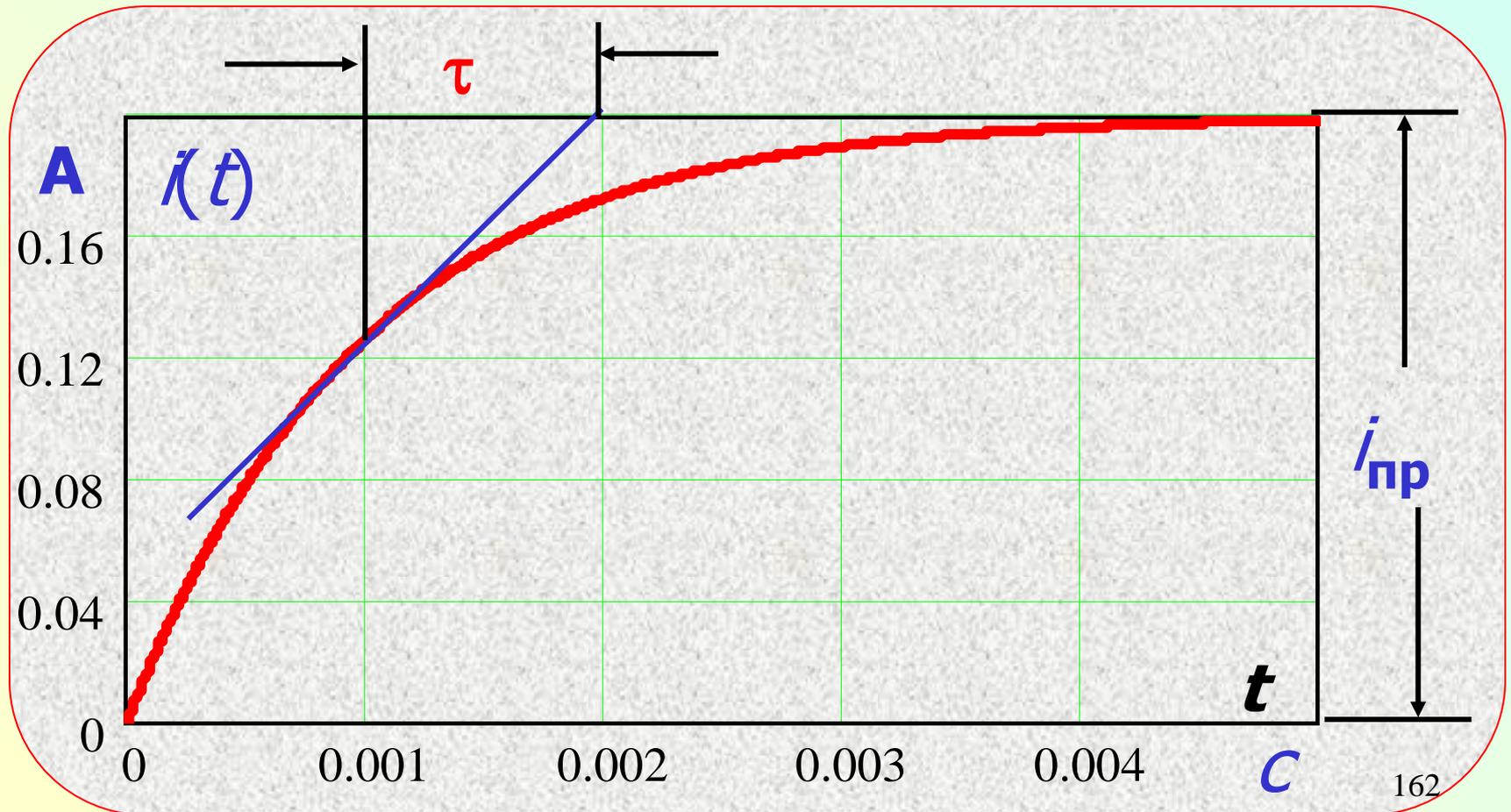
График изменения тока



Определение параметров цепи по графикам переходного процесса

**Задача определения параметров цепи по экспериментально полученным осциллограммам тока и напряжения - актуальна.
Рассмотрим некоторые примеры.**

Пример 1. Определить R, L контура, подключаемого к ЭДС $E=10$ В



Решение. Ток в цепи стремится к $i(t)=0,2$ А. Это принужденная составляющая тока, равная $i_{пр} = E/R$.

Отсюда: $R = E / i_{пр} = 10 / 0,2 = 50$ Ом.

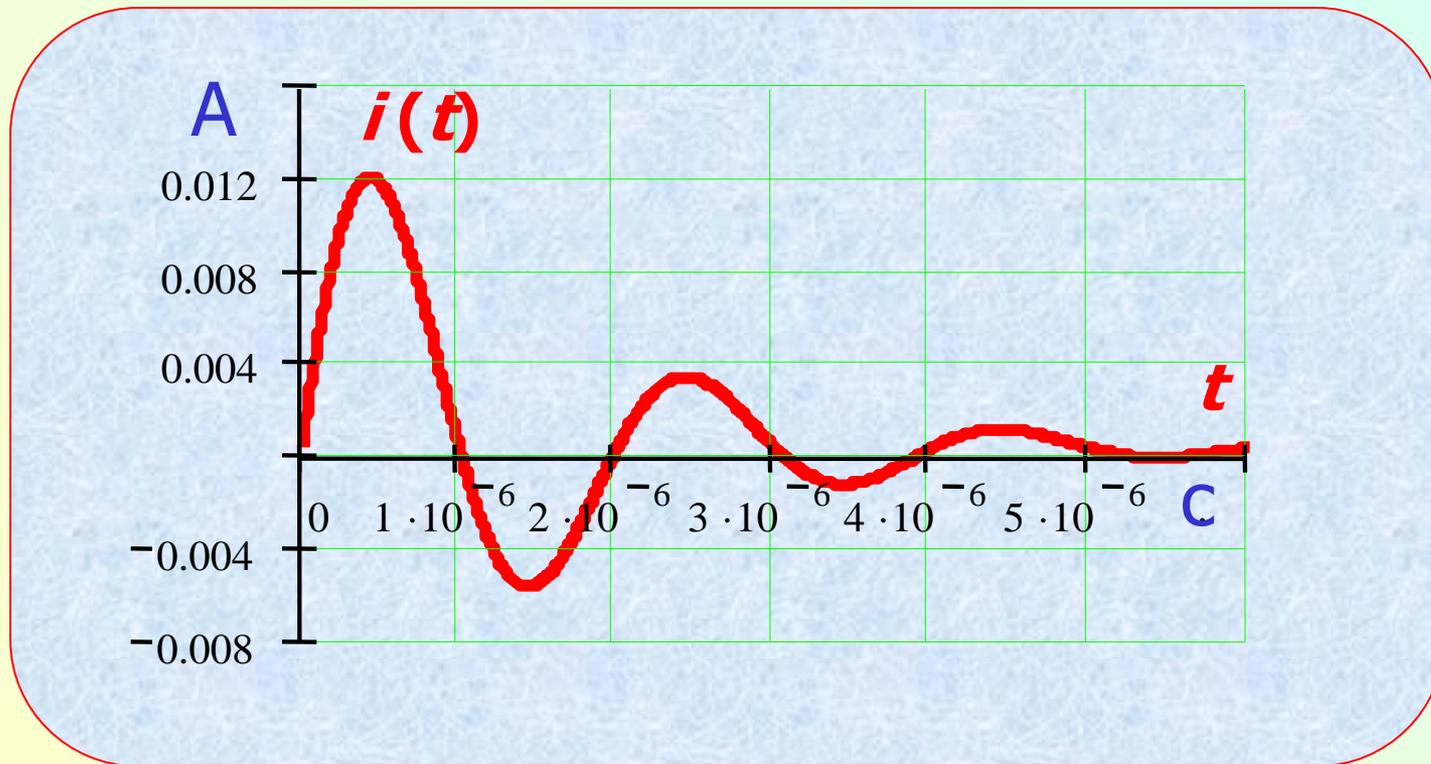
Постоянную времени находим по подкасательной в любой точке. В данном случае $\tau = 0,001$ с.

Затем найдем

$$L = \tau / R = 0,001 / 50 = 0,00002 \text{ Гн.}$$

Параметры определены

Пример 2. По осциллограмме тока найти параметры *RLC*- колебательного контура, подключаемого к источнику $E=10$ В.



Решение. При периодическом характере переходного процесса ток изменяется по закону

$$i(t) = i_{пр} + Ae^{-\delta t} \sin(\omega_{св} t + \gamma).$$

Корни характеристического уравнения связаны с параметрами контура выражением:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}},$$

где $\delta = \frac{R}{2L};$ $\omega_{св} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \delta^2}.$

Постоянные A и γ в общем случае находятся решением системы двух уравнений:

$$\begin{cases} i(0) = i_{пр}(0) + A \sin \gamma \\ \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0_+} = A(\delta \sin \gamma + \omega_{CB} \cos \gamma) \end{cases}$$

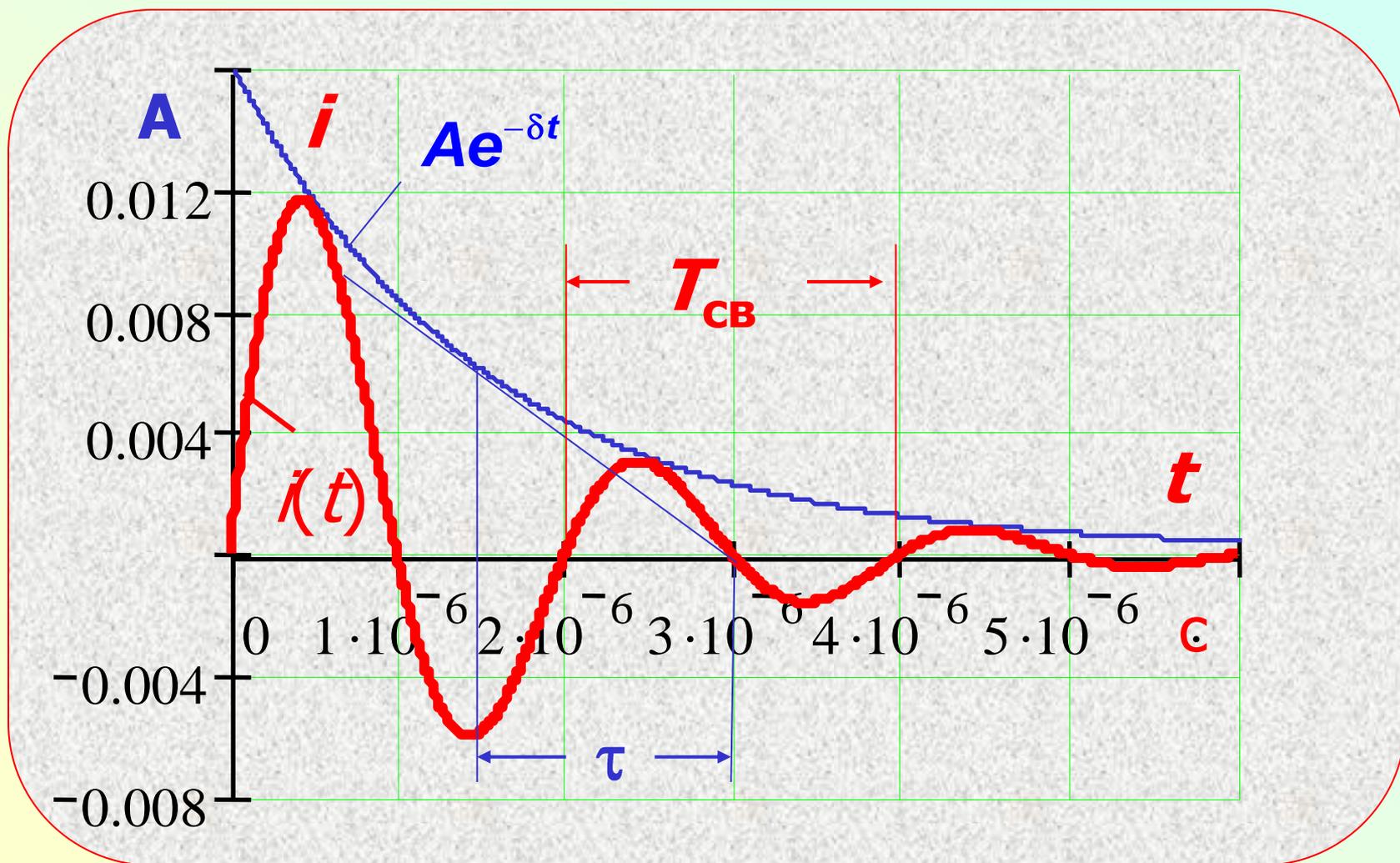
В нашем случае $\gamma=0$, поэтому

$$A = \frac{1}{\omega_{CB}} \cdot \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0_+},$$

где $\frac{di}{dt} \Big|_{t=0_+} = \frac{u_L(0_+)}{L} = E / L$

К кривой тока проводим огибающую, ограничивающую колебание тока, а затем касательную (в любой точке). По огибающей при $t=0_+$ находим постоянную $A=16$ мА; а по подкасательной – постоянную времени $\tau=1,5$ мкс.

Осциллограмма тока



На оси времени найдем период свободных колебаний $T_{CB} = 2$ мкс.
Учитывая взаимосвязи

$$\tau = 1/\delta = 2L/R;$$

$$T_{CB} = 2\pi/\omega_{CB};$$

$$\omega_{CB}^2 + \delta^2 = 1/LC,$$

находим параметры R, L, C :

$$L = \frac{E}{\omega_{CB} A} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 16 \cdot 10^{-3}} \approx 0,2 \text{ мГн}$$

$$R = \frac{2L}{\tau} = \frac{0,4 \cdot 10^{-3}}{1,5 \cdot 10^{-6}} \approx 266,7 \text{ Ом}$$

$$C = \frac{1}{L(\omega_{CB}^2 + \delta^2)} =$$
$$= \frac{1}{0,2 \cdot 10^{-3} [(\pi \cdot 10^6)^2 + (0,66 \cdot 10^6)^2]} \approx 0,48 \text{ нФ}$$



Переходные процессы. Метод переменных состояния:

1. Аналитическое решение 204
2. Численные методы решения 207

Суть классического метода расчета переходных процессов - в интегрировании дифференциального уравнения цепи ***n* -го** порядка.

Проще решать систему ***n*** дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в нормальной форме (**Коши**), т.е. разрешенных относительно производной одной из переменных.

В правой части таких уравнений содержатся функции переменных цепи и функции источников. Например,

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, F);$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, F);$$

.....

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, F).$$

Данные уравнения называют **уравнениями состояния**, где переменные x_1, x_2, \dots - переменные состояния. В электротехнике переменные состояния – это **токи** (потоки) индуктивных и **напряжения** (заряды) емкостных элементов.

Их называют переменными состояниями, потому что они **однозначно** определяют **запас энергии** в цепи в любой момент времени и не могут изменяться скачком. Зная **начальные значения** переменных состояния в момент времени t_0 , можно найти эти переменные в любой момент времени $t > t_0$.

Покажем это, взяв малое приращение времени $\Delta t = h$. Тогда:

$$x_1(t_0 + h) \approx x_1(t_0) + h \frac{dx_1(t_0)}{dt};$$

$$x_2(t_0 + h) \approx x_2(t_0) + h \frac{dx_2(t_0)}{dt};$$

.....

$$x_n(t_0 + h) \approx x_n(t_0) + h \frac{dx_n(t_0)}{dt}.$$

Далее можно определять до любого момента времени

Таким образом, суть метода переменных состояния - в составлении и решении системы дифференциальных уравнений первого порядка, записанных относительно токов индуктивных и напряжений емкостных элементов и их производных.

Уравнения состояния обычно записывают в матричной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}v(t),$$

где $\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/dt$ - вектор первых производных переменных состояния;

\mathbf{x} – вектор переменных состояния;

\mathbf{A} - матрица состояния (зависит от параметров и структуры цепи)

размерностью $n \times n$;

$v(t)$ - вектор входных воздействий (источников энергии) размером m ;

B - прямоугольная матрица связи параметров цепи и воздействия размером $n \times m$. Можно записывать сокращенно $F(t) = Bv(t)$.

Переменные состояния цепи и вектор входных воздействий определяют реакцию цепи (y) - другие токи и напряжения.

Уравнения выходных величин

$$y = Cx + Dv(t)$$

Это алгебраические уравнения, где **C** - прямоугольная матрица связи выходных величин с переменными состояниями размером **$k \times n$** ; **D** - прямоугольная матрица связи выходных величин с вектором воздействия размером **$k \times m$** .

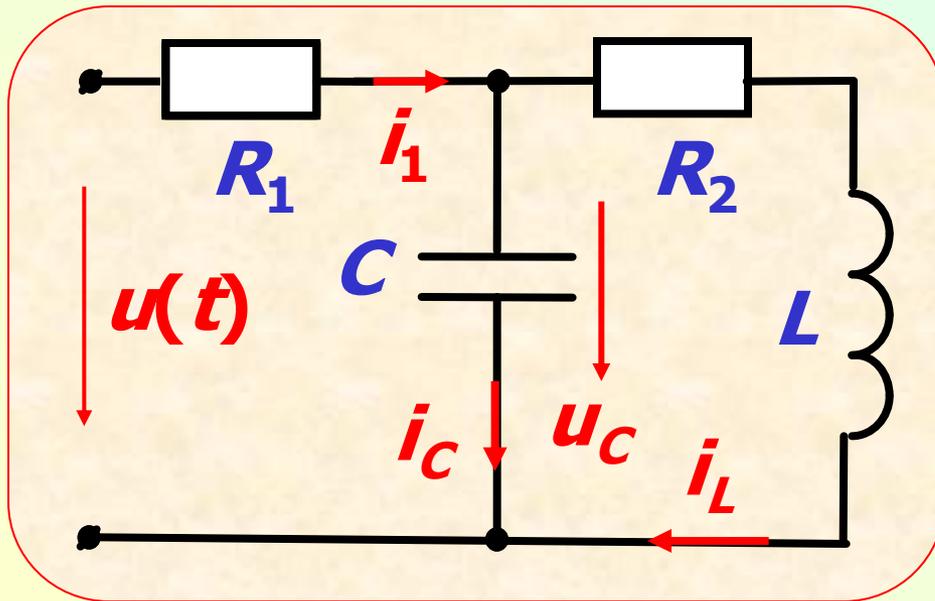
Дифференциальные и алгебраические уравнения не связаны между собой.

Дифференциальные уравнения состояния могут быть решены аналитически, на основе матричной экспоненциальной функции, однако для большинства уравнений предпочтительнее их численное решение на **ЭВМ.**

Записать уравнения можно:

- **непосредственно по уравнениям Кирхгофа**, исключая из них токи и напряжения, не являющиеся переменными состояния;
- **с помощью графов;**
- **методом наложения по схемам замещения с эквивалентными источниками.**

Пример 1. Составить уравнения состояния цепи и записать матрицы **A** и **B**, полагая параметры элементов цепи заданными.



Решение.

Запишем уравнения по законам Кирхгофа

$$-i_1 + i_C + i_L = 0;$$

$$R_1 i_1 + u_C = u(t);$$

$$R_2 i_L + u_L = u_C.$$

Определяем i_C и u_L :

$$i_C = i_1 - i_L; \quad i_1 = \frac{u(t) - u_C}{R_1};$$

$$i_C = \frac{u(t) - u_C}{R_1} - i_L; \quad u_L = u_C - R_2 i_L.$$

Учтем связь токов и напряжений

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}; \quad u_L = L \frac{di_L}{dt}.$$

Получим:

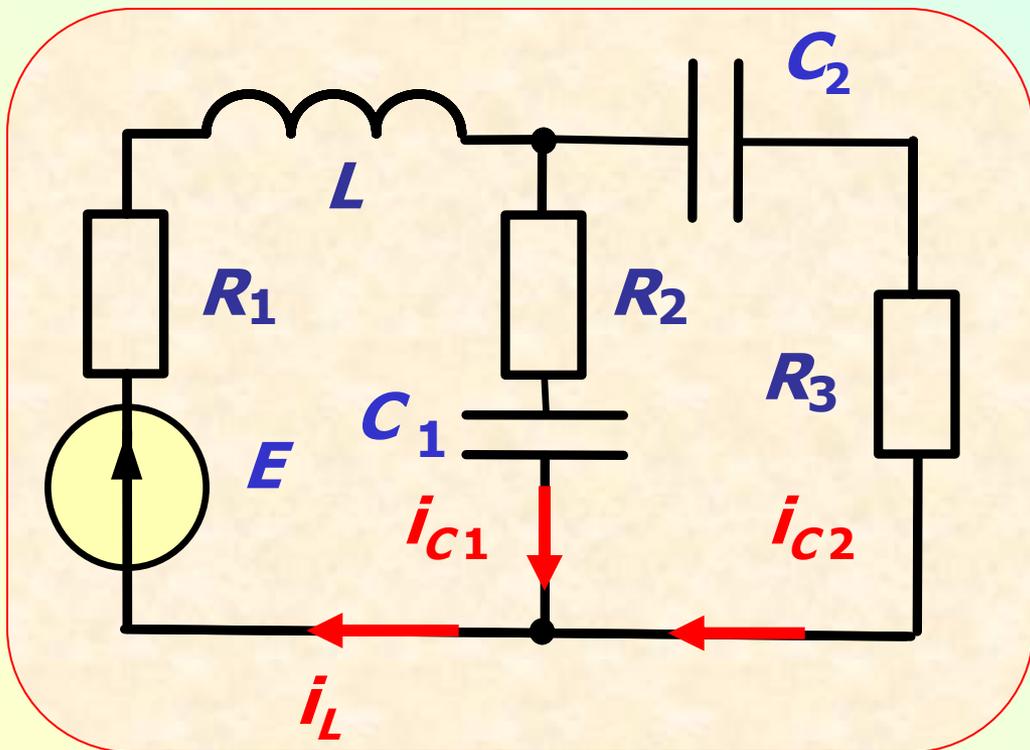
$$\frac{du_c}{dt} = \frac{-1}{R_1 C} u_c - \frac{1}{C} i_L + \frac{1}{R_1 C} u(t);$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} u_c - \frac{R_2}{L} i_L.$$

В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \frac{du_c}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t).$$

Пример 2. Составить уравнения состояния цепи с заданными параметрами.



Решение.
Уравнения
Кирхгофа:

$$i_L - i_{C1} - i_{C2} = 0;$$

$$u_{R2} + u_{C1} - u_{C2} - u_{R3} = 0;$$

$$u_{R1} + u_L + u_{C2} + u_{R3} = E.$$

$$i_L - i_{C1} - i_{C2} = 0; \quad (1)$$

$$R_2 i_{C1} + u_{C1} - u_{C2} - R_3 i_{C2} = 0; \quad (2)$$

$$u_L + R_1 i_L + R_3 i_{C2} + u_{C2} = E. \quad (3)$$

Умножим (1) на R_2 и сложим с (2):

$$i_{C2} = \frac{1}{R_2 + R_3} u_{C1} - \frac{1}{R_2 + R_3} u_{C2} + \frac{R_2}{R_2 + R_3} i_L; \quad (4)$$

Совместно решая (3) и (4), получим:

$$u_L = \left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right) \dot{i}_L + \frac{R_3}{R_2 + R_3} u_{C1} - \frac{R_2}{R_2 + R_3} u_{C2} + E.$$

Исключая из (1) \dot{i}_{C2} , находим:

$$\dot{i}_{C1} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \dot{i}_L - \frac{1}{R_2 + R_3} u_{C1} + \frac{1}{R_2 + R_3} u_{C2}.$$

После деления на C_2 , L , C_1 получаем уравнения состояния

$$R_1 := 1 \quad R_2 := 2 \quad R_3 := 3$$

Документ MathCAD

Given

$$i_L - i_{C1} - i_{C2} = 0$$

$$R_1 \cdot i_L + u_L + u_{C2} + R_3 \cdot i_{C2} = E$$

$$R_2 \cdot i_{C1} + u_{C1} - u_{C2} - R_3 \cdot i_{C2} = 0$$

$$\text{Find} \left(i_{C1}, u_L, i_{C2} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \cdot i_L - \frac{1}{5} \cdot u_{C1} + \frac{1}{5} \cdot u_{C2} \\ \frac{-11}{5} \cdot i_L - \frac{2}{5} \cdot u_{C2} - \frac{3}{5} \cdot u_{C1} + E \\ \frac{2}{5} \cdot i_L + \frac{1}{5} \cdot u_{C1} - \frac{1}{5} \cdot u_{C2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2 := 2 \quad \mathbf{R}_3 := 3 \quad \mathbf{R}_1 := 1$$

$$\text{Given} \quad \mathbf{C}_1 := 10^{-3} \quad \mathbf{C}_2 := 10^{-4} \quad \mathbf{L} := 0.1$$

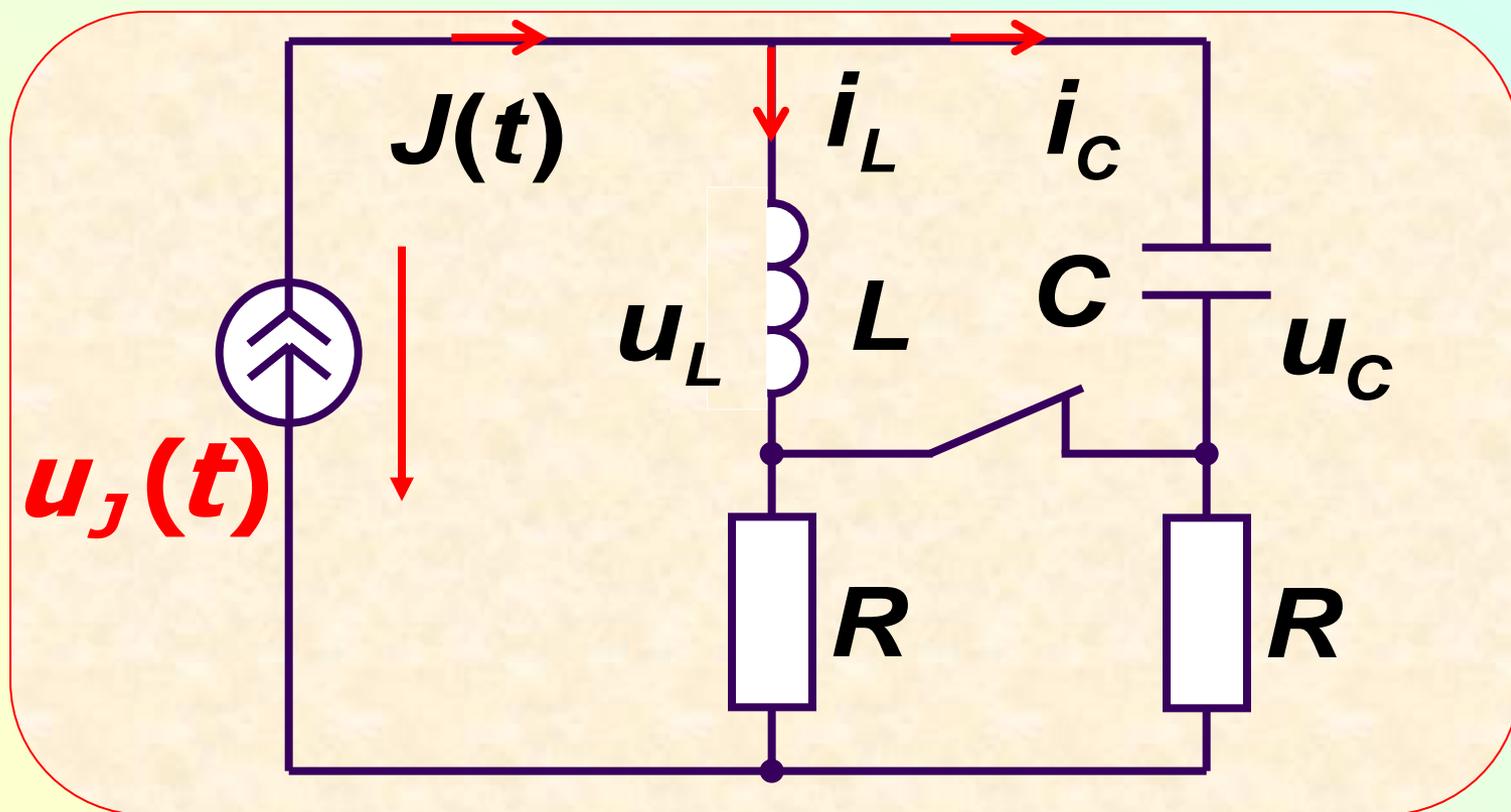
$$\mathbf{i}_L - \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{u}'_{C1} - \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{u}'_{C2} = 0$$

$$\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{i}_L + \mathbf{L} \cdot \mathbf{i}'_L + \mathbf{u}_{C2} + \mathbf{R}_3 \cdot (\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{u}'_{C2}) = \mathbf{E}$$

$$\mathbf{R}_2 \cdot (\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{u}'_{C1}) + \mathbf{u}_{C1} - \mathbf{u}_{C2} - \mathbf{R}_3 \cdot (\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{u}'_{C2}) = 0$$

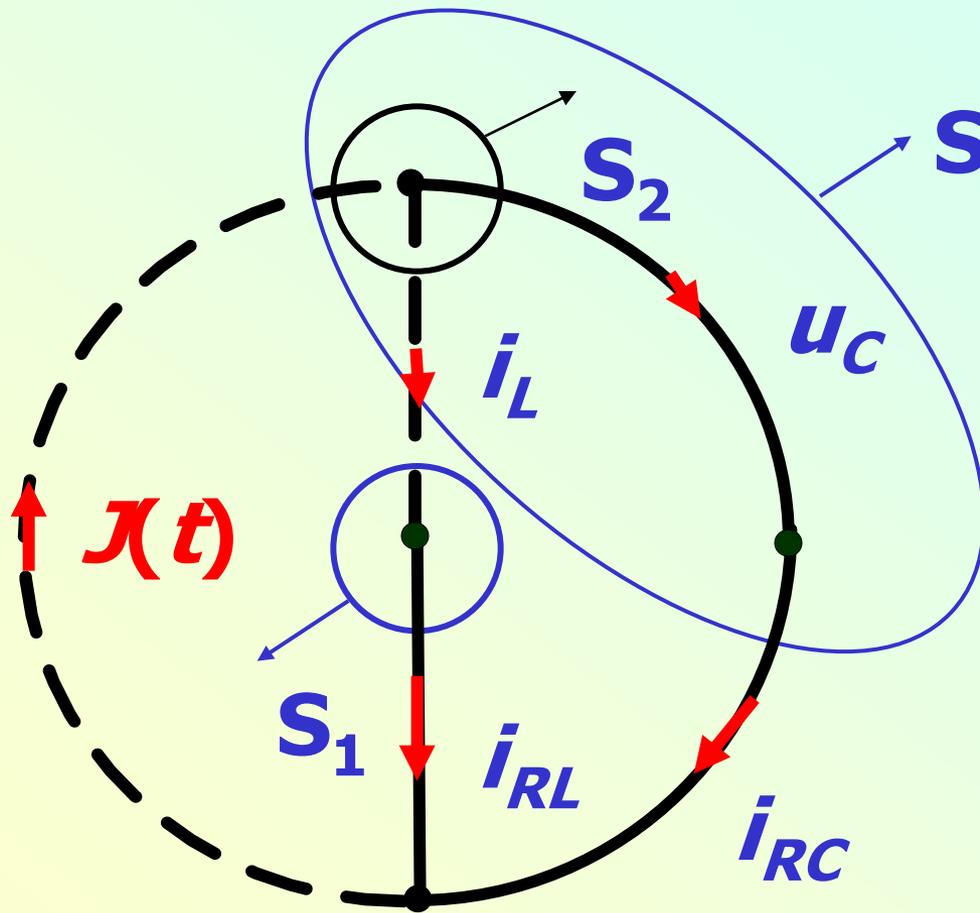
$$\text{Find}(\mathbf{u}'_{C1}, \mathbf{i}'_L, \mathbf{u}'_{C2}) \rightarrow \begin{bmatrix} 600. \cdot \mathbf{i}_L - 200. \cdot \mathbf{u}_{C1} + 200. \cdot \mathbf{u}_{C2} \\ (-22.) \cdot \mathbf{i}_L - 4. \cdot \mathbf{u}_{C2} - 6. \cdot \mathbf{u}_{C1} + 10. \cdot \mathbf{E} \\ 4000. \cdot \mathbf{i}_L + 2000. \cdot \mathbf{u}_{C1} - 2000. \cdot \mathbf{u}_{C2} \end{bmatrix}$$

Пример 3. Составить уравнения состояния цепи с заданными параметрами и уравнение для напряжения $u_J(t)$.



