

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

А.М. Купцов

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

**РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ
ЧАСТЬ 3**

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Национального исследовательского
Томского политехнического университета*

Издательство
Национального исследовательского
Томского политехнического университета

2011

УДК 621.3.01(075)

ББК 31.2

К 92

Купцов А. М.

К 92 Теоретические основы электротехники. Решения типовых задач, ч.3. Основы теории электромагнитного поля: учебное пособие / Купцов А. М.; НИ Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Национального исследовательского Томского политехнического университета, 2010. –115 с.

ISBN 5-89503-167-6

В пособие включены материалы по теории электромагнитного поля, предусмотренные программой курса теоретических основ электротехники.

Пособие начинается с кратких сведений об электромагнитном поле, источниках, создающих поле, векторах, характеризующих поле, а также о векторных и скалярных потенциалах и свойствах среды. Затем приводятся уравнения электромагнитного поля, их частные случаи и граничные условия, которым должны удовлетворять уравнения поля.

Приводятся решения типичных для теории электромагнитного поля задач, включающих анализ общих свойств электромагнитного поля и простейшие методы и приемы расчета электрических и магнитных полей.

Пособие предназначено для самостоятельной работы студентов электротехнических и электроэнергетических направлений и специальностей и может быть полезно специалистам, работающим в области энергетики.

УДК 621.3.01(075)

ББК 31.2

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор,
директор НИИ ВН НИ ТПУ

В.В. Лопатин

Доктор физико-математических наук, профессор,
ведущий научный сотрудник института ОА СО РАН

Ф.Ю. Канев

Предисловие

В данном пособии излагаются основы теории электромагнитного поля в макроскопическом представлении, базирующейся на уравнениях электродинамики, сформулированных Максвеллом.

Важность изучения электромагнитных полей следует из того, что без расчета поля невозможно проектирование самых разнообразных электромагнитных устройств, включая мощные электрические машины и аппараты с полями промышленной частоты, микроминиатюрные устройства радиоэлектроники с полями высоких и сверх высоких частот, а также установки высокого напряжения.

Несмотря на различие форм и назначений, все современные электротехнические устройства имеют общую часть – электромагнитную систему, предназначенную для преобразования электромагнитной энергии в другие виды. Свойства и рабочие характеристики электротехнических устройств напрямую зависят от распределения электромагнитного поля в их электромагнитной системе, именно поэтому важно при проектировании уметь рассчитывать и оптимизировать электромагнитное поле. Расчеты электромагнитных полей в реальных электромагнитных системах чрезвычайно сложны и, как правило, требуют специальной подготовки.

Данное пособие рассчитано на студентов второго курса, знакомых лишь с начальными сведениями об электричестве и магнетизме, о дифференциальных уравнениях в частных производных и основах векторного анализа. Поэтому в первой части пособия в доступной, на наш взгляд, форме излагаются основные положения теории электромагнитного поля. Изложение начинается с краткой характеристики векторов электромагнитного поля и свойств среды. Затем рассматриваются уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах, граничные условия для векторов поля, а также соотношения для количественной оценки энергии электромагнитного поля и, наконец, электродинамические потенциалы.

Электростатическое поле и поле постоянного тока рассматриваются как частные случаи электромагнитного поля. Во второй, третьей и четвертой частях пособия приведены примеры, иллюстрирующие приемы и методы расчета полей для этих частных случаев: электростатического, электрического поля постоянного тока и магнитного поля, соответственно.

Сложные переменные электромагнитные поля и связанные с ним явления распространения и отражения электромагнитных волн и их излучение в данном пособии не рассматриваются.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- A** – векторный потенциал, Вб/м
B – вектор магнитной индукции, Тл
C – емкость, Ф
D – вектор электрического смещения, Кл/м²
E – вектор напряженности электрического поля, В/м
F – вектор силы, Н
H – вектор напряженности магнитного поля, А/м
I – постоянный ток, действующее значение переменного тока, А
i, j, k – единичные векторы прямоугольной системы координат
L – индуктивность, Гн
P – вектор поляризованности, Кл/м
δ – вектор плотности тока проводимости, А/м²
δ^{см} – вектор плотности тока смещения, А/м²
μ₀ = 4π·10⁻⁷ – магнитная постоянная, Гн/м
μ, μ_a – относительная и абсолютная магнитные проницаемости
Q, q – электрический заряд, Кл
τ – линейная плотность электрического заряда, Кл/м
σ – поверхностная плотность электрического заряда, Кл/м²
ρ – поверхностная плотность электрического заряда, Кл/м³
S – поверхность, площадь,
U – постоянное напряжение, действующее значение переменного напряжения, В
V – объем, область пространства,
W^м – энергия магнитного поля, Дж
W^э – энергия электрического поля, Дж
ε₀ = (4π·9·10⁹)⁻¹ ≈ 8,85·10⁻¹² – электрическая постоянная, Ф/м
ε, ε_a – относительная и абсолютная диэлектрические проницаемости
γ – удельная проводимость, См/м
ω – плотность энергии электромагнитного поля, Дж/м³
ω^м – плотность энергии магнитного поля, Дж/м³
ω^э – плотность энергии электрического поля, Дж/м³
1_r, 1_α, k – единичные векторы цилиндрической системы координат
1_r, 1_α, 1_θ – единичные векторы сферической системы координат
φ, φ_м – скалярные электрический и магнитный потенциалы, В; А
Φ – магнитный поток, Вб

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1.1. Общие сведения

Электромагнитное поле – одна из форм существования материи. Как и вещество, оно характеризуется энергией, массой и количеством движения. Масса электромагнитного поля, заключенная в единице объема, несоизмеримо мала по сравнению с массой (плотностью) всех известных веществ, тем не менее, существование массы приводит к известной инерционности электромагнитных процессов. Подобно электронам (вещество) электромагнитные волны, испытывают дифракцию и интерференцию. Более того электромагнитное поле может превращаться в вещество, а вещество – в электромагнитное поле. Энергия электромагнитного поля может переходить в другие виды энергии.

Классическая или максвелловская теория электромагнитного поля учитывает только макроскопические свойства вещества: предполагается, что размеры рассматриваемой области пространства, т.е. расстояние от источников поля до рассматриваемой точки, велики по сравнению с размерами молекул, а характерное для изменения электромагнитного поля время велико по сравнению с временем, характерным для внутримолекулярных колебательных процессов.

В теоретической электротехнике изучается классическая теория электромагнитного поля, позволяющая изучить широкий круг вопросов, встречающихся в технике связи и радиотехнике. В отличие от квантовой теории поля, учитывающей микроструктуру вещества и внутримолекулярные поля самих элементарных частиц, она не охватывает такие явления, как излучение и поглощение веществом электромагнитных волн высокой частоты. Вещество в классической теории поля рассматривается как физическая среда, электрическая нейтральность которой нарушается «свободными» зарядами, не входящими в состав вещества.

Электромагнитное поле при изучении обычно разделяют на два взаимосвязанных поля: электрическое и магнитное. Источниками электромагнитного поля являются электрические заряды. С макроскопической точки зрения электрический заряд – это совокупность большого числа элементарных зарядов, непрерывно распределенных на материальных телах. Различают объемное, поверхностное и линейное распределение зарядов.

Объемное распределение зарядов характеризуется объемной плотностью, определенной как предел отношения

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} = \rho(r, t), \quad (1.1)$$

где ρ - в общем случае функция координат r и времени t .

Если заряд сосредоточен в пределах слоя, толщина которого бесконечно мала с макроскопической точки зрения, вводят понятие поверхностной плотности заряда, равной

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} = \sigma(x, y, t). \quad (1.2)$$

При распределении заряда вдоль тонкой линии используется понятие линейной плотности заряда, равного

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} = \tau(x, t). \quad (1.3)$$

Неподвижные заряды создают только электрическое поле. Движущиеся заряды (токи) создают как электрическое, так и магнитное поля. Заряды взаимодействуют друг с другом, причем сила этого взаимодействия определяется законом Кулона.

Разделение единого электромагнитного поля на электрическое и магнитное весьма условно и зависит от выбранной системы координат. Например, движущийся прямолинейно с постоянной скоростью электрический заряд создает вокруг себя как электрическое, так магнитное поле. Однако для наблюдателя, движущегося в том же направлении и с той же скоростью, этот заряд представляется неподвижным и, следовательно, является источником электрического поля.

Электрическое и магнитное поля проявляются в виде механических (*пондеромоторных*) сил. Внесенный в электрическое поле пробный электрический заряд под действием сил поля будет перемещаться. Аналогично движущийся пробный заряд или магнитная стрелка будут перемещаться под действием сил магнитного поля. Свойства электромагнитного поля характеризуют векторными величинами – векторами поля.

1.2. Векторы электромагнитного поля

1.2.1. Векторы электрического поля

Напряженность электрического поля \mathbf{E} определяют как силу, с которой электрическое поле действует на точечный положительный единичный заряд. Между вектором \mathbf{E} и силой \mathbf{F} , действующей на точечный заряд q , существует простая связь $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$.

Заряд q должен быть достаточно малым, чтобы можно было пренебречь изменением распределения зарядов, создающих исследуемое поле. Поэтому правильнее эту связь представить в форме

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q}.$$

Сила взаимодействия зарядов, а следовательно, и напряженность электрического поля в различных средах различны. Это объясняется поляризацией вещества. **Поляризация** - сложный физический процесс, непосредственно связанный с атомной структурой вещества. Упрощенно ее можно объяснить следующим образом. Молекулы вещества, состоящие из атомов, бывают полярными и неполярными. В неполярных молекулах распределение положительных и отрицательных зарядов таково, что центр тяжести всех электронов молекулы совпадает с центром тяжести всех ее протонов. В полярных молекулах центр тяжести электронов сдвинут относительно центра тяжести протонов. Поэтому полярную молекулу можно представить электрическим диполем, поле которого налагается на первичное поле.

Диполи характеризуют дипольным моментом, который определяют как вектор, численно равный произведению величины заряда на расстояние между зарядами, направленный вдоль оси диполя от отрицательного заряда к положительному. В отсутствии внешнего поля электрического поля дипольные моменты отдельных молекул ориентированы хаотически, и суммарный дипольный момент равен нулю. Внешнее электрическое поле оказывает силовое воздействие на диполь, стремясь повернуть его таким образом, чтобы он был ориентирован по полю. При этом происходит ориентация молекул (**ориентационная поляризация**), в результате чего появляется суммарный дипольный момент, и суммарное электрическое поле оказывается отличным от того, каким оно было бы в вакууме.

Неполярные молекулы не обладают собственным дипольным моментом. Однако под действием внешнего электрического поля в такой молекуле перераспределяется отрицательный заряд, и она становится полярной: у нее появляется дипольный момент. Дипольные моменты отдельных молекул ориентируются по полю, и суммарный дипольный момент оказывается отличным от нуля. Этот процесс принято называть **электронной поляризацией**.

Для характеристики поляризации вводят **вектор поляризованности** \mathbf{P} , определяемый как предел отношения суммарного дипольного момента вещества \mathbf{p}_i в объеме ΔV к величине этого объема при $\Delta V \rightarrow 0$:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}.$$

При слабых внешних полях величина индуцированного дипольного момента пропорциональна напряженности электрического поля:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 k_3 \mathbf{E}.$$

Безразмерный параметр k_3 характеризует среду и называется диэлектрической восприимчивостью среды. Постоянный коэффициент ε_0 - электрическая постоянная. Его величина зависит от выбора системы единиц. В системе СИ $\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$ Ф/м.

Дж. К. Максвелл ввел в рассмотрение вектор \mathbf{D} (единица измерения Кл/м²), названный вектором электрического смещения, позволяющий исключить из рассмотрения свойства среды и связанный с вектором \mathbf{P} соотношением

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

или

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} (1 + k_3) = \varepsilon_a \mathbf{E}. \quad (1.4)$$

Параметр ε_a - абсолютная диэлектрическая проницаемость среды. Так как восприимчивость вакуума равна нулю $k_3 = 0$, то электрическую постоянную ε_0 можно рассматривать как диэлектрическую проницаемость вакуума, а безразмерный коэффициент $\varepsilon = \varepsilon_a / \varepsilon_0$ - как относительную диэлектрическую проницаемость среды. Относительная диэлектрическая проницаемость среды и диэлектрическая восприимчивость связаны между собой соотношением $\varepsilon = 1 + k_3$.

На примере поля точечного заряда легко показать, что вектор \mathbf{D} имеет одинаковые значения в разных средах, т. е. не зависит от «связанных» зарядов вещества. Эта особенность вектора \mathbf{D} характерна не только для поля, созданного точечными зарядами, но и для любого поля, созданного более сложным распределением зарядов.

Следует помнить, что пропорциональность между векторами \mathbf{P} и \mathbf{E} , а следовательно, между \mathbf{D} и \mathbf{E} в сильных и быстропеременных электрических полях, а также в нелинейных средах не выполняется.

1.2.2. Векторы магнитного поля

Сила, с которой электромагнитное поле воздействует на точечный электрический заряд, зависит не только от местоположения и величины заряда, но также и от скорости его движения. Эту силу обычно раскладывают на две: электрическую и магнитную. Электрическая сила не зависит от движения заряда:

$$\mathbf{F}_3 = q\mathbf{E}.$$

Магнитная сила \mathbf{F}_M зависит от величины и направления скорости движения заряда \mathbf{v} и всегда перпендикулярна ей:

$$\mathbf{F}_M = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

Вектор \mathbf{B} - вектор магнитной индукции (единица измерения – вебер на квадратный метр, Вб/м²), характеризующий силовое воздействие магнитного поля. Магнитная индукция численно равна силе, с которой магнитное поле действует на единичный точечный положительный заряд, движущийся с единичной скоростью перпендикулярно линиям вектора \mathbf{B} . Полная сила, действующая на точечный заряд q , находящийся в электромагнитном поле (*лоренцова сила*),

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

Магнитное поле действует, не только на отдельные движущиеся заряды, но и на проводники, по которым течет электрический ток. Например, сила \mathbf{F} , с которой однородное магнитное поле действует на прямолинейный проводник длиной l с током, определяется экспериментально установленным законом:

$$\mathbf{F} = I[\mathbf{dl} \times \mathbf{B}],$$

где \mathbf{I} - вектор, численно равный величине тока I , направление которого совпадает с направлением тока в проводнике, т. е. с направлением движения положительных зарядов.

Величина вектора \mathbf{B} зависит от свойств среды. Физически это объясняется следующим образом. Под действием магнитного поля вещество *намагничивается*. В результате появляется дополнительное магнитное поле, которое налагается на первичное. При этом суммарное поле оказывается отличным от того, каким оно было бы в вакууме.

Явление намагничивания - сложный физический процесс, непосредственно связанный с атомной структурой вещества. Его можно объяснить следующим образом. Атомы и молекулы многих веществ обладают магнитным моментом \mathbf{m}_i и могут быть уподоблены маленьким рамкам с током. Каждая рамка с током создает собственное магнитное поле, пропорциональное ее магнитному моменту. В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты молекул, как правило, направлены хаотически, и суммарный магнитный момент рассматриваемого объема, представляющий собой геометрическую сумму магнитных моментов отдельных молекул в объеме ΔV , равен нулю, т. е. магнитные поля отдельных молекул взаимно компенсируются. Под действием внешнего магнитного поля происходит ориентация магнитных моментов отдельных молекул и суммарный магнитный момент оказывается отличным от нуля.

Образующееся в результате намагничивания дополнительное магнитное поле может как ослаблять, так и усиливать первичное поле. Среды, такие как инертные газы, цинк, золото, ртуть, кремний, в которых магнитное поле ослабляется, называют *диамагнитными*. Среды, такие

как кислород, платина, палладий, литий, цезий, в которых поле незначительно усиливается, называют *парамагнитными*. Среды с существенным усилением магнитного поля называют *ферромагнитными*. Примером могут служить железо, кобальт, никель и ряд сплавов.

Намагниченность среды характеризуют вектором намагниченности \mathbf{M} , который определяют как предел отношения суммарного магнитного момента вещества в объеме ΔV к величине этого объема при $\Delta V \rightarrow 0$:

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{m}_i}{\Delta V}.$$

Вместо вектора \mathbf{M} удобнее рассматривать вектор \mathbf{H} , связанный с вектором \mathbf{M} соотношением

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M},$$

где μ_0 – *магнитная постоянная*, равная в системе СИ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9}$ Гн/м.

Вектор \mathbf{H} (как и вектор \mathbf{M} измеряется в А/м) называется напряженностью магнитного поля. При не очень сильном внешнем магнитном поле вектор \mathbf{M} пропорционален вектору \mathbf{H} :

$$\mathbf{M} = k_M \mathbf{H}.$$

Коэффициент k_M называют *магнитной восприимчивостью*. У диамагнитных сред коэффициент k_M отрицательный, у парамагнитных и ферромагнитных – положительный, при этом у диамагнитных и парамагнитных сред $|k_M| \ll 1$, а у ферромагнитных $k_M \gg 1$.

Вектор \mathbf{B} пропорционален вектору \mathbf{H} :

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}, \quad (1.5)$$

где $\mu_a = \mu_0 (1 + k_M)$ – *абсолютная магнитная проницаемость* среды.

Наряду с абсолютной магнитной проницаемостью среды μ_a используется также относительная магнитная проницаемость среды μ , связанную с коэффициентом k_M соотношением $\mu = 1 + k_M$, так что $\mu_a = \mu_0 \mu$.

Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость ферромагнитных сред существенно зависят от величины магнитного поля. Кроме того, в ферромагнитных материалах намагниченность среды зависит не только от величины магнитного поля в данный момент, но и от того, как оно изменялось раньше (явление магнитного гистерезиса).

Векторы электромагнитного поля введены на основе обобщения огромного числа экспериментальных данных, полученных Кулоном, Ампером, Фарадеем и т.д.).

1.3. Классификация сред

Свойства среды характеризуются параметрами ϵ_a , μ_a и γ . Диэлектрическая проницаемость ϵ_a и магнитная проницаемость μ_a были рас-

смотрены выше. Параметр γ носит название *удельной проводимости* среды. В системе СИ γ измеряется в сименсах на метр (См/м).

В зависимости от свойств параметров ϵ_a , μ_a и γ различают среды: *линейные*, в которых параметры ϵ_a , μ_a и γ не зависят от величины электрического и магнитного полей, и *нелинейные*, в которых параметры, или хотя бы один из них, зависят от величины электрического или магнитного поля. Все реальные среды, по существу, являются нелинейными. Однако при не очень сильных полях во многих случаях можно пренебречь зависимостью ϵ_a , μ_a и γ от величины электрического и магнитного полей и считать, что рассматриваемая среда линейная. В дальнейшем будут рассматриваться только линейные среды. В свою очередь, линейные среды делятся на *однородные* и *неоднородные, изотропные* и *анизотропные*.

Однородными являются среды, параметры ϵ_a , μ_a и γ которых не зависят от координат, т.е. свойства среды одинаковые во всех ее точках. Если хотя бы один из параметров среды зависит от координат, среда называется *неоднородной*.

Среды, свойства которых одинаковые по всем направлениям, называют *изотропными*, в противном случае их называют *анизотропными*. В анизотропных средах, по крайней мере, один из параметров ϵ_a , μ_a и γ является тензором.

1.4. Основные уравнения электромагнитного поля

Все электромагнитные процессы, относящиеся к макроскопической теории электромагнитного поля, подчиняются законам, сформулированным в виде дифференциальных уравнений Дж. Максвеллом. Эти уравнения явились результатом обобщения накопленных к тому времени экспериментальных данных и называются «*Уравнения Максвелла*».

Из шести векторов \mathbf{E} , \mathbf{P} , \mathbf{D} , \mathbf{V} , \mathbf{M} , \mathbf{H} , характеризующих электромагнитное поле, для его определения можно ограничиться нахождением только четырех векторов. Обычно в качестве таких векторов используют векторы \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{V} и \mathbf{H} . В линейных изотропных средах электромагнитное поле может быть полностью определено двумя векторами (обычно \mathbf{E} и \mathbf{H}).

1.4.1. Первое уравнение Максвелла

Первое уравнение Максвелла является обобщением закона полного тока (закон Ампера), который устанавливает количественную связь между циркуляцией вектора \mathbf{H} и током, пронизывающим данный контур:

$$\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = I \quad \text{или} \quad \oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = \int_S \boldsymbol{\delta}d\mathbf{S}, \quad (1.6)$$

где $d\mathbf{S}$ – вектор элемента поверхности (вектор площадки).

До Максвелла под током I (плотностью тока $\boldsymbol{\delta}$) понимали постоянный ток проводимости, и уравнение (1.6) для переменных токов не использовалось. Максвелл ввел в рассмотрение новое понятие «ток смещения» $I^{\text{см}}$, возникающий в диэлектрике при изменении электрического поля, и установил взаимосвязь плотности этого тока $\boldsymbol{\delta}^{\text{см}}$ с вектором электрического смещения: $\boldsymbol{\delta}^{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$.

Добавив в правую часть уравнения (1.6) ток смещения и выражая токи через их плотности, получаем первое уравнение Максвелла в интегральной форме

$$\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = \int_S \boldsymbol{\delta}d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (1.7)$$

В качестве контура интегрирования может быть взят любой замкнутый контур конечных размеров при условии, что он охватывает ток не больше одного раза.

Заменяя в формуле (1.7), согласно теореме Стокса, криволинейный интеграл поверхностным, получаем

$$\int_S \text{rot } \mathbf{H}d\mathbf{S} = \int_S \left(\boldsymbol{\delta} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}.$$

Так как S – произвольная поверхность, то равенство справедливо только в том случае, если

$$\text{rot } \mathbf{H} = \boldsymbol{\delta} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.8)$$

Полученное уравнение – первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме.

Величину правой части $\boldsymbol{\delta} + \partial \mathbf{D} / \partial t = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\delta}^{\text{см}}$ называют плотностью полного тока $\boldsymbol{\delta}_{\text{полн}}$. Левая часть уравнения – ротор (или вихрь) вектора \mathbf{H} – векторная величина, показывающая, что в точках пространства, где существует электрический ток (проводимости, переноса или смещения), магнитное поле имеет вихревой характер.

Ротор вектора – это объемная производная по выбранным координатным осям. В прямоугольной системе координат он записывается:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_y \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial}{\partial x} H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_x \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x \right).$$

Если плотность полного тока представить в виде проекций на выбранные координатные оси, векторное уравнение (1.8) распадется на три скалярных уравнения

$$\frac{\partial}{\partial y} H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_y = \delta_x + \frac{\partial D_x}{\partial t};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} H_z - \frac{\partial}{\partial z} H_x = \delta_y + \frac{\partial D_y}{\partial t};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} H_y - \frac{\partial}{\partial y} H_x = \delta_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}.$$

В дополнение к математическому описанию векторные поля принято изображать в виде линий, которые в каждой точке совпадают с направлением вектора поля (подробнее графическое изображение поля будет рассмотрено ниже).

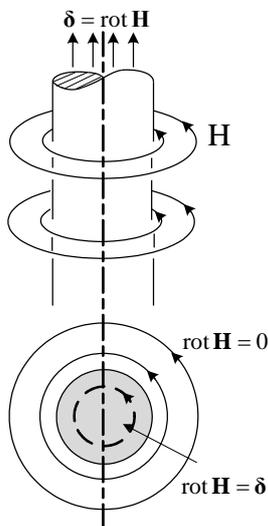


Рис.1.1

Для наглядного представления о роторе вектора \mathbf{H} на рис. 1.1. схематически изображены линии магнитного поля цилиндра с током плотностью δ . Эти линии - концентрические окружности - показывают, что данное поле - вихревое.

1.4.2. Второе уравнение Максвелла

Второе уравнение Максвелла - обобщенный закон электромагнитной индукции, сформулированный Фарадеем: переменный магнитный поток Φ , пронизывающий контур, наводит в нем ЭДС e , равную скорости изменения потока

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Учитывая, что электродвижущая сила, наводимая в контуре, определяется циркуляцией вектора \mathbf{E} по этому контуру $e = -\int_l \mathbf{E} d\mathbf{l}$, а магнитный поток Φ связан с вектором \mathbf{B} соотношением $\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}$, получаем второе уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S B d\mathbf{S}. \quad (1.9)$$

Если контур l неподвижен в пространстве и не изменяется с течением времени, производную по времени в уравнении (1.9) можно внести под знак интеграла, а затем левую часть уравнения преобразовать по теореме Стокса:

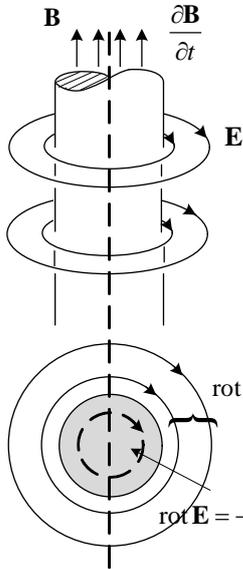


Рис.1.2

$$\int_S \text{rot} \mathbf{E} d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Поскольку S – произвольная поверхность, равенство справедливо только в случае, если

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.10)$$

Полученное уравнение называют вторым уравнением Максвелла. Оно утверждает, что электрическое поле имеет вихревой характер там, где существует магнитное поле. На рис. 1.2 изображено электрическое поле (концентрические окружности), обусловленное изменением магнитной индукции внутри ферромагнитного стержня. Как видно, линии вектора \mathbf{E} охватывают линии вектора $\partial \mathbf{B} / \partial t$ и образуют с ним левовинтовую систему.

1.4.3. Третье уравнение Максвелла

Третье уравнение Максвелла обобщает известную теорему Гаусса на случай переменного электрического поля. Согласно теореме Гаусса поток вектора электрического смещения сквозь произвольную поверхность S равен заряду Q , находящемуся внутри этой поверхности

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q. \quad (1.11)$$

Если заряд Q , произвольно распределенный внутри поверхности S объемом V , выразить через объемную плотность заряда ρ , то получим третье уравнение Максвелла в интегральной форме

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV. \quad (1.12)$$

Чтобы перейти к дифференциальной форме, левую часть уравнения следует преобразовать по теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int_V \text{div} \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV.$$

Равенство справедливо при любом объеме V , если

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (1.13)$$

Это третье уравнение Максвелла в дифференциальной форме.

На рис. 1.3 схематически показаны линии поля объемного заряда,

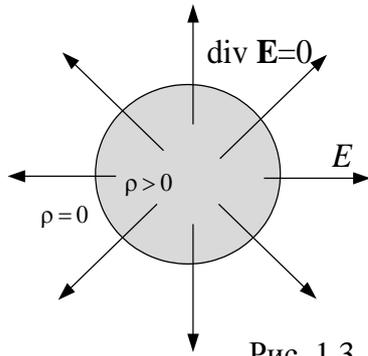


Рис. 1.3

распределенного внутри цилиндра. Вне цилиндра заряда нет, поэтому линии поля там непрерывны. Внутри цилиндра распределены начала линий (истоки) поля. Истоками поля вектора называют те точки пространства, в которых $\operatorname{div} > 0$. Точки, в которых $\operatorname{div} < 0$, называют стоками поля вектора.

В прямоугольной системе координат уравнение (1.13) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} D_x + \frac{\partial}{\partial y} D_y + \frac{\partial}{\partial z} D_z = \rho.$$

1.4.4. Четвертое уравнение Максвелла

Четвертое уравнение Максвелла является обобщением закона Гаусса о непрерывности линий магнитного поля, согласно которому поток вектора \mathbf{B} через любую замкнутую поверхность S равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (1.14)$$

Дифференциальная форма четвертого уравнения Максвелла получается заменой по теореме Остроградского-Гаусса поверхностного интеграла в (1.14) объемным, что приводит к равенству

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.15)$$

Уравнение непрерывности плотности полного тока

Уравнение непрерывности плотности полного тока вытекает из первого уравнения Максвелла. Взяв дивергенцию (объемную производную) от левой и правой частей уравнения (1.8), имеем

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{div} \left(\boldsymbol{\delta} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right).$$

Учитывая, что дивергенция ротора любого вектора равна нулю, получаем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\delta} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\delta} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.16)$$

Из уравнения (1.16) следует, что дивергенция плотности полного тока равна нулю, т.е. линии плотности полного тока непрерывны. В то же время линии токов проводимости и смещения могут иметь начало и конец. В точках пространства, где плотность зарядов уменьшается, на-

чинаются линии плотности тока проводимости, а заканчиваются они в точках пространства, где плотность зарядов увеличивается.

Если уравнение (1.16) проинтегрировать по объему и применить теорему Остроградского-Гаусса, можно получить

$$\oint_S \delta dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad \text{или} \quad I = -\frac{dQ}{dt}, \quad (1.17)$$

Уравнения (1.17) выражают закон сохранения заряда. Знак минус показывает, что ток проводимости, вытекающий из объема, положителен при уменьшении заряда в объеме V .

1.4.5. Закон Ома в дифференциальной форме

Зависимость плотности тока проводимости δ в произвольной точке проводящей среды от напряженности электрического поля E в этой точке устанавливается законом Ома. Его можно получить, рассмотрев дифференциально-малый объем проводящей среды, например, в виде цилиндра (рис. 1.4), расположенного таким образом, что напряженность поля в нем совпадает с осью цилиндра. Из-за малости объема поле внутри него можно считать однородным. Напряжение между торцами цилиндра определяется напряженностью поля и длиной цилиндра

$$dU = Edl.$$

Ток внутри цилиндра, согласно закону Ома, будет равен $dI = dU / R$, где $R = \frac{dl}{\gamma dS}$.

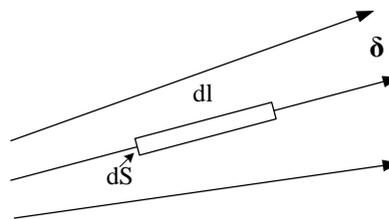


Рис. 1.4

После подстановки dU и R в формулу тока

и деления обеих частей равенства на dS , получаем $\delta = dI / dS = \gamma E$.

Переписав в векторной форме, получаем закон Ома в дифференциальной форме

$$\delta = \lambda E. \quad (1.18)$$

1.5. Граничные условия

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме справедливы для областей с однородными средами, когда свойства среды не зависят от координат или являются непрерывными функциями координат. На практике приходится рассчитывать поля в областях, состоящих из двух или более разнородных сред. На границах раздела сред дифференциальные уравнения теряют свой смысл, поэтому для изучения поведения векторов поля при переходе из одной среды в другую следует использовать уравнения Максвелла в интегральной форме. Взаимосвязи между

значениями векторов поля в разных средах у поверхности раздела называют граничными условиями. Как будет показано ниже, граничные условия необходимы для однозначного решения дифференциальных уравнений поля.

1.5.1. Граничные условия для векторов электрического поля

Условия для нормальных составляющих векторов \mathbf{E} и \mathbf{D}

Выделим на поверхности раздела S двух изотропных сред с относительными проницаемостями ε_1 и ε_2 достаточно малую площадку ΔS и построим вокруг него цилиндр высотой Δh , таким образом, чтобы его боковая поверхность была нормальной к S , а основания лежали по обе стороны границы раздела (рис. 1.5).

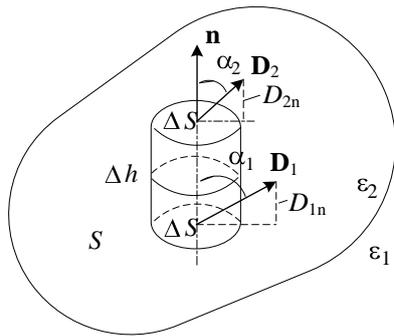


Рис. 1.5

боковая поверхность была нормальной к S , а основания лежали по обе стороны границы раздела (рис. 1.5).

Применим к нему третье уравнение Максвелла в интегральной форме

$$\oint_{S_{\text{ц}}} \mathbf{D} d\mathbf{S} = \sigma \Delta S,$$

где $S_{\text{ц}}$ – поверхность цилиндра, σ – плотность свободного заряда, распределенного на границе раздела. Устремляя высоту цилиндра Δh

к нулю можно пренебречь потоком вектора сквозь боковую поверхность. Учитывая малые размеры площадок ΔS , можно считать, что вектор \mathbf{D} в пределах своей площадки имеет одно и то же значение. Тогда, после интегрирования, для проекций векторов \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 на нормаль \mathbf{n} , получим

$$-D_{1n}\Delta S + D_{2n}\Delta S = \sigma \Delta S.$$

После сокращения на ΔS приходим к первому граничному условию в виде

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \quad (1.19)$$

или

$$\varepsilon_{a2} E_{2n} - \varepsilon_{1a} E_{1n} = \sigma. \quad (1.19 \text{ а})$$

Таким образом, нормальные составляющие вектора \mathbf{D} на поверхности раздела двух сред, отличаются на величину, равную поверхностной плотности свободного заряда в рассматриваемой точке.

Если на границе раздела нет поверхностных зарядов σ , то граничное условие (1.19) можно представить в виде

$$D_{1n} = D_{2n} \quad \text{или} \quad E_{1n} / E_{2n} = \varepsilon_{a2} / \varepsilon_1. \quad (1.20)$$

Условия для касательных составляющих векторов \mathbf{E} и \mathbf{D}

Граничные условия для касательных составляющих получим, выделив на поверхности раздела двух сред прямоугольный контур $abcd$ таким образом, чтобы его стороны ab и cd , достаточно малого размера, находились в разных средах и были перпендикулярны к нормали \mathbf{n} , проведенной в рассматриваемой точке (рис. 1.6).

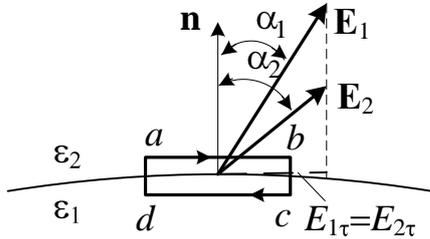


Рис. 1.6

Применим к контуру $abcd$ второе уравнение Максвелла в интегральной

$$\oint_{abcd} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta S} \mathbf{B} d\mathbf{S},$$

где ΔS – площадь контура $abcd$; $d\mathbf{S}$ – вектор площадки.

Устремим высоту контура $h=bc=da$ к нулю так, чтобы стороны $ab=cd=\Delta l$ оставались в разных средах и совпали с граничной поверхностью.

Так как в силу малости Δl , компоненты вектора \mathbf{E} в пределах Δl можно считать постоянными, после интегрирования с учетом направления векторов \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 и $d\mathbf{l}$ получаем:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{ab} \mathbf{E} d\mathbf{l} = E_1 \sin \alpha_1 \cdot \Delta l = E_{1\tau} \Delta l;$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{cd} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -E_2 \sin \alpha_2 \cdot \Delta l = -E_{2\tau} \Delta l,$$

где $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau}$ – касательные (тангенциальные) составляющие векторов $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$.

Поскольку векторы \mathbf{E} и $\partial \mathbf{B} / \partial t$ имеют конечные значения, справедливы соотношения:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{bd} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{da} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Delta S} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0.$$

Таким образом, после интегрирования по выбранному контуру и сокращения на Δl получаем второе граничное условие

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad (1.21)$$

согласно которому касательные составляющие вектора \mathbf{E} при переходе через границу раздела двух сред непрерывны.

Выражая тангенциальные составляющие $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau}$ через $D_{1\tau}$ и $D_{2\tau}$, получаем

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a2}}. \quad (1.22)$$

Если на границе раздела двух диэлектриков нет поверхностных зарядов, то на основании (1.21) и (1.20) получим соотношение, определяющее преломление векторов \mathbf{E} и \mathbf{D}

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}}. \quad (1.23)$$

Граничные условия на поверхности раздела диэлектрика (ε_{a1}) и проводника получаем, учитывая, что внутри проводящего тела электрическое поле отсутствует ($\mathbf{E}_2=0$; $\mathbf{D}_2=0$). Уравнения (1.20) и (1.21) принимают, соответственно, следующий вид:

$$\mathbf{D}_{1n}=\mathbf{D}_1=\sigma; \quad E_{1\tau}=0. \quad (1.24)$$

1.5.2. Граничные условия для векторов магнитного поля

Условия для нормальных составляющих векторов \mathbf{B} и \mathbf{H}

Граничные условия для нормальных составляющих векторов магнитного поля \mathbf{B} и \mathbf{H} при переходе границы раздела с магнитными проницаемостями μ_{a1} и μ_{a2} выводятся так же, как для нормальных составляющих векторов электрического поля \mathbf{D} и \mathbf{E} . Четвертое уравнение Максвелла, записанное для поверхности цилиндра, изображенного на рис. 1.6 (расположенного на граничной поверхности раздела сред μ_{a1} и μ_{a2}), после интегрирования и некоторых преобразований приводит к уравнению

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (1.25)$$

При интегрировании учтено равномерное распределение нормальных составляющих вектора \mathbf{B} в пределах малой площадки ΔS .

Переходя в равенстве (1.25) к нормальным составляющим вектора \mathbf{H} , получаем

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}}. \quad (1.26)$$

Таким образом, нормальная составляющая вектора \mathbf{B} при переходе границы раздела двух сред непрерывна, а нормальная составляющая вектора \mathbf{H} изменяется скачком.

Условия для касательных составляющих векторов \mathbf{B} и \mathbf{H}

Воспользуемся рис. 1.7 и для плоского контура $abcd$, расположенного на граничной поверхности сред с магнитными проницаемостями μ_{a1} и μ_{a2} , применим первое уравнение Максвелла в интегральной форме:

$$\int_{ab} \mathbf{H}d\mathbf{l} + \int_{bc} \mathbf{H}d\mathbf{l} + \int_{cd} \mathbf{H}d\mathbf{l} + \int_{da} \mathbf{H}d\mathbf{l} = \int_{\Delta S} \delta d\mathbf{S} + \int_{\Delta S} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Принимая касательные составляющие вектора \mathbf{H} равномерно распределенными в обеих средах в пределах малого отрезка Δl , а напряженность магнитного поля и плотность тока смещения – величинами конечными, при стремлении высоты контура к нулю, получаем:

$$(H_{1\tau} - H_{2\tau})\Delta l = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Delta S} \delta d\mathbf{S} = 0.$$

Правую часть полученного равенства при $h \rightarrow 0$ следует рассматривать как ток, распределенный на граничной поверхности в виде бесконечно тонкого слоя с плотностью $\eta = dI/dl$. На отрезок Δl приходится поверхностный ток

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Delta S} \delta d\mathbf{S} = \eta \Delta l.$$

Подставляя в исходную формулу и сокращая на Δl , окончательно получаем

$$(H_{1\tau} - H_{2\tau}) = \eta. \quad (1.27)$$

Переходя в уравнении (1.27) к касательным составляющим вектора магнитной индукции, получаем

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_{a1}} - \frac{B_{2\tau}}{\mu_{a2}} = \eta. \quad (1.28)$$

Если на граничной поверхности поверхностного тока нет, касательные составляющие вектора магнитной напряженности непрерывны. Тогда для преломления линий векторов \mathbf{B} и \mathbf{H} будет справедливо соотношение

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}. \quad (1.29)$$

В случае, когда магнитная проницаемость одной из сред много больше магнитной проницаемости другой среды, линии векторов \mathbf{B} и \mathbf{H} преломляются под прямым углом. Например, если первая среда - ферромагнитная $\mu_{a1} \gg \mu_{a2}$, то линии векторов \mathbf{B} и \mathbf{H} будут входить в нее (из второй среды) под прямым углом.

1.5.3. Условия для векторов электрического поля на границе раздела проводящих сред

Условия для векторов δ и \mathbf{E} при переходе границы раздела проводящих сред получают так же, как условия для векторов электрического поля на границе раздела двух диэлектриков.

Применив к поверхности малого цилиндра (рис. 1.6), расположенного на границе двух проводящих сред γ_1 и γ_2 , закон сохранения заряда

$$\oint_S \delta d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_{dV} \rho dV,$$

после интегрирования и предельного перехода $h \rightarrow 0$ получаем условие непрерывности для нормальных составляющих вектора плотности тока проводимости:

$$\delta_{1n} = \delta_{2n}. \quad (1.30)$$

Касательные составляющие вектора δ связаны соотношением

$$\delta_{1\tau} / \delta_{2\tau} = \gamma_1 / \gamma_2, \quad (1.31)$$

которое вытекает из условия непрерывности касательных составляющих вектора \mathbf{E} (1.21). Кроме того, соотношения (1.30) и (1.31) могут быть объединены в одно:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (1.32)$$

На границе раздела диэлектрика и проводника ($\gamma_1 \ll \gamma_2$) угол α_1 согласно (1.32) можно считать равным нулю при любом угле α_2 , т.е. вектор плотности тока в диэлектрике перпендикулярен к поверхности проводника. Если $\gamma_1 = 0$, ток в диэлектрике будет равен нулю, а в проводнике будет отсутствовать нормальная составляющая тока $\delta_n = 0$.

1.6. Энергия электромагнитного поля

Соотношения для количественной оценки энергии электромагнитного поля можно получить на основе уравнений Максвелла. Для этого первое уравнение Максвелла (1.8), записанное без учета сторонних токов, являющихся первопричиной возникновения электромагнитного поля, скалярно умножим на вектор \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{E} \delta + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.33)$$

Все члены полученного уравнения – скалярные величины, имеющие размерность ватт на квадратный метр.

Преобразуем левую часть уравнения (1.33) согласно известной формуле векторного анализа ($\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}$):

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \operatorname{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \mathbf{E} \delta + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Учитывая (1.4), (1.5), (1.10) и (1.18), после некоторых преобразований получаем

$$-\operatorname{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \gamma E^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right). \quad (1.34)$$

Первый член правой части уравнения (1.34) выражает закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме и определяет энергию, выделяющуюся в виде теплоты в единице объема в единицу времени. Второй член уравнения – это скорость изменения запаса электромагнитной энергии в единице объема.

Векторное произведение $[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ имеет размерность $\text{ВА}/\text{м}^2$, т.е. размерность энергии в единице объема и единице времени.

Чтобы получить выражение энергии в объеме V , проинтегрируем уравнение (1.35) по объему, а для сокращения записи векторное произведение $[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$ обозначим через вектор $\mathbf{\Pi}$, который принято называть вектором Пойнтинга (иногда Умова-Пойнтинга):

$$\int_V -\text{div} \mathbf{\Pi} dV = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV.$$

Объемный интеграл в левой части равенства преобразуем с помощью теоремы Остроградского-Гаусса в поверхностный. После преобразования получаем

$$-\oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} = \int_V \gamma E^2 dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2} \right) dV. \quad (1.35)$$

Это уравнение Пойнтинга (Умова-Пойнтинга) для мгновенных значений. Его левая часть представляет поток вектора Пойнтинга сквозь любую замкнутую поверхность S , ограничивающую объем V .

Направление вектора $\mathbf{\Pi}$ определяется направлением движения острия правого винта, если его вращать по кратчайшему направлению от вектора \mathbf{E} к \mathbf{H} . Так как вектор $d\mathbf{S}$ направлен в сторону внешней по отношению к рассматриваемому объему нормали, а вектор $\mathbf{\Pi}$ – внутрь объема, то скалярное произведение $\mathbf{\Pi} d\mathbf{S} < 0$. Знак минус означает, таким образом, что левая часть уравнения (1.35) – величина положительная.

В случае переменных процессов распределение электромагнитной энергии непрерывно изменяется. Это изменение в каждой точке определяется уравнение Пойнтинга в дифференциальной форме, которое получается из уравнения (1.34):

$$-\text{div} \mathbf{\Pi} = \mathbf{E}\delta + \frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad (1.36)$$

где $\mathbf{E}\delta$ – плотность мощности тепловых потерь; $\omega = \frac{\epsilon_a E^2}{2} + \frac{\mu_a H^2}{2}$ – объемная плотность полной энергии электромагнитного поля, которую можно разделить условно на плотности энергии электрического $\omega_э = \epsilon_a E^2 / 2$ и магнитного $\omega_м = \mu_a H^2 / 2$ полей.

1.7. Векторный и скалярный потенциалы

Задачи расчета электромагнитного поля можно разделить на два типа. В задачах первого типа требуется найти векторы электромагнитного поля по заданному распределению источников (прямая задача). В задачах второго типа требуется определить распределение источников поля по заданному распределению векторов поля (обратная задача).

Определение векторов поля из уравнений Максвелла – трудная задача, поэтому при расчете поля, как правило, пользуются вспомогательными функциями, которые называют *электродинамическими потенциалами*. Уравнения с потенциалами вытекают из уравнений Максвелла. Так, согласно четвертому уравнению Максвелла (1.5), дивергенция вектора \mathbf{B} равна нулю, а значит, вектор \mathbf{B} можно представить в виде ротора некоторого вектора \mathbf{A} (дивергенция ротора любого вектора равна нулю):

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad \text{или} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \mathbf{A}. \quad (1.37)$$

Вектор \mathbf{A} – вспомогательная функция, позволяющая однозначно найти вектор \mathbf{B} . При этом сам вектор \mathbf{A} по заданному вектору \mathbf{B} определяется неоднозначно, а с точностью до градиента произвольной скалярной функции, что следует из тождества

$$\text{rot grad } \psi = 0. \quad (1.38)$$

Подставляя соотношение (1.37) во второе уравнение Максвелла (1.10) и изменяя порядок дифференцирования по времени и координатам, получаем:

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Учитывая тождество (1.38), выражение $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, стоящее в скобках, можно приравнять $-\text{grad } \varphi$, где φ – скалярная функция. Тогда получим

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \text{или} \quad \mathbf{D} = -\varepsilon_a \left(\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \quad (1.39)$$

Таким образом, векторы поля (\mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H}) могут быть выражены через вспомогательные функции: скалярный φ и векторный \mathbf{A} потенциалы. Чтобы установить связь векторного потенциала \mathbf{A} с источником поля, выражения для \mathbf{H} и \mathbf{D} из (1.37) и (1.39) подставим в первое уравнение Максвелла (1.8). Для однородной среды получим

$$\frac{1}{\mu_a} \text{rot rot } \mathbf{A} = \delta - \varepsilon_a \left(\text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right). \quad (1.40)$$

Учитывая известное тождество $\text{rot rot } \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \nabla^2 \mathbf{a}$, где ∇^2 -оператор Лапласа и изменяя в (1.40) порядок дифференцирования по времени и координатам, приходим к уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \boldsymbol{\delta} + \text{grad}(\text{div } \mathbf{A} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t}).$$

Так как вектор \mathbf{A} определен с точностью до градиента произвольной скалярной функции, дополнительно потребуем, чтобы

$$\text{div } \mathbf{A} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (1.41)$$

С учетом (1.41), названного условием калибровки, получаем

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \boldsymbol{\delta}. \quad (1.42)$$

Это уравнение Даламбера для векторного потенциала \mathbf{A} .

Чтобы получить аналогичное уравнение для скалярного потенциала φ , используется третье уравнение Максвелла. Подставляя (1.39) в (1.13), находим

$$-\varepsilon_a (\text{div grad } \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A}) = \rho. \quad (1.43)$$

Учитывая условие калибровки (1.41) и тождество $\text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi$, приходим к уравнению Даламбера для скалярного потенциала

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (1.44)$$

1.8. Частные виды электромагнитных явлений

Как уже отмечалось, уравнения Максвелла представляют собой систему уравнений в частных производных, устанавливающих взаимосвязи между векторами электромагнитного поля с учетом их изменения в пространстве и времени. Однако в ряде случаев нет необходимости учитывать изменение во времени ($\partial/\partial t = 0$) и перемещение заряженных частиц ($\boldsymbol{\delta}=0$). В этом случае система уравнений Максвелла распадается на две независимые системы:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0; \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho; \quad \mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}, \quad (1.45)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0; \quad \text{div } \mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}. \quad (1.46)$$

Система уравнений (1.45) содержит только электрические величины, а система (1.46) – только магнитные.

Поля, описываемые уравнениями (1.45), называют *электростатическими*, а уравнениями (1.46) - *магнитоэлектростатическими*.

Если в рассматриваемой области есть постоянный ток, электрическое и магнитное поля взаимосвязаны между собой. Система уравнений Максвелла принимает вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \delta; & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; & \mathbf{B} &= \mu_a \mathbf{H}; \\ & & \delta &= \gamma \mathbf{E}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; & \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho; & \mathbf{D} &= \varepsilon_a \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Электромагнитное поле в этом случае принято называть *стационарным электромагнитным полем*.

Если при наличии тока проводимости можно пренебречь током смещения (это медленно протекающие процессы), или, напротив, можно пренебречь током проводимости при наличии токов смещения (емкостные цепи), электромагнитные поля называют *квазистационарными*.

Дифференциальные уравнения Максвелла просто и удобно записывать с помощью дифференциального оператора Гамильтона (набла), определяющего дифференцирование в частных производных по выбранным координатным осям. В прямоугольной системе координат оператор записывается

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.48)$$

Дифференциальные уравнения из системы (1.47) с использованием оператора набла записываются следующим образом:

$$[\nabla \mathbf{H}] = \delta; \quad \nabla \mathbf{B} = 0; \quad [\nabla \mathbf{E}] = 0; \quad \nabla \mathbf{D} = \rho.$$

1.9. Графическое изображение электромагнитного поля

Графическое изображение электромагнитного поля дополняет его математическое описание. Векторные поля, а электромагнитное поле - векторное, принято изображать в виде линий, которые в каждой точке

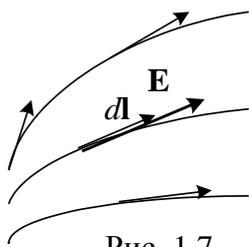


Рис. 1.7

совпадают с направлением вектора поля (рис. 1.7). Для представления о величине поля проводят линии таким образом, чтобы их число на единицу площади, расположенной перпендикулярно линиям, было пропорционально величине вектора. Там, где поле сильнее, линии проводят гуще и наоборот реже, если поле слабее.

Линии векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} , характеризующих силовое действие поля, называют *силовыми линиями*. Так как в каждой точке силовая линия совпадает по направлению с вектором поля, то для

линии вектора поля, например, \mathbf{E} можно записать $d\mathbf{l} = \lambda \mathbf{E}$, где $d\mathbf{l}$ – элемент длины силовой линии, а λ – коэффициент.