Решение. Построим граф цепи. Затем выберем дерево графа, в которое включены ветви с резисторами, емкостями и источниками ЭДС (без индуктивностей и источников тока). **Такое дерево называют собственным или нормальным.**

Дерево определяет главные сечения, для которых записываются уравнения по первому закону Кирхгофа. Ветви графа, не вошедшие в дерево (хорды), определяют главные контуры для записи уравнений по второму закону Кирхгофа.



Уравнения
для сечений:

$$i_{RL} - i_L = 0$$

$$i_C + i_L - J(t) = 0$$

$$i_{RC} + i_L - J(t) = 0$$

Уравнения
для контуров:

$$u_C + Ri_{RC} - u_J = 0$$

$$u_L + Ri_{RL} - Ri_{RC} - u_C = 0$$

Учитывая $i_C = -i_L + J(t)$;

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}; \quad u_L = L \frac{di_L}{dt},$$

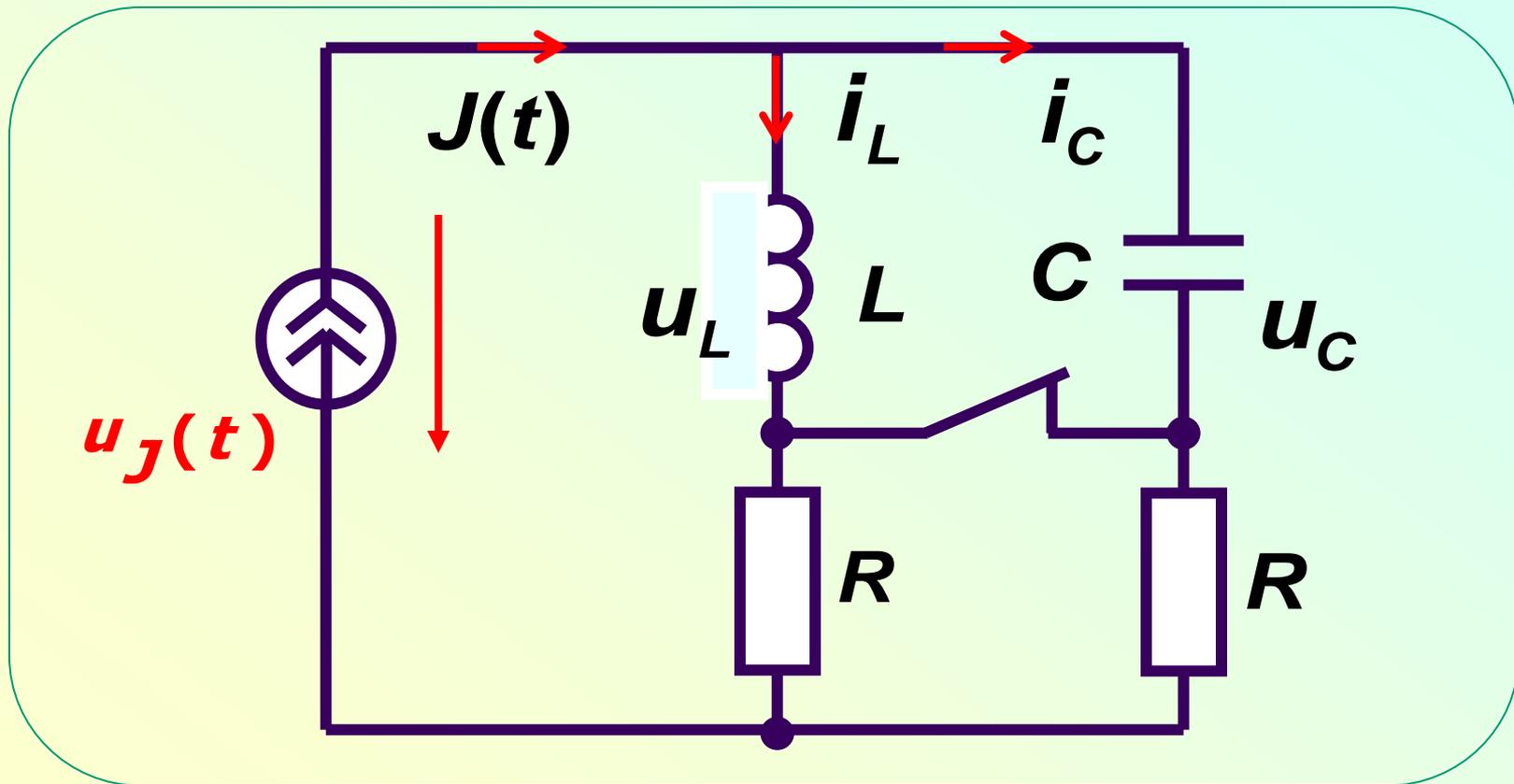
после деления на L и C , получаем

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L + \frac{1}{C} J(t);$$

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{2R}{L} i_L + \frac{1}{L} u_C + \frac{R}{L} J(t).$$

Затем: $u_J = -Ri_L + u_C + RJ(t)$.

Пример 4. Составить уравнения состояния цепи методом наложения



Решение. Практически уравнения состояния представляют собой зависимости напряжений на индуктивностях и токов конденсаторов от всех переменные состояния. При их определении **в цепях без особых контуров и сечений** переменные состояния можно считать как заданные величины.

**Согласно теореме
компенсации это равносильно
замене индуктивностей на
независимые источники тока,
а емкостей – на источники
ЭДС. Источники тока
направляют **по току**,
источники ЭДС – **против**.**

Эквивалентные схемы замещения индуктивных и емкостных элементов

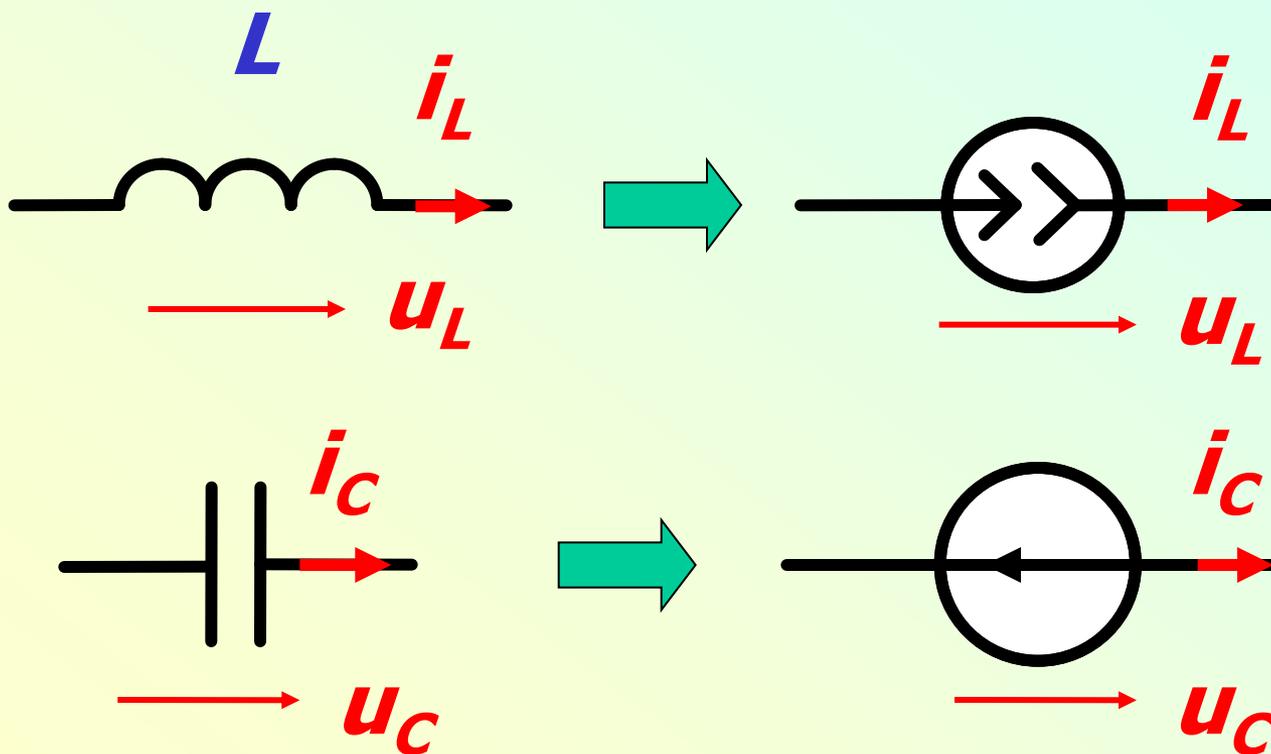
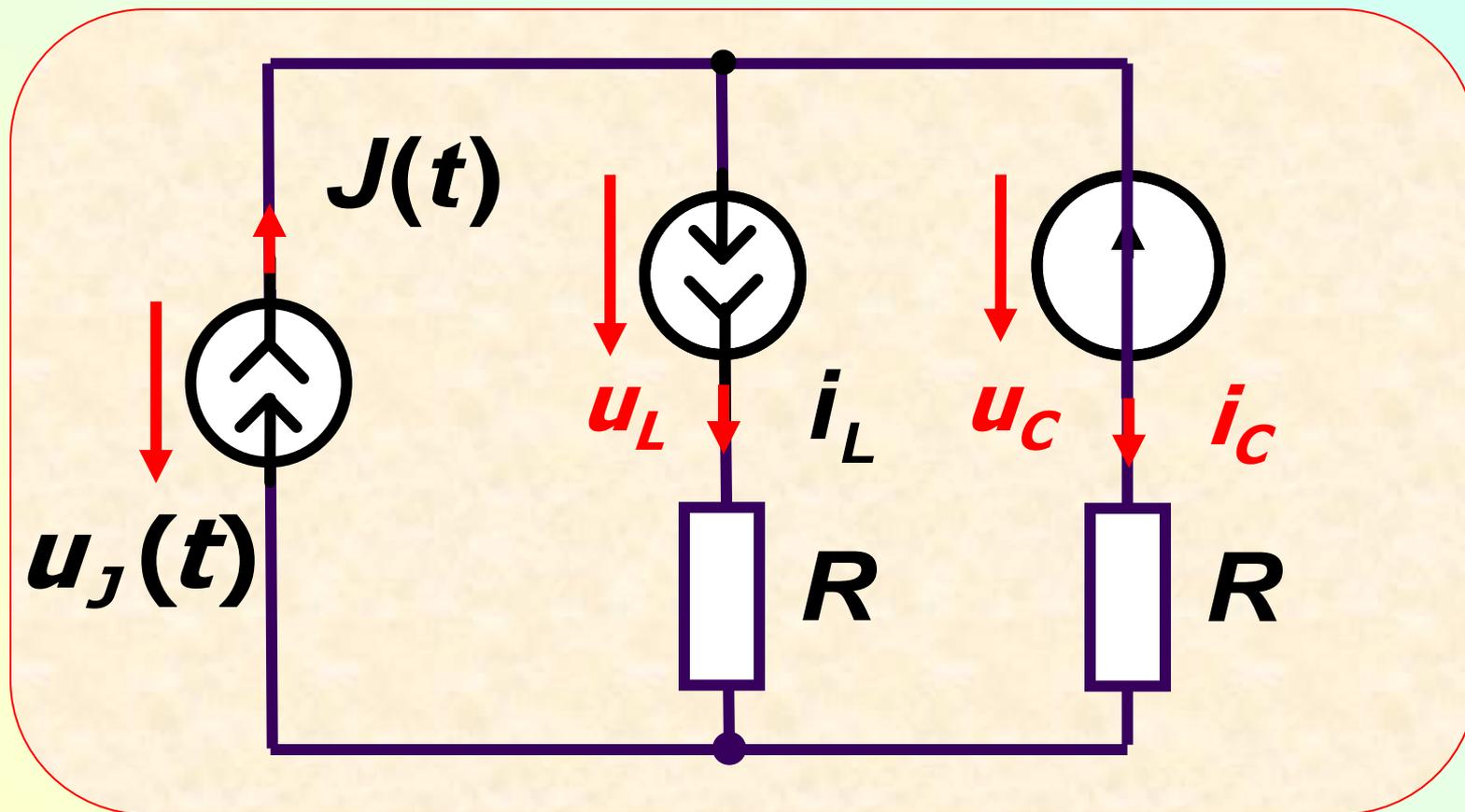
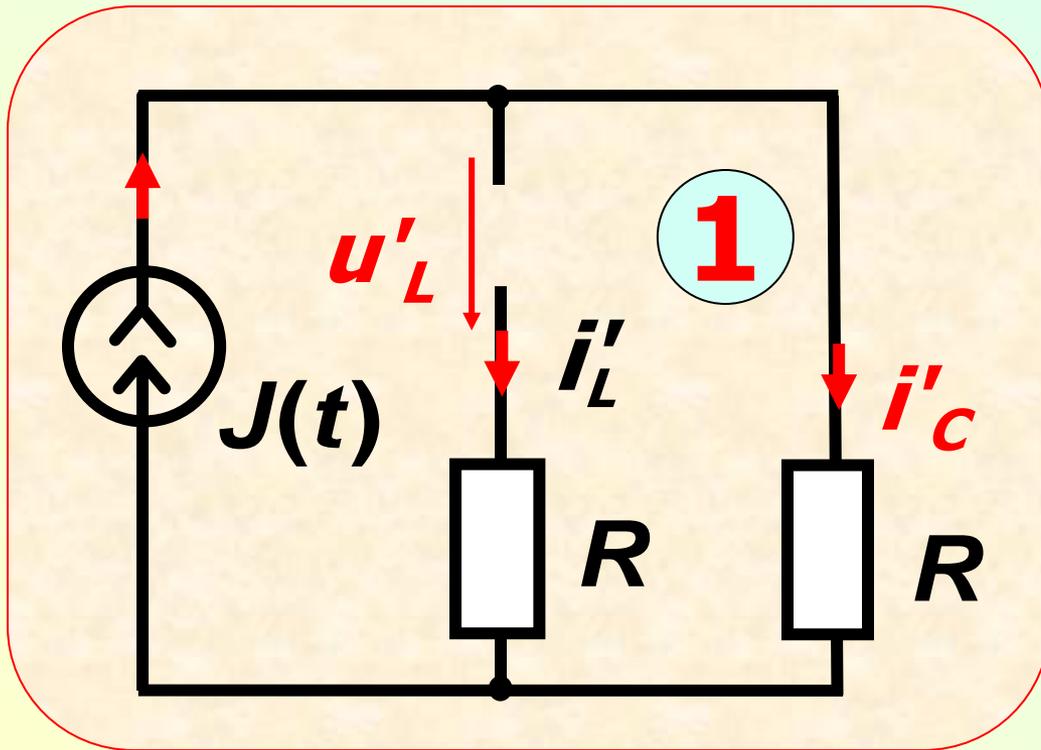


Схема замещения для данного примера

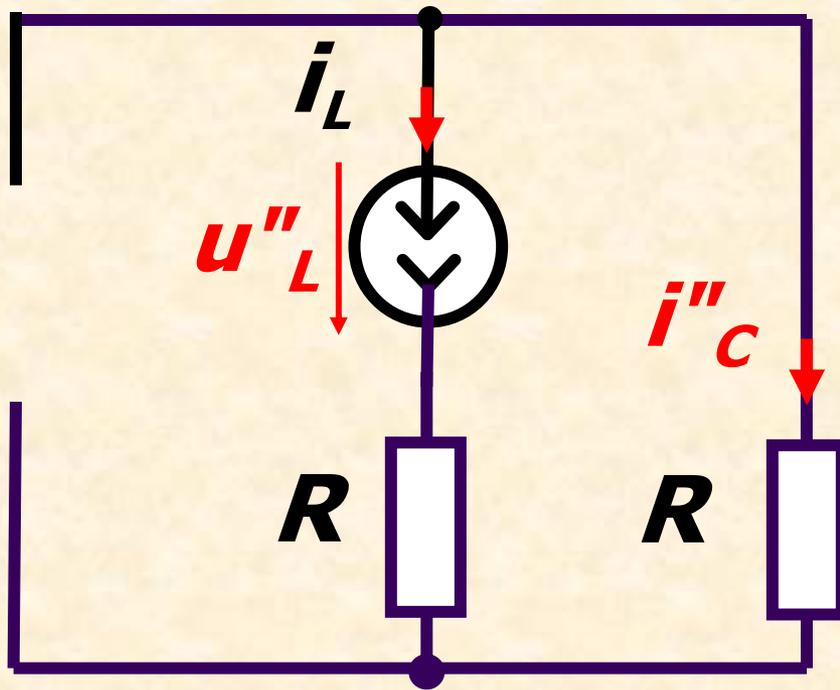


По методу наложения
составляем и рассчитываем три
подсхемы:



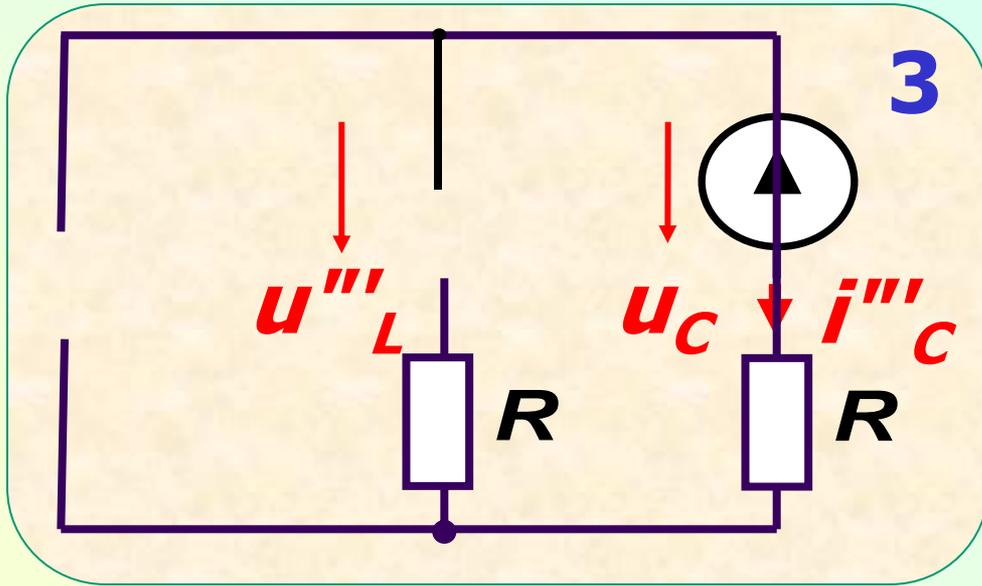
$$i'_c = J(t);$$
$$u'_L = RJ(t);$$

2.



$$i''_C = -i_L;$$

$$u''_L = -2Ri_L$$



$$u_L''' = u_c.$$

$$i_c''' = 0$$

Таким образом:

$$i_c = -i_L + J(t);$$

$$u_L = -2Ri_L + u_c + RJ(t).$$

Наконец,
$$\frac{du_c}{dt} = -\frac{1}{C}i_L + \frac{1}{C}J(t);$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{2R}{L}i_L + \frac{1}{L}u_c + \frac{R}{L}J(t).$$

Аналитическое решение

уравнений состояния высокого порядка в общем виде записывается с помощью матричной экспоненты, представляющей собой бесконечный медленно сходящийся ряд. Определение коэффициентов ряда достаточно сложное.

Общий вид решения

$$X(t) = e^{At} X(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\theta} B v(\theta) d\theta.$$

Если собственные значения матрицы **A** (λ - равны корням характеристического уравнения) различны, то

$$e^{At} = \alpha_0 \mathbf{1} + \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{A}^2 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{n-1},$$

где α_k – функции времени.

Для определения α_k составляется система n уравнений:

$$\alpha_0 + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_1^2 \alpha_2 + \dots + \lambda_1^{n-1} \alpha_{n-1} = e^{\lambda_1 t};$$

$$\alpha_0 + \lambda_2 \alpha_1 + \lambda_2^2 \alpha_2 + \dots + \lambda_2^{n-1} \alpha_{n-1} = e^{\lambda_2 t};$$

• • • • •

$$\alpha_0 + \lambda_n \alpha_1 + \lambda_n^2 \alpha_2 + \dots + \lambda_n^{n-1} \alpha_{n-1} = e^{\lambda_n t}.$$

Определив α_k , находят e^{At} ,
затем $X(t)$.

Численные методы
интегрирования основаны на
разложении функций времени в
ряд Тейлора, в котором
оставлено конечное число
членов ряда, а интегрирование
заменено суммированием
приращений за малые
промежутки времени – **шаги**
интегрирования $\Delta t = h$.

Простейший метод численного интегрирования - метод Эйлера. Различают явный и неявный методы Эйлера. Суть их видна из приведенных ниже формул.

Пусть

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, t);$$
$$\Delta x = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x, t) dt; \quad \Delta t = t_{k+1} - t_k = h;$$
$$x_k = x(kh), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Формула явного метода Эйлера:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = \mathbf{x}_k + hf(\mathbf{x}_k, t_k);$$

**для неявного метода
Эйлера:**

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \frac{d\mathbf{x}_{k+1}}{dt} = \mathbf{x}_k + hf(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}).$$

**Погрешность метода Эйлера
пропорциональна h^2 .**

Неявный метод более сложен и требует на каждом шаге интегрирования решения системы уравнений относительно неизвестных значений x_{k+1} . Более точные – **многошаговые** методы, использующие для вычисления x_{k+1} информацию о нескольких ранее полученных значениях $x(t)$. Один из этих методов – метод **Рунге-Кутты**.

Формулы интегрирования

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4),$$

где $m_1 = hf(x_k, t_k);$

$$m_2 = hf(x_k + m_1/2, t_k + h/2);$$

$$m_3 = hf(x_k + m_2/2, t_k + h/2);$$

$$m_4 = hf(x_k + m_3, t_k + h).$$

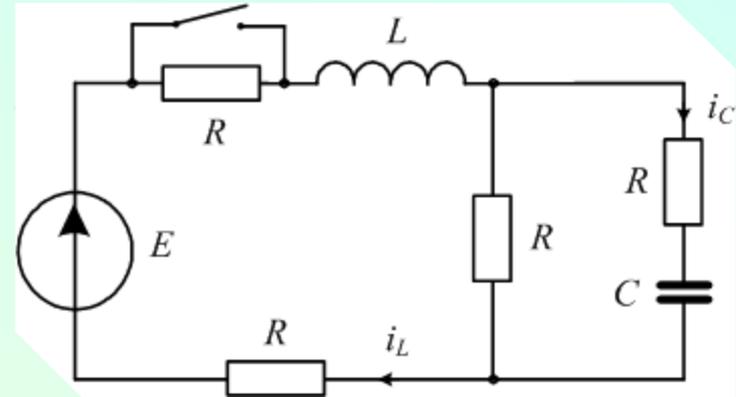
Погрешность пропорциональна h^5 .

Пример

Given

$$(i_L - i_C) R = u_C + R \cdot i_C$$

$$u_L + R \cdot i_L + R \cdot (i_L - i_C) = E$$



$$\text{Find } (u_L, i_C) \rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \cdot R \cdot i_L - \frac{1}{2} \cdot u_C + E \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{(R \cdot i_L - u_C)}{R} \end{cases}$$

$$R := 50 \quad L := 0.1 \quad C := 60 \cdot 10^{-6} \quad E := 50$$

$$A := \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \cdot \frac{R}{L} & -\frac{1}{2 \cdot L} \\ \frac{1}{2 \cdot C} & -\frac{1}{2 \cdot R \cdot C} \end{pmatrix}$$

$$B1 := \begin{pmatrix} E \\ L \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$p := \text{eigenvals}(A)$

$$p = \begin{pmatrix} -666.667 \\ -250 \end{pmatrix}$$

- корни
характеристического
уравнения

$$-|A^{-1} \cdot B1| = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 25 \end{pmatrix}$$

- принужденные
составляющие

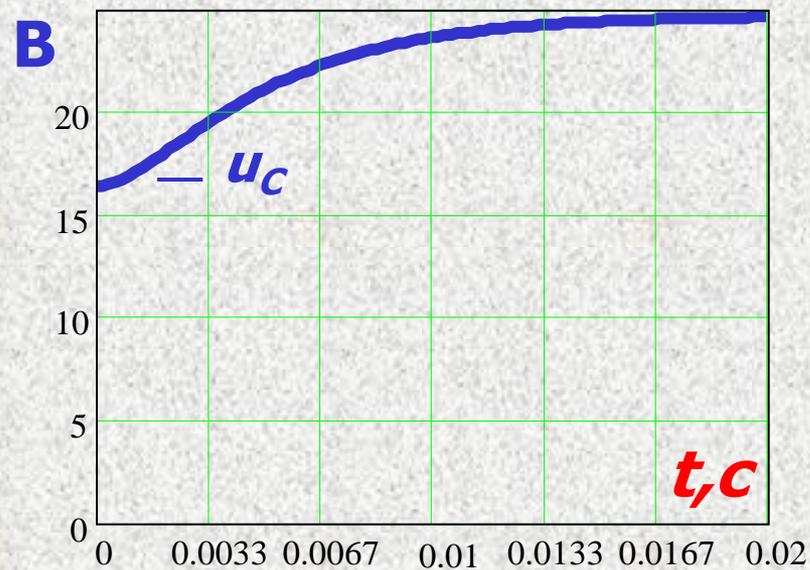
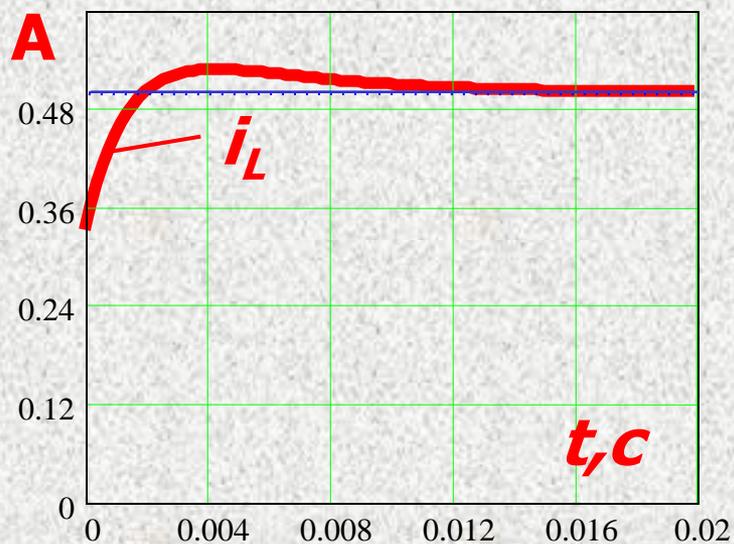
Начальные условия для переменных состояния

$$i_{L0} := \frac{E}{R + R + R} \quad i_{L0} = 0.333 \quad u_{C0} := i_{L0} \cdot R \quad u_{C0} = 16.667$$

$$x_0 := \begin{pmatrix} 0.333 \\ 16.667 \end{pmatrix} \quad D(t, x) := A \cdot x + B1 \quad \underline{N} := 100 \quad i := 0..N$$

$$\underline{T} := \frac{5}{|\text{Re}(p_1)|} \quad x := \text{rkfixed}(x_0, 0, T, N, D)$$

Графики изменения тока и напряжения



Порядок расчета переходных процессов методом переменных состояния.