В декартовых координатах $d\mathbf{l} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$; $\mathbf{E} = \mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z$, поэтому уравнение силовой линии можно переписать в форме:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \quad (1.49)$$

Уравнение силовой линии магнитного поля записывается аналогично.

В потенциальных полях можно выделить эвипотенциальные (равнопотенциальные) поверхности, а в плоскости чертежа изобразить эквипотенциальные линии, потенциал любой точки которой одинаковый. Уравнения эквипотенциальных линий $\varphi = \text{const}$ или $\mathbf{A} = \text{const}$.

Эвипотенциальные и силовые линии пересекаются под прямым углом. Если эквипотенциальные линии в плоскости чертежа проведены так, что между двумя соседними линиями разность потенциалов постоянная, а между двумя силовыми линиями заключен одинаковый поток соответствующего вектора, картина поля будет представлять собой систему криволинейных квадратов (прямоугольников). Правильно построенная картина поля позволяет количественно определить все его параметры.

Расчет поля упрощается, когда величины, характеризующие поле, являются функциями только одной координаты. Поле в этом случае называется **одномерным**. Одномерные поля обладают одним из видов симметрии: центральной, осевой или симметрией относительно плоскости, а границы области являются координатными поверхностями.

Если величины, характеризующие поле, зависят от двух координат, поле называют двумерным. Двумерные поля бывают плоскопараллельными и плоскомеридианными.

Плоскопараллельным называется поле, потенциал которого не зависит от одной из координат декартовой системы координат. Картина плоскопараллельного поля (т.е. совокупность линий равного потенциала и линий напряженности поля) в этом случае одинаковая во всех плоскостях, перпендикулярных одной из координатных осей. Для упрощения анализа плоскопараллельного поля широко используется теория функций комплексной переменной. Поле при этом характеризуется комплексным потенциалом, вещественная и мнимая части которого являются сопряженными функциями.

Поле называется **плоскомеридианным**, если его потенциал не зависит от угловой координаты цилиндрической системы координат. Картина поля в этом случае одинаковая во всех плоскостях, проходящих через ось симметрии.

2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

2.1. Основные уравнения электростатики

Электростатическое поле описывается дифференциальными уравнениями Максвелла в предположении, что векторы поля не зависят от времени и отсутствуют токи проводимости (1. 37):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho; \quad (2.2)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}. \quad (2.3)$$

К этим уравнениям полезно к добавить их интегральные аналоги:

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0; \quad (2.4)$$

$$\oint_s \mathbf{D} d\mathbf{S} = q. \quad (2.5)$$

Из уравнений (2.1) и (2.2) следует, что электростатическое поле является потенциальным, а линии поля (векторов \mathbf{D} и \mathbf{E}) имеют истоки и стоки, начинающиеся и заканчивающиеся на зарядах. Иными словами, существует скалярная функция, названная потенциалом

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) определяет функцию φ с точностью до постоянной. Физический смысл потенциала - работа, которую совершают силы электрического поля при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2 против сил поля

$$A = -q \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} = -q \int_1^2 -\operatorname{grad} \varphi d\mathbf{l} = q(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Если взять $q=1$ Кл, получим, что работа по перемещению заряда из точки 1 в точку 2 равна разности потенциалов в конечной и начальной точках пути. При этом работа не зависит от формы пути перемещения заряда. При решении конкретных задач сначала находят потенциал, а затем определяют вектор \mathbf{E} , полагая, что потенциал бесконечно удаленной точки равен нулю. Единица измерения φ - вольт.

Для однородной среды из (1.49) получаем уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \varepsilon_a. \quad (2.7)$$

Если $\rho=0$, уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (2.8)$$

Оператор Лапласа $\nabla^2 = \Delta$ (лапласиан) в прямоугольной системе координат записывается

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.9)$$

Уравнения Лапласа и Пуассона как уравнения в частных производных допускают бесчисленное множество решений. Выбрать правильное решение позволяет теорема единственности.

2.1.1. Теорема единственности

В каждом конкретном случае для получения единственного решения оно должно удовлетворять не только уравнениям поля, но и некоторым дополнительным требованиям. Эти требования устанавливает теорема единственности. Для электростатического поля теорема единственности формулируется следующим образом: *если существует функция, удовлетворяющая уравнениям Лапласа - Пуассона и граничным условиям, то это решение единственное.*

Для условий электростатики граничные условия записываются

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma; \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}; \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}}, \quad (2.10)$$

при этом считается, что нормаль к поверхности раздела сред направлена из *первой среды во вторую*. Граничное условие для потенциала φ получается из (2.10), где касательные составляющие вектора \mathbf{E} заменяются градиентом потенциала по направлению касательной к поверхности раздела. После интегрирования получаем равенство

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (2.11)$$

Условие (2.11) предполагает, что на границе раздела сред нет двойного заряженного слоя. Если одна из сред является проводником, то все точки проводника, включая его поверхность, имеют один и тот же потенциал ($\varphi = \text{const.}$)

Из теоремы единственности вытекают два следствия, имеющие большое значение для практических расчетов.

Следствие 1. Электростатическое поле в объеме, ограниченном эквипотенциальными поверхностями, не изменится, если эти поверхности станут проводящими с теми же значениями потенциалов (принцип отвердения эквипотенциалей).

Следствие 2. Электростатическое поле по одну сторону граничной поверхности не изменится, если по другую сторону этой поверхности произвести любые изменения свойств среды и распределение источников поля при неизменных граничных условиях (принцип зеркальных отображений).

2.1.2. Принцип наложения (суперпозиции)

Так как уравнения Максвелла, Лапласа и Пуассона являются линейными, для них выполняется принцип наложения. Согласно этому принципу, поле нескольких зарядов в заданной точке определяется суммой полей каждого из отдельно взятых зарядов. Если заряд непрерывно распределен в некотором объеме V с известной плотностью ρ , то каждый элемент dV вносит свой вклад в рассматриваемое поле и конечный результат можно найти интегрированием элементарных составляющих.

2.1.3. Энергия электростатического поля

Из общего выражения для энергии электромагнитного поля (1.35) следует, что энергия электростатического поля в объеме V равна

$$W_{\text{э}} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_a E^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \mathbf{D} dV. \quad (2.12)$$

Энергию электростатического поля можно выразить через заряды. Для этого в уравнении (2.12) вектор \mathbf{E} заменим на (2.6) и воспользуемся тождеством $\text{div}(\psi \mathbf{a}) = \psi \text{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \text{grad} \psi$, где ψ и \mathbf{a} – произвольные скалярная и векторная функции:

$$W_{\text{э}} = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \text{grad} \phi dV = \frac{1}{2} \int_V \phi \text{div} \mathbf{D} dV - \frac{1}{2} \int_V \text{div}(\phi \mathbf{D}) dV. \quad (2.13)$$

Второй интеграл в (2.13) преобразуем по теореме Остроградского-Гаусса в поверхностный:

$$\int_V \text{div}(\phi \mathbf{D}) dV = \oint_S \phi \mathbf{D} dS,$$

где S – поверхность, ограничивающая объем V . Если заряды распределены в ограниченной области, а интегрирование распространено на все пространство ($S \rightarrow \infty$), то этот интеграл будет равен нулю. С учетом этого из (2.13) после подстановки (2.2) следует

$$W_{\text{э}} = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi dV \quad \text{или} \quad W_{\text{э}} = \frac{1}{2} \phi Q. \quad (2.14)$$

Аналогично выводятся выражения для энергии поля, созданного поверхностными и линейными зарядами.

2.1.4. Емкость, потенциальные и емкостные коэффициенты. Частичные емкости

Потенциал уединенного проводника зависит от его размера, формы и величины имеющегося на нем заряда. Отношение величины заряда

Здесь
$$C_{ii} = \beta_{i1} + \beta_{i2} + \dots + \beta_{im} + \dots + \beta_{in};$$

$$C_{ik} = -\beta_{ik} \quad \text{при } i \neq k.$$

Коэффициенты C называют частичными емкостями. Как и другие коэффициенты, они удовлетворяют принципу взаимности: $C_{ik} = C_{ki}$.

2.2. Примеры расчета полей простой структуры

2.2.1. Вводные задачи анализа полей

В разделе приведены задачи, требующие решения или анализа дифференциальных уравнений для определения характера поля, выявления в нем истоков или стоков, а также других его параметров.

Пример 2.1. Указать условия, при которых поле вектора \mathbf{M} является потенциальным.

Решение. Условие потенциальности поля вектора \mathbf{M} (отсутствие вихря) устанавливается уравнением (2.1): $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, что сокращенно можно записать как $[\nabla \mathbf{M} = 0] = 0$, где ∇ - дифференциальный оператор (набла). В потенциальном поле $\mathbf{M} = -\text{grad } \varphi$ (φ - скалярный потенциал). Дивергенция потенциального поля хотя бы в ограниченном объеме отлична от нуля, т. е. $\text{div } \mathbf{M} \neq 0$.

Таким образом, вектор \mathbf{M} должен удовлетворять дифференциальным уравнениям:

$$\text{rot } \mathbf{M} = 0; \quad \mathbf{M} = -\text{grad } \varphi; \quad \text{div } \mathbf{M} \neq 0.$$

Пример 2.2. Укажите взаимосвязь вектора \mathbf{E} с плотностью заряда ρ в электростатическом поле, если диэлектрическая проницаемость среды $\epsilon_a \neq \text{const}$.

Решение. Поскольку $\text{div } \mathbf{D} = \rho$, а $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$, то $\text{div } \mathbf{D} = \text{div } \epsilon_a \mathbf{E}$. Но так как $\epsilon_a \neq \text{const}$ и, кроме того, ϵ_a - скаляр, имеем

$$\text{div } \mathbf{D} = \mathbf{E} \text{grad } \epsilon_a + \epsilon_a \text{div } \mathbf{E}.$$

Таким образом, $\rho = \mathbf{E} \text{grad } \epsilon_a + \epsilon_a \text{div } \mathbf{E}$.

Пример 2.3. В электростатическом поле с диэлектрической проницаемостью ϵ_a известен потенциал $\varphi = ax^2 + bx$, где a и b постоянные коэффициенты.

Определить распределение объемной плотности свободных зарядов.

Решение. Объемная плотность свободных зарядов ρ связана с потенциалом поля уравнением Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \epsilon_a.$$

Потенциал исследуемого поля одномерный, поэтому уравнение Пуассона также является одномерным и записывается

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} = -\frac{\rho_{св}}{\varepsilon_a} \right).$$

Дважды дифференцируя по φ , нетрудно получить $\rho_{св} = -2\varepsilon_a a$ Кл/м³.

Пример 2.4. В электрическом поле известны составляющие вектора напряженности в прямоугольной системе координат:

$$E_x = -Cy, \quad E_y = Cx, \quad E_z = 0,$$

где $C = \text{const}$. Определить характер поля вектора \mathbf{E} .

Решение. Характер поля определяется ротором вектора. Для потенциального поля $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. Определим величину ротора вектора \mathbf{E} .

В прямоугольных координатах ротор записывается

$$\text{rot } \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_y \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial}{\partial x} E_z - \frac{\partial}{\partial z} E_x \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x \right).$$

В нашем случае поле зависит от двух координат, поэтому

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right).$$

Подставляя заданные проекции и дифференцируя, приходим к результату: $\text{rot } \mathbf{E} = 2\mathbf{k}C$. Это означает, что указанное поле не электростатическое (безвихревое), а вихревое.

Ответ: $\text{rot } \mathbf{E} = 2\mathbf{k}C$, поле вихревое.

Пример 2.5. Потенциал поля изменяется по закону:

$$\varphi = \sum_n A_n \cos nx \operatorname{ch} ny,$$

где n – постоянный коэффициент.

Определить, есть ли в этом поле объемный заряд и чему он равен?

Решение. Воспользуемся уравнением Пуассона (2.7) и выразим из него искомую величину: $\rho = -\varepsilon_a \nabla^2 \varphi$. Подставляя в полученное уравнение заданную функцию φ и дифференцируя по x и y , имеем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sum_n A_n \cdot n \cdot \sin nx \cdot \operatorname{ch} ny + \sum_n A_n \cdot n \cdot \cos nx \cdot \operatorname{sh} ny;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\sum_n A_n \cdot n^2 \cdot \cos nx \cdot \operatorname{ch} ny + \sum_n A_n \cdot n^2 \cdot \cos nx \cdot \operatorname{ch} ny = 0.$$

Правая часть уравнения равна нулю. Объемный заряд отсутствует.

2.2.2. Определение граничных условий

В разделе представлены примеры, иллюстрирующие законы изменения векторов электростатического поля при переходе через границу раздела двух сред. При этом полагается, что векторы поля направлены из среды 1 в среду 2, а углы θ_1 и θ_2 - отсчитываются от нормали к границе раздела, направленной также из первой среды во вторую.

Пример 2.6. В однородное поле в трансформаторном масле $\epsilon_1 = 3$ попал воздушный пузырек.

Найти максимально допустимую напряженность поля в масле $E_{1\max}$, если максимально допустимая напряженность поля в воздухе составляет 30 кВ/см.

Решение. На границе раздела сред воздушный пузырек - масло согласно (2.10) нормальная составляющая вектора электрического смещения претерпевает разрыв $D_{2n} - D_{1n} = \sigma$.

По условию на границе раздела сред свободного заряда нет, поэтому $D_{2n} = D_{1n}$ или $\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$. Так как воздушный пузырек $\epsilon_2 = 1$ можно считать сферическим, максимальное значение напряженности поля будет в точке, лежащей на оси вращения пузырька, совпадающей с линиями однородного поля. Нормальная составляющая напряженности поля в этой точке равна $E_{1n} = \frac{\epsilon_2 E_{2n}}{\epsilon_1}$ (касательная составляющая здесь

отсутствует). Подставляя числовые значения, найдем:

$$E_{1\max} = E_{1n} = 10 \text{ кВ/см.}$$

Ответ: $E_{1\max} = 10$ кВ/см.

Пример 2.7. В однородное поле в трансформаторном масле $\epsilon_1 = 4$ попала капля воды $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$. В одной из точек поверхности капли напряженность поля $E = 1000$ В/м. Найти поверхностную плотность заряда в этой точке.

Решение. Поскольку $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$, то каплю воды можно считать проводящей. Внутри проводника поле отсутствует $D_2 = 0$, а на его поверхности линии поля всегда перпендикулярны поверхности, т. е. $D_1 = D_{1n}$. Поэтому согласно (2.10) имеем $D_{1n} = \sigma$. Величина поверхностной плотности индуцированного заряда равна $\sigma = \epsilon_{1a} E_1$ или численно $\sigma = 35,4 \cdot 10^{-9}$ Кл/м².

Пример 2.8. Со стороны диэлектрика $\epsilon_1 = 1$ на границе раздела двух сред известны составляющие вектора напряженности поля: касательная $E_{1\tau} = 20$ В/м и нормальная $E_{1n} = 40$ В/м.

Найти напряженность поля в этой же точке со стороны второго диэлектрика $\epsilon_2 = 2$.

Решение. Согласно граничным условиям (2.10)

$$\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \text{ и } E_{1\tau} = E_{2\tau}.$$

Отсюда следует $E_{2n} = \epsilon_1 E_{1n} / \epsilon_2$ и $E_2 = \sqrt{E_{2n}^2 + E_{2\tau}^2}$.

Подставляя числовые значения, получаем $E_2 = 28,2$ В/м.

Пример 2.9. На границе раздела двух диэлектриков $\epsilon_1 = 8$; $\epsilon_2 = 4$ плотность свободного поверхностного заряда $\sigma = -54$ мкКл/м². В точке a (рис. 2.1) напряженность поля $E_1 = 100$ кВ/см, а угол $\theta_1 = 60^\circ$.

Определить нормальную составляющую вектора электрического смещения D_{2n} в этой точке со стороны второго диэлектрика.

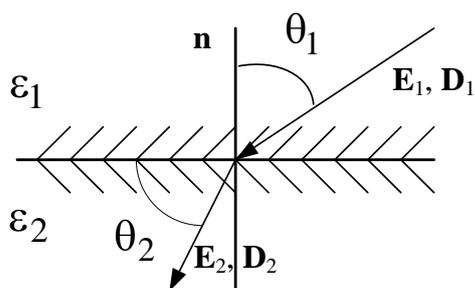


Рис. 2.1

Решение. Согласно граничным условиям (2.10)

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma; \quad E_{1\tau} = E_{2\tau},$$

где $D_{1n} = \epsilon_{1a} E_{1n} = \epsilon_{1a} E_1 \cos \theta_1$;

$E_{1\tau} = E_1 \sin \theta_1$. Отсюда следует

$$D_{2n} = \sigma + \epsilon_{1a} E_1 \cos \theta_1.$$

Подставляя числовые значения, получаем $D_{2n} = 300 \cdot 10^{-6}$ Кл/м².

Ответ: $D_{2n} = 300$ мкКл/м².

Пример 2.10. Внутри протяженного цилиндра из оргстекла $\epsilon_2 = 4$, внесенного в однородное поле в воздухе $\epsilon_1 = 1$, установилось однородное поле напряженностью $E_2 = 100$ кВ/см.

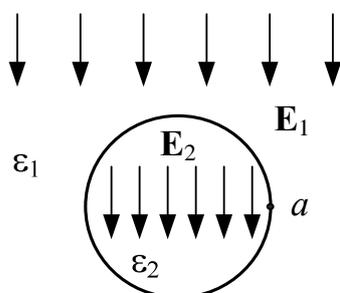


Рис. 2.2

Определить напряженность поля в воздухе E_1 в точке a (рис. 2.2).

Решение. В точке a в обеих средах поле имеет только касательные составляющие, причем $E_{1\tau} = E_{2\tau}$. Внутри цилиндра поле однородное с напряженностью

$$E_2 = E_{2\tau} = 100 \text{ кВ/см.}$$

Следовательно,

$$E_{1a} = E_{1\tau} = E_2 = 100 \text{ кВ/см.}$$

Пример 2.11. найти угол, под которым силовые линии однородного электрического поля выходят из фарфора с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 = 8$ в воздух $\varepsilon_2 = 1$. В фарфоре силовые линии по отношению к нормали расположены под углом $\alpha_1 = 45^\circ$.

Решение. Согласно граничным условиям (2.10), если на границе раздела сред нет свободного заряда, силовые линии поля преломляются по закону

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}}.$$

по закону

Отсюда следует, что искомый угол $\alpha_2 = \arctg(\varepsilon_2 \operatorname{tg} \alpha_1 / \varepsilon_1)$.

Подставляя числовые значения, находим $\alpha_2 = \arctg(0,125 \cdot 1) = 7,13^\circ$.

2.3. Использование теоремы Гаусса

Данный раздел составляют задачи, как правило, с осевой или центральной симметрией, решение которых не требует специальных методов расчета. Независимо от того, какие величины подлежат определению, основой расчета служит теорема Гаусса (2.5).

Использование принципа суперпозиции (наложения), а также уравнения взаимосвязи векторов \mathbf{D} и \mathbf{E} (2.3), позволяют расширить круг решаемых задач.

Пример 2.12. Электростатическое поле создано свободным зарядом, равномерно распределенным тонким слоем (простой слой зарядов) по протяженной плоской поверхности границы раздела двух диэлектриков $\varepsilon_1 = 4,5$; $\varepsilon_2 = 1$ с плотностью $\sigma = 10^{-2}$ мкКл/м².

Определить напряженность поля E_1 на границе раздела сред со стороны диэлектрика ε_1 при отсутствии внешнего поля.

Решение. При отсутствии внешнего поля (кроме поля свободного заряда, распределенного на границе раздела сред) векторы электрического поля \mathbf{E} и \mathbf{D} в силу симметрии будут иметь только нормальные составляющие, направленные в разные стороны от границы раздела. Выделив на границе раздела сред небольшой цилиндр, боковая поверхность которого нормальна поверхности, а основания ΔS лежат по обе стороны слоя (рис. 1.5) и применив теорему Гаусса, получим:

$$D_{1n} \Delta S + D_{2n} \Delta S = \sigma \Delta S.$$

Учитывая это равенство, после сокращения на ΔS , получаем: $2D_{1n} = \sigma$.

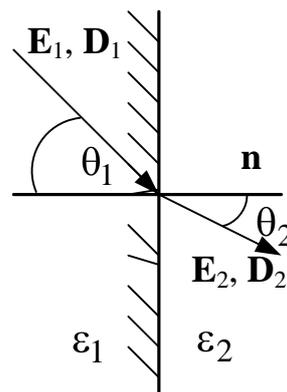


Рис. 2.3

Напряженности поля со стороны диэлектрика ϵ_1 будет равна $E_1 = E_{1n} = \frac{\sigma}{2\epsilon_{1a}}$, где $\epsilon_{1a} = \epsilon_1\epsilon_0$.

Подставляя числовые данные, найдем $E_1 = 125$ В/м.

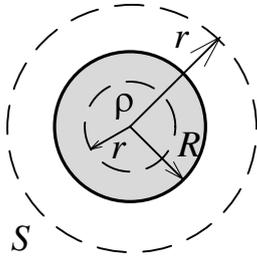


Рис. 2.4

Пример 2.13. Объемный заряд распределен равномерно с плотностью ρ внутри непроводящей сферы радиуса R .

Определить напряженность поля E внутри $r < R$ и вне $r > R$ сферы (r – координата сферической системы). Проницаемость среды всюду ϵ_a .

Решение. Поскольку заряд распределен в сфере равномерно, то векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} в сферической системе координат имеют только радиальные составляющие E_r и D_r . Для любой поверхности радиусом r по теореме Гаусса с учетом сказанного имеем:

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = D_r \oint d\mathbf{S} = q,$$

где q – заряд, попавший внутрь поверхности S .

Поверхность S – сферическая, поэтому

$$\mathbf{D} = \mathbf{r}_0 D_r = \mathbf{r}_0 \frac{q}{4\pi r^2} \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = \mathbf{r}_0 E_r = \mathbf{r}_0 \frac{q}{4\pi \epsilon_a r^2},$$

где \mathbf{r}_0 – орт радиуса r – сферической системы координат.

Определим величину заряда q для двух случаев $r < R$ и $r > R$. В первом случае свободный заряд, попавший внутрь поверхности интегрирования, равен $q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, во втором - $q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$.

Подставляя данные значения в формулу для вектора \mathbf{E} , получаем:

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}_0 \frac{\rho r}{3\epsilon_a} \quad \text{при} \quad r < R \quad \text{и} \quad \mathbf{E} = \mathbf{r}_0 \frac{\rho R^3}{3r^2 \epsilon_a} \quad \text{при} \quad r > R.$$

Замечание. В области $r > R$ поле сферы с зарядом, равномерно распределенным внутри непроводящей сферы, совпадает с полем проводящей сферы того же радиуса, на поверхности которого равномерно распределен тот же заряд q , а также с полем точечного заряда q , помещенным в центре сферической системы координат.

Пример 2.14. По поверхности протяженного металлического цилиндра кругового сечения, помещенного в однородный диэлектрик (ϵ_a), равномерно распределен электрический заряд с линейной плотностью σ .

Определить закон изменения напряженности электрического поля E и потенциала φ , принимая радиус цилиндра равным R .

Решение. Поверхность цилиндра имеет всюду один и тот же потенциал (эквипотенциальна). Внутри цилиндра поля нет: $E=0$. Из соображений симметрии для протяженного цилиндра следует принять, что вектор напряженности поля перпендикулярен оси цилиндра и в точках, равноудаленных от оси цилиндра, имеет одинаковые значения.

Проведя замкнутую цилиндрическую поверхность S радиусом $r \geq R$, охватывающую единицу длины цилиндра, и применив к ней теорему Гаусса, можно записать:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q_S}{\epsilon_a} = \frac{2\pi R \cdot 1 \cdot \sigma}{\epsilon_a}.$$

Через основания цилиндра поток вектора \mathbf{E} отсутствует (вектор нормален оси цилиндра), а его боковая поверхность единичной длины равна $2\pi r$. Учитывая это, получаем $\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = E 2\pi r = \frac{2\pi R \sigma}{\epsilon_a}$.

Отсюда следует
$$E = \frac{\sigma R}{\epsilon_a r}.$$

Удобнее поле протяженного равномерно заряженного цилиндра определять через линейную плотность заряда $\tau=q/l$, где l – длина цилиндра. Тогда для напряженности поля в области $r \geq R$ получим

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r}. \quad (2.19)$$

Чтобы найти потенциал, воспользуемся формулой (2.6), записав ее с учетом осевой симметрии в цилиндрической системе координат:

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \quad \text{или} \quad \varphi = -\frac{\tau}{2\pi} \int \frac{dr}{r} + A,$$

где $A = \text{const}$. После подстановки (2.19) и интегрирования, получаем

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi} \ln r + A. \quad (2.20)$$

Замечание. Поле равномерно заряженного цилиндра в области $r \geq R$ совпадает с полем равномерно заряженной нити (заряженной оси) с линейной плотностью $\tau = 2\pi R\sigma$, помещенной на оси цилиндра. В отличие от поля цилиндра поле заряженной оси существует во всем пространстве.

Пример 2.15. В весьма протяженном цилиндрическом конденсаторе потенциал внутренней обкладки с радиусом R_1 равен нулю. Потенциал наружной обкладки – радиусом R_2 равен φ_2 .

Определить закон изменения потенциала $\varphi(r)$ между обкладками конденсатора.

Решение. Поле обладает осевой симметрией. Напряженность поля в любой точке между обкладками конденсатора ($R_1 \leq r \leq R_2$), удаленной на расстояние r от оси, согласно (2.19) равна

$$E = E_r = \tau / 2\pi\epsilon_a r,$$

где τ - заряд внутренней обкладки конденсатора на единицу длины.

$$\text{Потенциал поля} \quad \varphi = -\int \mathbf{E} dr \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{-\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln r + A,$$

где A – постоянная интегрирования.

Постоянную A находим из граничных условий $r = R_1, \varphi = 0$:

Для внутренней обкладки конденсатора $r = R_1$ записываем:

$$0 = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln R_1 + A, \quad \text{откуда следует} \quad A = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln R_1.$$

Для наружной обкладки $r = R_2$ соответственно получаем:

$$\varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right).$$

Выражая линейный заряд τ через заданный потенциал φ_2 и подставляя его в формулу искомого распределения потенциала, находим:

$$\varphi(r) = \frac{2\pi\epsilon_a \varphi_2}{\ln \frac{R_1}{R_2} \cdot 2\pi\epsilon_a} \ln \frac{R_1}{r} = \frac{\varphi_2 \ln \frac{r}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Пример 2.16. Двухпроводная линия с известными радиусами проводов R и расстоянием между геометрическими осями $a \gg R$ находится в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_a .

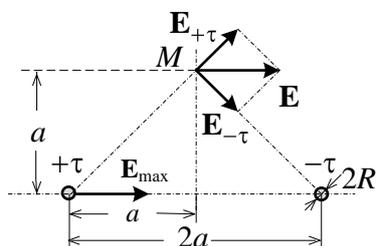


Рис. 2.5

Определить максимально возможное напряжение между проводами линии при двойном запасе прочности по напряженности поля и напряженность поля в точке M (рис. 2.5). Прочность среды по напряженности E_0 .

Решение. При заданном условии ($a \gg R$) провода линии можно считать заряженными нитями (осями) с линейной плотностью зарядов равной величины и противоположных по знаку.

Согласно принципу наложения напряженность поля и потенциал

определяются суммой напряженностей и потенциалов каждого из отдельно взятых зарядов.

Очевидно, что максимальная напряженность поля достигается в точках поверхностей проводов со стороны кратчайшего расстояния между ними (с внутренней стороны). В этих точках она равна арифметической сумме напряженностей от каждого из линейных зарядов, т.к. составляющие напряженности поля направлены одинаково:

$$E_{max} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{a-R} \right).$$

При двойном запасе прочности $E_{max} = E_0/2$ линейный заряд должен быть равен

$$\tau = E_0\pi\epsilon_a / \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{a-R} \right).$$

Потенциалы поверхностей проводов линии от каждого из линейных зарядов определяем по (2.20), приняв постоянную A равной нулю:

$$\varphi_{+\tau} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{a-R}{R}; \quad \varphi_{-\tau} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{R}{a-R}.$$

Разность потенциалов между проводами

$$U_{max} = \varphi_{+\tau} - \varphi_{-\tau} = \frac{\tau}{\pi\epsilon_a} \ln \frac{a-R}{R}.$$

В точке a напряженность поля определяется геометрической суммой равных по величине векторов $\mathbf{E}_{+\tau}$ и $\mathbf{E}_{-\tau}$. Так как угол между векторами поля прямой, то модуль искомой напряженности будет равен

$$E_M = \sqrt{E_{+\tau}^2 + E_{-\tau}^2} = E_\tau \sqrt{2},$$

где $E_\tau = \frac{\tau}{\sqrt{2}\pi\epsilon_a a}$ - напряженность поля в точке M от каждого из зарядов.

Замечания. 1. Если расстояние между проводами $2a$ соизмеримо с радиусами проводов R , то положение электрических осей не будет совпадать с геометрическими осями проводов.

2. Если расстояние от оси $+\tau$ до любой произвольно выбранной точки M обозначить r_1 , а от оси $-\tau$ обозначить r_2 (рис. 2.5, a), то потенциал этой точки будет равен $\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_2}{r_1}$ при условии, что при $r_1 = r_2$ (в плоскости симметрии) потенциал принят равным нулю.

3. Отношение $\frac{r_2}{r_1} = k = \text{const}$ определяет в плоскости чертежа уравнение эквипотенциальной линии. Согласно теореме Аполлония геомет-

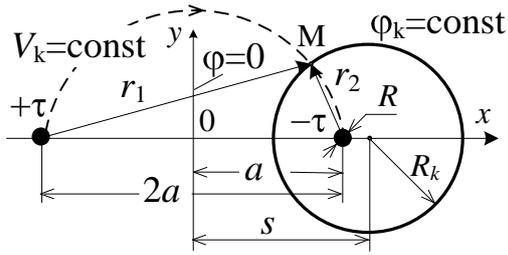


Рис. 2.5, а

рическое место точек, удовлетворяющее данному условию, - окружности с центром, лежащим на прямой, проходящей через заряженные оси. Принимая расположение заряженных осей по рис. 2.5, а, замечаем, что

$$r_1 = \sqrt{(a+x)^2 + y^2};$$

$$r_2 = \sqrt{(a-x)^2 + y^2}$$

и уравнение окружности принимает вид:

$$\frac{(a-x)^2 + y^2}{(a+x)^2 + y^2} = k^2 \quad \text{или} \quad \left(x - \frac{1+k^2}{1-k^2}a \right)^2 + y^2 = \left(\frac{2ak}{1-k^2} \right)^2, \quad (2.21)$$

где $\frac{1+k^2}{1-k^2}a = s_k$ - абсцисса центра окружности (эквипотенциали) радиусом $R_k = \frac{2ak}{1-k^2}$, причем $a = \sqrt{s_k^2 - R_k^2}$ или $(a+s_k)(a-s_k) = R_k^2$.

Для указанного на рис. 2.5, а положения заряженных осей окружности, соответствующие $k > 1$, расположены слева от плоскости нулевого потенциала ($s < 0$), при $k < 1$ окружности располагаются справа ($s > 0$).

Из формулы (2.21) следует, что поле двух круглых цилиндров с параллельными несовпадающими осями совпадает с полем двух заряженных осей. При известном положении электрических осей можно построить силовые линии поля ($V_k = \text{const}$). Семейство этих линий должно начинаться и заканчиваться на заряженных осях (или на поверхностях цилиндров) и пересекать семейство эквипотенциальных поверхностей под прямым углом (пунктирная линия на рис. 2.5, а). Силовые линии представляют собой дуги окружностей, проходящих через точки $x = \pm a$; $y = 0$. Уравнение этих окружностей:

$$x^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2,$$

где b - ордината центра окружности.

Пример 2.17. Протяженные цилиндрические оболочки радиусами R_1 и R_2 с параллельными осями заполнены ионизированным газом с объемной плотностью зарядов ρ_1 и ρ_2 , соответственно (рис. 2.6). Найти напряженность поля и потенциал на оси малого R_2 цилиндра (точка 0), если расстояние между осями равно a .

Решение. Воспользуемся методом наложения и представим заданную систему совокупностью 2-х отдельных цилиндрических оболо-

чек с объемными зарядами ρ_1 внутри оболочки радиусом R_1 и $\rho'_2 = \rho_2 - \rho_1$ внутри оболочки радиусом R_2 . Искомые величины тогда определяются: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\rho_1} + \mathbf{E}_{\rho'_2}$ и $\varphi = \varphi_{\rho_1} + \varphi_{\rho'_2}$.

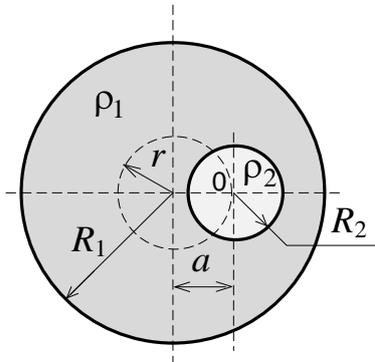


Рис. 2.6

В силу симметрии вектор напряженности поля внутри каждой из оболочек нормален их поверхностям (перпендикулярен их осям). Проведя вокруг оси первой оболочки замкнутую цилиндрическую поверхность S радиусом $r=a$, охватывающую единицу длины цилиндра, и применив к ней теорему Гаусса, получаем:

$$\oint \mathbf{E}_{\rho_1} d\mathbf{S} = E_{\rho_1} \oint dS = E_{\rho_1} 2\pi r \cdot 1 = \rho_1 V / \epsilon_a,$$

где V – объем, ограниченный поверхностью S , равный $\pi r^2 \cdot 1$.

Отсюда определяем напряженность поля в точке a :

$$E_{\rho_1} = \frac{\rho_1 a}{2\epsilon_a}.$$

Потенциал в точке a , согласно (2.6), определяем интегрированием E_{ρ_1} по r , т.к. потенциал, как и напряженность, зависит только от этой

координаты. После интегрирования получаем $\varphi_{\rho_1} = \frac{-\rho r^2}{4\epsilon_a} + A$,

где A – постоянная интегрирования.

Принимая $\varphi_{\rho_1} = 0$ при $r=0$, найдем, что $A = 0$ и в точке a потенциал будет равен $\varphi_{\rho_1} = -\frac{\rho a^2}{4\epsilon_a}$.

Аналогично находятся E_{ρ_2} и φ_{ρ_2} , обусловленные объемным зарядом ρ'_2 в оболочке R_2 . Однако можно без подсчета заметить, что в точке 0 $E_{\rho'_2} = \varphi_{\rho'_2} = 0$, т.е. результирующие напряженность и потенциал в данном случае определяются только зарядами ρ_1 в оболочке R_1 .

Пример 2.18. Полагая поверхность земли сферической радиусом R , определить напряженность поля на высоте $h = 1$ км, принимая плотность зарядов на ее поверхности $\sigma = -2,66 \cdot 10^{-9}$ Кл/м², а объемную плотность зарядов нижних слоев атмосферы - $\rho = 1,8 \cdot 10^{-12}$ Кл/м³.

Решение. Учитывая сферическую симметрию поля, используем сферическую систему координат. По теореме Гаусса

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = E \oint_S dS = \frac{q}{\varepsilon_a}, \quad (2.22)$$

где S - сферическая поверхность интегрирования, равная $4\pi r^2$ ($r \geq R$); q - заряд, попавший внутрь поверхности интегрирования.

Для данного примера q складывается из зарядов поверхностной и объемной плотностей, т. е. $q = q_\sigma + q_\rho$, причем $q_\sigma = 4\pi R^2 \sigma$, а $q_\rho = \rho \Delta V$, где ΔV - объем слоя атмосферы высотой h .

Так как радиус земли много больше высоты слоя атмосферы с объемным зарядом ($r \gg h$), объем слоя можно определить как $\Delta V = 4\pi R^2 h$. Тогда, после интегрирования по поверхности сферы с учетом симметрии получим:

$$E \pi r^2 = 4\pi R^2 \frac{\sigma + \rho h}{\varepsilon_a}.$$

Заменяя r на $R + h$ и учитывая $R \gg h$, получаем

$$E = \frac{\sigma + \rho h}{\varepsilon_a}.$$

Подставляя числовые значения, находим $E = -97$ В/м.

Пример 2.19. Мыльный пузырь радиусом $R_0 = 5$ см с толщиной стенок $h = 16,7 \times 10^{-4}$ см, заряженный до $\varphi_{\text{п}} = 10$ В, лопается в виде сферической капли.

Определить потенциал капли.

Решение. Напряженность поля заряженной сферы, как следует из (2.21), равна $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$. Потенциал сферы согласно (2.6) определяется

как $\varphi = -\int E dr$. После интегрирования по r получаем $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a r} + \text{const}$.

Принимая потенциал поля на бесконечности равным нулю, для пузыря радиусом R_0 находим $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_a R_0}$. Отсюда следует, что заряд мыльного пузыря равен

$$q = \varphi_{\text{п}} / (4\pi\varepsilon_a R_0).$$

Этот же заряд сохраняется и в капле, поэтому $\varphi_{\text{к}} = \frac{\varphi_{\text{п}}}{4\pi\varepsilon_a r_{\text{к}}}$,

где $r_{\text{к}}$ - радиус капли.

Радиус капли определяем из условия, что объем стенок мыльного пузыря $V_{\text{п}} = 4\pi R_0^2 h$ равен объему капли $V_{\text{к}} = \frac{4}{3}\pi r_{\text{к}}^3$, откуда следует $r_{\text{к}} = \sqrt[3]{3R_0^2 h}$. Подставляя выражение $r_{\text{к}}$ в формулу $\varphi_{\text{к}}$, получаем $\varphi_{\text{к}} = \varphi_{\text{п}} \frac{R_0}{\sqrt[3]{3R_0^2 h}}$ или численно $\varphi_{\text{к}} = 100 \text{ В}$.

Пример 2.20. Линейный заряд $\tau = 17,7 \text{ мкКл/км}$ распределен равномерно вдоль тонкой линии, образующей окружность радиусом R . Найти потенциал поля в центре окружности, если окружающая среда – воздух.

Решение. Выделим на окружности элемент длины dl с зарядом $dq = \tau dl$. Потенциал поля в центре окружности от элементарного заряда, который можно считать точечным, равен $d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_a R}$, где R – радиус окружности. Потенциал поля от всех элементарных зарядов, лежащих на окружности, будет равен $\varphi = \int_0^{2\pi R} \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_a R} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_a R} \int_0^{2\pi R} dl$.

Выполняя интегрирование, найдем: $\varphi = \frac{\tau}{2\epsilon_a}$.

После подстановки числовых значений получаем: $\varphi = 1000 \text{ В}$.

Пример 2.21. Определить потенциал поля на оси равномерно заряженного диска радиусом $R = 3 \text{ см}$ с плотностью зарядов $\sigma = 0,885 \text{ мкКл/м}^2$, если окружающая среда – воздух. Ответ дать для точки, удаленной от центра диска на расстояние $h = 4 \text{ см}$ (рис. 2.7).

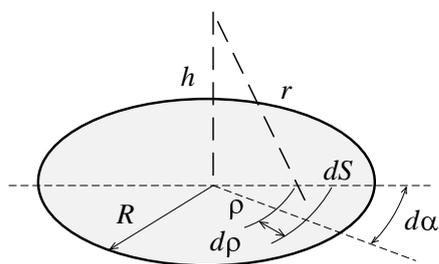


Рис. 2.7

Решение. Выделим на поверхности диска участок dS с элементарным зарядом $dq = \sigma dS$. Потенциал, созданный зарядом dq на оси диска, можно определить по формуле для точечного заряда:

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{h^2 + \rho^2}}.$$

От всех зарядов поверхности $\varphi = \int_S d\varphi$.

Записывая dS в полярных координатах $dS = \rho d\rho d\alpha$, имеем:

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{h^2 + \rho^2}}.$$

После интегрирования получаем: $\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[h^2 + R^2 \frac{1}{2} - h \right].$

Подставляя числовые значения, находим $\varphi = 500$ В.

Пример 2.22. Внутри заземленной сферической оболочки радиусом $R=10$ см, помещен точечный заряд $q = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл в точке, удаленной от центра на расстояние $a = 3$ см.

Определить потенциал в центре сферы, если среда – воздух.

Решение. Точечный заряд q индуцирует на внутренней поверхности заземленной оболочки заряд с плотностью σ . Согласно методу наложения потенциал в заданной точке равен сумме потенциалов от каждого из зарядов:

$$\varphi = \varphi_q + \varphi_\sigma,$$

где $\varphi_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$ - потенциал поля точечного заряда;

$\varphi_\sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_s \frac{\sigma dS}{r}$ - потенциал поля индуцированных зарядов.

Поскольку потенциал определяется в точке, равноудаленной от внутренней поверхности оболочки, то $r=R$ и $\varphi_\sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \oint_s \sigma dS.$

Согласно закону электростатической индукции $\oint_s \sigma dS = -q,$

где q – заряд, помещенный внутрь оболочки.

Таким образом, для потенциала в центре сферы будем иметь

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right).$$

Подставляя числовые данные, получаем $\varphi \approx 420$ В.

2.4. Общие методы и приемы расчета поля

В данном разделе приведены задачи, требующие знаний уравнений поля, граничных условий, методов наложения и зеркальных изображений. В ряде задач используются уравнения с потенциальными коэффициентами, а также уравнения Лапласа и Пуассона для одномерного по-

ля. При этом особое внимание уделено методике определения постоянных интегрирования по известным граничным условиям.

Пример 2.23. Электрическая ось с линейной плотностью заряда $+\tau$ расположена в диэлектрике ϵ_a параллельно проводящей поверхности на расстоянии h от нее (рис. 2.8).

Определить поверхностную плотность индуцированного заряда σ в точке a с известной координатой x .

Решение. Точка a лежит на границе раздела сред проводник – диэлектрик. Поле в проводнике в условиях электростатики отсутствует, поэтому из (2.10) следует $\sigma = D_n$. Поскольку $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$, то задача сводится к определению E_n .

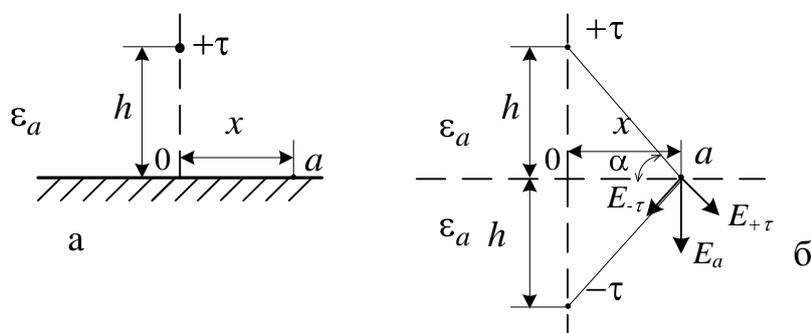


Рис. 2.8

Поле в диэлектрике ϵ_a создается не только заряженной осью τ , но и зарядами, индуцированными на проводящей поверхности (явление электростатической индукции). Закон изменения индуцированных зарядов не известен, однако их воздействие на рассматриваемое поле можно учесть по *методу зеркальных отображений*.

Метод основан на втором следствии теоремы единственности. Его суть - в замене индуцированных зарядов зарядом-изображением, численно равным исходному заряду, взятому с обратным знаком ($-\tau$) и помещенному в точку зеркального изображения в однородной среде с той же проницаемостью ϵ_a . При такой замене условия на границе диэлектрик – проводник не изменяются, и, следовательно, не изменяется поле в диэлектрике.

На рис. 2.8, б показаны исходный заряд $+\tau$ и отраженный $-\tau$, а также направления векторов напряженности, обусловленные этими зарядами. Суммарный вектор $\mathbf{E}_a = \mathbf{E}_{+\tau} + \mathbf{E}_{-\tau}$ находят графически или аналитически через проекции соответствующих векторов. При этом нетрудно видеть, что суммарный вектор \mathbf{E}_a нормален поверхности. Напряженность поля заряженной оси в общем виде определяется как

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r},$$

где r – расстояние от оси до рассматриваемой точки.

Учитывая геометрическое положение исходной и отраженной осей, находим напряженность в точке a

$$E_a = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a \sqrt{h^2 + x^2}} 2 \sin \alpha = \frac{\tau h}{\pi\epsilon_a (h^2 + x^2)}.$$

Таким образом искомая плотность поверхностного заряда составит величину $\sigma = \frac{\tau h}{\pi (h^2 + x^2)}$.

Замечание. Аналогично рассчитывается поле точечного заряда (сферы малого радиуса по сравнению с расстоянием до поверхности) вблизи проводящей поверхности. Величина отраженного заряда и его местоположение такие же, как в рассмотренном примере.

Пример 2.24. На поверхности земли под одиночным заряженным проводом напряженность поля $E_0 = 750$ В/м. Определить потенциал провода, если его радиус $R = 1$ см, а высота подвеса $h = 4$ м.

Решение. Как в предыдущем примере, потенциал провода определяется зарядом самого провода и зарядом, индуцированным на поверхности земли. Индуцированный заряд заменим зеркальным изображением заряда провода (с изменением знака) и пренебрежем смещением электрической оси провода ($h \gg R$). Тогда по методу наложения потенциал провода определится как

$$\varphi = \varphi_{+\tau} + \varphi_{-\tau} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{r}.$$

Напряженность поля в заданной точке (под проводом) имеет только одну, нормальную к поверхности, составляющую и будет равна сумме напряженностей от каждого из зарядов

$$E_0 = E_{+\tau} + E_{-\tau} = \frac{\tau}{\epsilon_0 h}.$$

Выразив τ через E_0 , найдем $\tau = E_0 \pi \epsilon_0 h$, а затем $\varphi = \frac{E_0 h}{2} \ln \frac{2h}{r}$.

Подставляя числовые данные, получим $\varphi = 10$ кВ.

Пример 2.25. Двухпроводная воздушная линия (рис. 2.9), отключенная от источника, находится в однородном поле грозовой тучи с напряженностью $E_0 = 2$ кВ/м, направленной перпендикулярно поверхности

земли. Провод 1 – изолирован от земли; провод 2 – заземлен. Высота подвеса проводов $h = 5$ м; расстояние между ними $d = 1$ м, а их радиусы $R = 1$ см.

Найти потенциал провода 1.

Решение. Потенциалы проводов определяются действием внешнего поля E_0 и полем линейных зарядов проводов (τ_1 и τ_2).

По методу наложения определяем $\varphi_1 = \varphi_1^E + \varphi_1^\tau$; $\varphi_2 = \varphi_2^E + \varphi_2^\tau$.

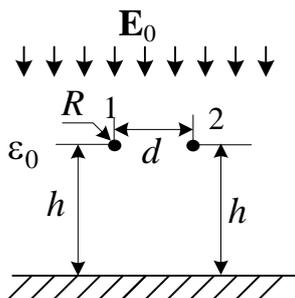


Рис. 2.9

Поскольку провода подвешены на одном уровне, то очевидно, что $\varphi_1^E = \varphi_2^E = E_0 h$.

Так как провод 1 изолирован, а линия была отключена от источника, его заряд следует принять равным нулю $\tau_1 = 0$. На основании (2.16) заряд τ_2 и потенциалы проводов взаимосвязаны соотношениями:

$$\varphi_1^\tau = \alpha_{12}\tau_2; \quad \varphi_2^\tau = \alpha_{22}\tau_2, \quad (2.21)$$

где α_{12} и α_{22} - потенциальные коэффициенты.

С учетом поля тучи записываем: $\varphi_1 = \alpha_{12}\tau_2 + E_0 h$; $0 = \alpha_{22}\tau_2 + E_0 h$.

Решая относительно φ_1 , находим $\varphi_1 = E_0 h \left(1 - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} \right)$.

Собственный потенциальный коэффициент α_{22} , как следует из (2.22), - это потенциал провода 2, а взаимный потенциальный коэффициент α_{12} - это потенциал провода 1 при условии, что заряд τ_2 равен единице. Потенциал поля провода, расположенного над заземленной поверхностью, найден в примере 2.24 методом зеркальных изображений. Используя полученные результаты, получаем:

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{2h^2 + d^2}}{d} \quad \text{и} \quad \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{R}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в формулу искомого потенциала, а затем числовые данные, получим $\varphi_1 = 6,6$ кВ.

Пример 2.26. Заземленный трос находится в однородном поле положительно заряженной тучи. Определить напряженность поля на поверхности троса, если его радиус $R_0 = 1$ см, высота подвеса относительно земли $h = 4$ м, а напряженность поля тучи $E_0 = 0,51$ кВ/см.

Решение. Напряженность поля на поверхности провода обусловлена полем грозовой тучи, линейным зарядом провода и зарядом, индуцированным на поверхности земли: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_\tau + \mathbf{E}_\sigma$.

Заряд провода определим из условия, что его потенциал равен нулю. Используя методы зеркальных изображений и наложения, а также результат предыдущего примера, записываем:

$$\varphi = E_0 h + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{R_0}.$$

Решая относительно τ , при $\varphi = 0$ получаем $\tau = -E_0 h \cdot 2\pi\epsilon_0 / \ln \frac{2h}{R_0}$.

Зная величину заряда, определяем суммарную напряженность поля на поверхности провода со стороны земли, учитывая поле тучи, действие заряда провода и заряда – изображения:

$$E = -E_0 + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R_0} + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 2h} \quad \text{или} \quad E = E_0 h \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{2h} \right) / \ln \frac{2h}{R_0} - E_0.$$

Подставляя числовые значения, найдем: $E \cong 30$ кВ/см.

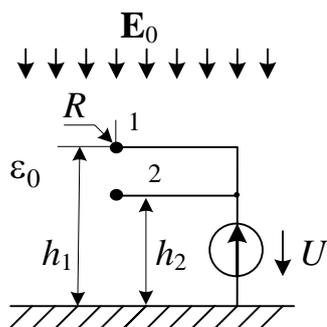


Рис. 2.10

Пример 2.27. Двухпроводная линия (радиус проводов $R=1$ см, высота подвеса $h_1 = 5,5$ м; $h_2 = 4,5$ м) находится в однородном поле грозовой тучи с напряженностью $E_0 = 2$ кВ/м, направленной вертикально. После аварии оба провода находятся под напряжением $U=11$ кВ (рис. 2.10).