- 1. Формируются уравнения состояния цепи (в форме Коши).**
- 2. Производится проверка правильности полученных уравнений**
- 3. Находятся начальные условия для переменных состояния. Определяется интервал интегрирования.**
- 4. Решается система дифференциальных уравнений**

Метод дискретных резистивных схем

Напряжение на $k+1$ шаге
интегрирования по неявному методу
Эйлера в общем случае записывается

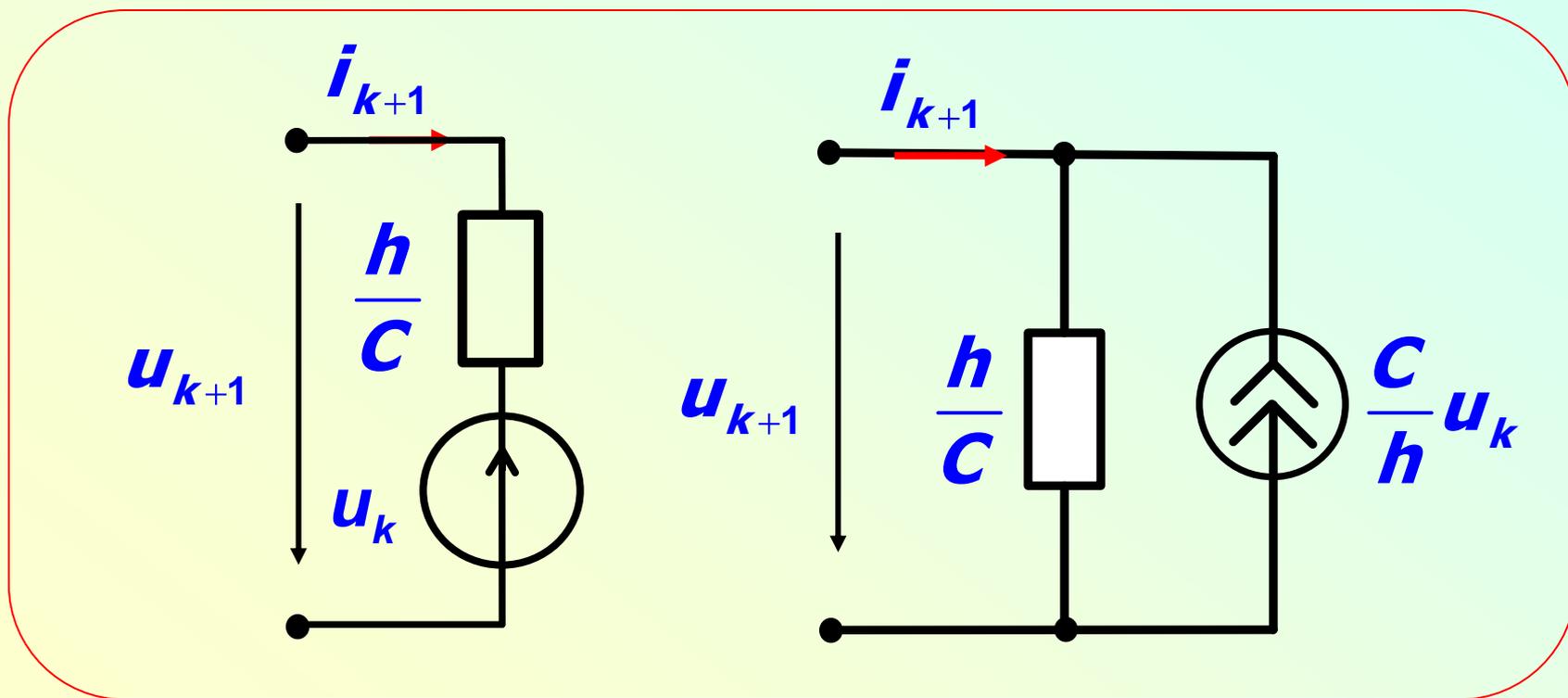
$$u_{k+1} = u_k + h \frac{du_{k+1}}{dt}.$$

Учитывая $i_c = C \frac{du_c}{dt}; \quad \frac{du_c}{dt} = \frac{i_c}{C},$

имеем $u_{k+1} = u_k + \frac{h}{C} i_{k+1}.$



Данному уравнению соответствуют эквивалентные резистивные схемы



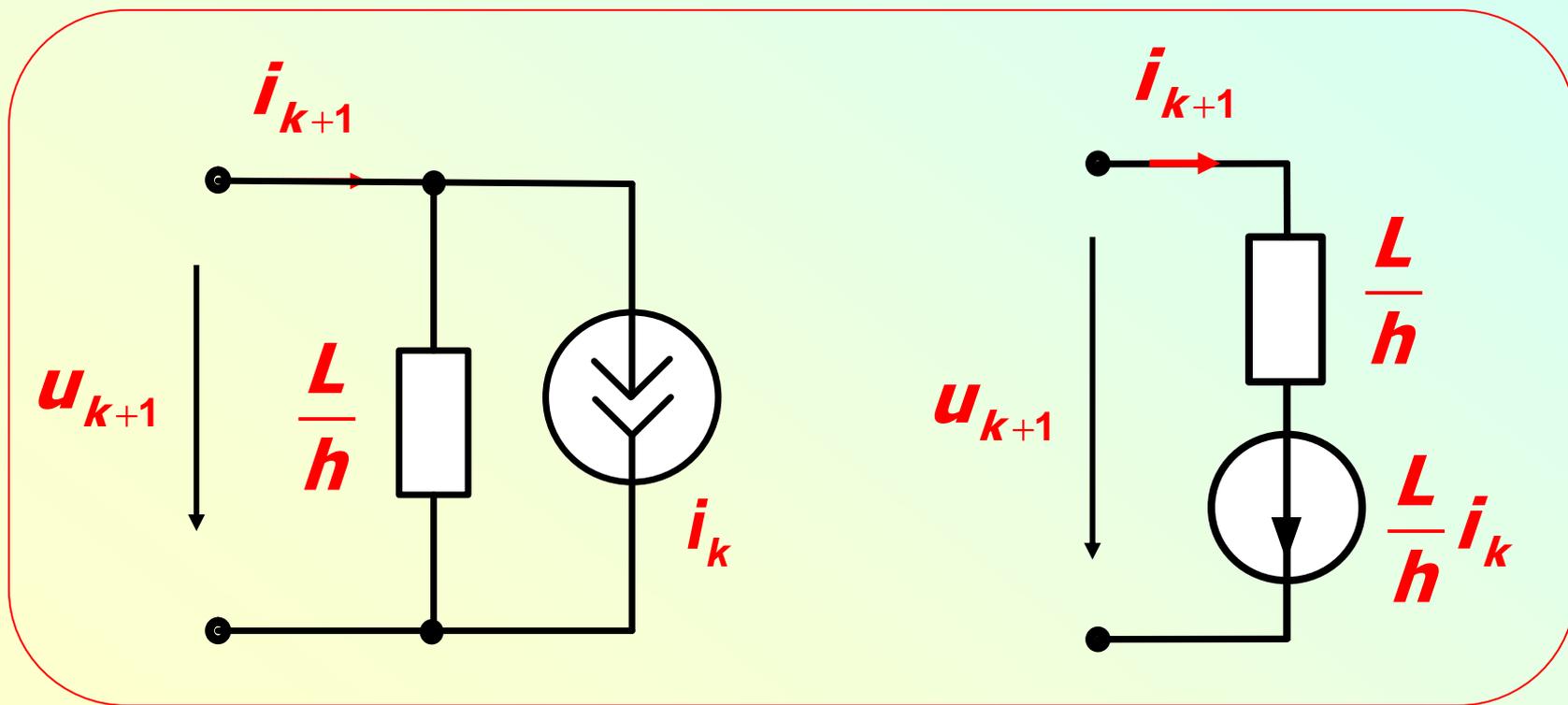
Ток индуктивного элемента на **$k+1$** шаге интегрирования по неявному методу Эйлера в общем случае записывается

$$i_{k+1} = i_k + h \frac{di_{k+1}}{dt};$$

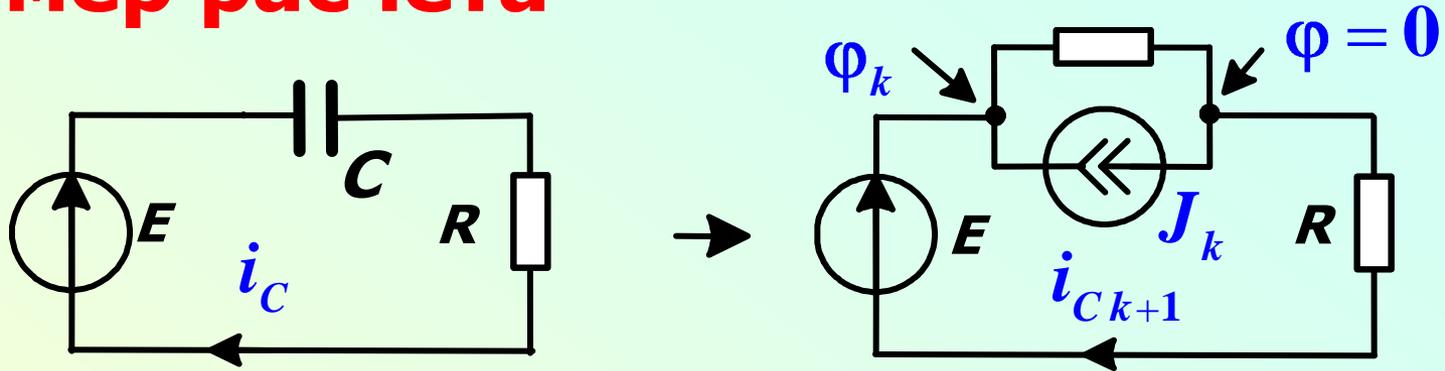
Учитывая $u_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{u_L}{L},$

имеем $i_{k+1} = i_k + \frac{h}{L} u_{k+1}$

Данному уравнению соответствуют эквивалентные резистивные схемы



Пример расчета



1. Методом переменных состояния

ORIGIN := 1

$$E := 100 \quad C := 200 \cdot 10^{-6} \quad R := 20 \quad A := \frac{-1}{R \cdot C} \quad B := \frac{E}{R \cdot C}$$

$$D(t, x) := A \cdot x + B \quad T := \frac{5}{|A|} \quad N := 100 \quad i := 0..N$$

$$x := \text{rkfixed}(0, 0, T, N, D) \quad i_C := \left(A \cdot x^{\langle 2 \rangle} + B \right) \cdot C \quad t := x^{\langle 1 \rangle}$$

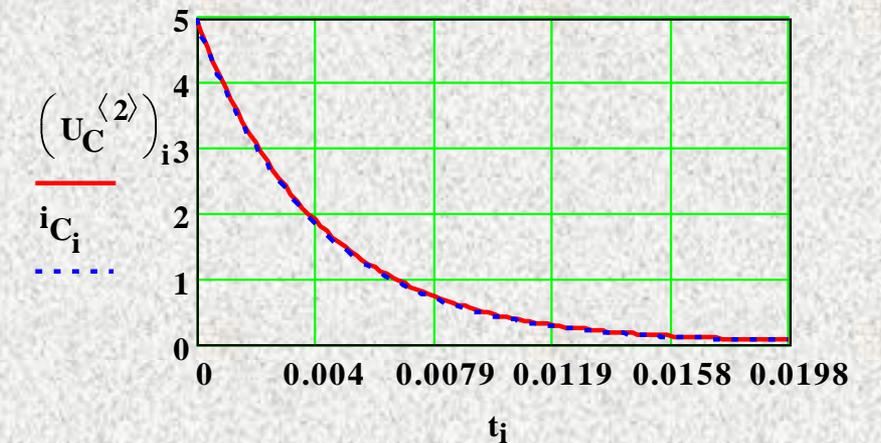
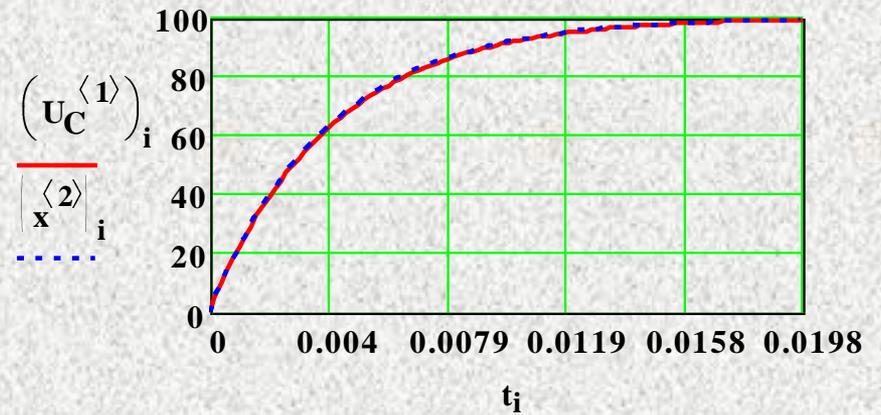
2. Методом дискретных схем

```

U.C :=
  φ1 ← 0
  ic1 ← E·G
  for k ∈ 1..N
    Jk ← φk·g.C
    φk+1 ←  $\frac{E·G + J_k}{G + g.C}$ 
    ick+1 ← -Jk + φk+1·g.C
    Uk,1 ← φk
    Uk,2 ← ick
  U
  
```

Сравнение результатов расчета

$$h := \frac{T}{N} \quad g_C := \frac{C}{h} \quad g_C = 1 \quad \underline{G} := \frac{1}{R}$$



Переходные процессы. Метод интегралов Дюамеля

- 1. Единичная функция и переходные характеристики**
- 2. Единичный импульс и импульсные характеристики**
- 3. Интегралы Дюамеля**
- 4. Интеграл свертки**



При действии в пассивной цепи сигнала сложной формы в виде кусочно-непрерывной функции времени расчет переходного процесса выполняют с помощью интегрального преобразования Дюамеля.

Суть его в использовании при нахождении реакции цепи принципа **наложения**.

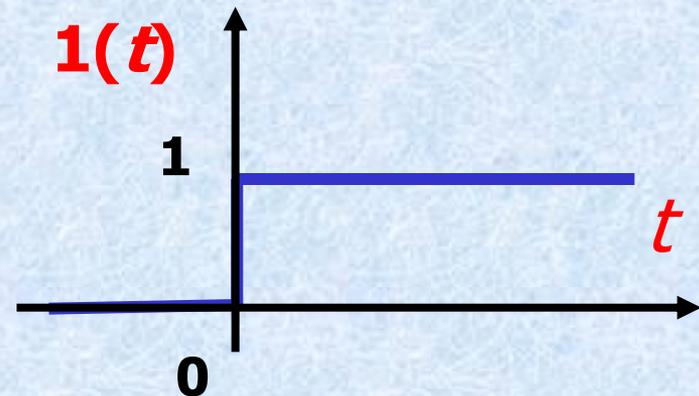
Разлагая сложный сигнал на элементарные, для которых реакция цепи известна или ее легко найти, определяют реакцию цепи как сумму реакций от каждой из элементарных составляющих.

В качестве элементарных сигналов используются единичная функция Хевисайда $1(t)$ и единичный импульс Дирака (дельта-функция) $\delta(t)$.

Единичная функция и переходные характеристики

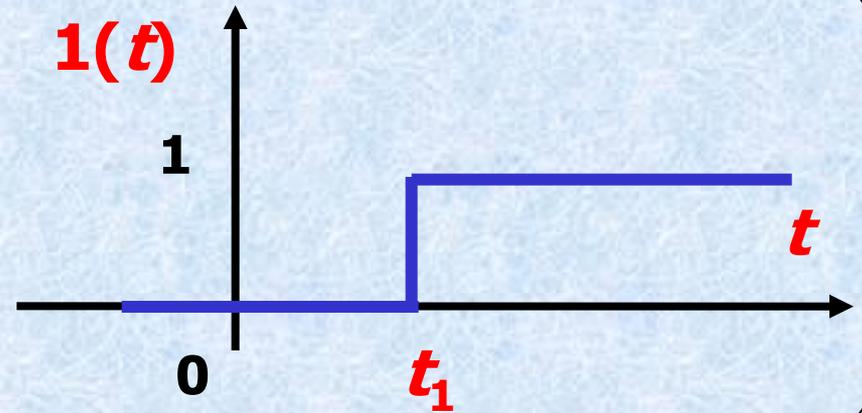
Единичным скачком, единичной функцией, или функцией Хевисайда, называют функцию, удовлетворяющую условию

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$



По теореме запаздывания функция $\mathbf{1}(t)$, смещенная на интервал времени t_1 , определяется как

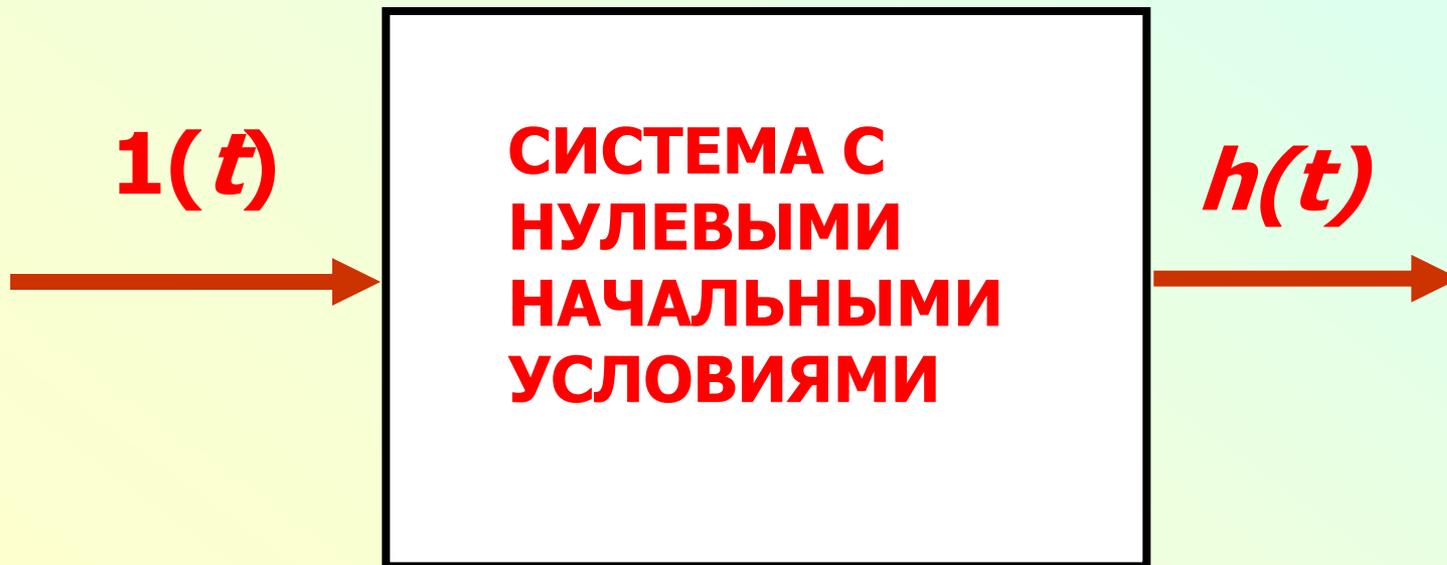
$$\mathbf{1}(t-t_1) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1, \\ 1 & \text{при } t > t_1. \end{cases}$$



Любая функция времени,
умноженная на $1(t - t_1)$,
становится равной 0 при $t_1 < 0$
и не меняет своего значения
при $t_1 > 0$.

Данное свойство характеризует
функцию $1(t)$ как функцию
включения

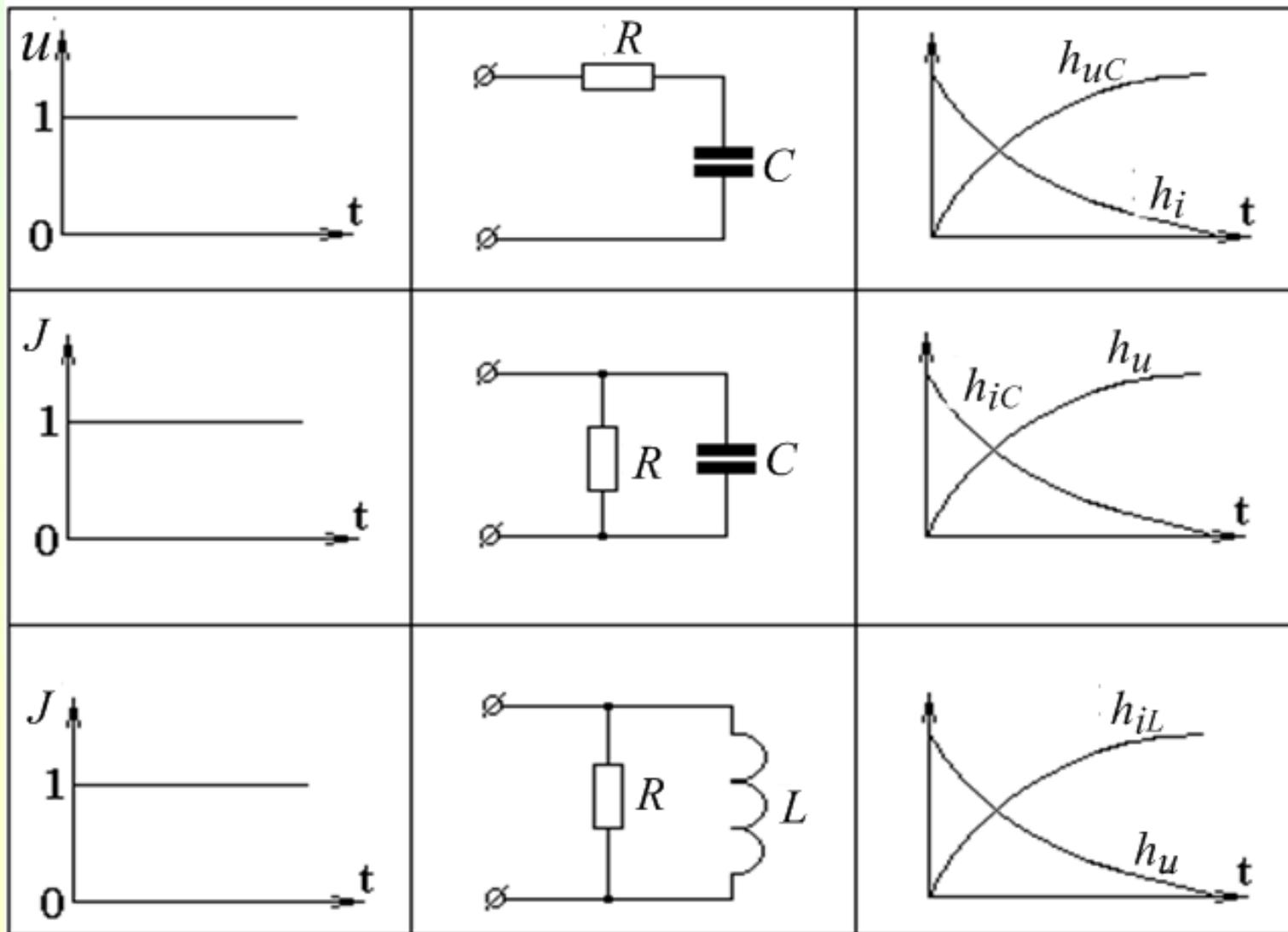
Реакцию цепи с нулевыми начальными условиями на единичную функцию называют **переходной характеристикой** или **переходной функцией** и обозначают $h(t)$.



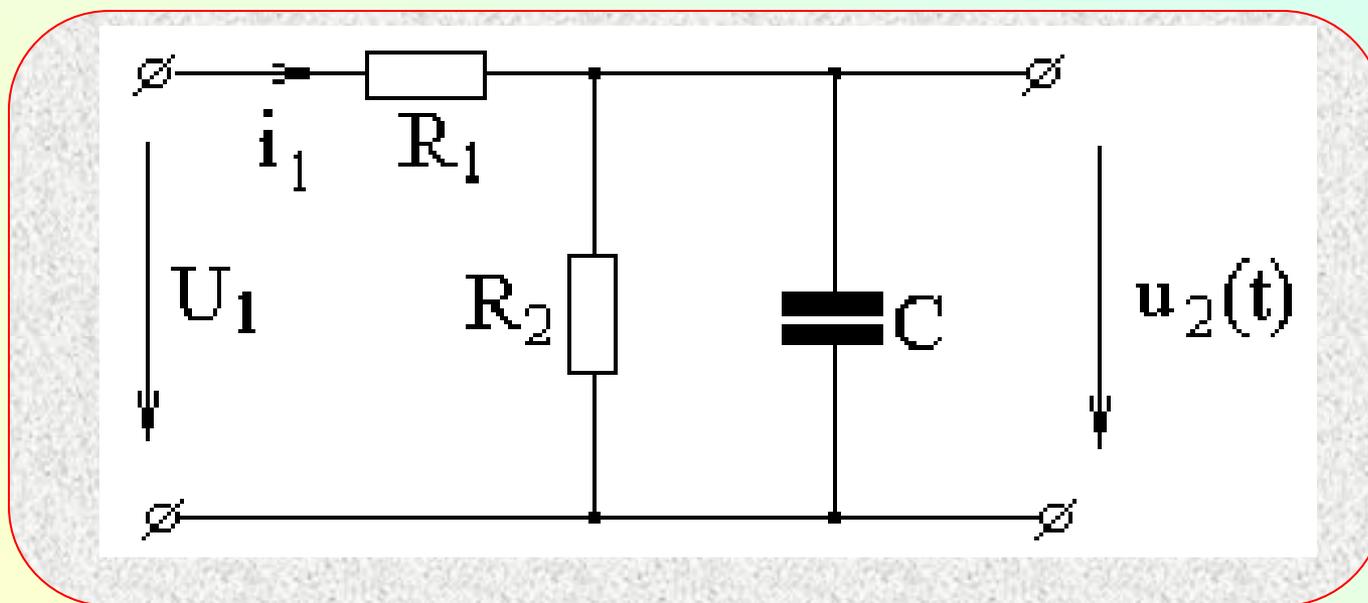
Переходная характеристика определяется выбором входной и выходной величин и **может быть** переходной проводимостью, переходной функцией напряжения, переходным сопротивлением и переходной функцией тока.

Переходные сопротивления и проводимости могут быть **входными** или **взаимными**.
Переходные характеристики простейших ***RC***- и ***RL***- цепей представлены на рис.

Графики переходных характеристик



Пример. Определить входную переходную проводимость и переходную функцию выходного напряжения при известных параметрах цепи



Решение. Переходные характеристики найдем, рассчитав входной ток и выходное напряжение при подключении цепи **с нулевыми** начальными условиями к источнику напряжения **$U_1 = 1$ В.**

По классическому методу

$$i_1(t) = i_{1ПР} + i_{1СВ};$$

$$u_2(t) = u_{2ПР} + u_{2СВ}, \text{ где}$$

$$i_{1ПР} = \frac{U_1}{R_1 + R_2}; \quad u_{2ПР} = \frac{U_1}{R_1 + R_2} R_2.$$

Свободные составляющие

$$i_{1CB} = Ae^{pt}; \quad u_{2CB} = Ve^{pt}.$$

определяются из начальных условий

$$i_1(0_+) = U_1/R_1; \quad u_2(0) = 0.$$

$$A = i_1(0_+) - i_{1ПР} = \frac{U_1 R_2}{R_1(R_1 + R_2)};$$

$$B = u_2(0) - u_{2ПР} = -\frac{U_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Характеристическое уравнение цепи составим методом входного сопротивления.

$$R_1 R_2 / (R_1 + R_2) + 1 / (Cp) = 0.$$

Решая уравнение, находим

$$p = -(R_1 + R_2) / (R_1 R_2 C)$$

Подставляя A, B, p в исходные уравнения, получаем:

$$h_{i_1}(t) = \frac{i_1(t)}{U_1} = \frac{1}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} \right);$$

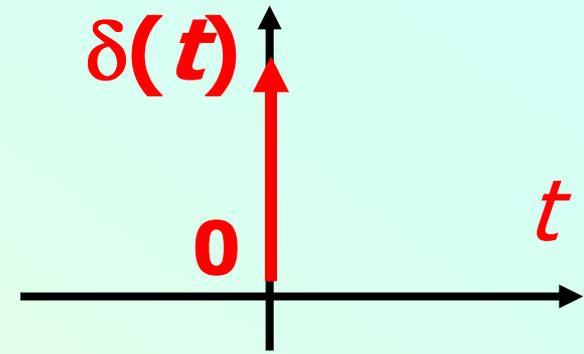
$$h_{u_2}(t) = \frac{u_2(t)}{U_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} \right).$$

Таким образом, переходные характеристики - это токи и напряжения в переходном режиме при единичном входном воздействии

Единичный импульс и импульсная характеристика

Единичным импульсом, функцией Дирака, или дельта-функцией, называют функцию, неограниченно возрастающую при обращении ее аргумента в нуль и равную нулю при всех других значениях:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0, \\ 0 & 0 < t < 0. \end{cases}$$



Площадь $\delta(t)$ функции конечна и равна единице при условии, что нулевое значение аргумента лежит внутри пределов интегрирования:
 $\int \delta(t) dt = 1.$

Функция Дирака обладает "фильтрующим" свойством, суть которого видна из следующих равенств:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0);$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - \tau)dt = f(\tau).$$

Реакцию цепи на импульсную функцию называют **импульсной переходной характеристикой** (функцией) $k(t)$. Формально она может быть определена как производная от переходной характеристики, т.к. функция Дирака **формально** может быть представлена производной от функции **Хевисайда**.

$$k(t) = h(0)\delta(t) + dh(t) / dt.$$

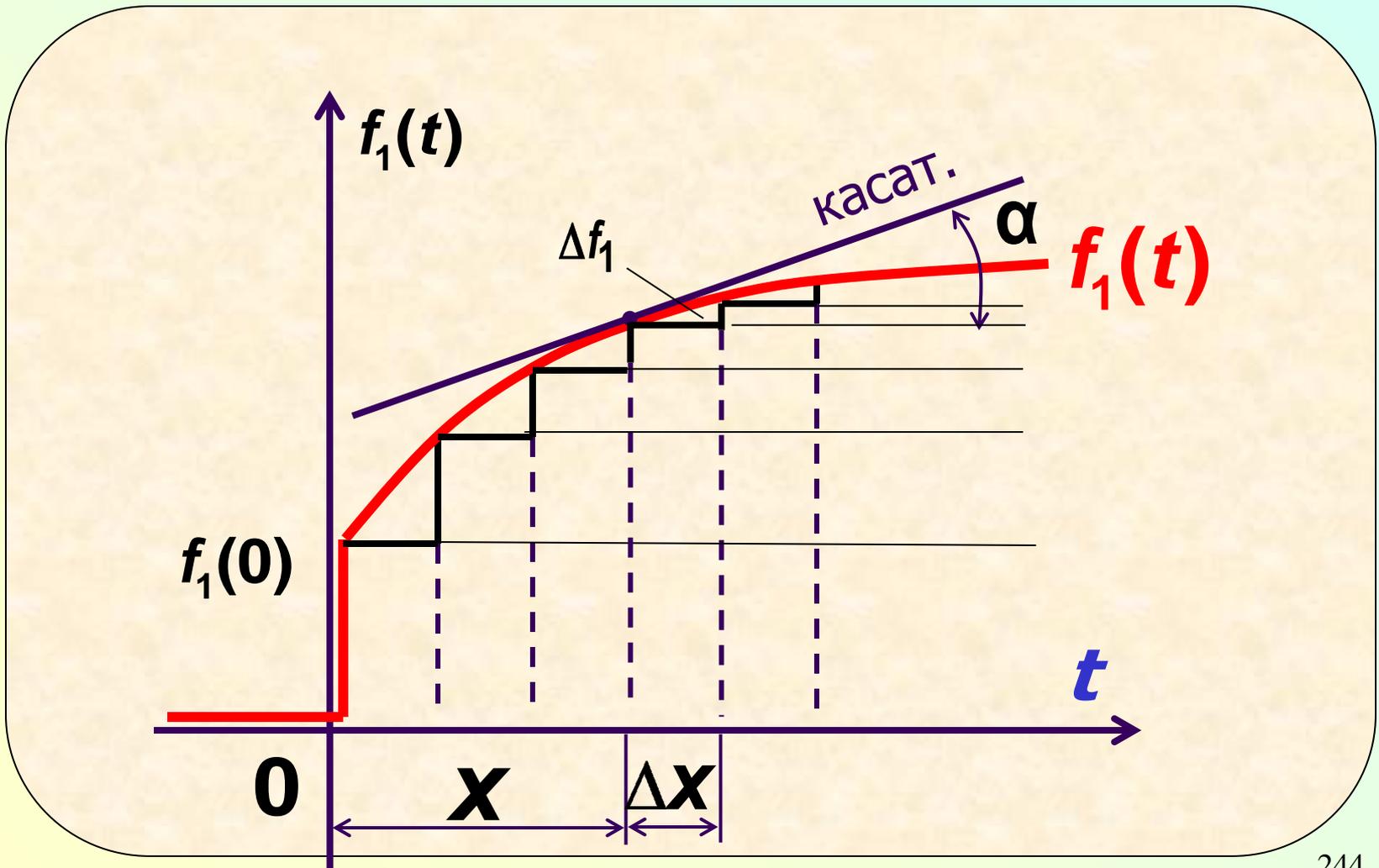
Если $h(0)=0$, $k(t)=dh(t)/dt$

При этом $h(t) = \int k(t) dt,$

$$\delta(t) = d1(t) / dt$$

Интеграл Дюамеля

Рассмотрим сложное воздействие



Если $f_1(t)$ - ток или напряжение удовлетворяет условиям Дирихле, то ее можно приближенно заменить суммой элементарных ступенчатых воздействий

$$f_1(t) \approx f_1(0)1(t) + \sum \Delta f_1(x) \cdot 1(t-x).$$

Элементарный скачок воздействия

$$\begin{aligned} \Delta f_1(x) &= f_1(x + \Delta x) - f_1(x) = \\ &= \Delta x \operatorname{tg} \alpha \approx f_1'(x) \Delta x. \end{aligned}$$

**Реакция цепи на все воздействие
будет**

$$f_2(t) = f_1(0)h(t) + \sum f_1'(x)h(t-x)\Delta x.$$

**Переходя от Δx к dx , получаем
первую форму записи интеграла
Дюамеля:**

$$f_2(t) = f_1(0)h(t) + \int_0^t f_1'(x)h(t-x)dx.$$

Учитывая свойство определенных интегралов, можно записать

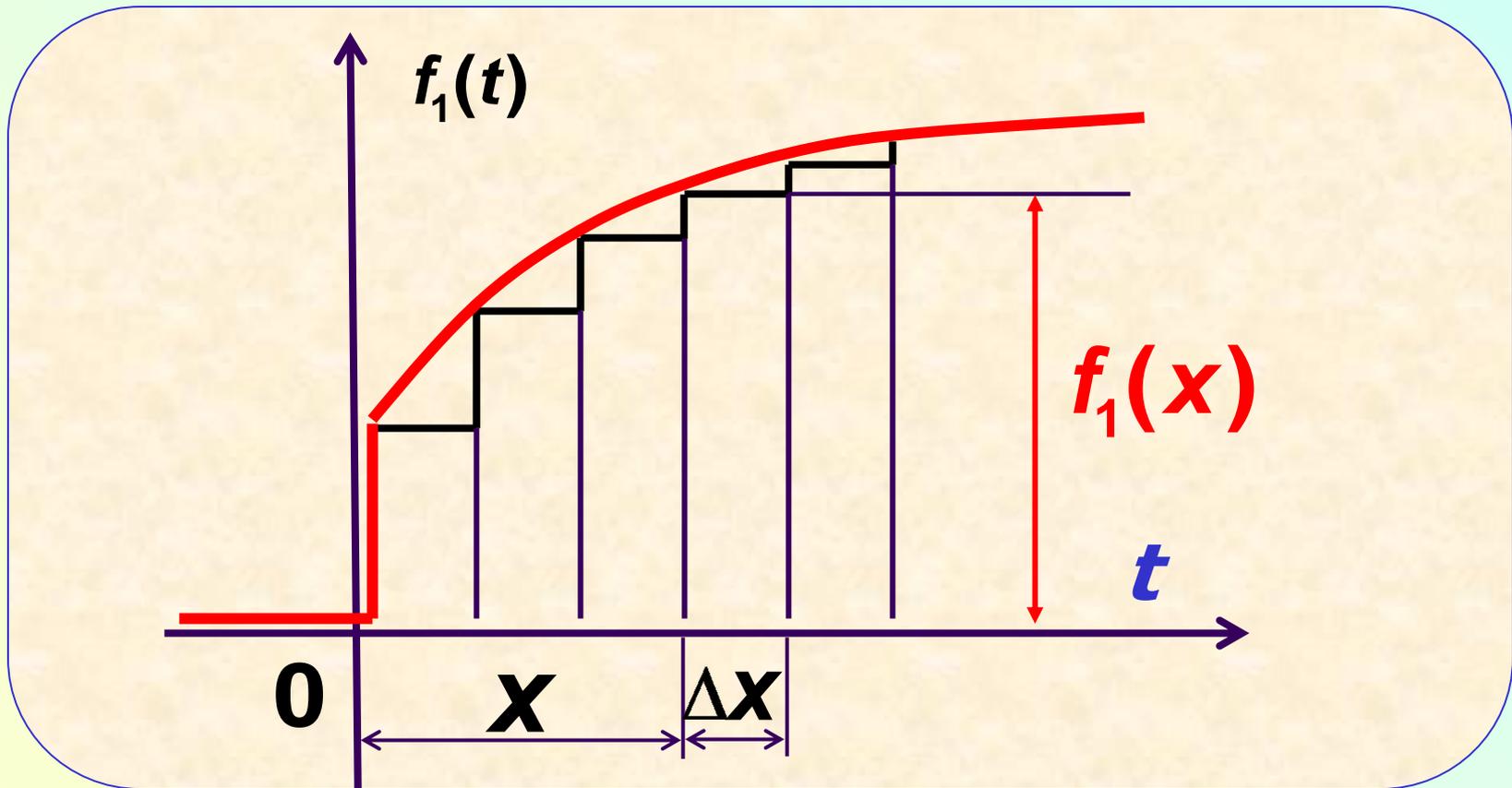
$$f_2(t) = f_1(0)h(t) + \int_0^t f_1'(t-x)h(x)dx;$$

$$f_2(t) = f_1(t)h(0) + \int_0^t f_1(x)h'(t-x)dx.$$

Интеграл свертки

Сложное воздействие $f_1(t)$ можно представить в виде суммы элементарных прямоугольных импульсов малой длительности Δx , подобных импульсной функции $\delta(t)$ с амплитудой $f_1(x)$ и площадью $f_1(x)\Delta x$

$$f_1 \approx \sum f_1(x)\Delta x \cdot \delta(t - x).$$



Реакцией цепи на каждый из импульсов будет функция

$$\Delta f_2 = f_1(x) \Delta x \cdot k(t - x).$$

Суммарное действие всех импульсов

$$f_2(t) \approx \sum f_1(x)k(t-x)\Delta x.$$

При стремлении Δx к нулю получим интеграл свертки

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(x)k(t-x)dx$$

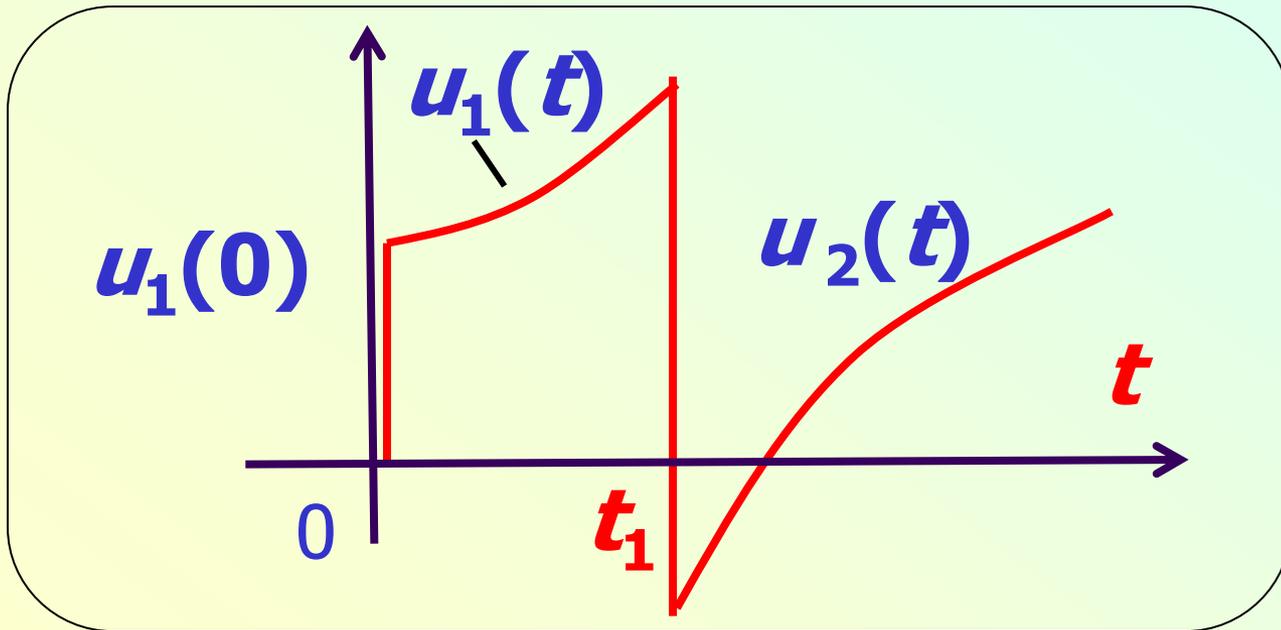
С учетом свойств определенного интеграла

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(t-x)k(x)dx.$$

Вывод. Переходная и переходная импульсная характеристики полностью определяют реакцию цепи на сложное воздействие при нулевых независимых начальных условиях. Если начальные условия ненулевые, необходимо использовать метод наложения.

Интеграл Дюамеля для функций произвольной формы

Пусть двухполюсник подключается к напряжению, аналитически заданному на интервалах.



Запишем входной ток, полагая переходную функцию заданной.

На интервале

$$0 < t < t_1$$

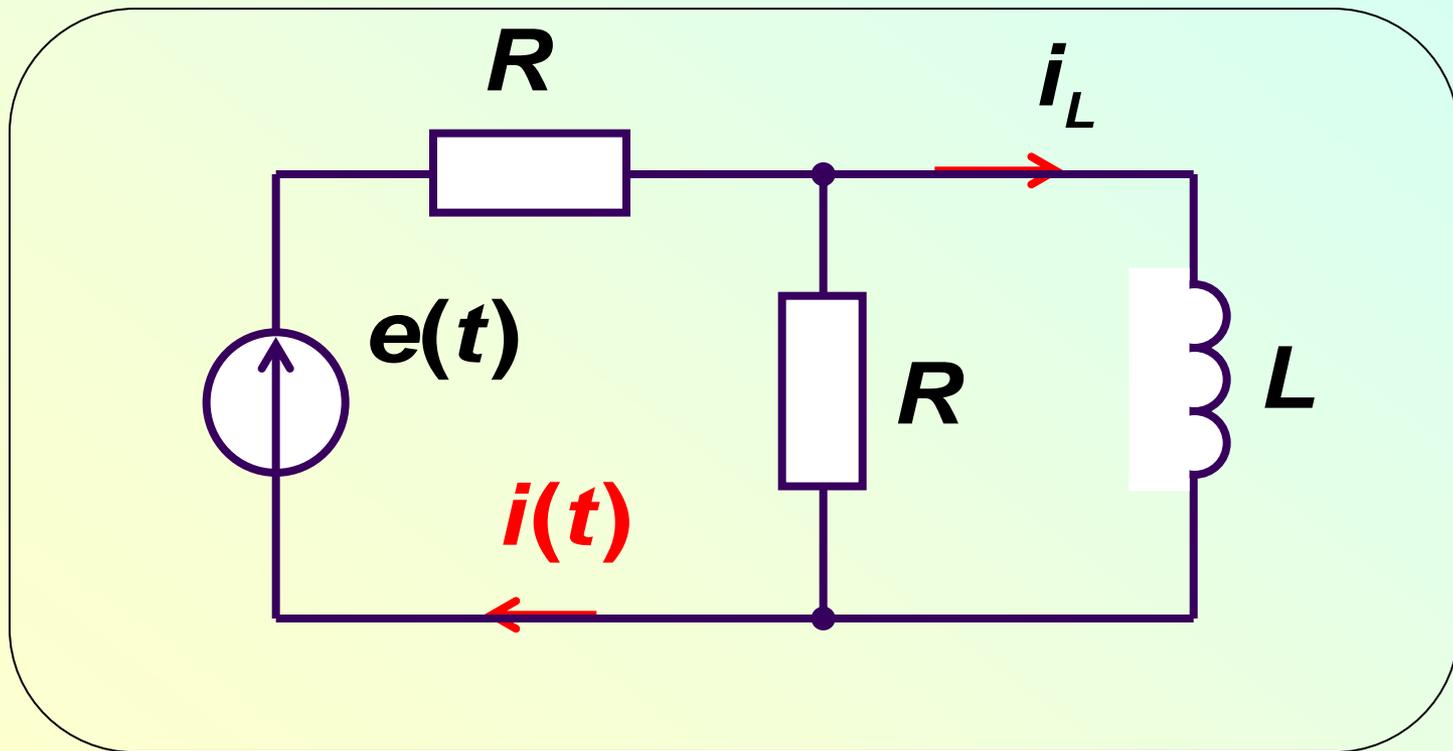
$$i(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1'(x)h(t-x)dx$$

На интервале

$$t > t_1$$

$$i(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(x)h(t-x)dx + \\ + u_2(t_1) - u_1(t_1) h(t-t_1) + \int_{t_1}^t u_2'(x)h(t-x)dx.$$

**Пример 1. Определить входной ток $i(t)$, если: $R = 200 \text{ Ом}$; $L = 1 \text{ Гн}$;
 $e(t) = 100e^{-200t}$, V**



Решение. 1. Находим переходную характеристику – входной ток при единичном входном напряжении.

$$h(t) = h_{np} + Ae^{pt};$$

$$h_{np} = 1/R; \quad h(0_+) = 1/2R;$$

$$A = h(0_+) - h_{np} = 1/2R - 1/R = \\ = -0,0025;$$

Корень характеристического уравнения

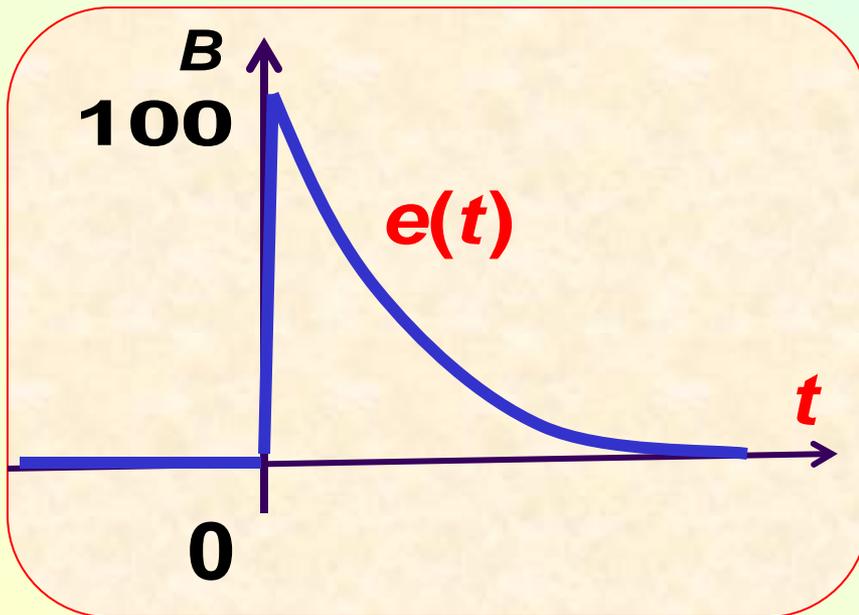
$$p = -R_3 / L = -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} = \frac{100}{1} = -100 \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом,

$$h(t) = 0,005 - 0,0025e^{-100t} \text{ Ом}^{-1}.$$

2. Записываем интеграл Дюамеля

$$i(t) = e(0)h(t) + \int_0^t e'(x)h(t-x)dx,$$



где $e(0) = 100$ В;

$$e'(x) = -2 \cdot 10^4 e^{-200x};$$

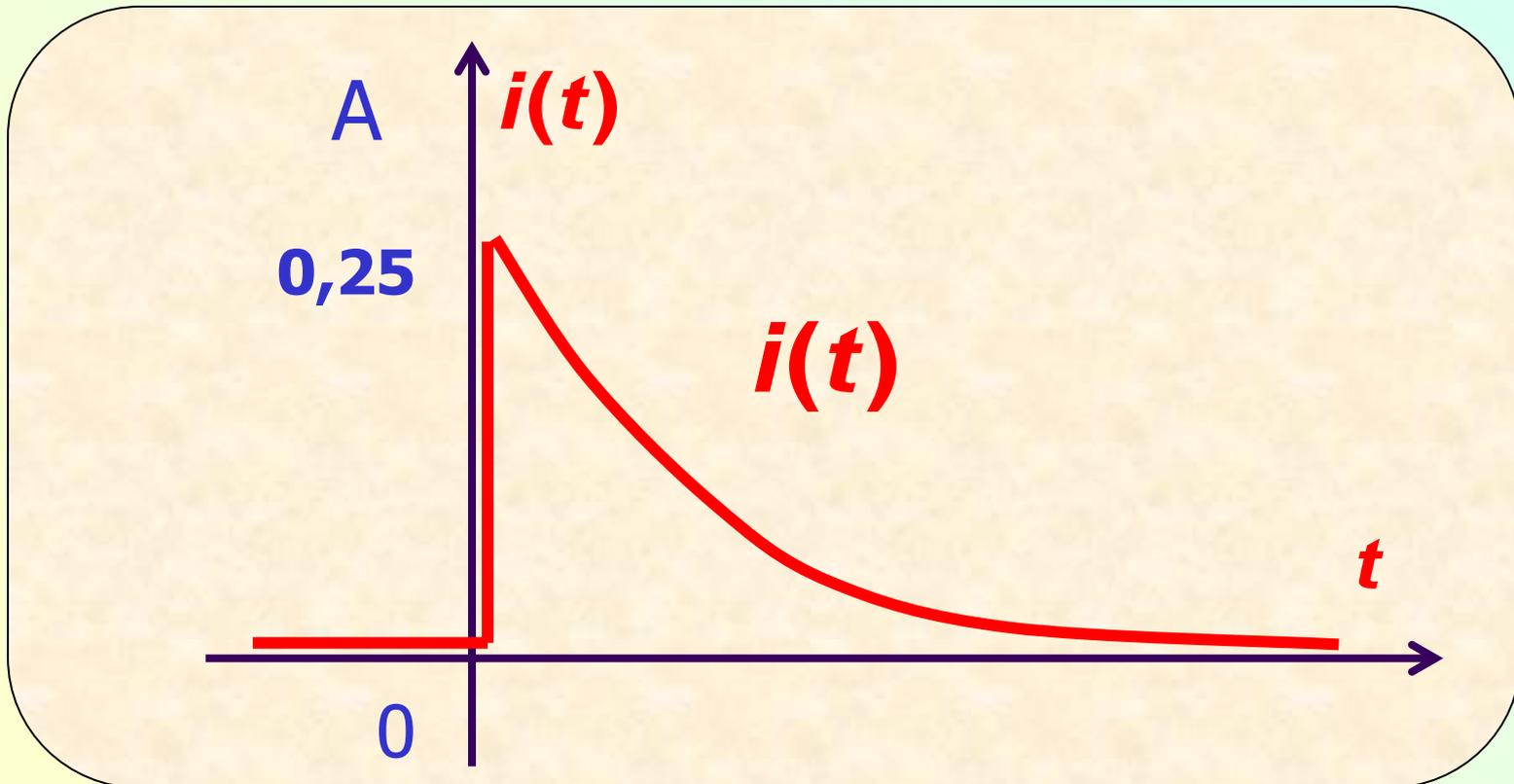
$$h(t-x) = 0,005(1 - 0,5e^{-100(t-x)}) \text{ Ом}^{-1}.$$

$$\begin{aligned}
i(t) &= 0,5 - 0,25e^{-100t} + \int_0^t \left[-2 \cdot 10^4 \cdot e^{-200x} \right] \cdot \\
&\quad \cdot \left[0,005 - 0,0025e^{-100(t-x)} \right] dx = \\
&= 0,5 - 0,25e^{-100t} - 100 \int_0^t e^{-200x} dx + \\
&\quad + 50e^{-100t} \int_0^t e^{-100x} dx + 0,5 - 0,25e^{-100t} + \\
&\quad + 0,5(e^{-200t} - 1) - 0,5e^{-100t} (e^{-100t} - 1)
\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$i(t) = 0,25e^{-100t} \text{ А.}$$

3. Строим график

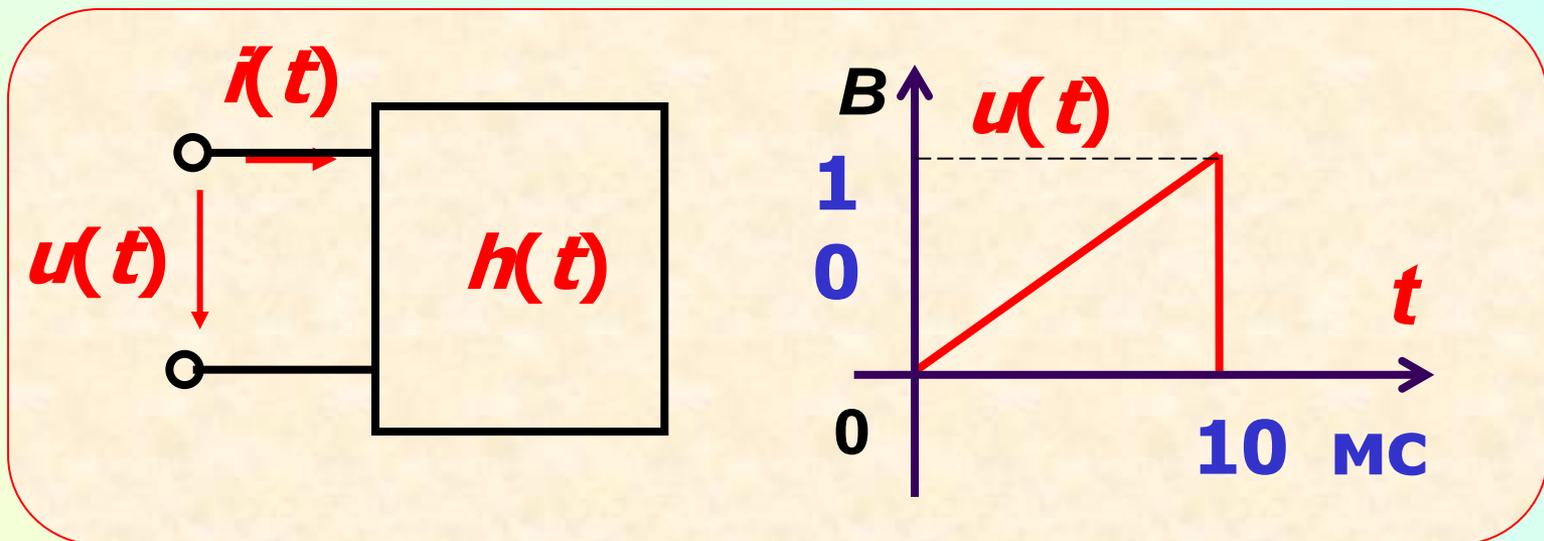


Пример 2. Показать, что входной ток в цепи с известной переходной проводимостью

$$h(t) = 0,5 - 0,5e^{-100t} \text{ См}$$

при $t < 10$ мс определяется уравнением

$$i(t) = -5 + 5e^{-100t} + 500t.$$



Решение. В интервале времени $0 < t < 10$ мс входной ток определяется по общей формуле

$$i(t) = u(0)h(t) + \int_0^t u'(x)h(t-x)dx,$$

где

$$u(0) = 0;$$

$$u(x) = 10 / 0,01x = 1000x \text{ В};$$

$$u'(x) = 1000 \text{ В/с.}$$

Подставляя, получаем

$$i(t) = \int_0^t 1000(0,5 - 0,5e^{-100(t-x)}) dx$$

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^t 500 dx - 500 \int_0^t e^{-100t} e^{100x} dx = \\ &= 500x \Big|_0^t - 5e^{-100t} e^{100x} \Big|_0^t = \\ &= 500t - 5 + 5e^{-100t} \text{ А.} \end{aligned}$$

Полученный результат совпадает с заданным выражением

Частотный и операторный методы расчета

Частотный (спектральный) и **операторный** методы расчета переходных процессов основаны на интегральных преобразованиях **Фурье** и **Лапласа** и не требуют составления дифференциальных уравнений.

С помощью указанных преобразований **дифференциальные** уравнения заменяются **алгебраическими**. **Функции времени** заменяются их изображениями. **Изображение выходного** сигнала находится по изображениям **входного сигнала и передаточной функции**.

По изображению выходного сигнала с помощью обратного преобразования Фурье или Лапласа определяют **оригинал** - временную зависимость выходного сигнала.

В частотном методе, основанном на преобразованиях Фурье, ограничиваются рассмотрением переходных процессов при **нулевых** начальных условиях. В **операторном** методе, основанном на преобразованиях Лапласа, нет ограничений – он более универсальный.