Найти линейную плотность зарядов провода 2.

Решение. Линейные заряды проводов и их потенциалы связаны между собой системой уравнений (2.16), которая для данного случая записывается:

$$\varphi_1 = U = \tau_1 \alpha_{11} + \tau_2 \alpha_{12} + E_0 h_1;$$

$$\varphi_2 = U = \tau_1 \alpha_{21} + \tau_2 \alpha_{22} + E_0 h_2,$$

где α_{11}, α_{22} – собственные; $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ – взаимные потенциальные коэффициенты.

Решаем систему уравнений относительно τ_1 : $\tau_1 = \Delta_1 / \Delta$,

где
$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} U - E_0 h_1 & \alpha_{12} \\ U - E_0 h_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

Потенциальные коэффициенты, зависящие только от геометрии системы, были определены в предыдущих примерах:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_1}{R}; \quad \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_2}{R}; \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2}.$$

Подставляя потенциальные коэффициенты в формулу искомого линейного заряда, и учитывая числовые данные, найдем

$$\tau_1 = -6 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м.}$$

Пример 2.28. Протяженный провод радиусом R с плотностью линейного заряда $+\tau$ проходит в воздухе на известном расстоянии (a, b) параллельно ребру прямого угла, образованного заземленными проводящими пластинами (рис. 2.11).

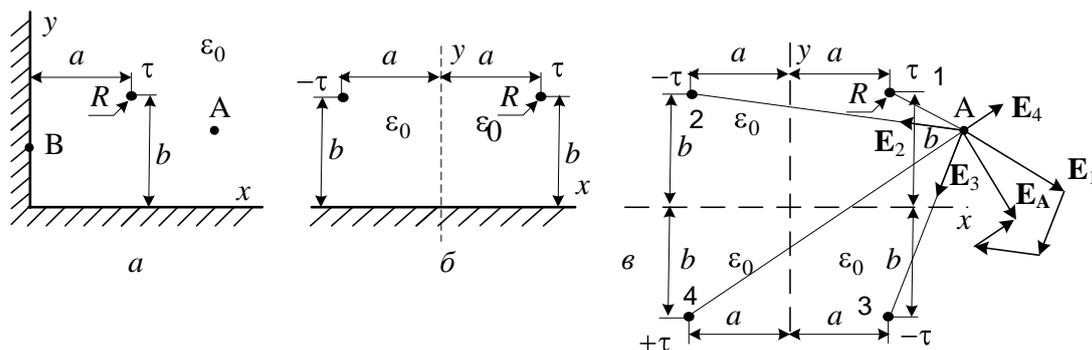


Рис. 2.11

Определить напряженность электрического поля в точке A с известными координатами x_A и y_A , плотность наведенных поверхностных зарядов в точке 2 с координатами x_B и y_B , а также потенциал провода.

Решение. Для эквивалентной замены зарядов, индуцированных на двух гранях угла, теперь необходимы три заряда – изображения, размещенные, как показано на рис. 2.11, в. Полученная система 4-х линейных зарядов полностью определяет рассматриваемое поле в воздухе. При этом замена заряженных проводов линейными зарядами (осями) возможна только при условии $R \ll a$ и b , когда смещением электрических осей проводов можно пренебречь.

Будем полагать, что это условие выполняется.

Напряженность поля от четырех линейных зарядов равна сумме напряженностей от каждой из осей:

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_{1A} + \mathbf{E}_{2A} + \mathbf{E}_{3A} + \mathbf{E}_{4A},$$

где $E_{kA} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r_{kA}}$; r_{kA} - расстояние от точки A до k -ой оси. Эти расстояния определяются координатами рассматриваемой точки и заряженных осей:

$$\begin{aligned} r_{1A} &= \sqrt{x_A - a^2 + b - y_A^2}; & r_{2A} &= \sqrt{x_A + a^2 + b - y_A^2}; \\ r_{3A} &= \sqrt{x_A - a^2 + b + y_A^2}; & r_{4A} &= \sqrt{x_A + a^2 + b + y_A^2}. \end{aligned}$$

Напряженность поля – вектор и его направление определяется с учетом знака заряда (для положительного – от заряда, для отрицательного – к заряду). Результирующий вектор напряженности находится сложением векторов графически или аналитически через проекции векторов на координатные оси. Например, напряженность поля в точке А:

$$E_{Ax} = \sum_{k=1}^4 E_{kAx}, \quad E_{Ay} = \sum_{k=1}^4 E_{kAy}, \quad E_A = \sqrt{E_{Ax}^2 + E_{Ay}^2},$$

где $E_{kAx} = E_{kA} \cos \alpha_k$; $E_{kAy} = E_{kA} \sin \alpha_k$; α_k - угол между осью x и соответствующим вектором.

Аналогичным образом определяют напряженность в любой точке, в том числе и на поверхности проводящей грани в точке B . На поверхности проводника касательная составляющая напряженности поля E_τ отсутствует, поэтому плотность заряда σ в точке B будет равна

$$\sigma = \varepsilon_0 E_{nB}.$$

Если смещением электрических осей пренебречь нельзя, то вектор напряженности находят, представив систему из 4-х проводов двумя двухпроводными линиями, рассчитывая положения электрических осей.

При расстояниях между проводами линии $2a$ расстояние между осями проводов составляет величину $2S$, где $S = \sqrt{a^2 - R^2}$.

Потенциал поля в любой точке при известном расположении электрических осей находят алгебраическим суммированием потенциалов, вызванных каждой из осей. Например, для точки А:

$$\varphi_A = \sum_{k=1}^4 -1^{k+1} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1}{r_{kA}},$$

где r_{kA} - расстояния от заряженных осей до рассматриваемой точки.

Если точка лежит на поверхности провода, то найденная величина определит потенциал провода.

Пример 2.29. Над плоской границей раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_{a1} и ε_{a2} на высоте h расположен провод радиусом $R \ll h$ с линейной плотностью заряда τ . (рис. 2.12, а).

Определить потенциал провода, а также напряженность электрического поля в точке А с координатами x_A, y_A .

Решение. По методу зеркальных изображений расчет поля в области с диэлектриком ε_{a1} проводят по схеме рис. 2.12, б, где вводят дополнительный фиктивный заряд $\tau_1 = k_1 \tau$, а все пространство заполняется средой с диэлектрической проницаемостью ε_{a1} .

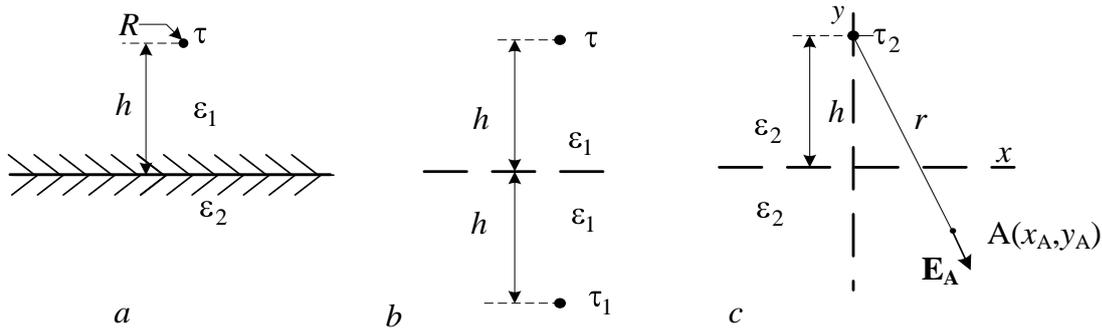


Рис. 2.12

В области с диэлектриком ε_{a2} расчет проводят по схеме рис. 2.12, в, где вводят фиктивный заряд $\tau_2 = k_2 \tau$, а все пространство заполняется диэлектриком ε_{a2} .

Коэффициенты k_1 и k_2 находят из двух граничных условий (2.10):

$$k_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tau; \quad k_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tau.$$

Таким образом, величины фиктивных зарядов-изображений равны:

$$\tau_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tau; \quad \tau_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \tau.$$

Местоположение заряда τ_1 - точка зеркального отражения исходного заряда, а заряда τ_2 - в точке расположения заряда τ , как видно из рис. 2.12. При известном расположении зарядов и их величинах расчет поля ведется методом наложения.

Потенциал провода (он расположен в верхнем полупространстве) будет равен сумме потенциалов, обусловленных зарядами τ и τ_1

$$\varphi_{\text{пр}} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_{1a}} \ln \frac{1}{R} + \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_{2a}} \ln \frac{1}{2h} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_{1a}} \left(\ln \frac{1}{R} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \ln \frac{1}{2h} \right),$$

а напряженность поля в точке А (точка находится в диэлектрике ε_2) определяется линейным зарядом τ_2 :

$$E_A = \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_{2a}r},$$

где r – расстояние до точки А, равное $r = \sqrt{h + y_A^2 + x_A^2}$.

Замечания. 1. Знак заряда τ_1 зависит от соотношения диэлектрических проницаемостей диэлектриков, если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, он совпадает со знаком заданного заряда. Знак заряда τ_2 всегда тот же, что у исходного.

2. Если требуется определить плотность зарядов поляризации на границе раздела диэлектриков $\sigma_{св}$, то в указанной точке по схемам рис. 2.12, б и в находят нормальные составляющие вектора напряженности E_{1n} и E_{2n} (соответственно со стороны первого и второго диэлектриков), а затем - плотность зарядов $\sigma_{св} = \epsilon_0 (E_{2n} - E_{1n})$.

Пример 2.30. Между пластинами плоского конденсатора в диэлектрике с проницаемостью ϵ_0 помещен объемный заряд $\rho = 10^{-6}$ Кл/м³. К пластинам конденсатора приложено напряжение $U=200$ В.

Найти потенциал поля в центре конденсатора, если расстояние между пластинами $d = 10$ см, а одна из пластин заземлена.

Решение. Поле плоского конденсатора с объемным зарядом ρ удовлетворяет уравнению Пуассона (2.7). В декартовых координатах с учетом изменения поля только по координате x , уравнение записывается:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Интегрируя по переменной x , найдем $\varphi = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + C_1 x + C_2$,

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования.

Совместив пластину конденсатора нулевого потенциала с началом отсчета координаты x , будем иметь: $x = 0$; $\varphi = 0$. Подставляя это условие в формулу для φ , получаем $C_2 = 0$.

Учитывая, что при $x = d$ $\varphi = U_0$, имеем $U_0 = -\frac{\rho d^2}{2\epsilon_0} + C_1 d$.

Отсюда находим $C_1 = \frac{\rho d}{2\epsilon_0} + \frac{U_0}{d}$, а затем $\varphi = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0} + \frac{\rho d \cdot x}{2\epsilon_0} + \frac{U_0 x}{d}$.

Для точки, лежащей в центре конденсатора ($x=d/2$), после подстановки числовых значений, получаем $\varphi_{ц} = 241$ В.

Пример 2.31. Как изменится потенциал точек в центре конденсатора (пример 2.30), если его пластины замкнуть накоротко и заземлить?

Решение. Положив в решении для потенциала φ в примере 2.28 разность потенциалов между пластинами $U_0 = 0$, найдем $\varphi_{ц} = 141$ В.

Пример 2.32. В поле цилиндрического конденсатора распределен заряд короны с объемной плотностью $\rho = 15,1 \cdot 10^{-6}$ Кл/м³. Радиусы ци-

линдров $R_1 = 1$ см; $R_2 = 3$ см. Конденсатор подключен к источнику с напряжением $U_0 = 100$ В, причем внутренний цилиндр заземлен. Изоляция конденсатора – воздух.

Определить потенциал поля в точке a , удаленной от центра на 2 см.

Решение. Поле цилиндрического конденсатора с объемным зарядом удовлетворяет уравнению Пуассона (2.7).

В цилиндрической системе координат с учетом симметрии рассматриваемого поля оно записывается:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Двойное интегрирование по r приведет к выражению

$$\varphi = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} + C_1 \ln r + C_2,$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования, которые определяются граничными условиями.

Граничные условия в данной задаче таковы: при $r = R_1$; $\varphi_1 = 0$, при $r = R_2$; $\varphi_2 = U_0$. Подставляя граничные условия в выражение для φ , получаем:

$$0 = -\frac{\rho R_1^2}{4\varepsilon_0} + C_1 \ln R_1 + C_2; \quad U_0 = -\frac{\rho R_2^2}{4\varepsilon_0} + C_1 \ln R_2 + C_2.$$

Отсюда находим постоянные интегрирования:

$$C_1 = \frac{U_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} + \frac{\rho}{4\varepsilon_0} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}; \quad C_2 = \frac{\rho R_1^2}{4\varepsilon_0} - \ln R_1 \left[\frac{U_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} + \frac{\rho}{4\varepsilon_0} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right].$$

Искомый потенциал определится теперь таким образом:

$$\varphi = \frac{\rho}{4\varepsilon_0} \left(R_1^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_1} \right) + \frac{U_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_1}.$$

Подставляя числовые значения, получим $\varphi = 150$ В.

Пример 2.33. Двухслойный цилиндрический конденсатор с радиусом жилы $r_1 = 1$ см, радиусом границы раздела слоев $r_2 = 1,8$ см и внутренним радиусом заземленной оболочки $r_3 = 3$ см (рис. 2.13) находится под напряжением $U_1 = 100$ В.

Определить распределение потенциала и вектора напряжённости электрического поля внутри конденсатора, если относительные диэлектрические проницаемости материала слоев $\varepsilon_1=12$, $\varepsilon_2=6,8$. Конденсатор считать протяженным, краевым эффектом пренебречь.

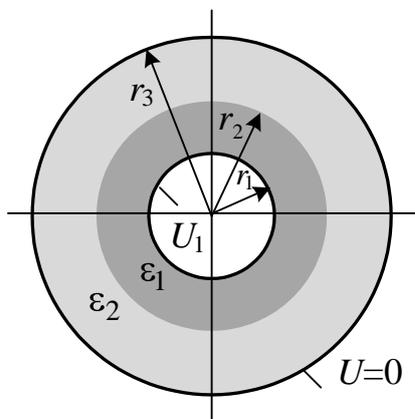


Рис. 2.13

Решение. Поле внутри каждого из однородных слоев обладает осевой симметрией и является одномерным. Совместив ось цилиндрической системы координат с осью конденсатора, записываем уравнение Лапласа для каждого из слоев:

$$\Delta\varphi_1(r) = \frac{d^2}{dr^2}\varphi_1(r) \quad \text{для области} \\ r_1 \leq r \leq r_2;$$

$$\Delta\varphi_2(r) = \frac{d^2}{dr^2}\varphi_2(r) \quad \text{для области} \\ r_2 \leq r \leq r_3.$$

После интегрирования получаем:

$$\text{для области } r_1 \leq r \leq r_2 \quad \varphi_1(r) = C_1 \ln\left(\frac{1}{r}\right) + C_2;$$

$$\text{для области } r_2 \leq r \leq r_3 \quad \varphi_2(r) = C_3 \ln\left(\frac{1}{r}\right) + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий (непрерывность потенциала и нормальной составляющей вектора электрического смещения).

Выражая радиальные составляющие вектора напряженности согласно (2.6) в соответствующих областях через потенциалы

$$E_1(r) = -\nabla\varphi_1(r) = \frac{C_1}{r};$$

$$E_2(r) = -\nabla\varphi_2(r) = \frac{C_3}{r},$$

получаем систему алгебраических уравнений, определяющих постоянные интегрирования:

$$C_1 \ln \frac{1}{r_1} + C_2 = U_1; \quad C_1 \ln \frac{1}{r_2} + C_2 = C_3 \ln \frac{1}{r_2} + C_4 \\ C_3 \ln \frac{1}{r_2} + C_4 = 0; \quad \frac{C_1}{r_2} \varepsilon_1 - \frac{C_3}{r_2} \varepsilon_2 = 0.$$

Постоянные интегрирования, а также распределение потенциала и напряженности поля по слоям конденсатора найдем, обращая матрицу коэффициентов \mathbf{A} и умножая её на вектор \mathbf{U} в системе MathCAD:

Графические построения также выполним в системе MathCAD.

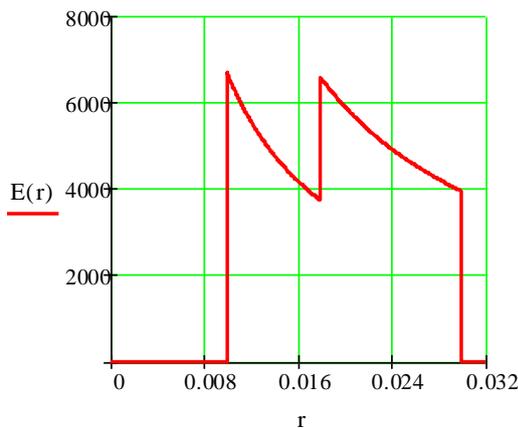
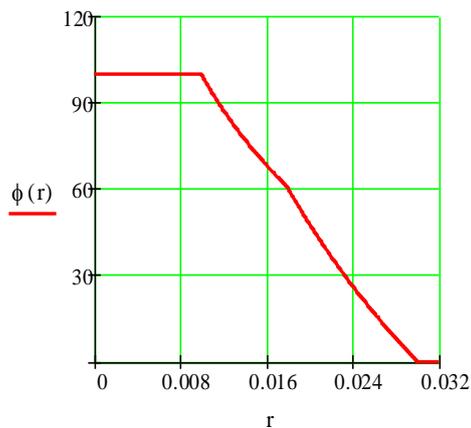
$$r_1 := 0.01 \quad r_2 := 0.018 \quad r_3 := 0.03 \quad U_1 := 100 \quad \varepsilon_1 := 12 \quad \varepsilon_2 := 6.8$$

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \ln\left(\frac{1}{r_1}\right) & 1 & 0 & 0 \\ \ln\left(\frac{1}{r_2}\right) & 1 & -\ln\left(\frac{1}{r_2}\right) & -1 \\ 0 & 0 & \ln\left(\frac{1}{r_3}\right) & 1 \\ \frac{\varepsilon_1}{r_2} & 0 & \frac{-\varepsilon_2}{r_2} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} := \begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} := \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{U} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 67.148 \\ -209.229 \\ 118.497 \\ -415.516 \end{pmatrix}$$

$$\phi_1(r) := C_0 \cdot \ln\left(\frac{1}{r}\right) + C_1 \quad \phi_2(r) := C_2 \cdot \ln\left(\frac{1}{r}\right) + C_3 \quad E_1(r) := \frac{C_0}{r} \quad E_2(r) := \frac{C_2}{r}$$

$$\phi(r) := \begin{cases} \phi_1(r_1) & \text{if } r \leq r_1 \\ \phi_1(r) & \text{if } r_1 \leq r \leq r_2 \\ \phi_2(r) & \text{if } r_2 \leq r \leq r_3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E(r) := \begin{cases} 0 & \text{if } r \leq r_1 \\ E_1(r) & \text{if } r_1 \leq r \leq r_2 \\ E_2(r) & \text{if } r_2 \leq r \leq r_3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Зависимости потенциала $\phi(r)$, В и напряженности $E(r)$, В/м

Замечание. Наличие многослойной изоляции, имеющей различные диэлектрические проницаемости слоев, позволяет выровнять распределение напряженности поля внутри конденсатора. Наилучшее использование свойств диэлектриков при условии $\varepsilon_k r_k = \text{const}$.

2.5. Емкость, сила и энергия поля

В задачах данного раздела определяются сила F , энергия W и емкость C некоторых практических конструкций. Для решения задач необходимо иметь представление о понятиях: емкость, сила и энергии поля, а также знать их взаимосвязи с источниками поля – зарядами, или векторами поля. Это уравнения (2.12) - (2.14), (2.15), а также

$$\mathbf{F} = -\text{grad}W. \quad (2.23)$$

где \mathbf{F} – вектор силы, действующей между заряженными телами.

Пример 2. 34. Определить емкость между двумя дисками диаметром d , расположенными в воздухе параллельно друг другу на расстоянии h . Краевым эффектом пренебречь.

Решение. Емкость между любыми двумя телами согласно (2.15) равна $C = q/U$. Поскольку краевой эффект не учитывается, считаем, что заряд по диску распределен равномерно с плотностью $\sigma = \varepsilon_0 E$. Тогда $q = \sigma S$, где S – площадь диска, равная $\pi d^2/4$.

Разность потенциалов между дисками определим по (2.6), считая поле вектора \mathbf{E} однородным:

$$U = \varphi_2 - \varphi_1 = \int \mathbf{E} d\mathbf{l} = hE.$$

Подставляя составляющие в формулу (2.15) получаем:

$$C = \frac{\varepsilon_0 ES}{hE}, \text{ или } C = \frac{\varepsilon_0 \pi d^2}{4h}.$$

Пример 2.35. Определить емкость двухслойного цилиндрического конденсатора с радиусами электродов r_1 и r_3 и радиусом поверхности раздела слоев r_2 (рис. 2.13). Длина конденсатора l . Относительные диэлектрические проницаемости слоев ε_1 и ε_2 . Искажением поля у краев конденсатора – пренебречь.

Решение. По-прежнему используем формулу (2.15) $C = q/U$,

где $U = \varphi_1 - \varphi_3$ (φ_1 – потенциал внутреннего электрода, φ_3 - внешнего).

Учитывая цилиндрическую симметрию поля, выразим разность потенциалов между электродами через напряженности первого E_1 и второго E_2 слоев, воспользовавшись соотношением (2.6):

$$\varphi = - \int \mathbf{E} d\mathbf{r}; \quad U = \int_{r_2}^{r_1} E_1 dr - \int_{r_3}^{r_2} E_2 dr.$$

Напряженность поля цилиндрического конденсатора в каждом из слоев определяется по известным формулам:

$$E_1 = \frac{q}{2\pi\epsilon_{1a}rl}, \quad E_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_{2a}rl},$$

где q – заряд одной из оболочек (электродов).

Подставляя в формулу для разности потенциалов выражения E_1 и E_2 , после интегрирования получаем:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{2\pi l} \left[\frac{1}{\epsilon_{a1}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_{a2}} \ln \frac{r_3}{r_2} \right].$$

На основании (2.15) емкость цилиндрического конденсатора составляет величину

$$C = \frac{2\pi l}{\frac{1}{\epsilon_{1a}} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\epsilon_{2a}} \ln \frac{r_3}{r_2}}.$$

Замечание. Емкость двухслойного конденсатора можно определить, рассматривая ее как последовательное соединение емкостей первого $C_1 = \frac{2\pi\epsilon_{a1}l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$ и второго слоев $C_2 = \frac{2\pi\epsilon_{a2}l}{\ln \frac{r_3}{r_2}}$ конденсатора, т.е. как

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Пример 2.36. Плоский конденсатор емкостью 20 пФ со слюдяным диэлектриком $\epsilon_r = 6,28$; $E_{пр} = 800$ кВ/см должен быть рассчитан на рабочее напряжение $U_p = 20$ кВ и четырехкратный запас прочности по напряженности.

Определить толщину диэлектрика d и площадь пластин S .

Решение. Четырехкратный запас прочности обеспечивается, если напряженность поля конденсатора не превысит величины $E_p = 200$ кВ/см. Чтобы обеспечить заданное напряжение U_p , толщина изоляции должна быть не менее $d = U_p / E_p$. Для заданных параметров получим $d = 0,1$ см.

Емкость плоского конденсатора определяется как $C = \epsilon_a S / d$. Отсюда находим площадь пластин $S = Cd / \epsilon_a$.

Подставляя числовые значения, получаем $S = 3,6 \text{ см}^2$.

Пример 2. 37. Определить емкость единицы длины двухпроводной линии в воздухе с учетом влияния земли (рис 2.14).

Радиус проводов $R_1=R_2=R$, высота подвеса обоих проводов h , расстояние между проводами d . Смещением электрических осей пренебречь ($R \ll h$).

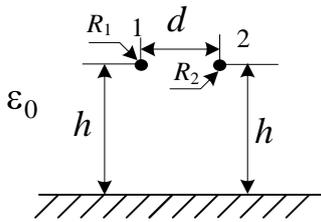


Рис. 2.14

Решение. Емкость единицы длины линии (при равенстве зарядов проводов эту емкость называют рабочей) определяется по формуле

$$C = \frac{\tau}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

где τ - линейный заряд одного из проводов;
 φ_1 и φ_2 - потенциалы проводов,

Потенциалы проводов определим через потенциальные коэффициенты:

$$\varphi_1 = \alpha_{11}\tau - \alpha_{12}\tau; \quad \varphi_2 = \alpha_{21}\tau - \alpha_{22}\tau,$$

где α_{11}, α_{22} - собственные и α_{12}, α_{21} - взаимные потенциальные коэффициенты. В силу симметрии расположения проводов

$$\alpha_{11} = \alpha_{22}; \quad \alpha_{12} = \alpha_{21}.$$

Потенциальные коэффициенты найдены в примерах 2.25, 2.27:

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{R}; \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{d^2 + (2h)^2}}{d}.$$

Подставляя потенциальные коэффициенты в формулу емкости, получаем

$$C = \frac{1}{2 \alpha_{11} - \alpha_{12}} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \left[\frac{2h}{R} \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2 + 2h^2}} \right]}.$$

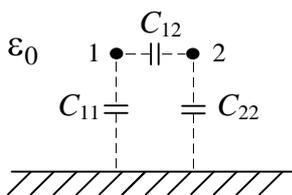


Рис. 2.14, а

Замечание. Если известны частичные емкости, рабочую емкость двухпроводной линии с учетом влияния земли легко найти через эти емкости. Так, в случае двухпроводной линии, как видно из рис. 2.15, а, рабочая емкость будет

$$C = C_{12} + \frac{C_{11} \cdot C_{22}}{C_{11} + C_{22}},$$

Пример 2.38. Внутри полого тонкостенного и заземленного цилиндра радиусом $R=25$ см помещена двухпроводная линия (рис. 2.14). Радиус проводов линии $r_0=0,5$ см, расстояние между проводами $2a=25$ см. Диэлектрическая проницаемость среды $\epsilon=1$.