Частотный метод

Прямое преобразование Фурье позволяет найти изображение (спектральную плотность) входного сигнала

$$F_1(j\omega) = \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1)$$

Изображение выходной величины определяют с помощью передаточной функции $K(j\omega)$:

$$F_2(j\omega) = K(j\omega)F_1(j\omega)$$

**Обратное преобразование
используют для нахождения
оригинала - выходной
величины**

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2)$$

Частотный метод используется для расчета сложных цепей, передаточную функцию для которых находят экспериментально. Обратное преобразование, как правило, находят численно, записывая спектральную плотность в интеграле Фурье (2) в вещественной форме:

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega) e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 F_2(\omega) e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} d\omega + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F_2(\omega) e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} d\omega. \end{aligned}$$

Так как модуль $F(\omega)$ - четная функция,
то:

$$f_2(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_2(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega.$$

Для $0 < t$ и $t < 0$, т.е. при t имеем:

$$f_2(\pm t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_2(\omega) [\cos \omega t \cdot \cos \varphi(\omega) \mp \mp \sin \omega t \cdot \sin \varphi(\omega)] d\omega.$$

Поскольку при $t < 0$, т.е. при $-t$, $f(t) = 0$, из полученного выражения следует

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_2(\omega) \cos \varphi(\omega) \cos \omega t = \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_2(\omega) \sin \varphi(\omega) \sin \omega t \cdot d\omega. \end{aligned}$$

Вводя понятия вещественной и мнимой частотных характеристик

$$B(\omega) = F(\omega) \cos \varphi(\omega);$$

$$M(\omega) = F(\omega) \sin \varphi(\omega),$$

получаем:

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B_2(\omega) \cos \omega t \cdot d\omega = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} M_2(\omega) \sin \omega t \cdot d\omega. \end{aligned}$$

Эти формулы используются на практике. Их недостаток – **нельзя** применять при **ненулевых** начальных условиях. Указанное ограничение **снимается** применением преобразования **Лапласа**

Операторный метод

Недостаток частотного метода устраняется включением в формулу прямого преобразования Фурье дополнительного множителя $e^{-\sigma t}$, обеспечивающего сходимость интеграла при $t \rightarrow \infty$. При этом роль переменной частоты выполняет комплексная переменная

$$p = \sigma + j\omega.$$

Прямое (3) и обратное (4) преобразования Лапласа записываются

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt; \quad (3)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt} dp, \quad (4)$$

где c - фиксированная постоянная.
Взаимное соответствие оригинала и изображения записывается

$$f(t) \rightleftharpoons F(p) \text{ или } f(t) \rightarrow F(p)$$

Основные свойства преобразования Лапласа

Многие свойства преобразований
Фурье и Лапласа идентичны

1. Свойство линейности

$$\sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \rightarrow \sum_{k=1}^n a_k F(p)$$

2. Дифференцирование оригинала

$$\frac{df(t)}{dt} = f'(t) \rightarrow pF(p) - f(0)$$

3. Теорема подобия

$$f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

4. Теорема запаздывания

$$f(t - t_0) \rightarrow e^{-pt_0} F(p)$$

5. Теорема смещения (затухания)

$$e^{-\alpha t} f(t) \rightarrow F(p + \alpha)$$

6. Теорема свертки

$$F_1(p)F_2(p) \rightarrow \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

7. Предельные соотношения

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \rightarrow f(\infty);$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) \rightarrow f(0_+)$$

8. Интегрирование оригинала при нулевых начальных условиях

$$\int_0^t f(t) dt \rightarrow \frac{F(p)}{p}$$

Изображение простейших функций

	Функция	Изображение
1	$f(t) = A$	$F(p) = \int_0^{\infty} Ae^{-pt} dt = \frac{A}{p}$
2	$f(t) = Ae^{\alpha t}$	$F(p) = \frac{A}{p + \alpha}$
3	$f(t) = A \sin(\omega t)$	$F(p) = \frac{A\omega}{p^2 + \omega^2},$
4	$f(t) = At = \int_0^t A dt$	$F(p) = \frac{A}{p} / p = \frac{A}{p^2}$

Согласно теореме линейности
законам Кирхгофа для мгновен-
ных значений соответствуют
законы Кирхгофа в операторной
форме.

Если $i(t) \rightarrow I(p)$; $u(t) \rightarrow U(p)$; $e(t) \rightarrow E(p)$,

то в узле:

$$\sum i(t) = 0 \rightarrow \sum I(p) = 0;$$

и в контуре:

$$\sum u(t) = \sum e(t) \rightarrow \sum U(p) = \sum E(p).$$

Операторные схемы замещения

Расчет переходного процесса операторным методом состоит из трех этапов:

1 – переход от оригиналов к изображениям на основе прямого преобразования Лапласа; 2 – определение изображения выходной величины: тока или напряжения;

3 – определение оригинала искомой величины

Уравнения для операторных изображений токов и напряжений можно получить по уравнениям Кирхгофа. Проще – использовать эквивалентные операторные схемы замещения для элементов цепи.

Для ***RLC***-ветви с током ***i(t)***,
напряжение ***u(t)*** будет равно

$$u = u_R + u_L + u_C = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t idt,$$

где

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t idt = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 idt + \frac{1}{C} \int_0^t idt = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t idt.$$

Согласно теоремам линейности, дифференцирования и интегрирования :

$$U(p) = I(p)R + LpI(p) - Li(0) + \frac{u_c(0)}{p} + \frac{I(p)}{Cp}.$$

Отсюда закон Ома

$$I(p) = \frac{U(p) + Li(0) - u_c(0)/p}{Z(p)}$$

где $Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}$ - операторное сопротивление;

$Li(0)$; $u_c(0)/p$ - источники ЭДС,
учитывающие ненулевые начальные
условия. Для нулевых начальных
условий имеем

$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}.$$

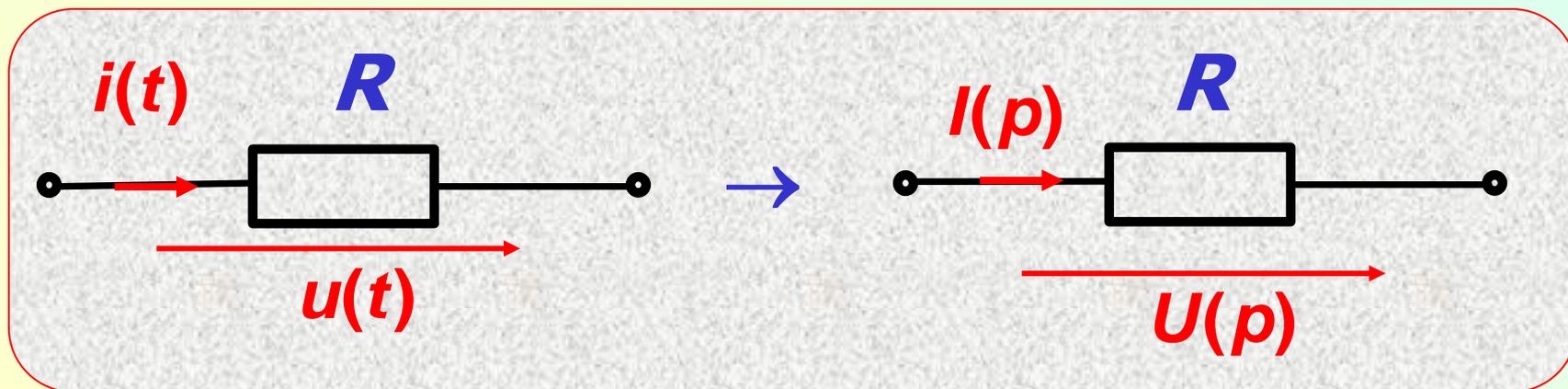
Полученные алгебраические
выражения позволяют составить
для элементов цепи операторные
схемы замещения.

1. Резистивный элемент

Напряжение и ток на элементе
связаны законом Ома

$$U(p) = RI(p); \quad Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)}; \quad Z(p) = R.$$

Схема замещения

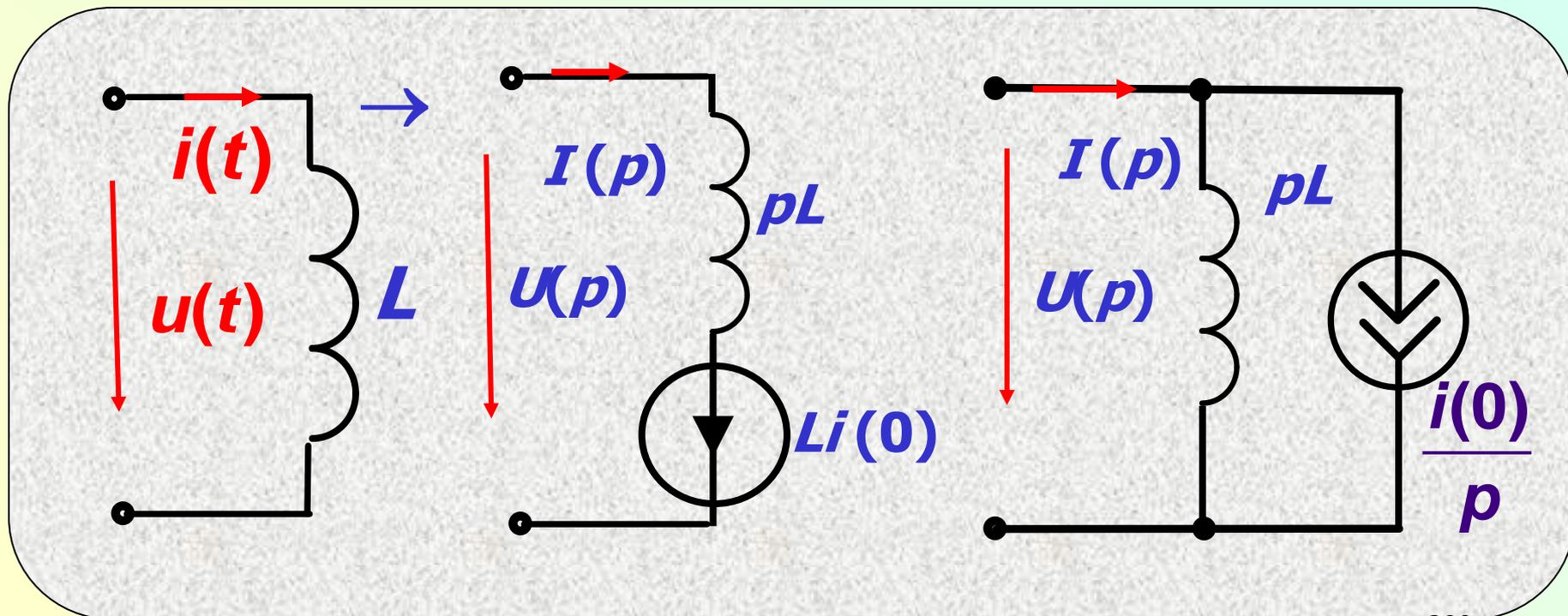


2. Индуктивный элемент

Напряжение и ток связаны уравнением

$$U(p) = LpI(p) - Li(0).$$

Схемы замещения

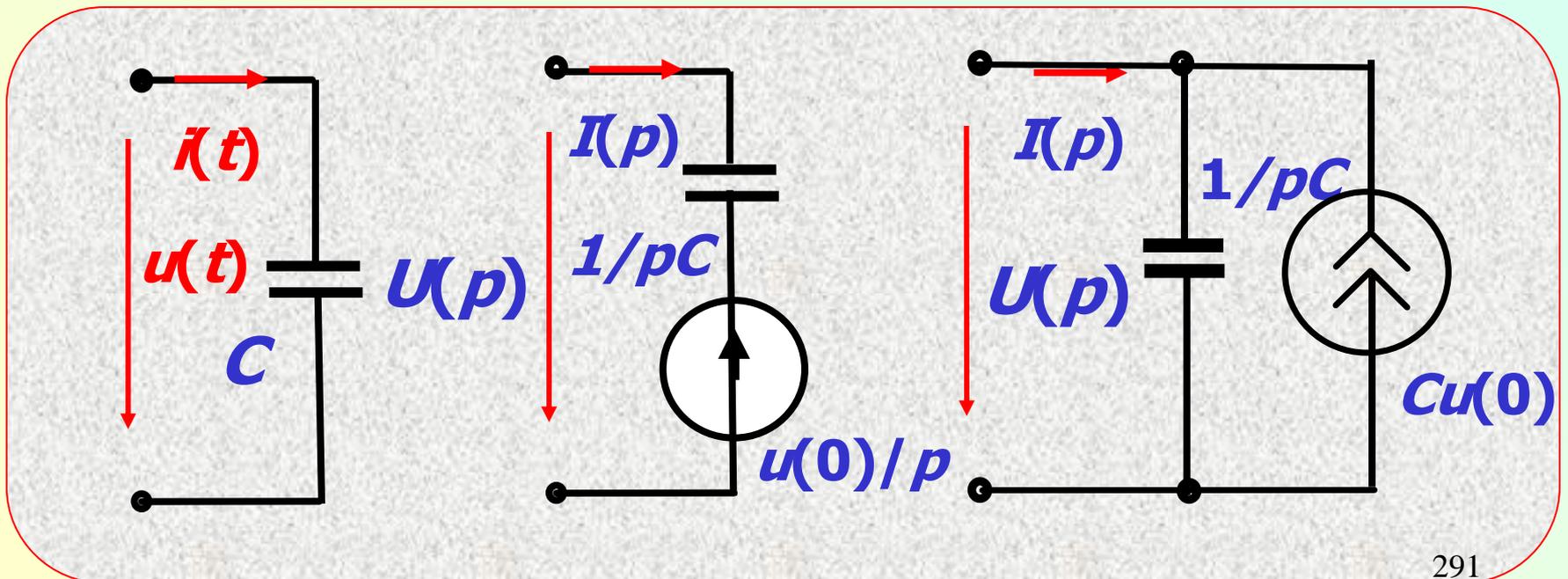


3. Емкостный элемент

Напряжение и ток связаны уравнением

$$U(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u(0)}{p}$$

Схемы замещения



Переход от изображений к оригиналам

Оригинал можно находить с помощью обратного преобразования Лапласа (4). На практике используют теорему о вычетах

$$f(t) = \sum_{p_k} \operatorname{res} F(p) e^{p_k t},$$

где p_k – особые точки функции $F(p)$, охваченные контуром интегрирования.

Если изображение – дробно-рациональная функция с простыми корнями и степень полинома числителя ниже степени знаменателя $n > m$

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{A_m \cdot p^m + A_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + A_0}{B_n \cdot p^n + B_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + B_0},$$

то оригинал определяется суммой экспоненциальных функций

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t},$$

где p_k – корни знаменателя.

Если один из корней нулевой, то

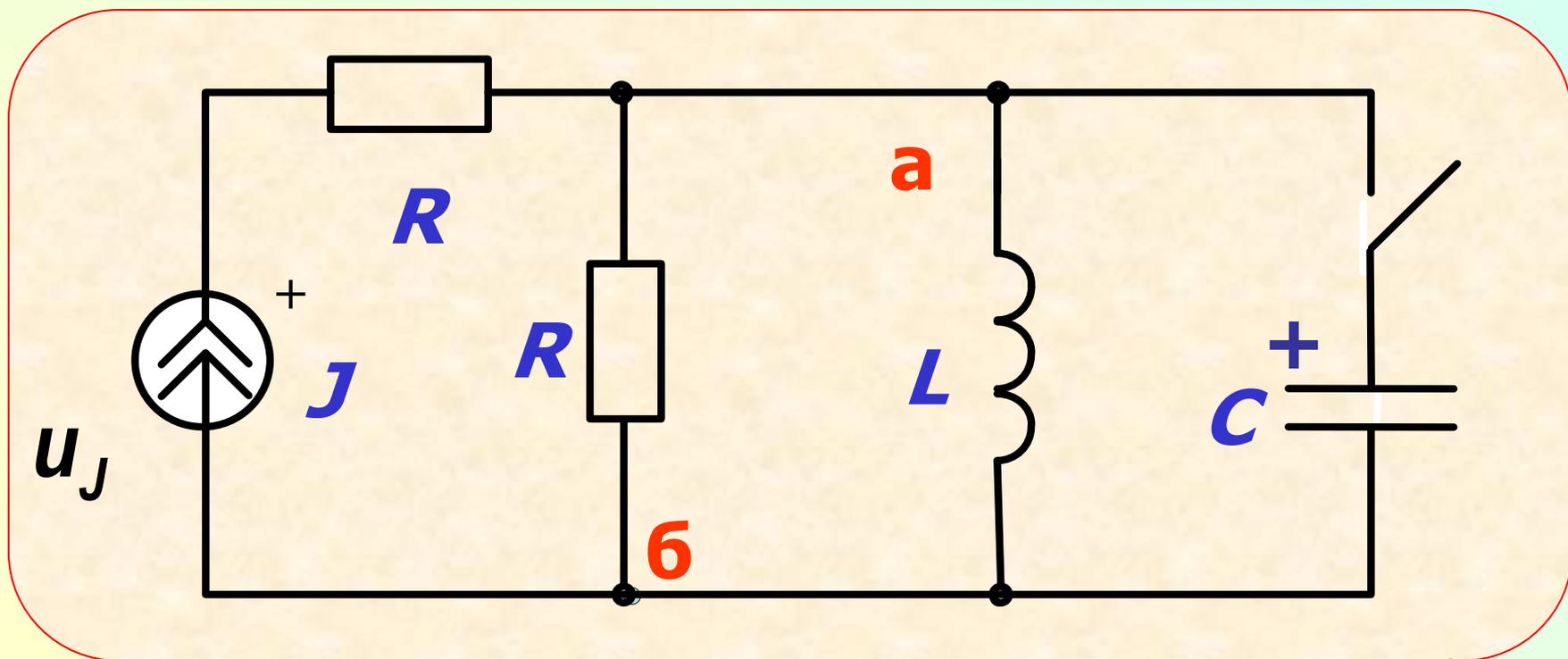
$$f(t) = \frac{A(0)}{B_1(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{p_k B_1'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Данное выражение – теорема разложения.

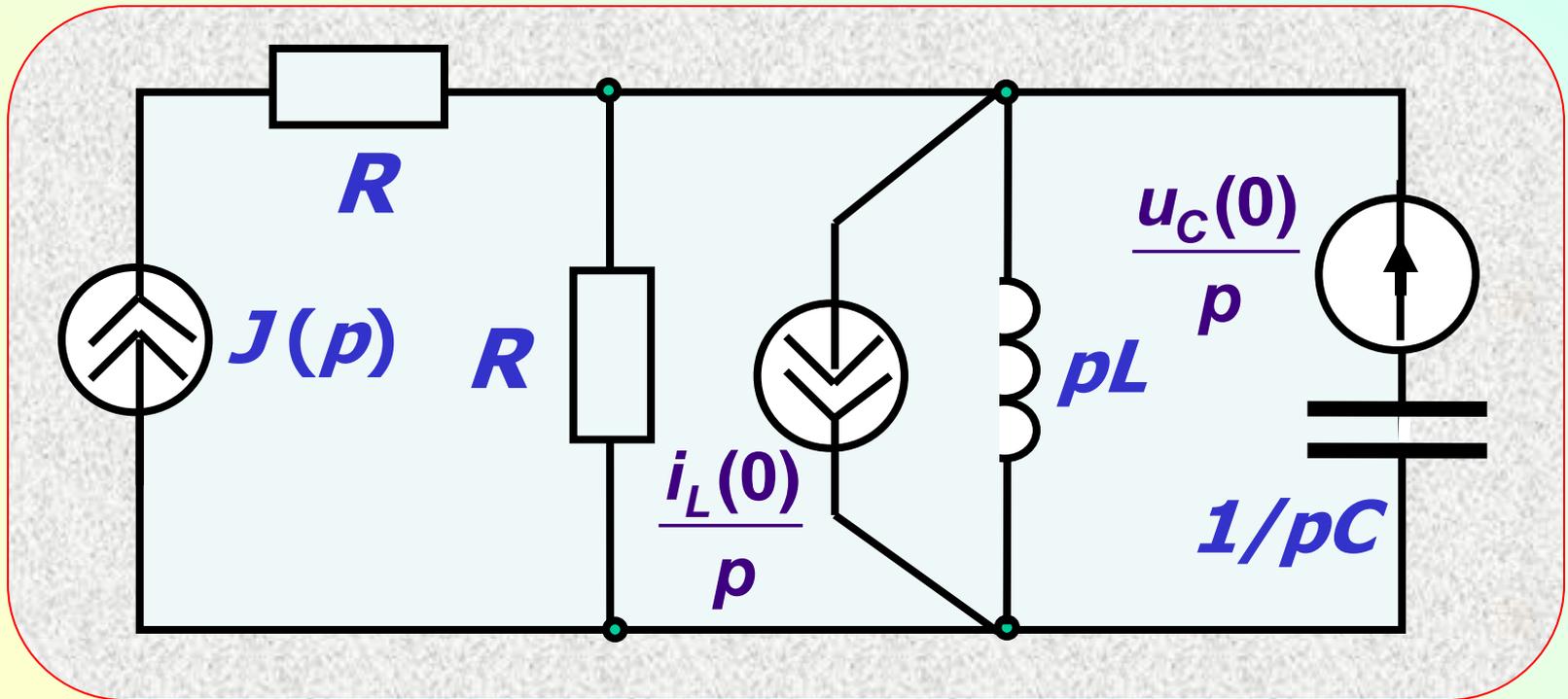
При комплексных сопряженных корнях для каждой пары имеем

$$\begin{aligned} \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} e^{p_2 t} &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} e^{p_1 t} \right\} = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} e^{p_2 t} \right\} = \\ &= 2 M e^{-\delta t} \cos(\omega_{CB} t + \arg \underline{M}). \end{aligned}$$

Пример. Определить закон изменения напряжения на заряженном конденсаторе, если $J=1$ А; $R=40$ Ом; $L=0,1$ Гн; $C=10$ мкФ; $u_C(0) = 60$ В.



Решение. 1. Определяем независимые начальные условия: $i_L(0) = J$; $u_C(0) = 60$ В. Эквивалентная схема принимает вид



2. Операторное изображение напряжения на конденсаторе найдем методом двух узлов.

$$U_C(p) = \frac{J(p) - i_L(0)/p + (u_C(0)/p)pC}{1/R + 1/pL + pC}.$$

Численно:

$$U_C(p) = \frac{60p}{p^2 + 2500p + 1000000}.$$

3. Находим оригинал по теореме разложения, предварительно определив корни знаменателя:

$$p^2 + 2500p + 1000000 = 0;$$

$$p_1 = -500 \text{ с}^{-1}; \quad p_2 = -2000 \text{ с}^{-1}.$$

Корни вещественные, поэтому

$$f(t) = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} e^{p_2 t}.$$

Производная знаменателя

$$B'(p) = 2p + 2500;$$

$$B'(p_1) = 1500; \quad B'(p_2) = -1500.$$

Подставляя в формулу теоремы разложения, получаем

$$u(t) = \frac{60(-500)}{1500} e^{-500t} + \frac{60(-2000)}{-1500} \cdot e^{-2000t} = -20e^{-500t} + 80e^{-2000t} \text{ В.}$$

Можно воспользоваться системой Mathcad:

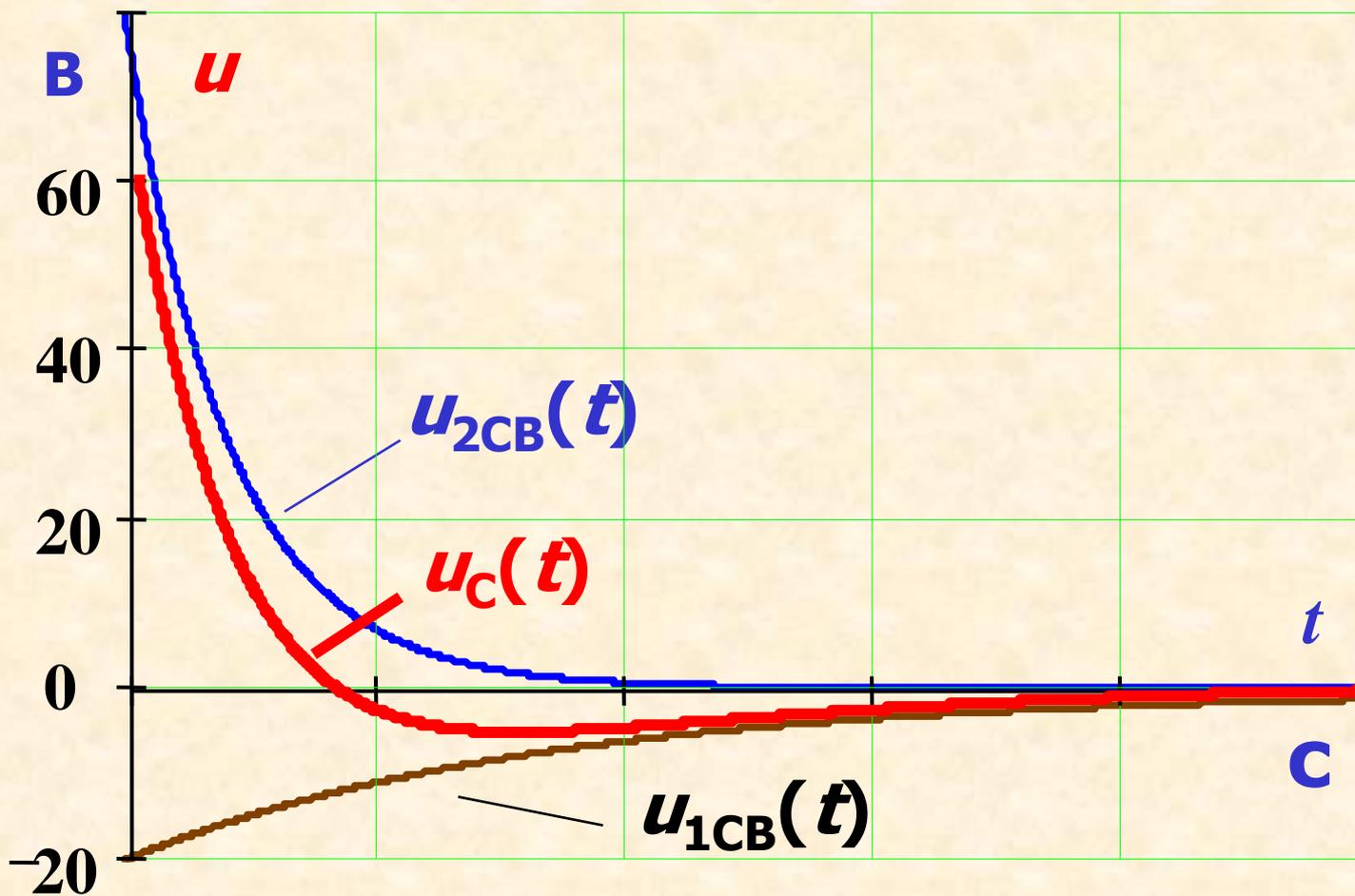
$$\underline{R} := 40 \quad \underline{L} := 0.1 \quad \underline{C} := 10^{-5} \quad u_{C0} := 60$$

$$i_{L0} := 1 \quad U_C(p) := \frac{\frac{1}{p} - \frac{i_{L0}}{p} + \frac{u_{C0}}{p} \cdot p \cdot C}{\frac{1}{R} + \frac{1}{p \cdot L} + p \cdot C}$$

$$U_C(p) \text{ simplify} \rightarrow 60 \cdot \frac{p}{p^2 + 2500 \cdot p + 1000000}$$

$$U_C(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow 80 \cdot e^{(-2000) \cdot t} - 20 \cdot e^{(-500) \cdot t}$$

График изменения напряжения



$6 \cdot 10^{-3}$
302

Замечание. Если степени числителя и знаменателя дроби равны ($n=m$), теорему разложения можно применять после выделения целой части. Ей соответствует оригинал в виде δ -функции. Mathcad умеет находить оригиналы изображений для таких дробей.

Например,

$$I(p) := \frac{2 \cdot p^2 + 80 \cdot p + 300}{p^2 + 40 \cdot p + 300}$$

$$I(p) \text{ in Laplace, } p \rightarrow 2 \cdot \Delta(t) + 15 \cdot e^{(-30) \cdot t} - 15 \cdot e^{(-10) \cdot t}$$

Здесь δ -функция обозначена как $\Delta(t)$

Порядок расчёта переходных процессов операторным методом

1. В цепи до коммутации находятся независимые начальные условия: $u_C(0)$ и $i_L(0)$.
2. Составляется операторная схема замещения.
3. Определяются изображения искомых величин.
4. Находят их оригиналы.



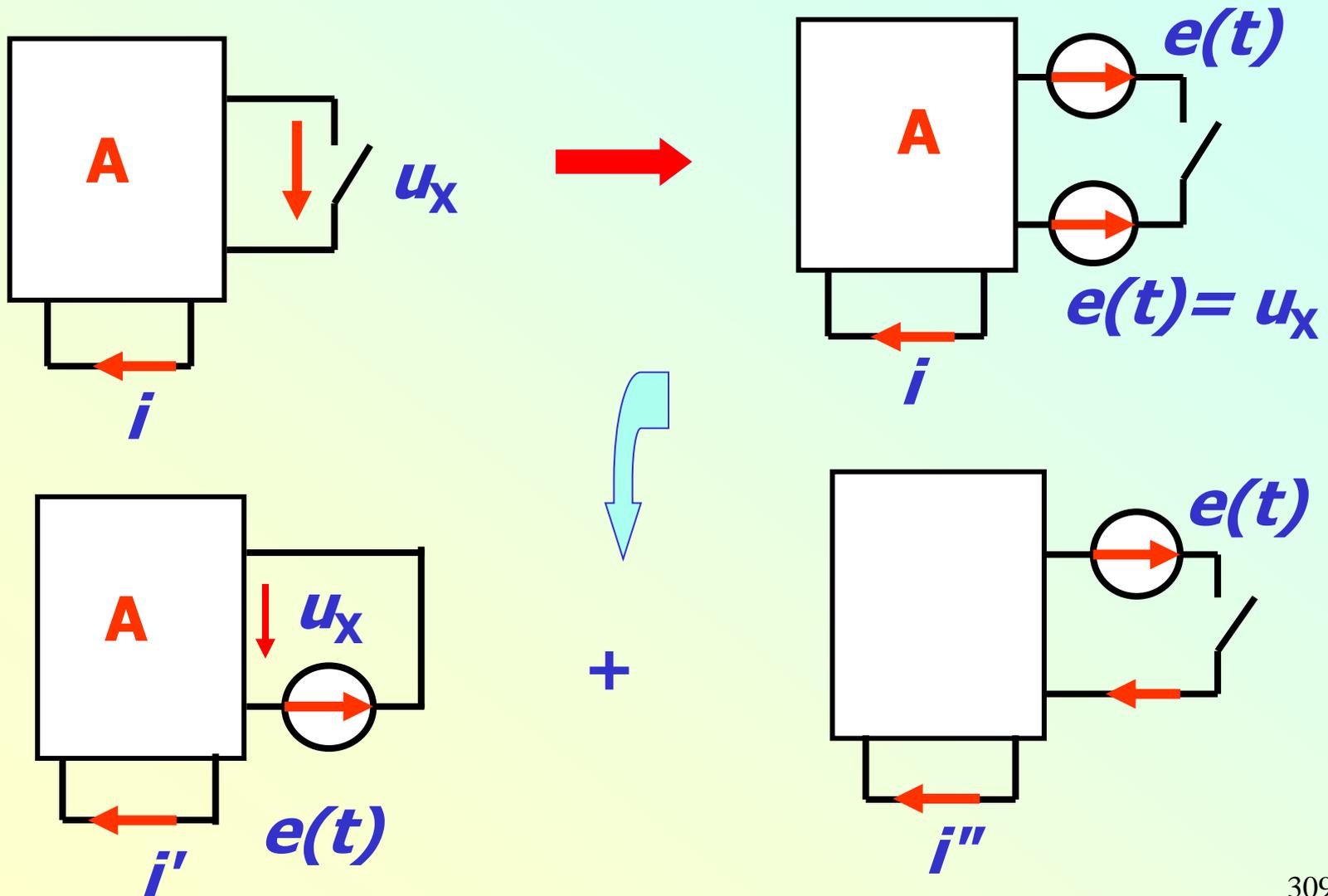
Приведение цепи к нулевым начальным условиям

Приведение цепи к нулевым начальным условиям.

При расчете цепей операторным методом ненулевые начальные условия существенно усложняют изображения искомым величин. Методы интеграла Дюамеля и спектральный разработаны **для цепей с **нулевыми** начальными условиями.**

Чтобы устранить ограничения в применении этих методов или упростить операторные изображения, цепь приводят к нулевым начальным условиям

1. При замыкании рубильника



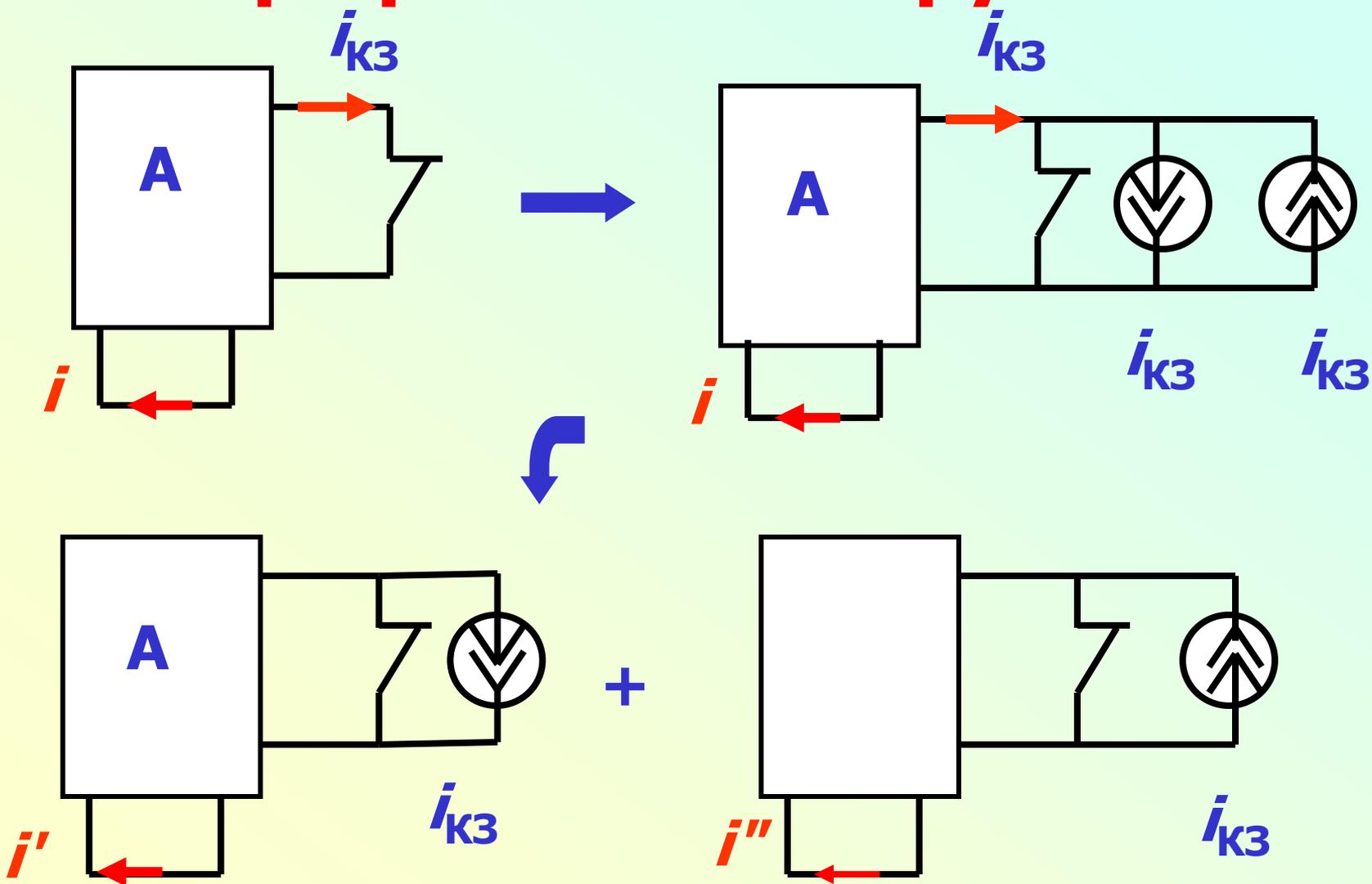
Согласно принципу наложения

$$i = i' + i''$$

Если $e(t) = u_x(t)$, то i' - равен току до коммутации при любом положении ключа. В последней схеме с нулевыми начальными условиями действует только один источник.

Таким образом, искомый ток равен сумме токов докоммутационного режима и тока переходного режима в цепи с нулевыми начальными условиями.

2. При размыкании рубильника



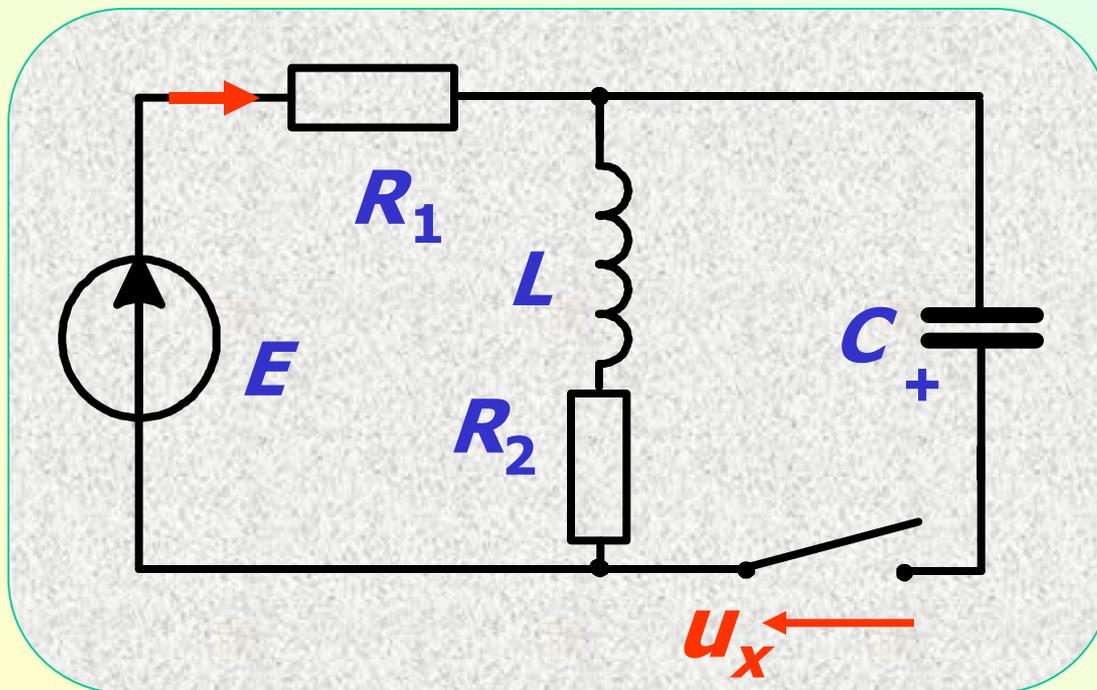
Очевидно, что $i = i' + i''$,

где i' – ток в схеме до коммутации, не зависящий от положения ключа.

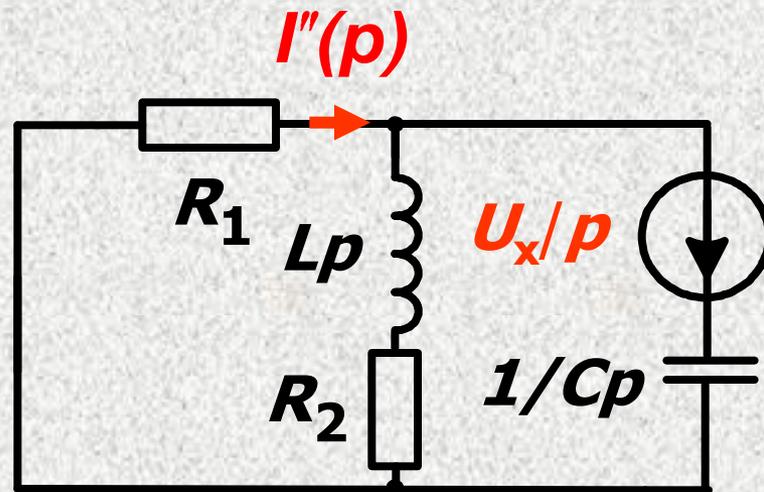
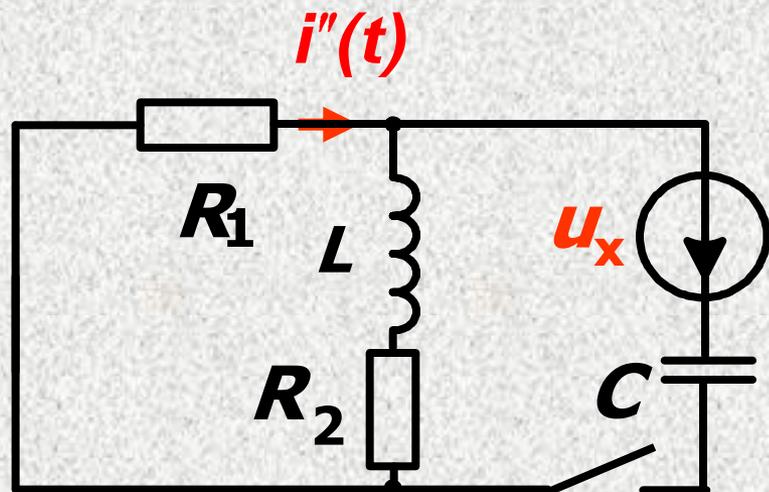
i'' – ток переходного режима цепи с нулевыми начальными условиями.

Таким образом, искомый ток равен сумме токов докоммутационного режима и тока переходного режима в цепи с нулевыми начальными условиями при подключении цепи к источнику тока.

Пример 1. Найти закон изменения тока в цепи источника ЭДС $E=120$ В, если: $R_1=40$ Ом; $R_2=80$ Ом; $L=20$ мГн; $C=25$ мкФ; $u_C(0)=100$ В.



Решение.
Приведем
схему к
нулевым
начальным
условиям



Искомый ток определим методом наложения: $i(t) = i'(t) + i''(t)$,

где i' - ток установившегося режима до коммутации;

i'' - ток после коммутации.

До коммутации

$$i' = i'_{R2} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{120}{40 + 80} = 1 \text{ A.}$$

После коммутации ток i'' найдем операторным методом, предварительно определив U_x в схеме до коммутации.

По второму закону Кирхгофа

$$U_x = R_2 i_{R2} + u_C(0) = 80 + 100 = 180 \text{ B.}$$

Операторное изображение тока $I''(p)$
по методу двух узлов равно:

$$I''(p) = \frac{U_{R1}(p)}{R_1} = \frac{U_x(p)Cp}{[1/R_1 + 1/(R_2 + Lp) + Cp]R_1},$$

где $U_x(p) = U_x/p$.

Подставляя числовые значения,
получим

$$I''(p) = \frac{4,5p + 1,8 \cdot 10^4}{p^2 + 5 \cdot 10^3 p + 6 \cdot 10^6}.$$

Корни знаменателя:

$$p_1 = -2000 \text{ с}^{-1}; \quad p_2 = -3000 \text{ с}^{-1}.$$

Оригинал тока находим по теореме разложения:

$$i''(t) = \frac{4,5(-2000) + 18 \cdot 10^3}{2(-2000) + 5 \cdot 10^3} e^{-2000t} + \\ + \frac{4,5(-3000) + 18 \cdot 10^3}{2(-3000) + 5 \cdot 10^3} e^{-3000t}$$

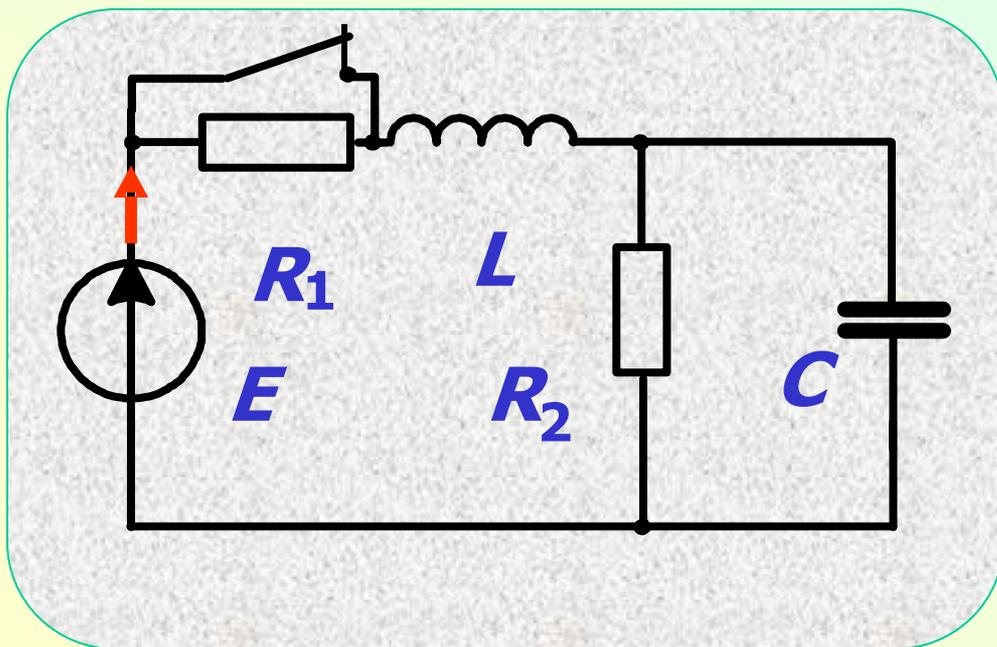
$$i''(t) = 9e^{-2000t} - 4,5e^{-3000t} \quad \text{А.}$$

Суммируем составляющие тока:

$$i(t) = 1 + 9e^{-2000t} - 4,5e^{-3000t} \quad \text{А.}$$

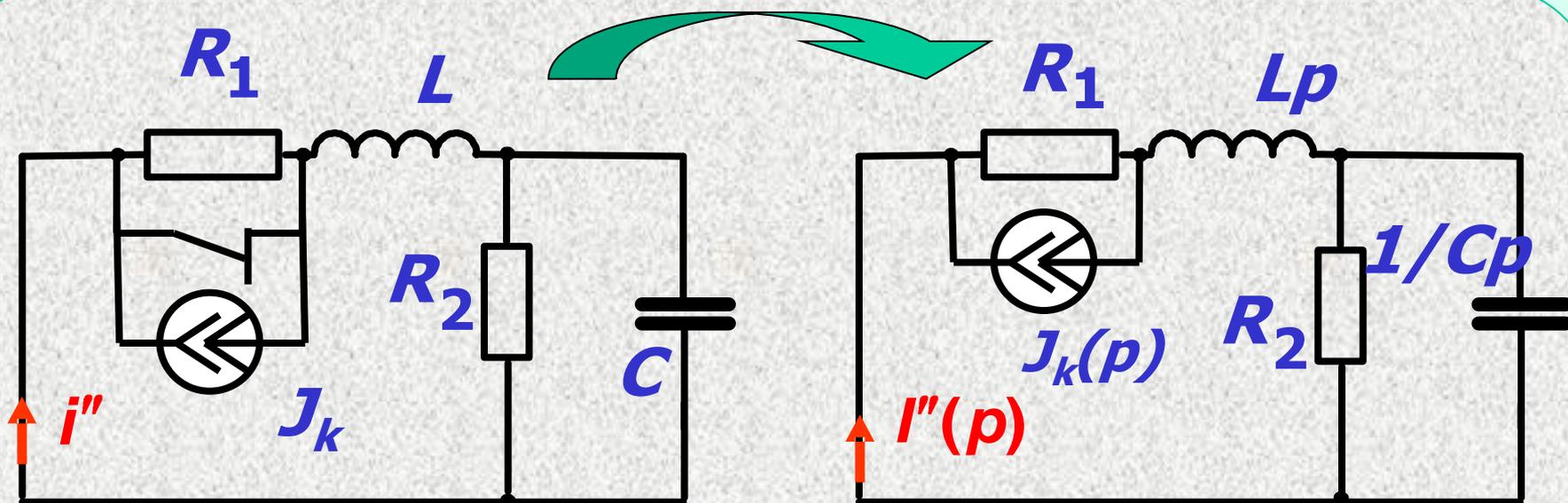
Таким образом, расчет переходного режима в цепи **с ненулевыми начальными условиями** сведен **к** расчету цепи **с нулевыми начальными условиями**

Пример 2. Найти закон изменения тока в ветви с источником ЭДС $E=200$ В, если $R_1=R_2=100$ Ом; $L=1$ Гн; $C=100$ мкФ.



Решение.
Приведем цепь к нулевым НУ и найдем ток методом наложения:
$$i(t) = i'(t) + i''(t)$$

i'' – ток установившегося режима до коммутации; i''' – ток, вызванный источником тока J_k в пассивной цепи при размыкании ключа



Ток i' до коммутации

$$i' = E / R_2 = 200 / 100 = 2 \text{ А.}$$

Этот ток течет по ключу, поэтому

$$J_k = i' = 2 \text{ А.}$$

Ток переходного процесса

$$I''(p) = \frac{-R_1 J_k / p}{R_1 + Lp + \frac{R_2 1 / Cp}{R_2 + 1 / Cp}}.$$

Подставляем числовые значения

$$I''(p) = \frac{A(p)}{pB(p)} = \frac{-200p - 2 \cdot 10^4}{p(p^2 + 200p + 2 \cdot 10^4)}$$

Корни знаменателя:

$$p_{1,2} = -100 \pm j100 \text{ с}^{-1}.$$

Оригинал тока находим по теореме разложения

$$i'' = \frac{A(0)}{B(0)} + 2\text{Re}\left\{ \frac{A(p_1)}{pB'(p_1)} e^{p_1 t} \right\}$$

$$i'' = -1 - 2\operatorname{Re}\left\{\frac{100}{100(-1 + j1)} e^{(-100 + j100)t}\right\} =$$
$$= -1 - 1,41e^{-100t} \cos(100t - 135^\circ) \text{ A.}$$

**Суммируя найденные составляющие,
находим**

$$i(t) = 1 + 1,41e^{-100t} \cos(100t - 45^\circ) \text{ A.}$$

Цепи с некорректными коммутациями

После срабатывания коммутатора в цепи могут образовываться контуры из емкостных элементов и источников ЭДС или сечения из индуктивных элементов и источников тока. Это – некорректные коммутации.

При таких коммутациях нарушается непрерывность токов катушек и напряжений на конденсаторах, т.е. нарушаются обычные законы коммутации. При этом принципы непрерывности суммарного потокосцепления катушек или суммарного заряда конденсаторов выполняются.

Таким образом, при расчете переходных процессов классическим методом в таких цепях нужно использовать **обобщенные законы коммутации**

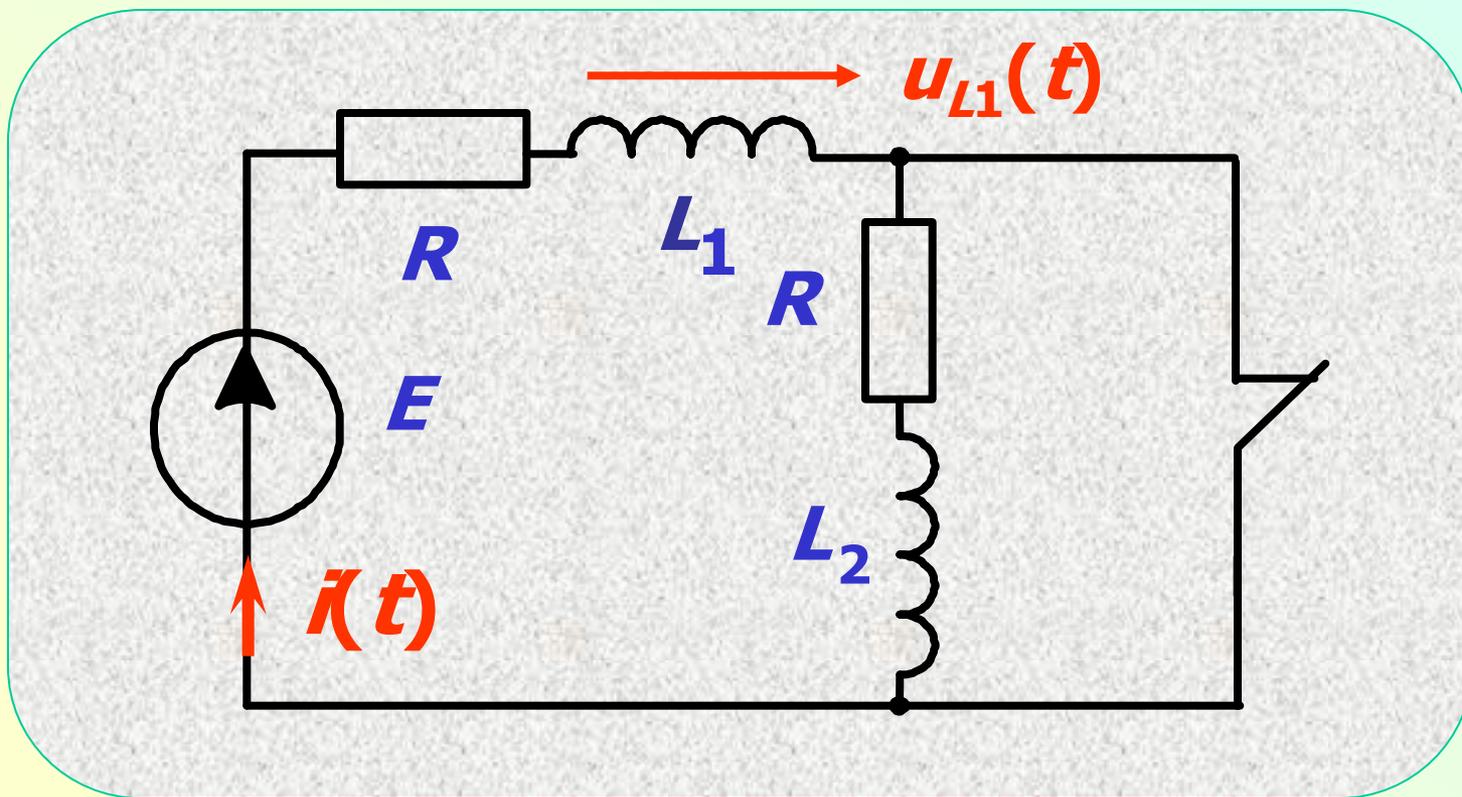
$$\sum \Psi_K(0_+) = \sum \Psi_K(0_-);$$

$$\sum q_K(0_+) = \sum q_K(0_-).$$

Операторный метод обладает по сравнению с классическим явным **преимуществом**, позволяя рассчитывать цепи с некорректными коммутациями **по общей схеме** с использованием начальных условий для токов и напряжений, **определенных до коммутации.**

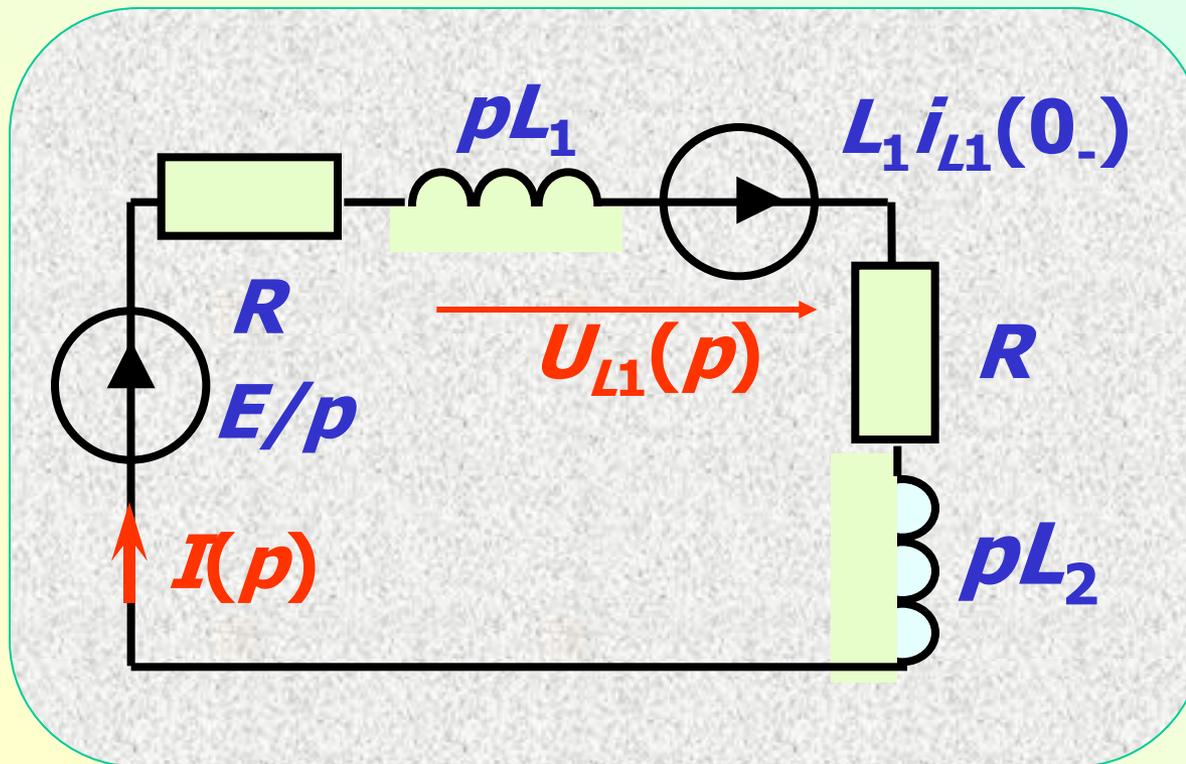
При этом обобщенные законы коммутации выполняются автоматически. Покажем это на примере расчета простейших схем.

Пример 1. Пусть $R = 10$ Ом; $E = 10$ В;
 $L_1 = 1$ Гн; $L_2 = 3$ Гн. Найти ток $i(t)$ и
напряжение $u_{L_1}(t)$.



Решение. 1. Начальные условия для токов в катушках

$$i_{L_1}(0_-) = \frac{E}{R} = \frac{10}{10} = 1 \text{ A}; \quad i_{L_2}(0_-) = 0.$$



Операторная схема

Операторное изображение тока $I(p)$

$$I(p) = \frac{E / p + L_1 i_{L_1}(0_-)}{2R + p(L_1 + L_2)} = \frac{p + 10}{p(4p + 20)};$$

операторное изображение
напряжения $U_{L_1}(p)$

$$\begin{aligned} U_{L_1}(p) &= pL_1 I(p) - L_1 i_{L_1}(0_-) = \\ &= \frac{-3p - 10}{4p + 20}. \end{aligned}$$

По теореме разложения находим оригинал тока (корни знаменателя **0** и **-5 с⁻¹**)

$$i(t) = 0,5 - 0,25e^{-5t} \quad \text{А.}$$

Чтобы найти оригинал напряжения, сначала нужно выделить из изображения целую часть.