Определить емкость двухпроводной линии на единицу длины.

Решение. Так как радиус проводов линии много меньше радиуса цилиндра ($r_0/R=0,02$), смещением электрических осей в проводах можно пренебречь и считать распределение электрических зарядов по поверхности проводов равномерным с линейной плотностью τ . Примем на левом проводе знак заряда отрицательным, справа - положительным.

В поле каждой пары двухпроводных линий, лежащих по разные стороны оси y , экран будет эквипотенциальным, если выполняется условие $ab = R^2$, т.е. если $b = R^2 / a = 25^2 / 12,5 = 50$ см.

Потенциал любой точки, например M , поверхности экрана по условию равен нулю

$$\varphi_M = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \left(\ln \frac{b-R}{R-a} + \ln \frac{R+a}{R+b} \right) + C = 0,$$

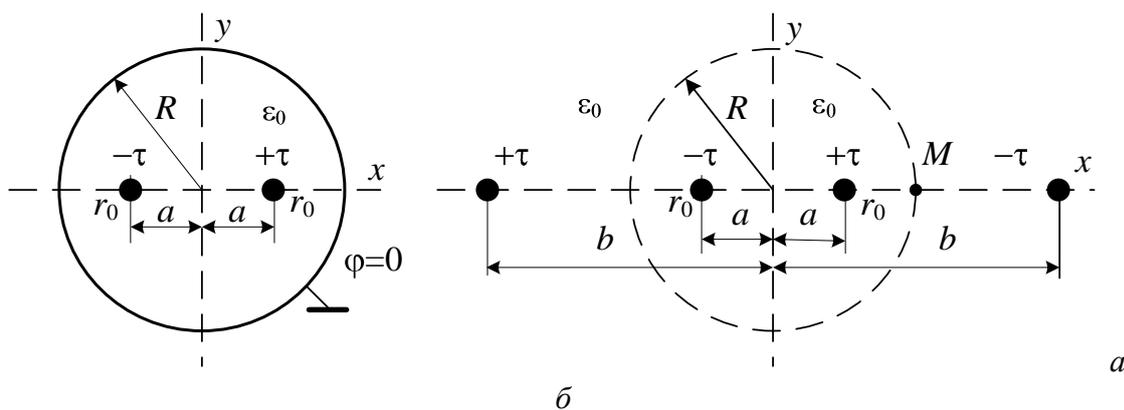


Рис. 2. 15

откуда следует
$$C = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \left(\ln \frac{25}{12,5} + \ln \frac{37,5}{75} \right) = 0.$$

Потенциалы проводов:

$$\varphi_{+\tau} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \left(\ln \frac{b-a+r_0}{r_0} + \ln \frac{2a-r_0}{b+a-r_0} \right);$$

$$\varphi_{-\tau} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \left(\ln \frac{b+a-r_0}{2a-r_0} + \ln \frac{r_0}{b-a+r_0} \right).$$

Емкость проводов на единицу длины

$$C = \frac{\tau}{\varphi_{+\tau} - \varphi_{-\tau}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{(b-a+r_0)(2a-r_0)}{r_0(b+a-r_0)}\right) - \ln\left(\frac{r_0(b+a-r_0)}{(b-a+r_0)(2a-r_0)}\right)}.$$

После некоторых преобразований получаем

$$C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{(b-a+r_0)(2a-r_0)}{r_0(b+a-r_0)}\right)}.$$

Численно

$$C = \frac{\pi \frac{10^{-9}}{36\pi}}{\ln\left(\frac{(50-12,5+0,5)(25-0,5)}{0,5(50+12,5-0,5)}\right)} = \frac{10^{-9}}{36 \cdot \ln 30,032} = 8,164 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м.}$$

Пример 2.39. Плоский конденсатор с пластинами площадью $S=10\text{см}^2$ и расстоянием между ними $d=0,5$ см подключен к источнику напряжением $U=10$ кВ.

Определить силу притяжения пластин конденсатора друг к другу, если относительная диэлектрическая проницаемость изоляции $\epsilon=5$.

Решение. Согласно (2.23) сила, действующая в электрическом поле, равна градиенту энергии. Действие силы в плоском конденсаторе – одномерное, с направлением действия перпендикулярно пластинам.

Совместив в плоскости чертежа след пластины с осью y , для модуля силы будем иметь $F = dW/dx$, где x – переменная (направление действия силы). Энергия плоского конденсатора согласно (2.12) равна

$$W = \epsilon_a E^2 V / 2,$$

где $V=Sx$ – объем, занятый полем.

Взяв производную, получаем

$$F = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 S.$$

Определяя напряженность поля плоского конденсатора по формуле $E=U/d$, найдем:

$$F = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 \frac{U^2}{d^2} S.$$

Численно: $F = \frac{1}{2} 5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{10 \cdot 10^3}{0,05^2} 10 \cdot 10^{-4} = 8,85 \cdot 10^{-4} \text{ Н.}$

Пример 2.40. Диэлектрик в плоском конденсаторе примера 2.39 заменен двумя слоями с диэлектрическими проницаемостями $\epsilon_1=2,6$ и $\epsilon_2=5,2$. Емкость конденсатора при этом не изменилась.

Определить толщину каждого из слоев (d_1 и d_2).

Решение. Двухслойный плоский конденсатор можно рассматривать как два плоских конденсатора, соединенных последовательно.

При последовательном соединении конденсаторов их общая емкость определяется по формуле

$$1/C = 1/C_1 + 1/C_2.$$

Заменяя емкости C , C_1 и C_2 их выражениями, получаем:

$$d/\epsilon = d_1/\epsilon_1 + d_2/\epsilon_2.$$

Численное решение приведено в документе MathCad.

$\text{Given } d_1 + d_2 = 0.5 \quad \frac{d}{\epsilon} = \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \quad x := \text{Find } d_1, d_2 \quad x = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.48 \end{pmatrix}$
--

Таким образом, толщина слоев будет: $d_1=0,02$ см; $d_2=0,48$ см.

Пример 2.41. Определить энергию на единицу длины цилиндрического конденсатора с радиусами электродов $r_1=10$ см; $r_2=20$ см, если между электродами включен источник ЭДС $U=20$ кВ, а диэлектрическая проницаемость изоляции $\epsilon_a = 4\epsilon_0$.

Решение. Проще всего определить энергию цилиндрического конденсатора, воспользовавшись формулой

$$W = CU^2/2 \tag{2.23}$$

В примере 2.35 емкость цилиндрического конденсатора найдена:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Подставляя в формулу (2.23) выражение емкости, получаем

$$W = \frac{2\pi\epsilon_a U^2 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Численно энергия равна $W=6,4 \cdot 10^{-2}$ Дж.

Пример 2.42. Как изменится энергия на единицу длины цилиндрического конденсатора в примере 2.41, если изоляцию между электродами выполнить двухслойной, а емкость конденсатора оставить прежней?

Останется ли при этом удельная плотность энергии вблизи электродов конденсатора без изменения?

Решение. Если емкость конденсатора не изменилась, то согласно соотношению (2.23) его энергия останется прежней. Однако плотность энергии вблизи поверхности электродов конденсатора при изменении диэлектрической проницаемости изоляции, как следует из формулы (2.12), изменится.

Пример 2.43. Определить силу, действующую на единицу поверхности тонкой стеклянной пластинки больших размеров, помещенную перпендикулярно линиям напряженности ($E_0=50$ кВ/см) однородного поля в среде с $\epsilon_1=1$. Относительная диэлектрическая проницаемость пластинки $\epsilon_2=8$.

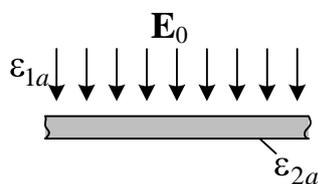


Рис. 2.16

Решение. На поверхности раздела двух диэлектриков возникают механические силы, стремящиеся деформировать диэлектрик, находящийся в электрическом поле. Это явление называется электрострикцией. Силы взаимодействия внутри однородных диэлектриков взаимно уравновешиваются и проявляются лишь на границах

разнородных сред. Значение этих сил, отнесенных к единице поверхности, определяется согласно (2.23) и численно равно плотности энергии

$$f = \frac{ED}{2}.$$

Силы, действующие с каждой из сторон границы раздела сред, можно представить в виде двух составляющих: нормальной к поверхности и касательной. Касательные составляющие силы по обе стороны границы раздела сред всегда равны друг другу и направлены противоположно, т.е. компенсируют друг друга. В нашем случае их вообще нет, так как вектор напряженности поля перпендикулярен границе раздела сред. Нормальные составляющие силы также направлены противоположно друг другу, но их величина по разные стороны границы различны, так что результирующая сила будет равна

$$f_n = \frac{ED}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) = \frac{\epsilon_{1a}(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{2\epsilon_1\epsilon_2} E_n^2.$$

Подставляя числовые данные, находим

$$f_n = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} (8-1)}{2 \cdot 1 \cdot 8} (50 \cdot 10^3 \cdot 10^2)^2 = 96,8 \text{ Н/м}^2.$$

Эта сила действует в сторону среды с меньшей проницаемостью (ϵ_1).

3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Как уже отмечалось, постоянный ток создает электрическое и магнитное поля. Так как эти поля неизменны во времени, явление электромагнитной индукции не возникает, и потому эти поля не влияют друг на друга и их можно рассматриваться отдельно. В отличие от электростатических полей, которые существуют только в диэлектрической среде, стационарное электрическое поле проявляется как в диэлектрике, окружающем проводники, так и в самом проводнике.

Стационарные поля в диэлектрике, окружающем проводники с постоянным током, по природе наиболее близки к электростатическим полям. Однако их полная аналогия (для одинаковых электродных систем) справедлива только при аналогичных граничных условиях. Основное отличие этих полей обусловлено неэквипотенциальностью поверхности проводников при протекании по ним постоянного тока. В большинстве практических задач поверхности проводников с постоянным током можно считать эквипотенциальными.

Стационарные поля в проводящей среде не сопоставимы с электростатическим полем из-за различной природы электрофизических параметров проводящих и диэлектрических сред, однако между ними существует математическая аналогия, основанная на сходстве уравнений, описывающих эти поля, и граничных условий.

Ниже рассматривается стационарное электрическое поле в проводящей среде.

3.1. Основные уравнения электрического поля

Электрическое поле постоянного тока в проводящей среде, *не связанного с перемещением объемных зарядов, при отсутствии в рассматриваемой области сторонних источников энергии*, описывается системой дифференциальных уравнений (1. 47), (1.16):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\delta} = \gamma \mathbf{E} \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\delta} = 0 \quad (3.3)$$

Интегральные аналоги уравнений (3.1) и (3.3) записываются в виде

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0; \quad \oint_s \boldsymbol{\delta} d\mathbf{S} = 0. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.1) можно рассматривать как дифференциальную форму записи второго закона Кирхгофа для контура, не содержащего источников. Это следует из интегрального аналога данного уравнения (3.5), согласно которому сумма напряжений в замкнутом контуре равна

нулю. Равенство (3.2) можно трактовать как закон Ома в дифференциальной форме.

Соотношение (3.3), выражающее принцип непрерывности постоянного тока, можно рассматривать как первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме, поскольку отсутствие истоков вектора плотности тока соответствует тому, что сумма токов (потоков вектора плотности тока), сходящихся в точке, равна нулю.

Из (3.1) следует, что электрическое поле является потенциальным и может быть описано с помощью скалярного потенциала φ :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (3.5)$$

В однородной среде скалярный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (3.6)$$

Существование стационарного электрического поля в проводящей среде (в отличие от электростатического поля) сопровождается затратой энергии сторонних источников, которая выделяется в форме тепловых потерь. Плотность мощности тепловых потерь (удельные тепловые потери) определяется согласно (1.36)

$$p = \mathbf{E}\delta = \gamma \mathbf{E}^2 = \delta^2 / \gamma. \quad (3.7)$$

У поверхности раздела двух сред с удельными проводимостями γ_1 и γ_2 выполняются граничные условия:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \quad \delta_{1n} = \delta_{2n}. \quad (3.8)$$

Иногда полезно соотношения (3.8) представить в виде

$$\frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (3.9)$$

Если ток переходит из среды с большой проводимостью в среду малой проводимостью, например, из металла в землю, то угол α_1 будет много больше угла α_2 (линии вектора напряженности выходят из металла практически под прямым углом). Напомним, что углы отсчитываются от нормали к поверхности раздела сред, проведенной из первой среды во вторую.

3.2. Аналогия между электростатическим полем и электрическим полем постоянного тока

Как уже отмечалось, электрическое поле постоянного тока в проводящей среде и электростатическое поле по своей природе различны. Однако, сравнивая уравнения, описывающие указанные виды полей, трудно заметить, что они отличаются лишь обозначениями. При сде-

ланных допущениях (отсутствие сторонних источников и объемных зарядов в проводящей среде) оба поля характеризуются вектором напряженности \mathbf{E} , являются потенциальными и удовлетворяют уравнению Лапласа для скалярного потенциала.

Вектору электрического смещения \mathbf{D} можно поставить в соответствие вектор плотности тока δ , а поток вектора \mathbf{D} – сопоставить с потоком вектора плотности тока (т.е. аналогичными являются заряд и ток).

Если напряжение между электродами 1 и 2 равно U_{12} и по среде проходит ток I , то проводимость между электродами будет $G = I/U_{12}$.

Поскольку ток $I = \int \delta d\mathbf{S} = \gamma \int \mathbf{E} d\mathbf{S}$, а напряжение $U_{12} = \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l}$, то

$$G = \frac{\gamma \int \mathbf{E} d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l}}.$$

В электростатическом поле с электродами той же конфигурации емкость между ними будет

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{\epsilon_a \int \mathbf{E} d\mathbf{S}}{\int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l}}.$$

Разделив полученные соотношения друг на друга, получаем

$$G/C = \gamma/\epsilon_a. \quad (3.10)$$

Если два поля при одинаковой форме граничных поверхностей удовлетворяют одному и тому же уравнению (Лапласа) и в них выполняются тождественные граничные условия для сходных величин, то на основании теоремы единственности можно утверждать, что картины этих полей будут одинаковыми. Иными словами, электрическое поле тока в однородной проводящей среде аналогично электростатическому полю в однородном диэлектрике. В этом суть принципа электростатической аналогии, выражением которого является соотношение (3.10).

Согласно (3.10) исследование электростатического поля можно заменить моделированием поля в проводящей среде, где достаточно точно можно измерять потенциалы точек в пространстве, окружающим электроды. И наоборот, при исследовании поля в проводящей среде можно воспользоваться результатами расчета электростатического поля.

3.3. Примеры расчета стационарного электрического поля

Задачи расчета электрического поля в проводящей среде можно разделить на два типа: 1) при заданном расположении и размерах электродов, свойствах среды и интенсивности источников поля требуется найти характеристики поля (распределение напряженности или потен-

циалов поля); 2) по заданной характеристике поля (напряженность или потенциал) в области с заданными геометрией электродов и свойствами среды требуется найти величину источников, создающих поле.

Пример 3.1. Заземлитель – металлический шар радиусом $R_0=0,1\text{м}$ расположен глубоко в земле с проводимостью $\gamma=2\cdot 10^{-3}\text{ См/см}$ и соединен с корпусом электрического двигателя изолированным проводом.

Определить сопротивление заземлителя и напряжение на корпусе двигателя при стекании с него постоянного тока $I=10\text{ А}$. Влиянием поверхности земли и ее неоднородностью можно пренебречь.

Решение. В однородной среде с безграничной областью растекания тока (второй электрод расположен бесконечно далеко), электрическое поле симметричное. Эквипотенциальные поверхности будут концентрическими сферами, а линии векторов поля будут направлены радиально.

На расстоянии r от центра шара плотность тока и напряженность поля будут соответственно равны

$$\delta = \frac{I}{4\pi r^2} \mathbf{1}_r; \quad \mathbf{E} = \frac{I}{4\pi\gamma r^2} \mathbf{1}_r.$$

Потенциал в произвольной точке пространства M , удаленной на расстояние r от центра заземлителя, найдем из соотношения (3.5) с учетом симметрии

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{1}_r; \quad \varphi = -\int E dr = -\frac{I}{4\pi\gamma} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{4\pi\gamma r} + C,$$

где C – постоянная интегрирования, равная нулю, если потенциал бесконечно удаленной точки принять равным нулю.

Напряжение заземлителя или, что то-же самое его потенциал по отношению к бесконечно удаленной точке, будет равен

$$U_0 = \varphi_0 = \frac{I}{4\pi\gamma R_0} \text{ или численно } U_0 = \frac{10}{4\pi \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10} = 39,8 \text{ В.}$$

Это напряжение называют напряжением растекания. Отношение напряжения растекания к току называют сопротивлением растеканию или сопротивлением заземлителя R_3 .

В нашем случае

$$R_3 = \frac{U_0}{I} = \frac{1}{4\pi\gamma R_0} \text{ или численно } R_3 = \frac{39,8}{10} = 3,98 \text{ Ом.}$$

Пример 3.2. Фундамент металлической опоры (рис. 3.1), выполненный из хорошо проводящего материала в виде полусферы радиусом $R_0=1\text{ м}$, находится в земле с удельной проводимостью $\gamma=2\cdot 10^{-4}\text{ См/см}$ и служит заземлителем.

Найти сопротивление заземлителя и шаговое напряжение на расстоянии $r=5$ м от центра опоры при замыкании на опору провода напряжением $U=10$ кВ. Длину шага принять равной $\lambda=0,7$ м.

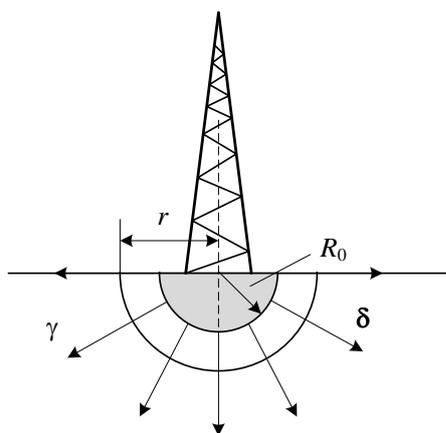


Рис. 3.1

Решение. Картина поля вектора плотности тока в земле не изменится, если полусферу мысленно дополнить до сферы, верхнюю часть пространства заменить проводящей с удельной проводимостью γ , а ток заземлителя удвоить. Иными словами, применим методом зеркальных изображений и воспользуемся результатом расчета сопротивления заземлителя в примере 3.1, увеличив его вдвое:

$$R_3 = \frac{1}{2\pi\gamma R_0} = \frac{1}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 1} = 7,96 \text{ Ом.}$$

Зная сопротивление заземлителя, находим ток короткого замыкания на землю:

$$I = U / R_3 = \frac{10000}{7,96} = 1256,3 \text{ А.}$$

Шаговое напряжение с учетом радиальной симметрии поля:

$$U_{\text{ш}} = \int_r^{r+\lambda} E dr = \frac{I}{2\pi\gamma} \int_r^{r+\lambda} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+\lambda} \right). \quad (3.11)$$

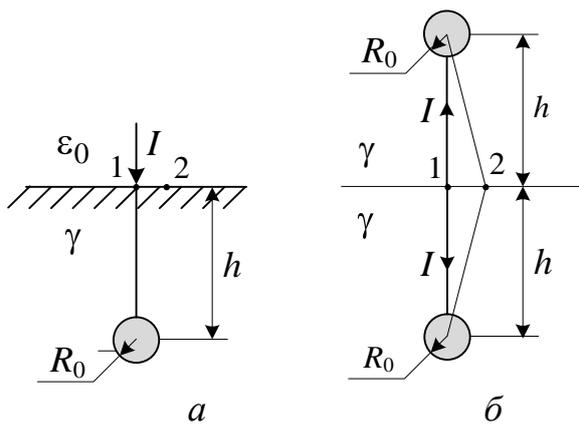
Подставляя числовые значения, получаем:

$$U_{\text{ш}} = \frac{314,5}{2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5+0,7} \right) = 245,7 \text{ В.}$$

Пример 3.3. Сферический заземлитель радиусом $R_0=30$ см находится в земле с удельной проводимостью $\gamma=10^{-2}$ См/м на глубине $h=2$ м (рис. 3.2).

Найти сопротивление заземлителя и шаговое напряжение над заземлителем при токе растекания $I=100$ А. Длина шага $\lambda=0,7$ м.

Решение. Воспользуемся методом зеркальных изображений и в верхней части пространства, которое будем считать заполненным средой с той же проводимостью γ , и в точке зеркального изображения поместим такой же заземлитель (шар) с током I' , величина и знак которого совпадают с заданным (рис. 3.2, б). В этом случае условия на границе раздела сред и, следовательно, поле в проводящей среде не изменятся.



Рис

Для расчета поля в проводящей среде воспользуемся методом наложения, определяя потенциал заземлителя как сумму потенциалов, обусловленных каждым из шаров. При этом учтем, что $R_0 \ll 2h$ и искажением поля, вносимым изображением, можно пренебречь:

$$\varphi_0 = \varphi + \varphi' = \frac{I}{4\pi\gamma} \frac{2h}{R_0(2h - R_0)}.$$

. 3.2

Сопротивление заземлителя определяем по закону Ома:

$$R_3 = \frac{U_0}{I} = \frac{h}{2\pi\gamma R_0(2h - R_0)} = \frac{2}{2\pi \cdot 10^{-2} \cdot 0,3(4 - 0,3)} = 28,7 \text{ Ом.}$$

Шаговое напряжение - разность потенциалов между точками поверхности земли, отстоящими друг от друга на расстояние, равное длине шага λ (в данном случае это точки 1 и 2):

$$U_{\text{ш}} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + \lambda^2}} \right).$$

Подставляя числовые данные, получаем

$$U_{\text{ш}} = \frac{100}{2\pi \cdot 10^{-2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2^2 + 0,7^2}} \right) = 44,7 \text{ В.}$$

Пример 3.4. Сферический заземлитель радиусом $R_0=30$ см расположен на глубине $h_1=2$ м вблизи края глубокого обрыва $h_2=5$ м (рис. 3.3). Удельная проводимость земли $\gamma=10^{-2}$ См/м.

Найти сопротивление заземлителя и ток, при котором шаговое напряжение над заземлителем не превышает 120 В. Длина шага $\lambda=0,7$ м.

Решение. Для определения потенциала заземлителя с учетом влияния неоднородности земли, воспользуемся методом зеркальных изображений. Чтобы на поверхности земли линии тока не имели нормальных составляющих, а шли вдоль ее поверхности, требуется ввести в рассмотрение три изображения, токи которых имеют ту же величину и направление, что и реальный заземлитель (рис. 3.3, б). Вся среда при этом предполагается однородной с заданной проводимостью γ .