Выделив, получаем:

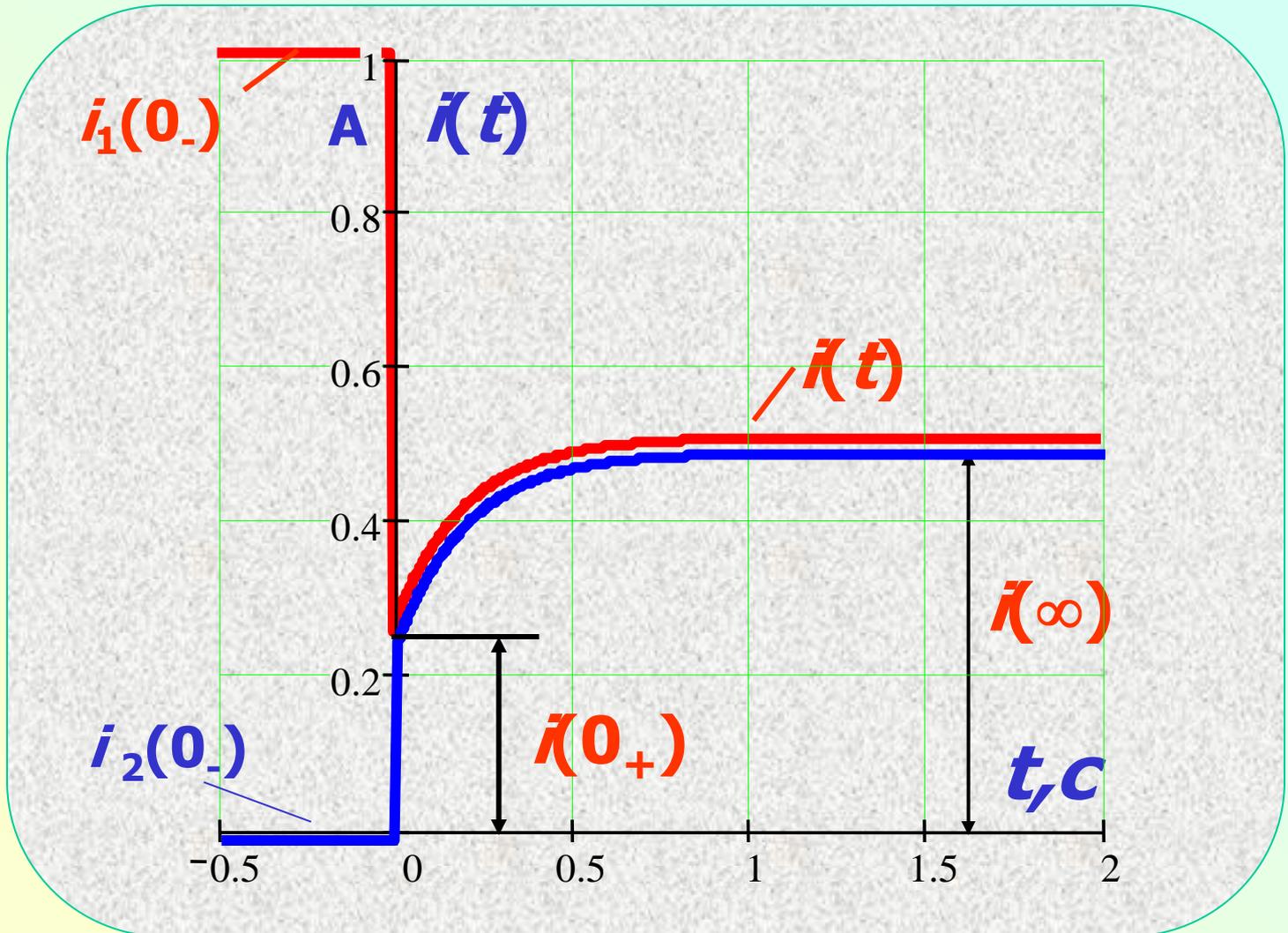
$$U_{L1}(p) = -\frac{3}{4} + \frac{5}{4(p+5)}.$$

Выделенная часть определяет дельта-функцию; второе слагаемое – правильная дробь и можно использовать теорему разложения:

$$u_{L1}(t) = -0,75\delta(t) + 1,25e^{-5t} \text{ В.}$$

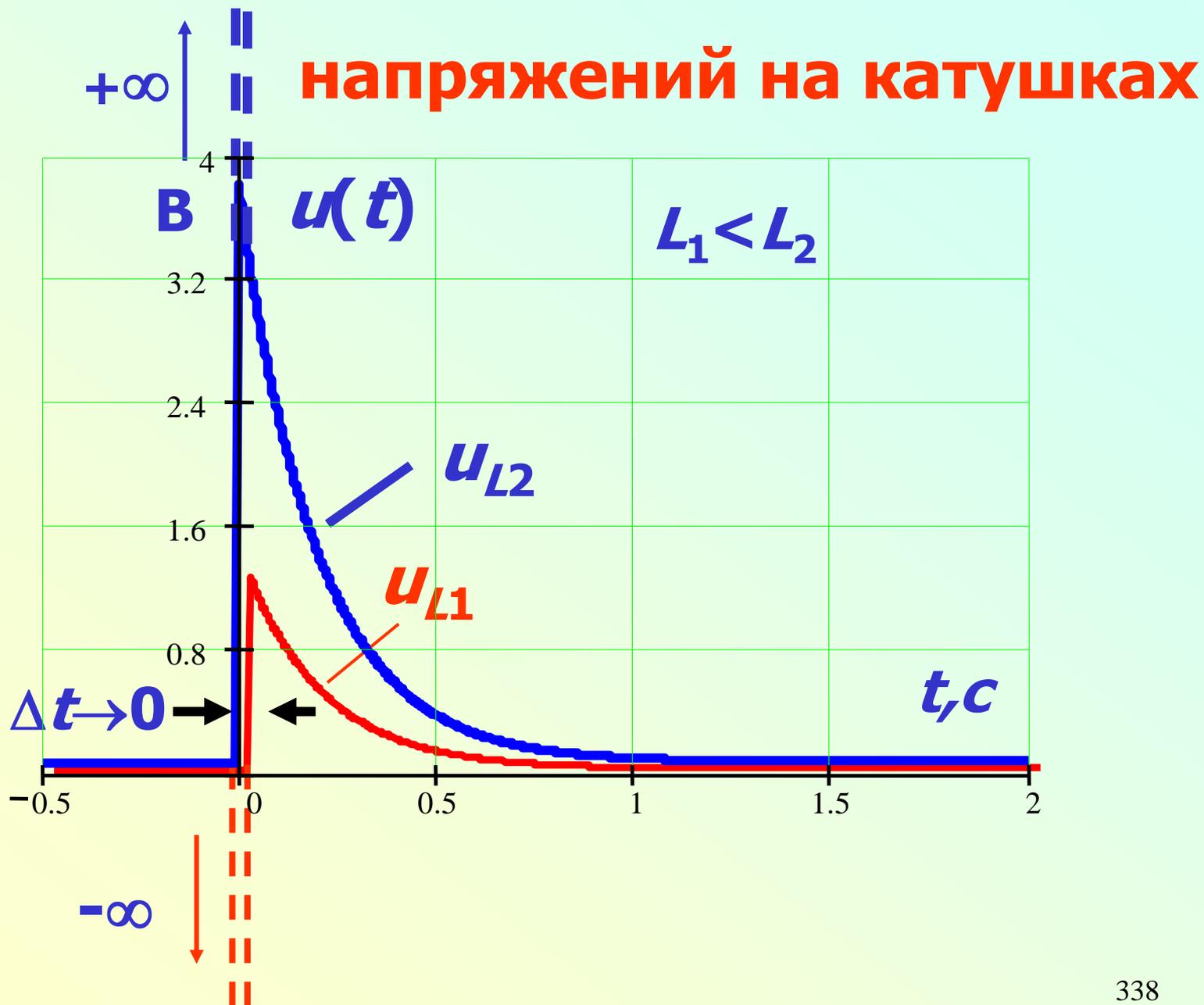
ТОКОВ В катушках

Графики изменения



Анализ показывает, что после коммутации ток в катушках изменяется скачком: в первой катушке он уменьшился от 1 до 0,25 А, во второй – возрос до этой же величины.

Графики изменения



Вследствие скачкообразного изменения токов **напряжения на катушках в момент некорректной коммутации принимают бесконечно большие значения в виде импульсных функций.**

Как видно из графиков, в переходном режиме можно выделить две составляющие:
начальную быструю, имеющую импульсный характер и последующую медленную, имеющую экспоненциальный характер

Быстрая составляющая
обеспечивает практически
мгновенное перераспределение
энергии.

Медленная составляющая
осуществляет **окончательное**
перераспределение энергии.

В момент некорректной коммутации непрерывность энергии нарушается:

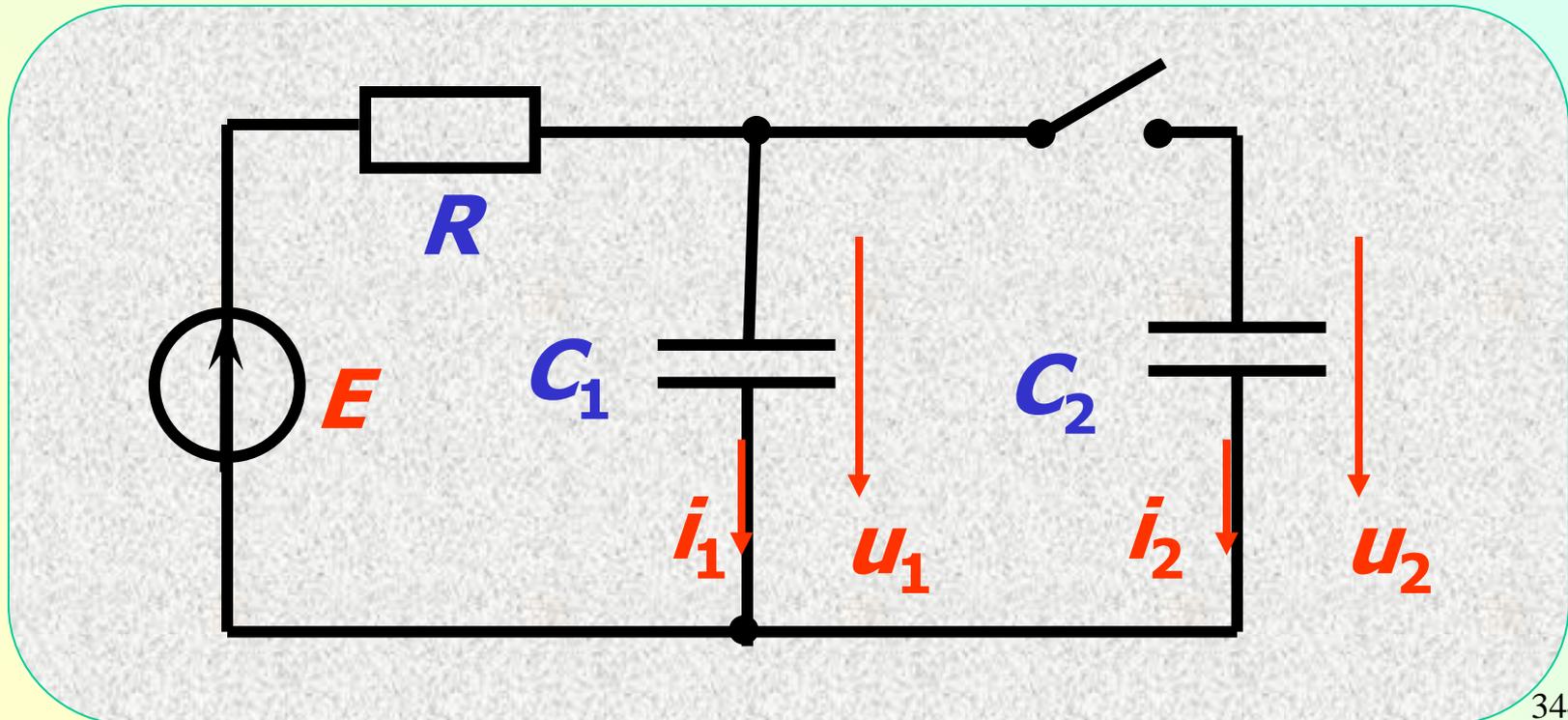
$$W_M(0_-) = \frac{L_1 i_{L1}^2(0_-)}{2} = 0,5 \text{ Дж},$$

$$W_M(0_+) = \frac{L_1 i_{L1}^2(0_+)}{2} + \frac{L_2 i_{L2}^2(0_+)}{2} = 0,125 \text{ Дж};$$

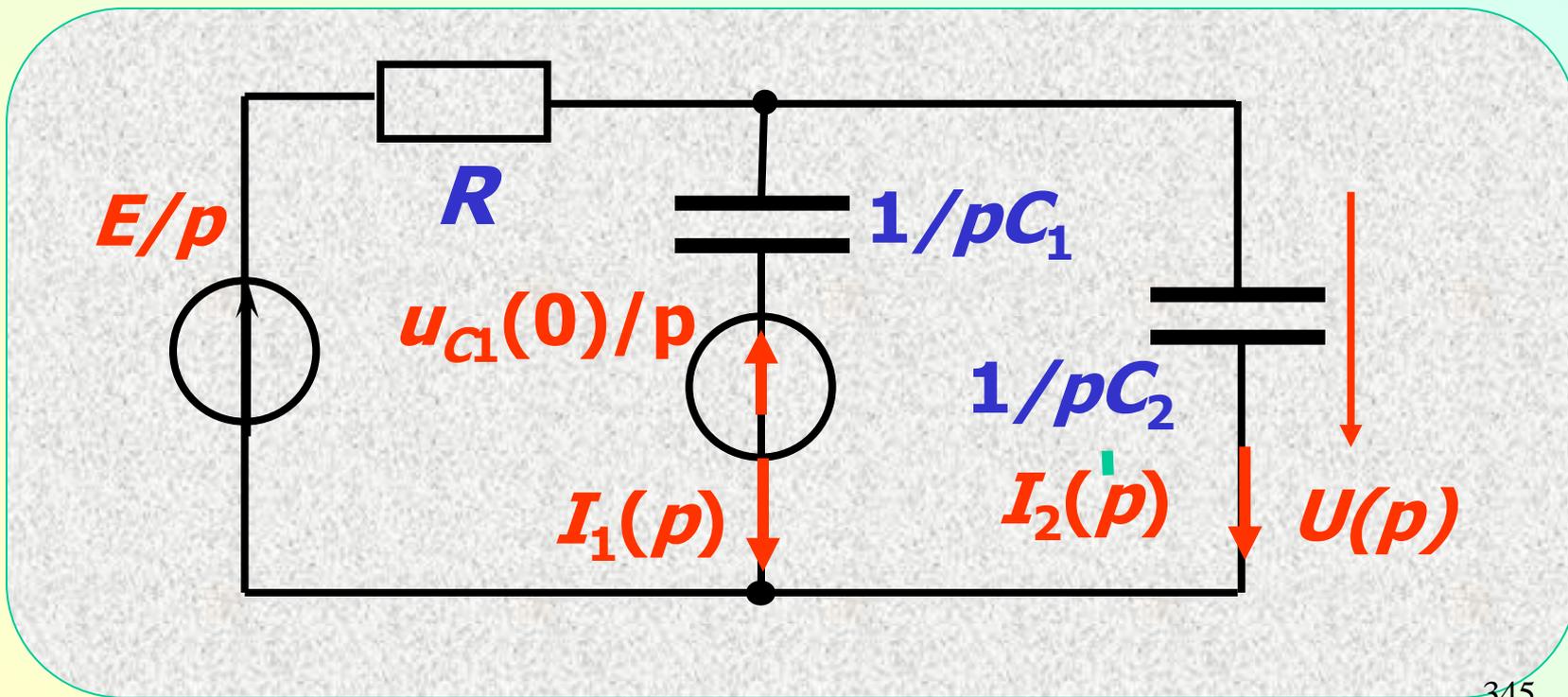
$$\Delta W_M = W_M(0_-) - W_M(0_+) = 0,375 \text{ Дж.}$$

**«Потерянная» энергия
расходуется во время
коммутации на выделение
тепла в сопротивлении
искры и на излучение.**

Пример 2. Определить токи и напряжения на емкостных элементах при коммутации, если $E = 10$ В; $C_1 = 2$ мкФ; $C_2 = 8$ мкФ; $R = 1$ кОм.



Решение. 1. С учетом начальных условий для напряжений емкостей $u_{C1} = E$ и $u_{C2} = 0$ составляем операторную схему замещения.



Напряжения на емкостях стали одинаковыми $U(p)$. По методу узловых потенциалов находим изображение напряжения:

$$\begin{aligned} U(p) &= \frac{E / pR + u_{C_1}(0_-)C_1}{1/R + pC_1 + pC_2} = \\ &= \frac{E(pRC_1 + 1)}{p[pR(C_1 + C_2) + 1]} \end{aligned}$$

По теореме разложения находим оригинал напряжения

$$u(t) = E \cdot \frac{E \left[RC_1 \frac{-1}{R(C_1 + C_2)} + 1 \right]}{R(C_1 + C_2) - 1 / R(C_1 + C_2)} \cdot e^{-\frac{1}{R(C_1 + C_2)} t}$$

Численно: $u(t) = 10 - 8e^{-100t}$ В.

Операторные изображения токов:

$$I_{C1}(p) = [U(p) - u_{C1}(0_-) / p] p C_1;$$

$$I_{C2}(p) = U(p) p C_2.$$

Численно: $I_{C1}(p) = \frac{-16 \cdot 10^{-6} p}{p + 100};$

$$I_{C2}(p) = \frac{16 \cdot 10^{-6} (p + 500)}{p + 100}.$$

**Чтобы воспользоваться
теоремой разложения нужно
выделить целые части или
воспользоваться программой
Mathcad**

$$I_{C1}(p) := \frac{-16 \cdot 10^{-6} \cdot p}{p + 100}$$

$$I_{C2}(p) := \frac{16 \cdot 10^{-6} \cdot (p + 500)}{p + 100}$$

$$I_{C1}(p) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, p} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow (-.160e-4) \cdot \Delta(t) + .160e-2 \cdot e^{(-100) \cdot t}$$

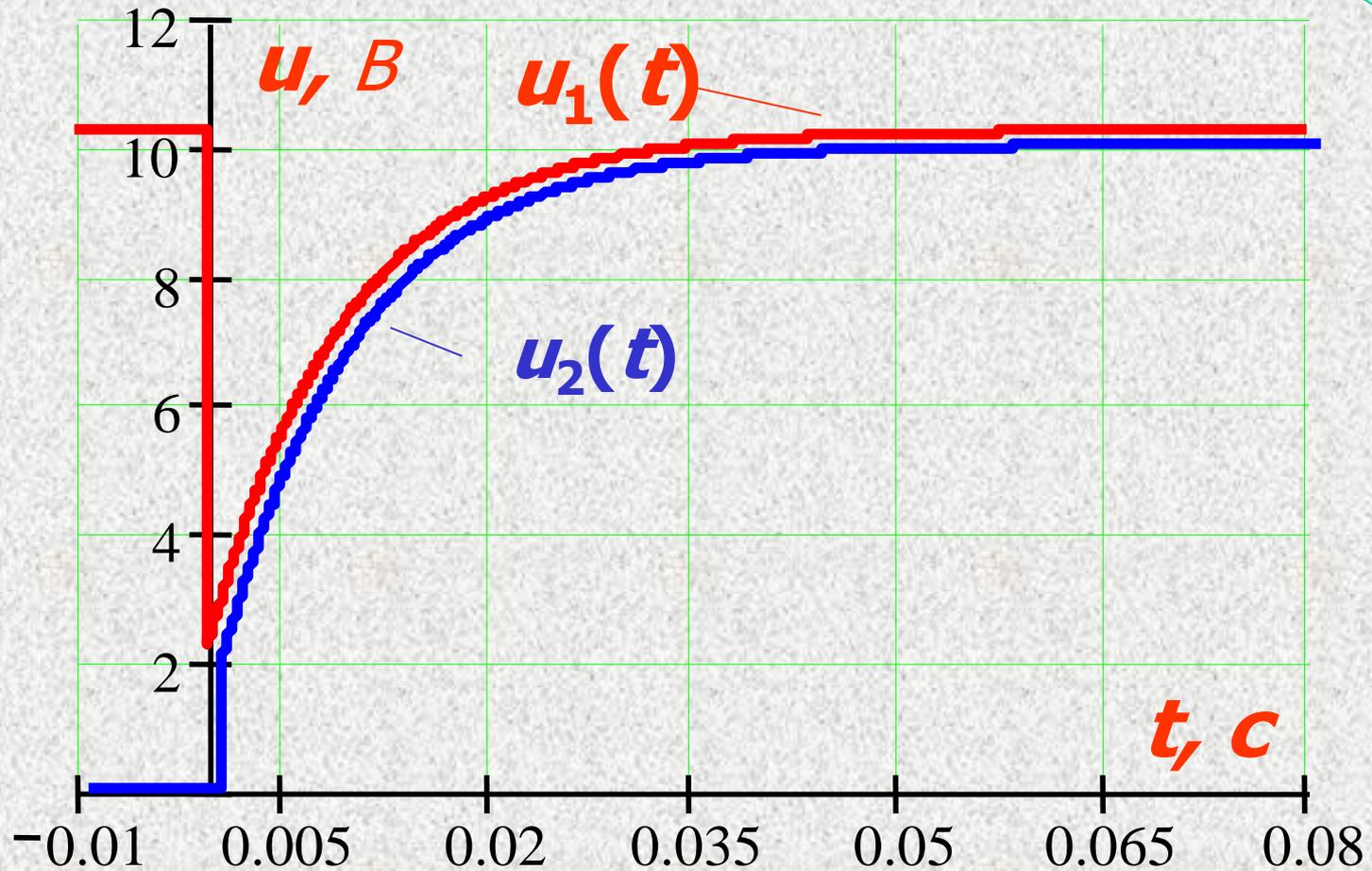
$$I_{C2}(p) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, p} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow .160e-4 \cdot \Delta(t) + .640e-2 \cdot e^{(-100) \cdot t}$$

Быстрая импульсная составляющая тока обеспечивает мгновенную перезарядку конденсаторов. Медленная экспоненциальная составляющая обеспечивает дозарядку обоих конденсаторов до напряжения источника.

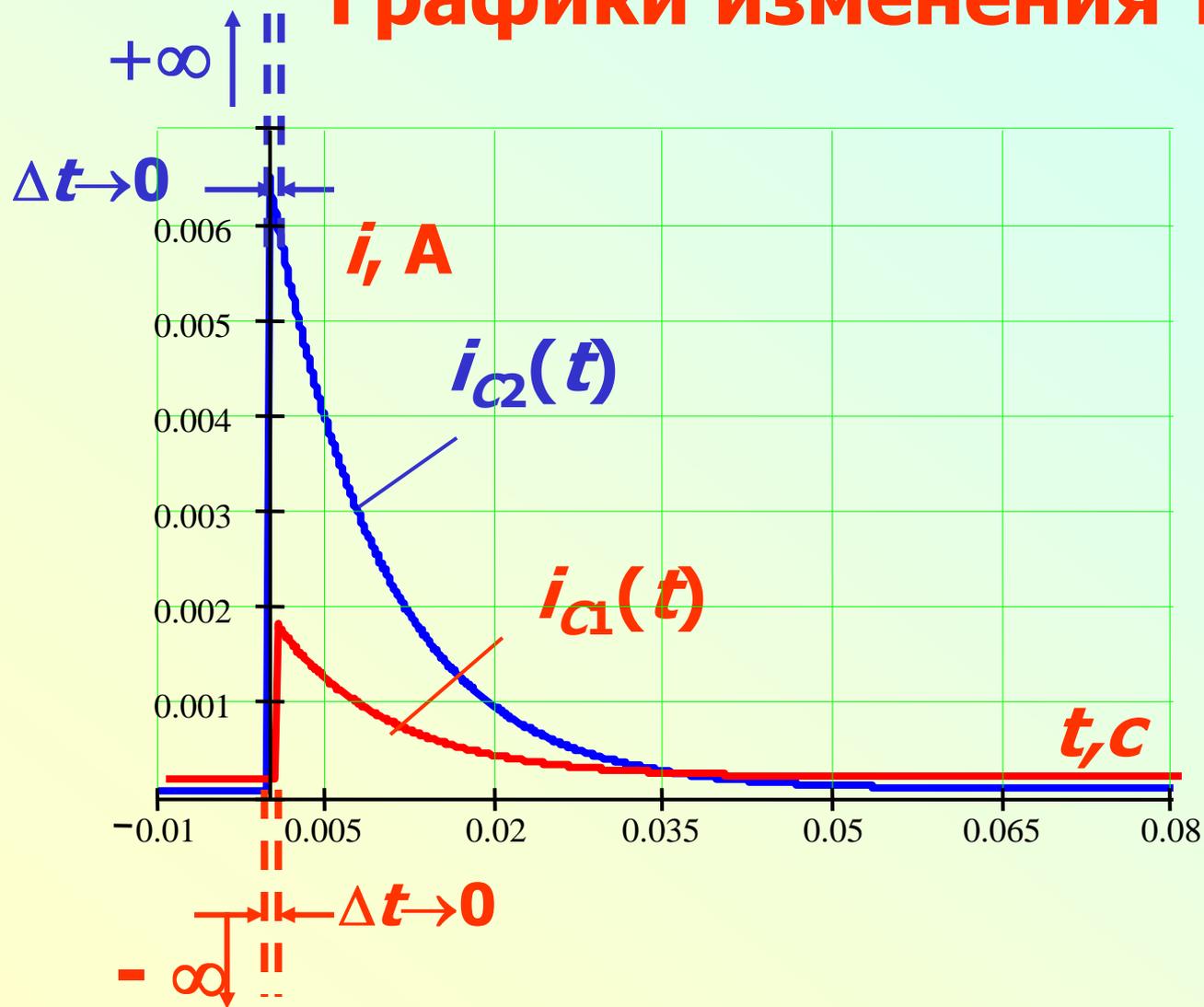
Так же как и в цепи с катушками, при некорректной коммутации нарушается непрерывность **суммарной энергии.**

Суммарная энергия при коммутации **уменьшается,** что связано с необратимыми потерями в контуре перезарядки.

Графики изменения напряжений



Графики изменения токов



Комбинированный метод расчета переходных процессов

**Наличие источников,
определяющих установившиеся
составляющие переходных
режимов, существенно
усложняет операторные
изображения искомым токов и
напряжений.**

Например, источник синусоидальной формы дает два дополнительных корня в знаменателе. При наличии в цепи нескольких синусоидальных источников разных частот, расчет еще более усложняется.

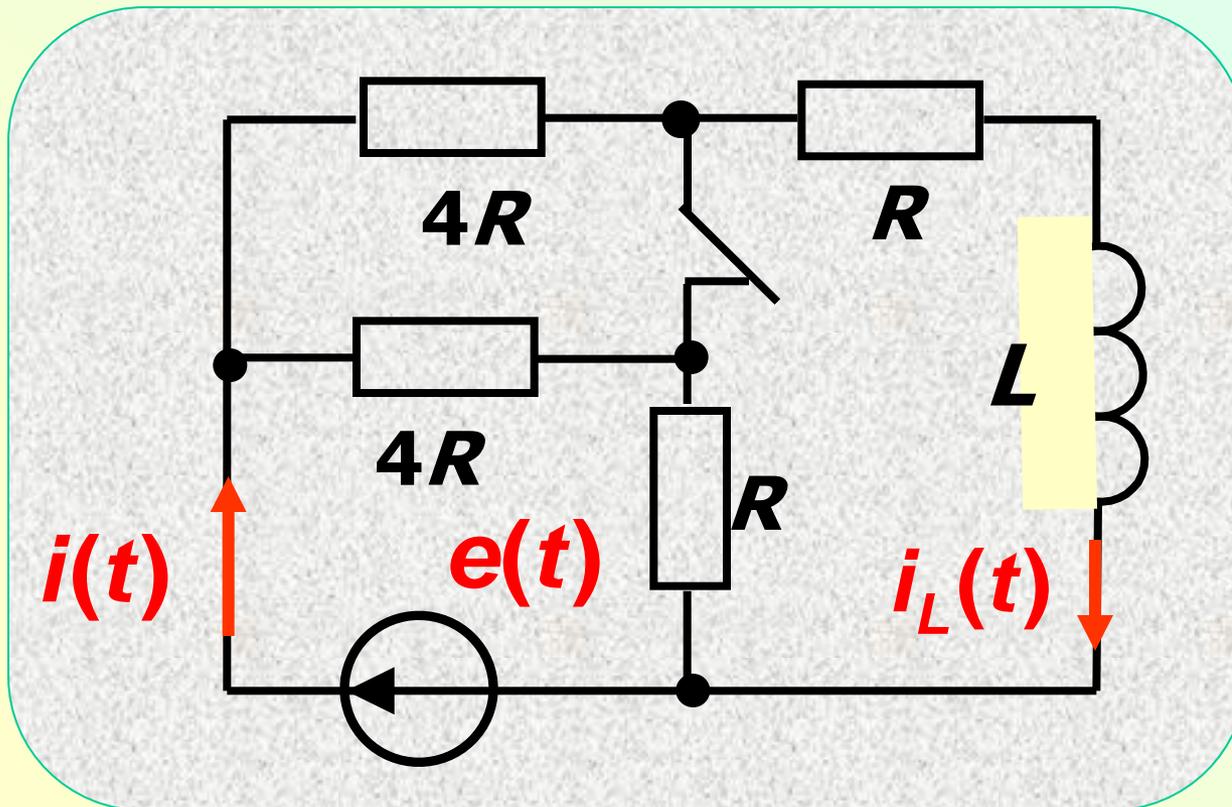
**В этих случаях
установившиеся
составляющие проще найти
классическим методом,
используя методы анализа
установившихся режимов.**

При таком подходе расчет свободных составляющих операторным методом упрощается, так как рассчитываются эквивалентные схемы без внешних источников. В этом суть комбинированного метода расчета переходных процессов.

Пример 1. Найти закон изменения тока источника ЭДС $i(t)$, если:

$$e(t) = 300 \sin(500t + 90^\circ) \text{ В};$$

$$R = 10 \text{ Ом}; \quad L = 0,1 \text{ Гн.}$$



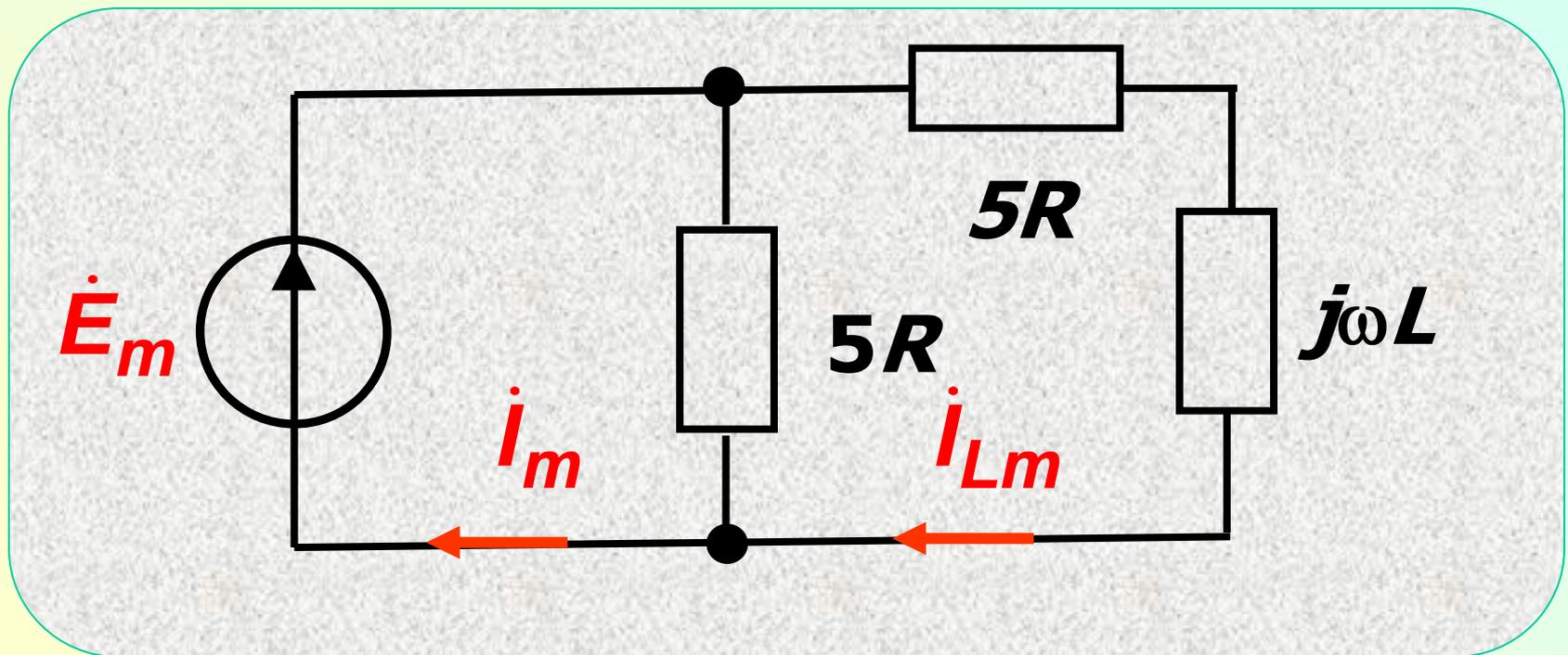
**Решение
выполняем
комбиниро-
ванным
методом**

1. Искомый ток определяется суммой

$$i(t) = i_{пр}(t) + i_{св}(t),$$

где $i_{пр}$ находится расчетом схемы после коммутации символическим методом.

Комплексная схема замещения цепи после коммутации в установившемся режиме



$$i_{Lmnp} = \frac{\dot{E}_m}{5R + j\omega L} =$$
$$= \frac{300e^{j90^\circ}}{5 \cdot 10 + j300 \cdot 0,1} = 4,23e^{j45^\circ} \text{ A};$$

$$i_{mnp} = \frac{\dot{E}_m}{5R} + \frac{\dot{E}_m}{5R + j\omega L} = 9,49e^{j71,56^\circ} \text{ A.}$$

Мгновенные значения принужденных составляющих

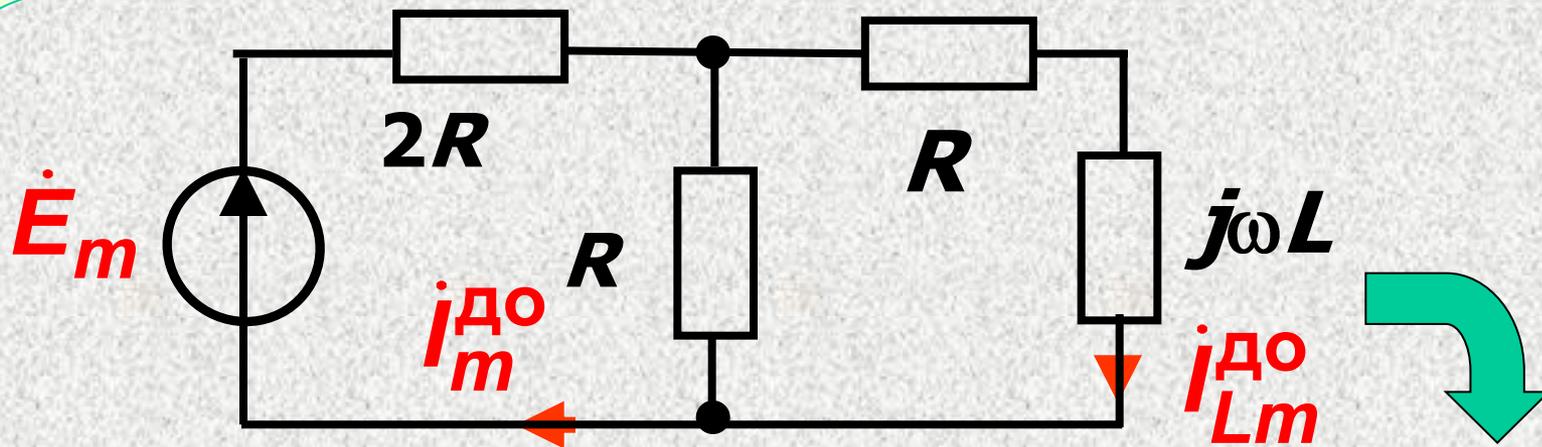
$$i_{пр}(t) = 9,49 \sin(300t + 71,56^\circ) \text{ A};$$

$$i_{Lпр}(t) = 4,23 \sin(300t + 45^\circ) \text{ A};$$

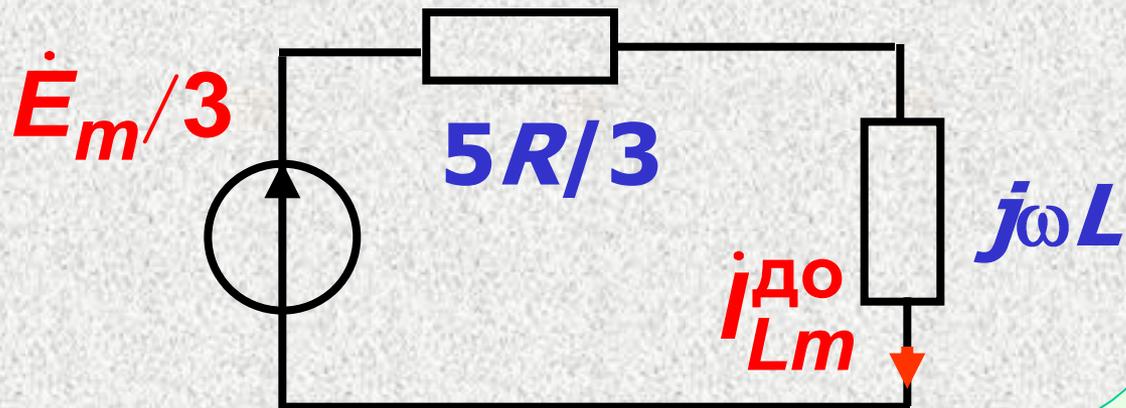
Начальное значение

$$i_{Lпр}(0) = 3 \text{ A.}$$

2. Определяем независимое начальное условие (цепь до коммутации):



Расчет ведем
символичес-
ким методом



$$\begin{aligned} \dot{i}_{Lm}^{DO} &= \frac{\dot{E}_m / 3}{5R/3 + jX_L} = \\ &= \frac{j100}{16.67 + j30} = (1,8 + j0,6) \text{ A} \end{aligned}$$

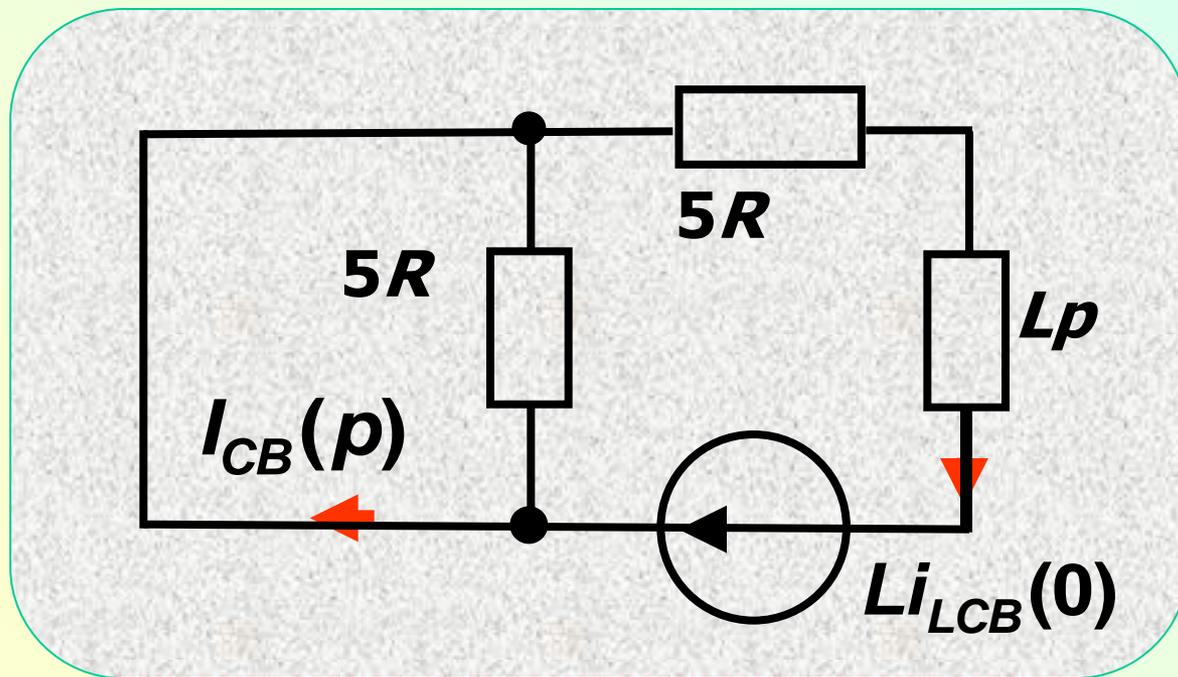
$$\dot{I}_{Lm}^{DO} = (1,8 + j0,62) = 1,9e^{j18,43^\circ} \text{ A}$$

$$i_L(0) = 1.9 \sin(18,43^\circ) = 0,6 \text{ A}$$

3. Находим начальное значение свободной составляющей непрерывной величины – тока ИНДУКТИВНОСТИ:

$$\begin{aligned} i_{LСВ}(0) &= i_L(0) - i_{LПР}(0) = \\ &= 0,6 - 3 = -2,4 \text{ А} \end{aligned}$$

Составляем операторную схему для расчета свободной составляющей тока



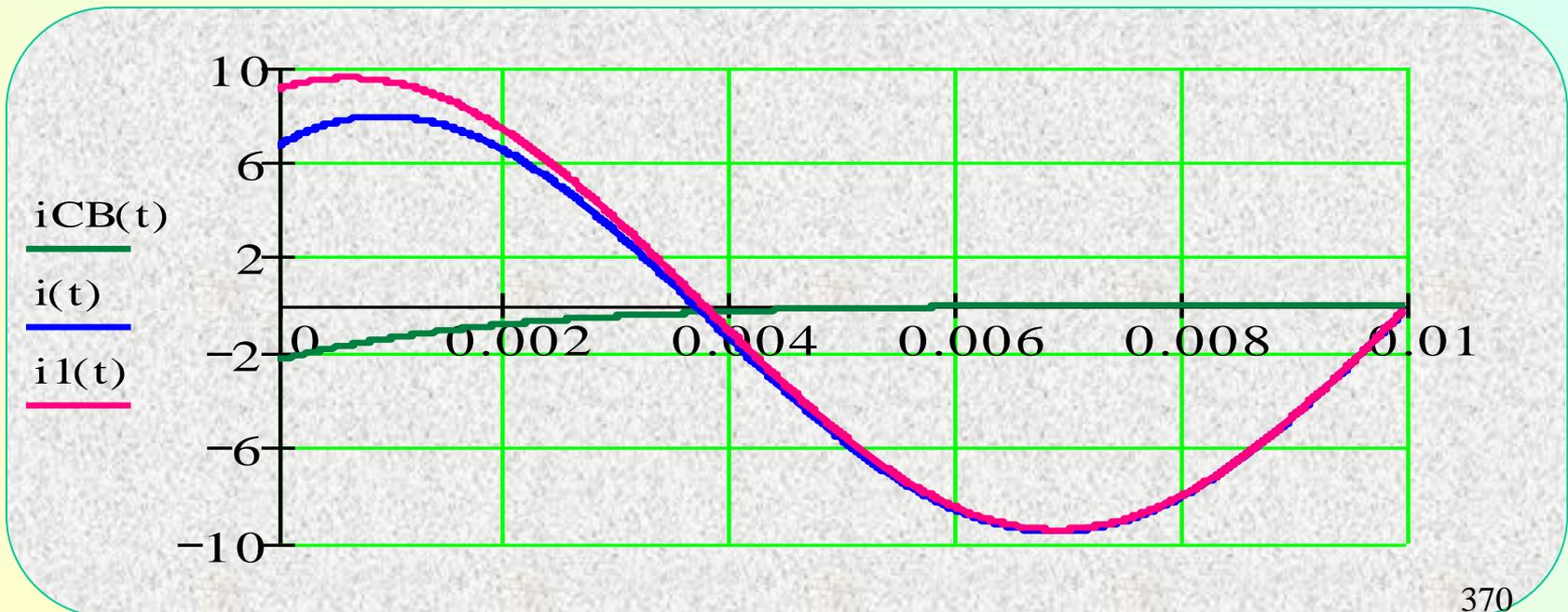
$$\begin{aligned} I_{CB}(p) &= \frac{Li_{CB}(0)}{5R + Lp} = \\ &= \frac{i_{CB}(0)}{p + \frac{5R}{L}} = \frac{-2,4}{p + 500} \end{aligned}$$

Оригиналом является
экспоненциальная функция

$$i_{CB}(t) = -2,4e^{-500t} \text{ А.}$$

Суммируем составляющие и получаем

$$i(t) = i_{\text{пр}}(t) + i_{\text{св}}(t) =$$
$$= 9,49 \sin 300t + 71,56^\circ - 2,4e^{-500t} \text{ А.}$$



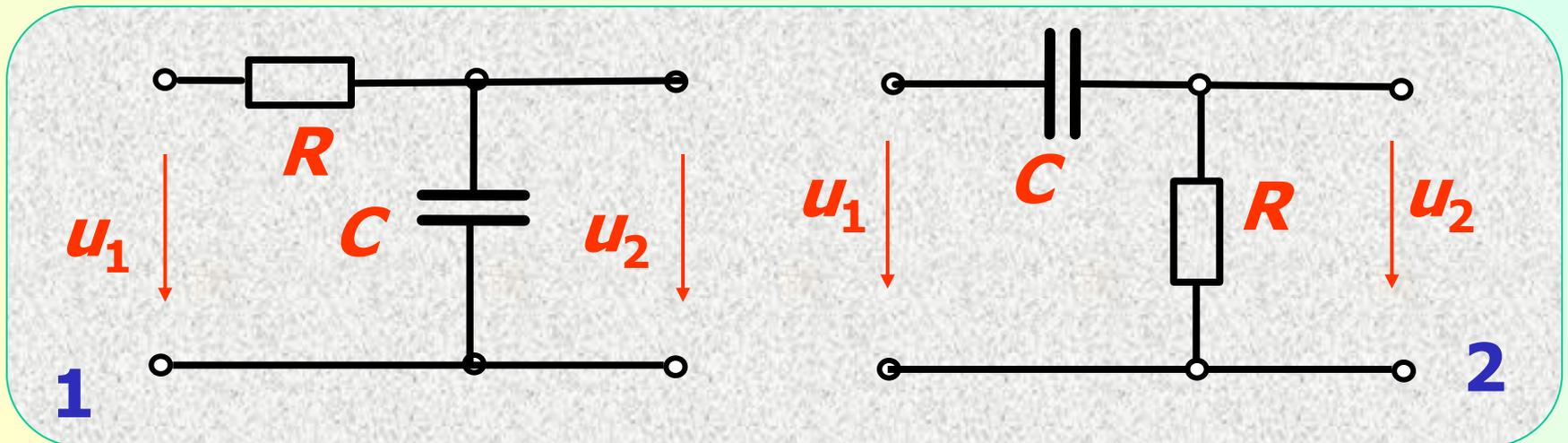
Интегрирующие и дифференцирующие цепи

Цепи, напряжение на выходе которых пропорционально производной или интегралу входного напряжения, называются, соответственно, дифференцирующими или интегрирующими.

Простейшие интегрирующие и дифференцирующие цепи – катушка индуктивности и конденсатор, токи и напряжения которых связаны между собой соотношениями:

$$u_L = L di / dt; \quad i = \frac{1}{L} \int u_L dt;$$
$$i = C du_C / dt; \quad u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt.$$

В технических задачах, преобразования выполняют на основе **RC**-цепей. **RL**-цепи не используются из-за активных потерь и паразитных емкостей катушек.

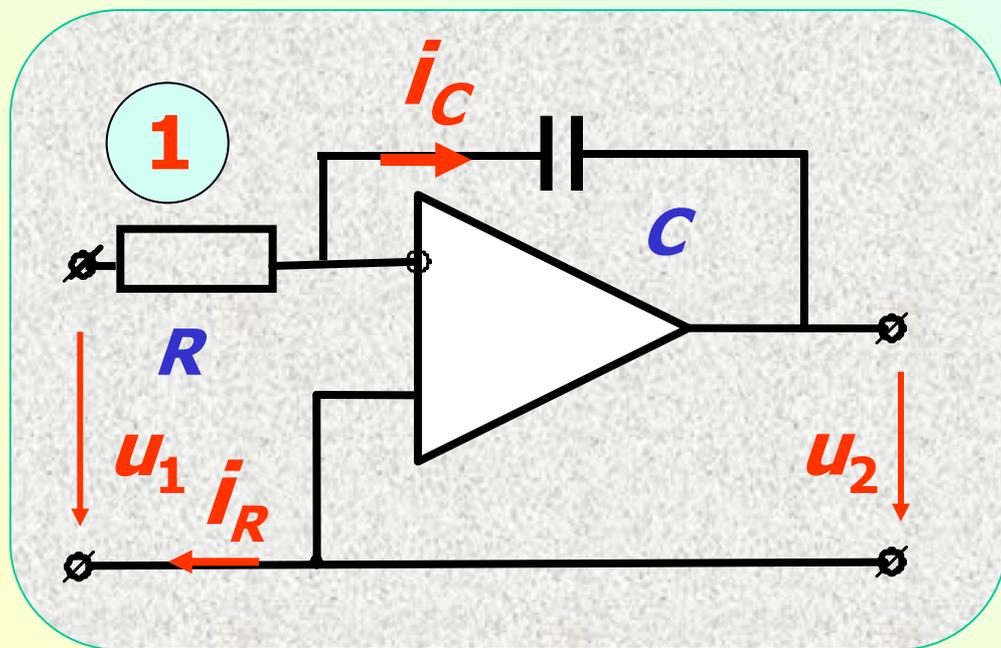


RC-цепь (1) будет интегрирующей, если она удовлетворяет условию $\tau = RC \gg 1/\omega_{min}$, где ω_{min} - минимальная круговая частота спектральных составляющих. Цепь является дифференцирующей (2), если существенная часть спектра входного сигнала удовлетворяет условию

$$\tau = RC \ll 1/\omega_{max}$$

где ω_{max} - максимальная круговая частота спектральных составляющих. **Пассивные** цепи сильно ослабляют входной сигнал и употребляются **редко**, т.к. требуют дополнительного **усиления** выходного сигнала.

Активные интегрирующие (1) и дифференцирующие (2) цепи выполняют на основе операционных усилителей.

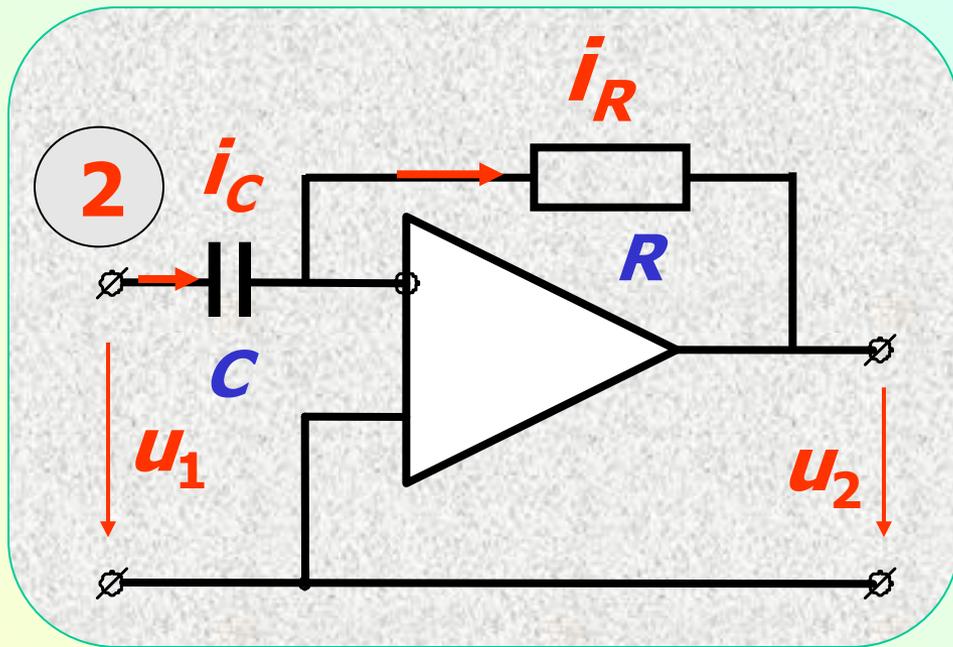


$$i_R = i_C; \quad Ri_R = u_1;$$

$$u_2 + u_C = 0.$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt;$$

$$u_2 = -u_C = -\frac{1}{C} \int i_C dt = -\frac{1}{RC} \int u_1 dt.$$



$$u_2 = -Ri_R;$$

$$u_1 = u_C;$$

$$i_C = i_R;$$

$$i_C = C \frac{du_C}{dt};$$

$$u_2 = -RC \frac{du_1}{dt}.$$

Активные **RC**- цепи лишены недостатков пассивных цепей и широко применяются в цепях автоматики и в вычислительных машинах.

Устойчивость электрических цепей

В некоторых цепях при коммутациях даже при **ограниченном воздействии** переходный процесс может нарастать. Такие цепи называют **неустойчивыми**.

В устойчивой цепи, если $\text{Re } p_k < 0$, свободная составляющая **ПП** с течением времени всегда затухает.

Условие $\operatorname{Re} p_k < 0$ означает, что **корни** характеристического уравнения на комплексной плоскости **находятся на левой полуплоскости**. Таким образом, для анализа устойчивости цепи достаточно **определить расположение корней на комплексной плоскости**.

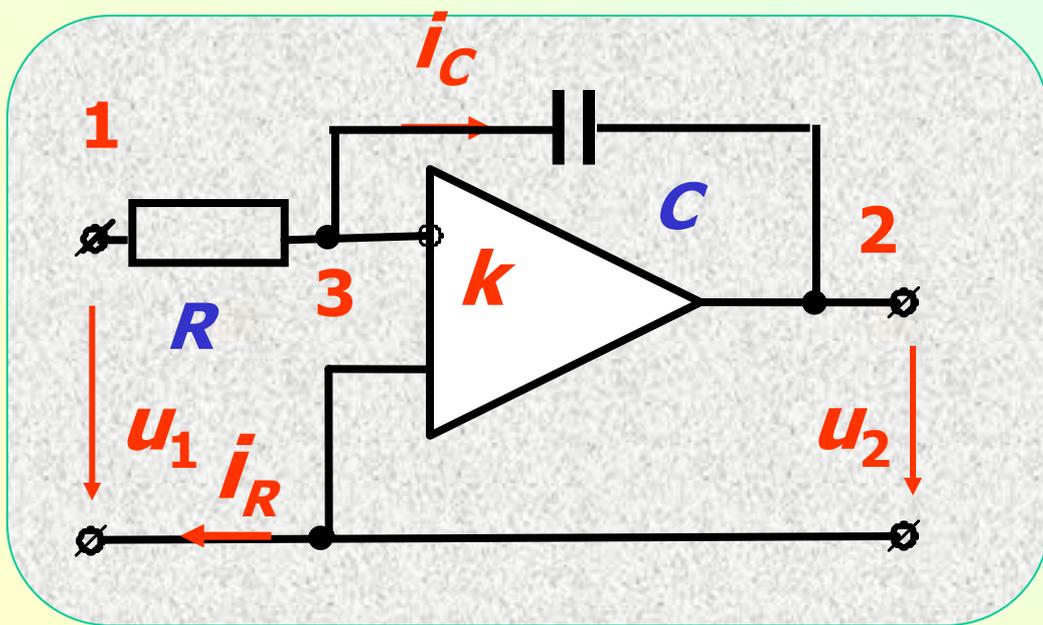
При этом **нет необходимости** определять численные значения корней, т.е. **решать сложные уравнения**. Имеются **специальные критерии устойчивости**. Например, цепь второго порядка с характеристическим уравнением

$$p^2 + a_1 p + a_2 = 0$$

устойчивая, если коэффициенты **a_1** и **a_2** положительные.

Согласно теореме Виетта $p_1 + p_2 = -a_1$,
а $p_1 p_2 = a_2$, откуда следует, что при
положительных коэффициентах a_1 и
 a_2 корни располагаются в левой
полуплоскости, т.е. цепь **устойчивая**.
Если $a_1 = 0$, корни характеристическо-
го уравнения – **мнимые**, цепь при
этом находится на границе устойчи-
вости. Характер процесса -
синусоидальный (**колебательный**).

Пример 1. Оценить, при каких условиях активная интегрирующая цепь с коэффициентом усиления k будет работать устойчиво.



Решение.
Записываем
узловое уравнение цепи:

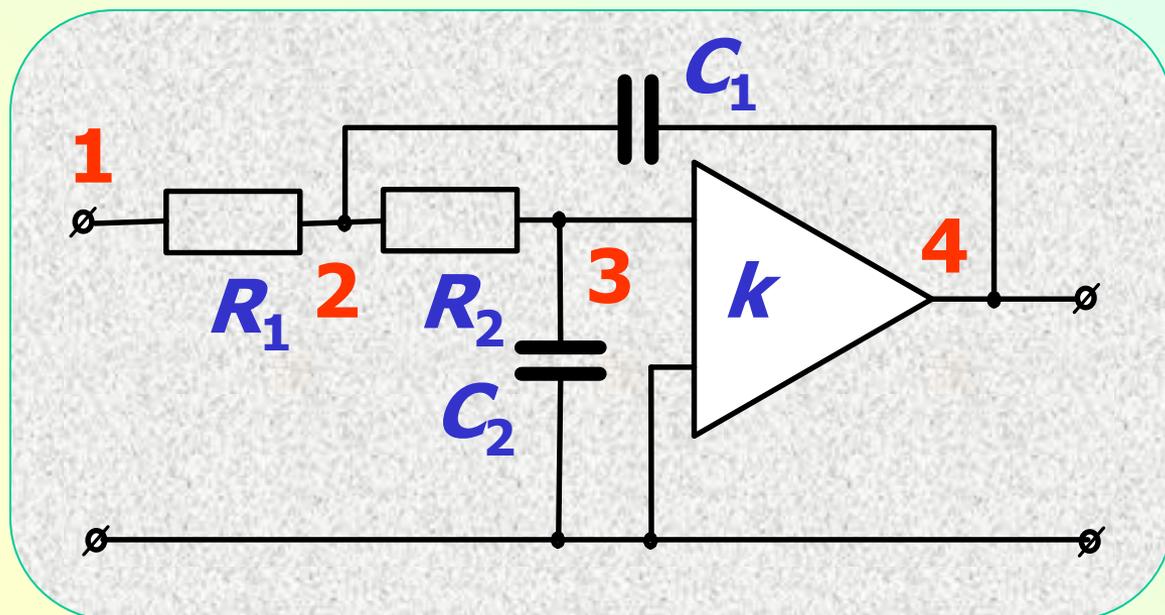
$$\begin{aligned}
 & U_3(p)(1/R + pC) - U_2(p)pC = \\
 & = U_1(p)1/R, \text{ где } U_2(p) = kU_3(p); \\
 & -U_2(p) 1/R + pC(1 - k) = U_1(p)k/R
 \end{aligned}$$

Корень уравнения $p = -\frac{1}{RC(1-k)}$

будет отрицательным и располагаться в левой полуплоскости, если $k < 1$.

Цепь **устойчивая** только при наличии **отрицательной обратной связи**

Пример 2. Оценить, при каких условиях активное звено фильтра нижних частот будет устойчивым.



Решение.
Записываем уравнения потенциалов в узлах:

$$U_2(p)(1/R_1 + 1/R_2 + pC_1) - \\ -U_3(p)1/R_2 - U_4(p)pC_1 = U_1(p)1/R_1;$$

$$U_4(p) = kU_3(p);$$

$$-U_2(p)1/R_2 + U_3(p)(1/R_2 + pC_2) = 0.$$

Главный определитель системы:

$$\begin{pmatrix} 1/R_1 + 1/R_2 + pC_1 & -(1/R_2 + kpC_1) \\ -1/R_2 & 1/R_2 + pC_2 \end{pmatrix} = 0$$

**Раскрывая определитель,
найдем:**

$$p^2 C_1 C_2 + p C_2 (1/R_1 + 1/R_2) + \\ + 1/R_2 (1 - k) C_1 + 1/R_1 \cdot 1/R_2 = 0.$$

**Коэффициенты уравнения будут
положительными при условии**

$$C_2 (1/R_1 + 1/R_2) + 1/R_2 (1 - k) C_1 > 0$$

Это условие выполняется при

$$k < C_2(1/R_1 + 1/R_2)/(C_1 \cdot 1/R_2) + 1.$$

В частном случае при $C_1 = C_2 = C$;
 $R_1 = R_2 = R$ звено фильтра устойчиво,
если $k < 3$. Если $k = 3$ – корни будут
мнимыми и звено можно
использовать в качестве генератора
синусоидальных автоколебаний

Для анализа цепей более высокого порядка используются другие критерии:

Гурвица – анализ по определителю системы уравнений, записанному определенным образом;

Михайлова – основанном на анализе частотных свойств цепей и их функций.

По Михайлову на комплексной плоскости изображают годограф характеристического полинома – его амплитудно-фазовую частотную характеристику. Имеются и другие способы оценки устойчивости цепи.