Потенциал заземлителя (в однородной среде) определяется суммой потенциалов, обусловленных каждым из шаровых заземлителей:

$$\varphi_0 = U_0 = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4.$$

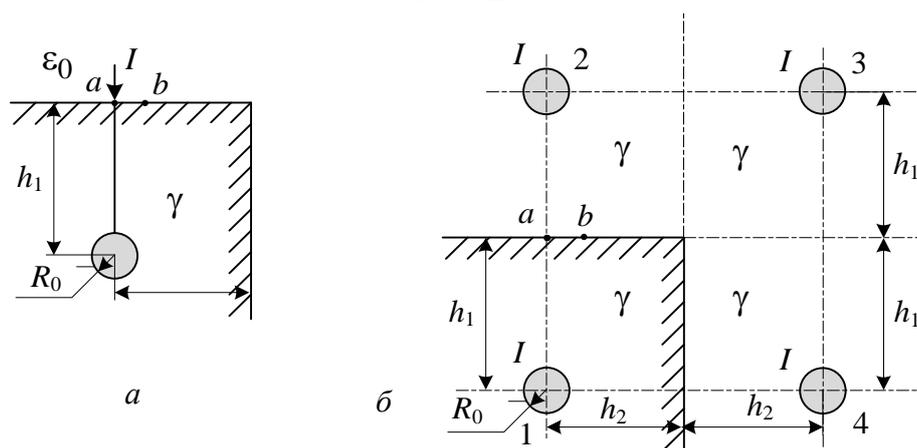


Рис. 3.3

Радиус шара (заземлителя) значительно меньше расстояний между шарами, поэтому искажением поля, вносимым шарами-изображениями можно пренебречь. Тогда, в силу симметрии плотность тока на поверхности сферы произвольного радиуса r , окружающей заземлитель, будет направлена нормально к ее поверхности и иметь величину

$$\delta = \frac{I}{4\pi r^2}.$$

Напряженность и потенциал уединенного шара в однородной среде найдены в предыдущих примерах, поэтому можно сразу записать потенциалы, обусловленные шарами на поверхности заземлителя:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{I}{4\pi\gamma R_0}; & \varphi_2 &= \frac{I}{4\pi\gamma 2h_1}; \\ \varphi_3 &= \frac{I}{4\pi\gamma 2\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}; & \varphi_4 &= \frac{I}{4\pi\gamma 2h_2}. \end{aligned}$$

Сопротивление заземлителя определяем по закону Ома

$$R_3 = \frac{U_0}{I} = \frac{1}{8\pi\gamma} \left(\frac{2}{R_0} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right)$$

Подставляя числовые значения, получаем:

$$R_3 = \frac{1}{8\pi \cdot 10^{-2}} \left(\frac{2}{0,3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{\sqrt{2^2 + 5^2}} \right) = 30 \text{ Ом.}$$

Потенциал точки a , расположенной прямо над заземлителем, равен сумме потенциалов от каждого из шаров:

$$\varphi_a = \varphi_{1a} + \varphi_{2a} + \varphi_{3a} + \varphi_{4a} = \frac{I}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_1} + \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + 2h_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + 2h_2^2}} \right).$$

Потенциал точки *b* находится аналогично

$$\varphi_b = \varphi_{1b} + \varphi_{2b} + \varphi_{3b} + \varphi_{4b} = \frac{I}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2 + \lambda^2}} + \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + (2h_2 + \lambda)^2}} \right).$$

После подстановки известных числовых данных разность потенциалов точек, или шаговое напряжение, выразится через искомый ток

$$U_{\text{ш}} = \varphi_a - \varphi_b = 9,52I - 8,97I = 0,55I.$$

Чтобы шаговое напряжение не превышало заданную величину, ток в заземлителе не должен быть больше

$$I_{\text{max}} = 120/0,55 = 220 \text{ А.}$$

Пример 3.5. Как изменится сопротивление заземлителя в условиях задачи 3.4, если пространство со стороны обрыва заполнить морской водой до уровня поверхности земли. Проводимость воды $\gamma_{\text{в}}=0,1$ См/м.

Решение. Чтобы учесть влияние границы раздела земля – воздух на распределение поля в земле, как и в предыдущих примерах вводим зеркальные изображения заземлителя (2) с током того же направления *I* и вертикальную границу раздела земля – вода. Среда слева от вертикальной границы раздела принимается однородной с проводимостью γ . Среда справа от вертикальной границы раздела принимается однородной с проводимостью $\gamma_{\text{в}}$ (рис. 3.4, *a*).

Влияние вертикальной границы раздела сред земля – вода учтем, поместив в точках зеркального отображения фиктивные заземлители 3 и 4 (рис. 3.4, *б*) с током (см. пример 2.29)

$$I_1 = k_1 I = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} I.$$

Дальнейший расчет аналогичен расчету, приведенному в примере 3.4:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{I}{4\pi\gamma R_0}; & \varphi_2 &= \frac{I}{4\pi\gamma 2h_1}; \\ \varphi_3 &= \frac{k_1 I}{4\pi\gamma 2\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}; & \varphi_4 &= \frac{k_1 I}{4\pi\gamma 2h_2}. \end{aligned}$$

Сопротивление заземлителя:

$$R_3 = \frac{U_0}{I} = \frac{1}{8\pi\gamma} \left(\frac{2}{R_0} + \frac{1}{h_1} + \frac{k_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} + \frac{k_1}{h_2} \right).$$

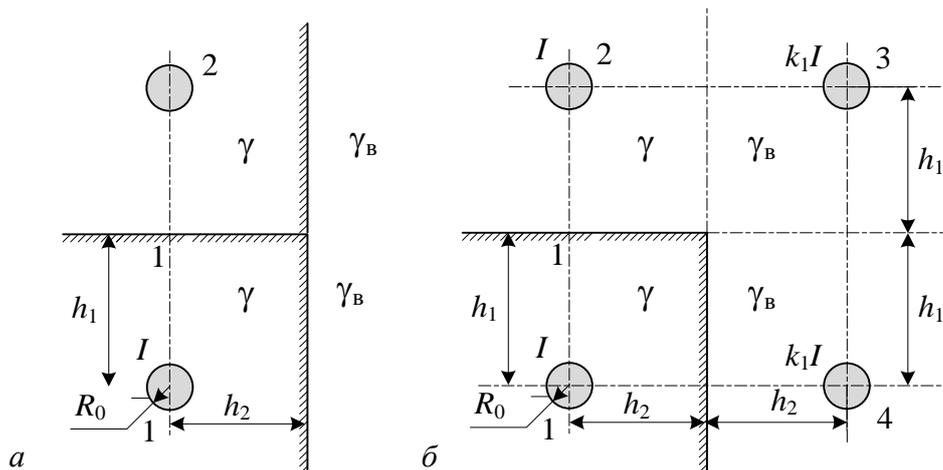


Рис .3.4

Подставляя числовые значения, получаем:

$$R_3 = \frac{1}{8\pi \cdot 10^{-2}} \left(\frac{2}{0,3} + \frac{1}{2} + \frac{-0,881}{5} + \frac{-0,881}{\sqrt{2^2 + 5^2}} \right) = 27,16 \text{ Ом.}$$

Таким образом, сопротивление заземлителя уменьшилось на 2,84 Ом.

Замечание. Поле в среде с проводимостью γ_B можно рассчитать, представив все пространство заполненным однородной средой γ_B , а величину тока I реального заземлителя (1) и его изображения (2) принять равной $I_2 = k_2 I$, где $k_2 = \frac{2\gamma_B}{\gamma_1 + \gamma_2}$.

Пример 3.6. Для измерения удельной проводимости почвы используются два полусферических заземлителя радиусом $R_0=20$ см, расположенные на расстоянии $d=12$ м друг от друга. При напряжении $U=12$ В между ними идет ток I , равный 50 мА.

Определить удельную проводимость почвы, пренебрегая ее неоднородностью.

Решение. Как и в предыдущих примерах, полусферические заземлители, согласно методу зеркальных изображений, заменяем сферическими, а величину тока удваиваем. Искажением поля за счет влияния конечных размеров заземлителей друг на друга также пренебрегаем. Это позволяет считать распределение тока в почве от каждого из заземлителей равномерным, а использование метода наложения правомочным.

Разность потенциалов между заземлителями можно определить по (3.11), удвоив напряжение, поскольку в данном примере оно создается растеканием тока с двух заземлителей:

$$U = \int_{R_0}^{d-R_0} E dr = \frac{I}{\pi\gamma} \int_{R_0}^{d-R_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{Id}{2\pi\gamma R_0(d-R_0)}.$$

Отсюда находим удельную проводимость почвы

$$\gamma = \frac{Id}{U\pi R_0(d-R_0)} = \frac{0,075 \cdot 12}{12\pi \cdot 0,2(12-0,2)} = 0,01 \text{ См/м.}$$

Пример 3.7. Определить сопротивление изоляции R коаксиального кабеля (рис. 3.5) с радиусом внутренней жилы r_1 , внутренним радиусом оболочки r_2 и длиной l . Удельная проводимость изоляции γ .

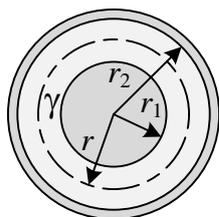


Рис. 3.5

Решение. В силу осевой симметрии кабеля векторы плотности тока и напряженности электрического поля будут иметь только радиальную составляющую и в точках, равноудаленных от оси, их значения будут одинаковыми. Поэтому для любой цилиндрической поверхности S радиусом $r_1 < r < r_2$ поток вектора плотности тока на единицу длины равен

$$\int_S \delta dS = 2\pi r \delta = I_0,$$

где I_0 – ток утечки на единицу длины.

Плотность тока и напряженность поля находятся по (3.2)

$$\delta = \frac{I_0}{2\pi r}; \quad E = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I_0}{2\pi\gamma r}.$$

Напряжение между жилой и оболочкой находим по (3.5)

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{I_0}{2\pi\gamma} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{I_0}{2\pi\gamma} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Сопротивление изоляции кабеля длиной l

$$R_{и} = \frac{U}{I_0 l} = \frac{1}{2\pi\gamma l} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Пример 3.8 Радиус внутреннего провода (жилы) коаксиального кабеля (пример 3.7) $r_1=3$ мм, внутренний радиус оболочки $r_2=5$ мм. Проводимость изоляции кабеля $\gamma=10^{-8}$ См/м.

Определить удельную мощность, выделяющуюся у поверхности жилы и потери мощности в изоляции кабеля на единицу длины (1 м), если приложенное напряжение $U=1$ кВ.

Решение. Согласно закону Джоуля - Ленца удельная мощность (энергия отнесенная к единице времени и объема) определяется по (3.7).

После подстановки в (3.7) выражения для напряженности коаксиального кабеля, найденного в примере 3.7, получаем

$$p = \gamma E^2 = \gamma \left(\frac{I_0}{2\pi\gamma r} \right)^2 = \frac{\gamma}{r^2} \left(\frac{U}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right)^2.$$

Заменяя в полученном выражении текущую координату r на r_1 , найдем искомую удельную мощность, выделяющуюся у поверхности жилы.

Чтобы найти потери мощности во всем объеме изоляции между электродами, выделим в изоляции элементарный цилиндрический слой единичной длины, имеющий радиус r и толщину dr .

Потери мощности в таком слое будут равны

$$dP = p dV = p 2\pi r dr.$$

Во всем объеме изоляции потери мощности составят величину

$$P = \int_V dP = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\gamma}{r^2} \left(\frac{U}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right)^2 2\pi r dr = \frac{2\pi\gamma U^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Численно:

$$P = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 10^{-8} \cdot 1000^2}{\ln \frac{5}{3}} = 0,123 \text{ Вт.}$$

Пример 3.9. У цилиндрического конденсатора с двухслойной изоляцией (рис. 2.13) радиус жилы $r_1=1,5$ мм, внутренний радиус оболочки $r_3=4,5$ мм, радиус границы раздела слоев изоляции $r_2=3$ мм. Длина конденсатора $l=10$ см. Удельные проводимости слоев $\gamma_1=10^{-10}$ См/м и $\gamma_2=5 \cdot 10^{-11}$ См/м. Рабочее напряжение конденсатора $U=1$ кВ.

Найти закон изменения напряженности поля в слоях изоляции и напряжения на слоях изоляции в установившемся режиме.

Решение. Напряженности поля в каждом из слоев изоляции согласно (3.2) определяются плотностью тока, как и в предыдущем примере имеющей только радиальную составляющую, убывающую обратно пропорционально расстоянию от оси цилиндра:

$$E_1(r) = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{I_0}{2\pi\gamma_1 r}; \quad E_2(r) = \frac{\delta}{\gamma_2} = \frac{I_0}{2\pi\gamma_2 r},$$

где I_0 – ток утечки на единицу длины.

Чтобы выразить ток утечки через заданное напряжение, воспользуемся соотношением (3.5), суммируя напряжения на слоях изоляции:

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E_1 dr + \int_{r_2}^{r_3} E_2 dr = \frac{I_0}{2\pi} \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\gamma_1 r} + \int_{r_2}^{r_3} \frac{dr}{\gamma_2 r} \right) = \frac{I_0}{2\pi} \left(\frac{1}{\gamma_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{r_3}{r_2} \right).$$

Отсюда следует

$$I_0 = \frac{2\pi U \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_2 \ln \frac{r_2}{r_1} + \gamma_1 \ln \frac{r_3}{r_2}}.$$

Найденное значение тока утечки позволяет построить график изменения напряженностей в слоях изоляции (рис. 3.6).

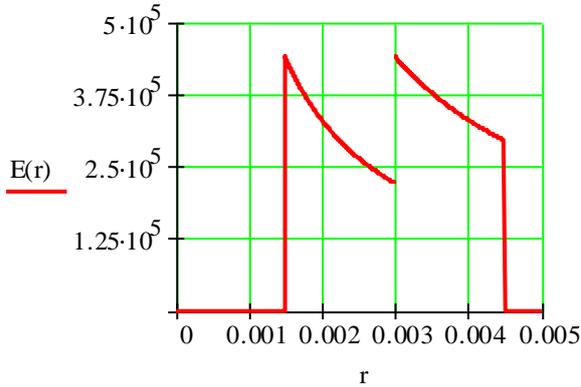


Рис. 3.6

Напряжения на слоях изоляции можно найти и методом электростатической аналогии,

согласно которой $G = \gamma C / \epsilon_a$. Это позволяет воспользоваться результатами расчета емкости, приведенной в примере 2.35, и по аналогии записать проводимости конденсатора и каждого из слоев его изоляции:

$$G_{\text{и}} = \frac{C}{\epsilon_a / \gamma} = \frac{2\pi l}{\frac{1}{\gamma_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{r_3}{r_2}}; \quad G_1 = \frac{2\pi l \gamma_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}; \quad G_2 = \frac{2\pi l \gamma_2}{\ln \frac{r_3}{r_2}}.$$

При известном напряжении ток утечки конденсатора будет равен

$$I = G_{\text{и}} U = \frac{2\pi l U}{\frac{1}{\gamma_1} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{r_3}{r_2}}.$$

Этот ток одинаковый в обоих слоях, поэтому распределение напряжений по слоям определяется по закону Ома:

$$U_1 = I / G_1 = \frac{\gamma_2 U \ln \frac{r_2}{r_1}}{\gamma_2 \ln \frac{r_2}{r_1} + \gamma_1 \ln \frac{r_3}{r_2}};$$

$$U_2 = I / G_2 = \frac{\gamma_1 U \ln \frac{r_3}{r_2}}{\gamma_2 \ln \frac{r_2}{r_1} + \gamma_1 \ln \frac{r_3}{r_2}}.$$

Подставляя числовые значения, находим

$$U_1 = 583,5 \text{ В}; \quad U_2 = 416,5 \text{ В}.$$

4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

4.1. Основные уравнения магнитного поля

Если в рассматриваемой области плотность тока проводимости равна нулю ($\delta=0$), а сама область не охватывает постоянного тока, уравнения Максвелла, содержащие векторы магнитного поля, не зависят от векторов электрического поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}.$$

Приведенные уравнения описывают магнитоэстатическое поле.

В условиях, когда $\delta \neq 0$, векторы электрического и магнитного полей, хотя и связаны между собой соотношением $\delta = \gamma \mathbf{E}$, по-прежнему относительно независимы:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \delta; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}. \quad (4.1)$$

Уравнения (4.1) – уравнения стационарного магнитного поля. Наряду с дифференциальными уравнениями при анализе магнитного поля используются их интегральные аналоги:

$$\oint_S \mathbf{H} d\mathbf{l} = I = \oint_S \delta d\mathbf{S} \quad \text{или} \quad \oint_S \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0; \quad \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (4.2)$$

Как следует из приведенных уравнений, магнитоэстатическое поле является потенциальным, а стационарное магнитное поле вихревым.

По аналогии с электростатикой для областей магнитного поля, где $\delta=0$ ($\operatorname{rot} \mathbf{H}=0$), можно ввести скалярную функцию – магнитоэстатический потенциал φ^M , связанный с вектором \mathbf{H} соотношением:

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi^M. \quad (4.3)$$

В однородной среде магнитоэстатический потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi^M = 0. \quad (4.4)$$

Разность магнитоэстатических потенциалов между точками 1 и 2, равная $\varphi_1^M - \varphi_2^M = \int_1^2 \mathbf{H} d\mathbf{l}$, в области с током ($\delta \neq 0$) становится неоднозначной и зависит от контура, по которому производится интегрирование. При каждом обходе контура вокруг тока I значение интеграла увеличивается на величину тока I .

Для однозначного определения стационарного магнитного поля используется векторный (магнитный) потенциал \mathbf{A} , связанный с векторами \mathbf{B} и \mathbf{H} соотношениями (1.42):

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad \text{или} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Уравнение для векторного потенциала стационарного магнитного поля вытекает из уравнения Даламбера (1.47), если положить $\partial/\partial t = 0$:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_a \delta. \quad (4.5, \text{а})$$

В области, где нет тока, уравнение Пуассона для векторного потенциала (4.5, а) переходит в уравнение Лапласа:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0. \quad (4.5, \text{б})$$

Если токи сосредоточены в ограниченной области V , фундаментальное решение уравнения (4.5, а) записывается в виде

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta dV}{R}, \quad (4.6)$$

где R – расстояние от элемента объема dV с током до точки, в которой определяется потенциал.

В случае линейного тока I (тока в проводнике, поперечное сечение которого много меньше расстояния R) формулу (4.6) следует заменить выражением

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \int_l \frac{d\mathbf{l}}{R}, \quad (4.7)$$

где l - контур с током.

Векторный потенциал упрощает вычисление магнитного потока:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} d\mathbf{l}. \quad (4.8)$$

Переходя от векторного потенциала к напряженности магнитного поля согласно (1.42) на основании (4.7), для однородной изотропной среды получаем

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{[d\mathbf{l} \times \mathbf{1}_R]}{R^2},$$

где $\mathbf{1}_R$ – единичный вектор (орт вектора, проведенного от элемента тока в рассматриваемую точку). Это - закон Био-Савара в интегральной форме. Его дифференциальная форма известна из курса физики:

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi R^2} [d\mathbf{l} \times \mathbf{1}_R]. \quad (4.9)$$

4.1.1. Граничные условия

Выбор однозначного решения уравнений Лапласа – Пуассона, допускающих множество решений, как и в случае электростатики, производится на основе граничных условий, сформулированных в разделе 1.5:

$$B_{1n} - B_{2n} = 0; \quad H_{1\tau} - H_{2\tau} = 0. \quad (4.10)$$

Условия (4.10) справедливы, если на границе раздела сред нет поверхностных токов. При этом векторный и скалярный магнитные потенциалы будут непрерывны:

$$A_{1n} = A_{2n}; \quad A_{1\tau} = A_{2\tau}; \quad \Phi_1^M = \Phi_2^M; \quad (4.11)$$

Полезным дополнением к (4.10) и (4.11) служит уравнение (1.29):

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}.$$

Индексы n и τ в уравнениях означают соответственно нормальную или тангенциальную составляющие.

4.1.2. Энергия стационарного магнитного поля

Выражение для объемной плотности энергии магнитного поля, полученное в разделе 1.6, остается справедливым в случае стационарного поля. Интегрируя по объему, получаем

$$W_M = \frac{1}{2} \int_V \mu_a H^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \mathbf{B} dV. \quad (4.13)$$

Выражение (4.13) можно преобразовать [1], выразив энергию через токи, создающие магнитное поле:

$$W_M = \frac{1}{2} \int_{V_0} \mathbf{A} \delta dV = \frac{I}{2} \int_l \mathbf{A} d\mathbf{l} = \frac{I\Phi}{2}. \quad (4.14)$$

где V_0 – объем, в котором имеются токи;

l – контур с током I .

4.1.3. Индуктивность

Индуктивность – это коэффициент пропорциональности между потоком Φ (потокосцеплением), пронизывающим уединенный контур, и током контура I :

$$L = \Phi / I \quad \text{или} \quad L = \Psi / I = w\Phi / I. \quad (4.15)$$

Выражая Φ в (4.14) через индуктивность, получаем еще одну формулу энергии

$$W_M = \frac{LI^2}{2}. \quad (4.16)$$

Единица измерения индуктивности – генри (Гн).

Если имеется несколько контуров, то каждый из них пронизывается помимо собственного потока Φ_{kk} , потоками соседних контуров Φ_{nk} , названных взаимными. Коэффициент пропорциональности между взаимным потоком и током, создавшим этот поток, – взаимная индуктивность контуров k и n :

$$M_{nk} = \Phi_{nk} / I_k. \quad (4.17)$$

При $k=n$ коэффициент пропорциональности между потоком и током называют собственной индуктивностью k - контура ($M_{kk} = L_k$). Индуктивность измеряется в генри, Гн. Она зависит от формы, взаимного расположения контуров и магнитной проницаемости среды и самих контуров.

Коэффициенты M_{nk} при $k \neq n$ определяются по (4.17), где взаимные потоки можно найти согласно (4.8) и (4.7) по формуле

$$\Phi_{nk} = \oint_{l_n} \mathbf{A}_k d\mathbf{l}_n = \frac{\mu_a}{4\pi} I_k \oint_{l_n} \oint_{l_k} \frac{d\mathbf{l}_n d\mathbf{l}_k}{R}. \quad (4.18)$$

Подставляя (4.18) в (4.17), получаем

$$M_{nk} = \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_{l_n} \oint_{l_k} \frac{d\mathbf{l}_n d\mathbf{l}_k}{R}, \quad (4.19)$$

где R – расстояние между элементами контуров.

При перестановке индексов взаимная индуктивность не изменяется.

Формула (4.19) для определения собственной индуктивности контура ($k=n$) не пригодна. Чтобы найти ее, собственный поток следует представить в виде двух составляющих: внешнего $\Phi_{\text{внш}}$, пронизывающего контур без учета проводника с током и внутреннего $\Phi_{\text{внт}}$, пронизывающего контур в пределах самого проводника. Иными словами, собственную индуктивность представляют в виде суммы внутренней и внешней индуктивностей. Их расчет будет рассмотрен на конкретных примерах.

4.2. Примеры расчета магнитных полей

4.2.1. Вводные задачи анализа магнитного поля

Примеры данного раздела иллюстрируют взаимосвязи векторов магнитного поля, определяют его характер и его свойства.

Пример 4.1. Составляющие вектора напряженности магнитного поля изменяются по закону: $H_x = 0$, $H_y = a(y^2 + z^2)$, $H_z = a(y + z)$, где a - постоянное число. Найти закон изменения плотности тока.

Решение. Согласно (4.1) $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$. В декартовых координатах

$$\text{rot } \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix},$$

поэтому

$$\delta = \mathbf{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right).$$

Подставляя в полученное равенство заданные составляющие напряженности и выполняя дифференцирование, найдем:

$$\delta = \mathbf{i}a(1 - 2z).$$

Пример 4.2. Определить, при каком условии линии вектора магнитной напряженности \mathbf{H} непрерывны.

Решение. Согласно (4.1) $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, т.е. линии вектора магнитной индукции непрерывны вне зависимости от свойств среды. Для вектора напряженности поля будем иметь: $\operatorname{div}(\mu_a \mathbf{H}) = 0$. Учитывая тождество

$$\operatorname{div}(\mu_a \mathbf{H}) = [\mathbf{H} \times \operatorname{grad} \mu_a] + \mu_a \operatorname{div} \mathbf{H},$$

делаем вывод, что линии вектора магнитной напряженности непрерывны $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ только при $\mu_a = \text{const}$.

Ответ: При $\mu_a = \text{const}$.

Пример 4.3. Скалярный потенциал магнитного поля изменяется по закону: $\varphi^M = 2x^2 - 4y^2$ (φ^M - в амперах), где x и y координаты текущей точки в метрах.

Определить модуль напряженности поля в точке с координатами $x=2$ м, $y=0,5$ м, $z=0$.

Решение. На основании (4.3) $\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi^M$. В декартовых координатах $\operatorname{grad} \varphi^M$ записывается:

$$\operatorname{grad} \varphi^M = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi^M}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi^M}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi^M}{\partial z}.$$

После дифференцирование заданного потенциала φ^M , находим

$$\mathbf{H} = -\mathbf{i}4x + \mathbf{j}8y.$$

Подставляя заданные координаты x и y , имеем

$$\mathbf{H} = -\mathbf{i}8 + \mathbf{j}4 \text{ А/м.}$$

Модуль напряженности поля определяется как $H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2}$.

Численно $H = \sqrt{8^2 + 4^2} = 8,94 \text{ А/м.}$

Пример 4.4. Вектор магнитной индукции изменяется по закону: $\mathbf{B} = \mathbf{i}C \sin y$, где $C = \text{const}$.

Определить характер поля вектора \mathbf{B} и величину векторного потенциала \mathbf{A} .

Решение. Определить характер поля – это значит определить наличие или отсутствие его истоков и вихрей. Математически задача сводится к отысканию функций $\operatorname{div} \mathbf{B}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{B}$. Найдем их, записав предварительно данные функции в декартовых координатах:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

Подставляя $\mathbf{B} = \mathbf{i}B_x$, где $B_x = C \sin y$ в вышестоящие равенства, получаем $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$; $\operatorname{rot} \mathbf{B} = -\mathbf{k}C \cos y$, откуда следует, что поле данного вектора \mathbf{B} вихревое.

Согласно (1.42) $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ или в декартовой системе координат:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

Поскольку \mathbf{B} имеет только \mathbf{i} – составляющую, зависящую от координаты y , то принимаем $B_x = C \sin y = \frac{\partial A_z}{\partial y}$.

На основании (4.5) вектор \mathbf{A} совпадает по направлению с вектором δ . В данном примере вектор \mathbf{A} имеет составляющую, совпадающую с направлением оси z , поэтому

$$\mathbf{A} = \mathbf{k}A_z; \quad A_x = A_y = 0; \quad \delta = \mathbf{k}\delta_z.$$

Интегрируя B_x , находим A_z составляющую векторного потенциала

$$A_z = \int C \sin y dy.$$

В векторной форме с точностью до постоянной записываем результат:

$$\mathbf{A} = \mathbf{k}C \cos y.$$

Ответ. Поле вихревое, $\mathbf{A} = \mathbf{k}C \cos y$.

Пример 4.5. Векторный потенциал магнитного поля \mathbf{A} изменяется по закону: $A_x = 0$, $A_y = -y + 4z^2 y$, $A_z = y^2 + z^2$.

Определить закон изменения вектора магнитной индукции \mathbf{B} .

Решение. Поскольку $A_x = 0$, то из уравнения (1.42) следует:

$$\mathbf{V} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \mathbf{j} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \mathbf{k} \frac{\partial A_y}{\partial x}.$$

Дифференцируя составляющие вектора \mathbf{A} , получаем:

$$\mathbf{V} = \mathbf{i}(2y + 4 \cdot 2zy) = \mathbf{i}2y(1 + 4z).$$

4.2.2. Определение граничных условий

Приведенные в данном разделе примеры раскрывают основные законы изменения векторов магнитного поля при переходе поля через границу раздела сред. При этом полагается, что на границе раздела сред нет поверхностных токов.

Пример 4.6. Нормальная составляющая вектора индукции в воздухе (рис. 4.1) составляет величину $B_{1n} = 0,04$ Тл, а тангенциальная составляющая по другую сторону границы раздела соответственно $B_{2\tau} = 0,3$ Тл.

Найти величину вектора индукции в воздухе ($\mu_1 = 1$), если относительная магнитная проницаемость второй среды $\mu_2 = 10$.

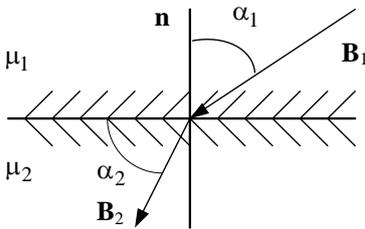


Рис. 4.1

Решение. Согласно (4.10), $H_{1\tau} = H_{2\tau}$

или, соответственно, $B_{1\tau} = \frac{\mu_1 B_{2\tau}}{\mu_2}$.

Численно это составляет величину $B_{1\tau} = 0,03$ Тл.

Модуль вектора индукции в воздухе определяется как $B_1 = \sqrt{B_{1\tau}^2 + B_{1n}^2}$, что после подстановки численных значений даст величину $B_1 = 0,05$ Тл.

Пример 4.7. Найти угол α_2 (рис. 4.2), под которым линии магнитной напряженности поля \mathbf{H} выходят из ферромагнитной среды с абсолютной магнитной проницаемостью $\mu_{1a} = 10^4 \mu_0$ в среду с магнитной проницаемостью $\mu_{2a} = \mu_0$, если в среде с μ_{1a} угол $\alpha_1 = 89^\circ$.

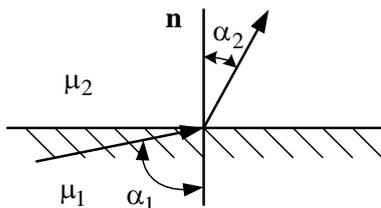


Рис. 4.2

Решение. Воспользуемся соотношени-

ем (1.29): $\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$.

Отсюда следует, что $\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{\mu_2}{\mu_1}$ и $\alpha_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{tg} \alpha_1 \frac{\mu_2}{\mu_1})$.

Подставляя числовые данные, получаем:

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 89^\circ \cdot 10^{-4}) = 20'.$$

Ответ. $\alpha_2 = 20'$.

Пример 4.8. Плита, состоящая из двух разнородных частей с магнитными проницаемостями $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 10$, соединенных под углом 30° , помещена в однородное магнитное поле $B_0 = 0,1$ Тл перпендикулярно линиям поля (рис.4.3).

Определить напряженность магнитного поля на границе раздела сред со стороны среды μ_2 .

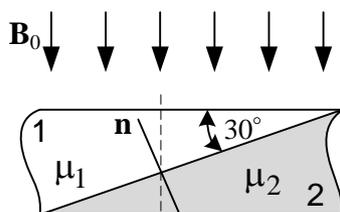


Рис. 4.3

Решение. На рис. 4.3 видно, что линии поля в среде с μ_1 ориентированы по отношению к границе раздела сред под углом 60° , а по отношению к нормали \mathbf{n} – под углом 30° . На основании (4.10) записываем:

$$H_{2\tau} = \frac{B_0}{\mu_{a1}} \sin 30^\circ \quad \text{и} \quad H_{2n} = \frac{B_0}{\mu_{a2}} \cos 30^\circ.$$

Подставляя числовые данные, получаем:

$$H_{2\tau} = 398 \text{ А/см}, \quad H_{2n} = 68,9 \text{ А/см}.$$

Модуль напряженности поля на границе раздела сред со стороны μ_2 определяется как $H_2 = \sqrt{H_{2n}^2 + H_{2\tau}^2}$.

Подставляя числовые данные, найдем $H_2 = 403,9 \text{ А/см}$.

Пример 4.9. Внутри стального шара с относительной магнитной проницаемостью $\mu_2 = 10$, внесенного во внешнее магнитное поле в воздухе с напряженностью H_1 (рис. 4.4), установилось однородное магнитное поле с напряженностью $H_2 = 100 \text{ А/м}$.

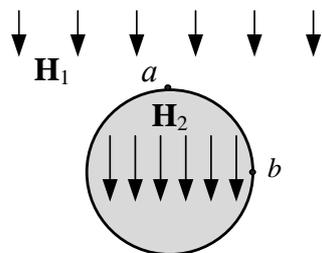


Рис. 4.4

Найти напряженность магнитного поля в воздухе в точках a и b .

Решение. Из соображений симметрии можно установить, что напряженность поля, как внутри стального шара, так и снаружи (в воздухе) в точке a имеет только нормальную к поверхности шара составляющую $H_{1a} = H_{1na}$.

Согласно (4.10) $H_{1a} = \mu_2 H_2 / \mu_1$, откуда находим $H_{1A} = 1000$ А/м. В точке b , напротив, отсутствует нормальная к поверхности шара составляющая напряженности поля. Поэтому в этой точке будем иметь

$$H_{1b} = H_{2tb} = H_2.$$

Таким образом, $H_{1A} = 1000$ А/м; $H_{1B} = 100$ А/м.

4.2.3. Использование закона полного тока, симметрии и принципа наложения

В силу симметрии поля в нижеприведенных примерах для решения достаточно применить закон полного тока в интегральной форме (4.2). В ряде примеров решение достигается суммированием частных решений на основе принципа суперпозиции.

Пример 4.10. По бесконечно длинному цилиндрическому проводнику, радиусом a , течет ток I , равномерно распределенный по сечению.

Определить напряженность магнитного поля внутри и вне провода.

Решение. Ось провода совместим с осью z цилиндрической системы координат. В силу симметрии системы поле не зависит от угловой координаты; напряженность поля имеет только одну составляющую $\mathbf{H} = \mathbf{1}_\alpha H(r)$ и можно использовать закон полного тока (4.2).

Выбирая в качестве контура интегрирования окружность радиуса $r \geq a$, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси провода, находим напряженность поля для области вне провода

$$\oint_l \mathbf{H}_{\text{вн}} d\mathbf{l} = \oint_l H_{\text{вн}} dl \cos 0^\circ = H_{\text{вн}} \oint_l dl = 2\pi r H_{\text{вн}} = I.$$

Отсюда следует

$$H_{\text{вн}} = \frac{I}{2\pi r}. \quad (4.20)$$

Если контур интегрирования выбрать внутри провода ($r \leq a$), то ток, попавший в контур, будет равен $I(r/a)^2$. Интегрирование уравнения (4.2) приводит к равенству:

$$H_{\text{вн}} = \frac{Ir}{2\pi a^2}.$$

На поверхности провода ($r=a$) обе формулы дают одинаковый результат – наибольшее значение напряженности магнитного поля.

Замечание. Поле протяженного цилиндрического провода с током I в области $r \geq a$ совпадает с полем уединенного бесконечно тонкого провода (нити) с током I .

Пример 4.11. По длинному трубчатому цилиндрическому проводу с известными внутренним a и внешним b радиусами (рис. 4.5) протекает ток I , равномерно распределенный по сечению провода.

Определить напряженность магнитного поля в указанных точках:
1- в центре трубы; 2- внутри самой трубы; 3- вне трубы.

Решение. Ось z цилиндрической системы координат совместим с осью трубы. В силу симметрии вектор \mathbf{H} , как в примере 4.10, имеет только одну составляющую $\mathbf{H} = \mathbf{1}_\alpha H(r)$, являющуюся функцией координаты r .

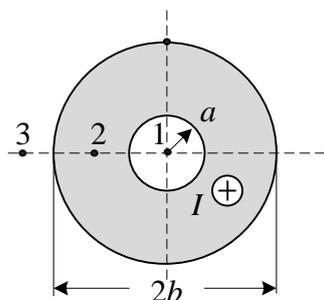


Рис. 4.5

В каждой равноудаленной от оси точке $r = \text{const}$ напряженность поля постоянная и направлена перпендикулярно радиусу r .

Внутри трубы (в ее полости) тока нет, поэтому интегрирование (4.2) по длине окружности радиуса $0 \leq r \leq a$ даст однозначный результат: магнитного поля внутри полости нет.

В области $a \leq r \leq b$ после интегрирования уравнения (4.2) получаем

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \oint_l H dl \cos 0^\circ = 2\pi r H = I',$$

где I' - ток, попавший в контур интегрирования, равный

$$I' = \frac{I\pi(r^2 - a^2)}{\pi(b^2 - a^2)}.$$

Таким образом, для точки 2, расположенной в толще трубы, получаем

$$H_2 = \frac{I(r^2 - a^2)}{2\pi r(b^2 - a^2)}.$$

При расчете напряженности поля в точке 3, расположенной вне трубы с током ($r \geq b$), контур интегрирования охватывает весь ток I , поэтому

$$H_3 = \frac{I}{2\pi r}.$$

Пример 4.12. Магнитное поле создано токами одного направления в параллельных протяженных проводах малого радиуса (рис. 4.6).

Определить напряженность магнитного поля в точке N .

Решение. Напряженность поля от каждого из проводов в точке N определяется как $H_{Ni} = \frac{I}{2\pi r_i}$,

где r_i – расстояние от оси каждого из проводников ($i = 1, 2$) до точки N . В данном примере $r_1 = r_2 = a\sqrt{2}$.

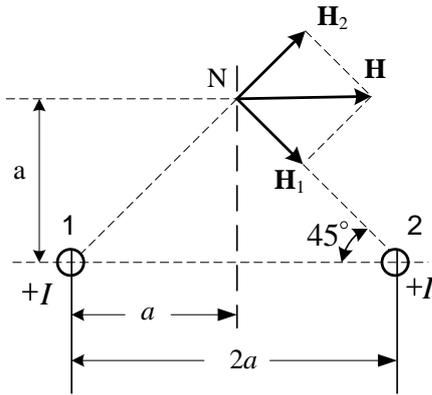


Рис. 4.6

Определив по правилу буравчика направления векторов напряженности поля от каждого из проводов (в данном примере угол между векторами равен 90°), найдем:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2.$$

Модуль напряженности:

$$H = \frac{I}{\pi a \sqrt{2}} \cos 45^\circ = \frac{I}{2\pi a}.$$

Ответ. $H = I / 2\pi a$.

Пример 4.13. Ток, протекающий по длинному вертикальному кабелю, стекает в грунт с полусферического заземлителя (4.7).

Определить напряженность поля в воздухе в точке M с координатами r_M и θ .

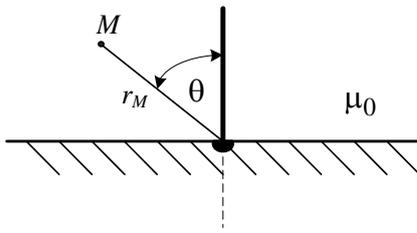


Рис. 4.7

Решение. В части пространства, занятого воздухом, ток течет только по кабелю, поэтому поле имеет осевую симметрию и может быть рассчитано по закону полного тока.

Ответ. $H_M = \frac{I_0}{2\pi r_M \sin \theta}.$

Пример 4.14. По длинному проводу, изогнутому под углом 90° , протекает постоянный ток I (рис. 4.8, а).

Определить величину тока I , если напряженность магнитного поля в точке M , лежащей в плоскости провода на расстоянии $a = 10$ см от одной из его половин, составляет величину $H = 10$ А/м.

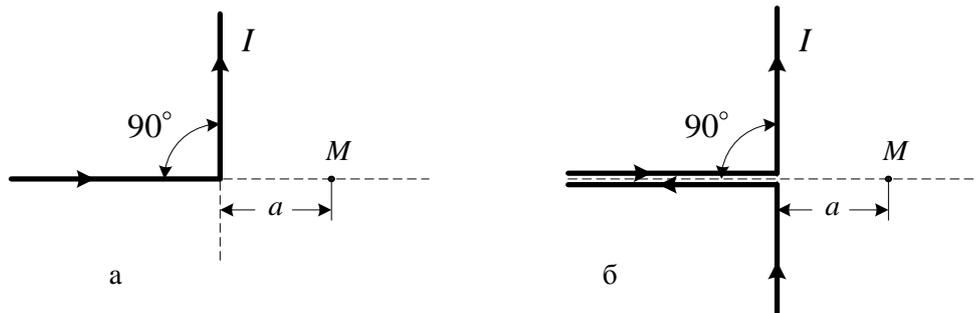


Рис. 4.8

Решение. Добавим к данному контуру симметрично по отношению к точке M точно такой же провод с током той же величины I (рис. 4.8, б). Поле таких проводов, как нетрудно видеть, эквивалентно по своему действию полю одиночного бесконечного провода с током I (противоположно направленные токи взаимно компенсируются).

От бесконечного провода в точке M напряженность магнитного поля составит величину $H'_M = \frac{I}{2\pi a}$. Поскольку оба провода в точке M создают равные напряженности (в силу симметрии), то напряженность поля от каждого из них составит величину $H_M = \frac{I}{4\pi a}$.

Отсюда найдем величину тока $I = 4\pi$ А.

Ответ. $I = 4\pi$ А.

Пример 4.15. Ток I протекает по протяженному проводу, изогнутому под прямым углом, как показано на рис. 4.9, а.

Определить напряженность магнитного поля в точке M , лежащей в плоскости провода. Местоположение точки указано на рис.

Решение. Так же, как в примере 4.14, добавим к имеющемуся проводу дополнительный таким образом, чтобы привести исходную систему к системе двух протяженных параллельных проводов, в каждом из

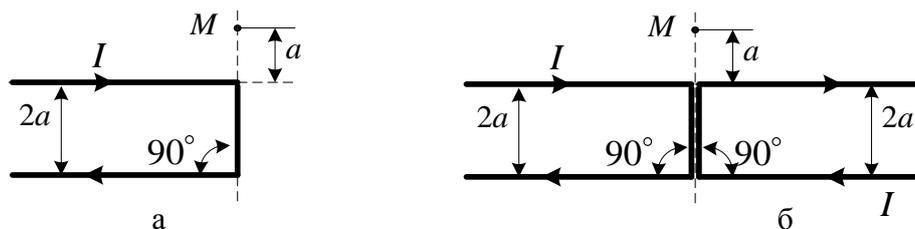


Рис. 4.9

которых в противоположном направлении протекает заданный ток I (токи вертикальных участков при этом взаимно компенсируются).

Напряженность поля в точке M системы параллельных проводов (2-х проводной линии) равна сумме напряженностей, созданных каждым из проводов

$$H'_M = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{3a} \right).$$

Исходный проводник с учетом симметрии обуславливает лишь половину от величины найденной напряженности, поэтому искомая напряженность составит величину $H_M = \frac{I}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{3a} \right)$.

4.2.4. Уравнения Лапласа и Пуассона. Закон Био-Савара. Зеркальные изображения и другие приемы.

В данном разделе приведены примеры повышенной сложности. Их решения требуют интегрирования дифференциальных уравнений (4.4), (4.5), (4.9). В некоторых примерах используются зеркальные изображения.

Пример 4.16. В медном ($\mu=1$) протяженном цилиндрическом проводнике радиуса $a=1$ см протекает ток $I = \pi$ А.

Определить векторный потенциал \mathbf{A} на оси провода, полагая, что на его поверхности он равен нулю.

Решение. Так как провод уединенный и достаточно длинный, можно считать, что векторный потенциал \mathbf{A} , как и вектор плотности тока δ , направлен параллельно оси провода. Совместив ось провода с осью z цилиндрической системы координат, будем иметь только одну составляющую векторного потенциала $\mathbf{A} = \mathbf{k}A_z$, совпадающую с направлением оси z .

Вектор напряженности поля при таком выборе координат будет иметь тоже только одну угловую составляющую $\mathbf{H} = \mathbf{1}_\alpha H_\alpha$, как и A_z , зависящую от координаты r (см. пример 4.10).

Согласно (1.42) $\text{rot } \mathbf{A} = \mu_a \mathbf{H}$. В цилиндрических координатах ротор записывается

$$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{1}_r & r\mathbf{1}_\alpha & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\alpha & A_z \end{vmatrix}.$$

Раскрывая ротор и учитывая, что A_r и A_α равны нулю, получаем

$$\frac{dA_z}{dr} = -\mu_a H_\alpha \quad \text{или} \quad A_z = -\int \mu_a H_\alpha dr.$$

Напряженность поля внутри цилиндра, найденная в примере 4.10, равна $H_{\text{вн}} = H_\alpha = \frac{Ir}{2\pi a^2}$. Подставляя в подынтегральное выражение и интегрируя, находим

$$A_z = -\frac{\mu_a Ir^2}{4\pi a^2} + C,$$

где C - постоянная интегрирования.

Так как на поверхности проводника ($r=R$) $\mathbf{A}=0$, то $C = \frac{\mu_a I}{4\pi}$.

Векторный потенциал на оси цилиндра ($r=0$): $A_0 = \frac{\mu_a I}{4\pi}$.

Численно $A_0 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \pi}{4\pi} = \pi 10^{-7}$ Вб/м.

Замечания. 1. Аналогичным образом векторный потенциал находится для внешней области (вне сечения провода). В этом случае интегрирование приведет к выражению:

$$A_z = -\frac{\mu_a I}{2\pi} \ln r + C.$$

2. Векторный потенциал можно определить из уравнения Пуассона (4.5), которое в цилиндрической системе координат записывается

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} = -\mu_a \delta.$$

С учетом симметрии магнитного поля для единственной составляющей $\mathbf{A} = \mathbf{k} A_z$ будем иметь:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = -\mu_a \delta_z.$$

Интегрирование по r приведет к следующим соотношениям:

для области $0 \leq r \leq a$ $A_{\text{вн}} = -\mu_a \delta_z r^2 / 4 + C_1 \ln r + C_2$;

для области $r \leq R$ $A_{\text{вн}} = C_3 \ln r + C_4$,

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий.

Из условия $A \neq \infty$ при $r=0$ следует $C_1=0$; из условия $A=0$ при $r=a$ находим $C_2 = \mu_a I / 4\pi$ и $C_4 = -C_3 \ln a$.

Из условия равенства касательных составляющих вектора магнитной напряженности следует

$$C_3 = -\frac{\mu_a I}{2\pi} \ln r.$$

После подстановки найденных постоянных получаем:

$$A_{\text{вн}} = -\frac{\mu_a I}{4\pi} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right); \quad A_{\text{вн}} = \frac{\mu_a I}{2\pi} \ln \frac{a}{r}.$$

Пример 4.17. Определить плотность тока в протяженном трубчатом медном проводнике известных радиусов a и b (рис. 4.5), полагая известными значения векторного потенциала на его внутренней ($\mathbf{A}_{\text{вн}}$) и наружной ($\mathbf{A}_{\text{вн}}$) поверхностях. Ток в проводнике распределен равномерно.

Решение. Интегрируя уравнения Лапласа (область $0 \leq r \leq a$) и Пуассона (область $a \leq r \leq b$) для векторного потенциала в цилиндрических координатах (пример 4.11) получаем:

$$\text{для внутренней области } 0 \leq r \leq a \quad A_1 = C_1 \ln r + C_2;$$

$$\text{для внешней области } a \leq r \leq b \quad A_2 = -\frac{\mu_0 \delta r^2}{4} + C_3 \ln r + C_4.$$

Полагая плотность тока известной, найдем постоянные интегрирования из следующих граничных условий:

$$A_1 \neq \infty \quad \text{при } r=0, \text{ откуда следует } C_1=0;$$

$$A_1 = A_{\text{вн}} \quad \text{при } r=a, \text{ что дает } C_2=A_{\text{вн}};$$

$$H_{1\tau} = H_{2\tau} \quad \text{при } r=a, \text{ откуда найдем } C_3 = \frac{\mu_0 \delta a^2}{2}.$$

$$A_1 = A_2 = A_{\text{вн}} \quad \text{при } r=a, \text{ что дает } C_4 = A_{\text{вн}} + \frac{\mu_0 \delta a^2}{4} (1 - 2 \ln a).$$

$$\text{Таким образом: } A_1 = A_{\text{вн}}; \quad A_2 = -\frac{\mu_0 \delta}{4} \left[r^2 - a^2 + 2a \ln \frac{a}{r} \right].$$

Из условия $A_2 = A_{\text{вн}}$ при $r=b$ определяем искомую плотность тока:

$$\delta = \frac{4(A_{\text{вн}} - A_{\text{вн}})}{\mu_0 (b^2 - a^2 + 2a^2 \ln \frac{b}{a})}.$$

Пример 4.18. Постоянный ток I подводится кабелем к полусферическому заземлителю (рис. 4.10) и равномерно растекается в однородном грунте с удельной проводимостью γ .

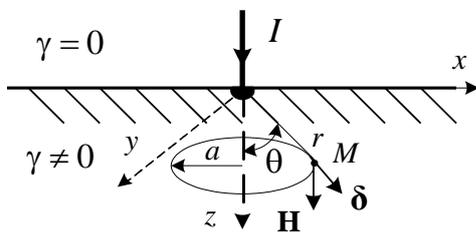


Рис. 4.10

Определить напряженность магнитного поля в грунте.

Решение. Стационарное магнитное поле в изотропной однородной среде удовлетворяет первому уравнению Максвелла (1.39). Ток с заземлителя растекается в грунте равномерно, поэтому плотность тока имеет только одну радиальную составляющую $\delta = \delta_r$, а магнитное поле вектора \mathbf{H} симметрично относительно оси z , т.е. не зависит от угловой координаты α сферической системы координат ($\mathbf{H} = \mathbf{1}_\alpha H_\alpha$). С учетом сказанного уравнение (1.39) записывается

$$\text{rot}_r H_\alpha = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} r H_\alpha \sin \theta \right] = \delta_r.$$

Плотность тока в грунте при равномерном растекании тока (второй электрод можно считать бесконечно удаленным) определяется как

$$\delta_r = \frac{I}{2\pi r^2},$$

где r – расстояние от центра заземлителя до рассматриваемой точки.

Интегрируя по угловой координате θ , найдем

$$H_\alpha r \sin \theta = -\frac{I \cos \theta}{2\pi} + C.$$

Постоянную интегрирования найдем из граничного условия $H_\alpha = 0$, если $\theta = 0$ (на оси симметрии z напряженность H равна нулю):

$$C = \frac{I}{2\pi}.$$

С учетом постоянной интегрирования для любой точки $M(r, \theta)$ можно записать:

$$H_{(r, \theta)} = H_\alpha = \frac{I}{2\pi r \sin \theta} (1 - \cos \theta).$$

Замечание. В силу симметрии напряженность поля может быть найдена по закону полного тока. Для этого нужно рассмотреть кольцевой контур интегрирования радиусом $a = r \sin \theta$, параллельный границе раздела сред ($z = \text{const}$). В силу равномерного растекания тока в контур интегрирования попадет ток, равный $\frac{I}{2\pi} \omega$, где ω – пространственный (телесный) угол при вершине конуса, основанием которого является рассматриваемый контур (вершина конуса находится в центре координатной системы $r = \theta = z = 0$)

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \oint H_\alpha dl = H_\alpha 2\pi a = \frac{I \omega}{2\pi}.$$

Телесный угол ω можно определить через плоский угол θ по известному соотношению из элементарной геометрии: $\omega = 2\pi(1 - \cos \theta)$.

Тогда:

$$H_\alpha 2\pi a = \frac{I \cdot 2\pi(1 - \cos \theta)}{2\pi}.$$

или

$$H_\alpha = \frac{I(1 - \cos \theta)}{2\pi a} = \frac{I(1 - \cos \theta)}{2\pi r \sin \theta}.$$

Полученный результат совпадает с предыдущим.

Пример 4.19. Вдоль тонкой протяженной ленты шириной $2h = 0,2$ м протекает равномерно распределенный ток $I = 40$ А.

Определить величину магнитной индукции B в воздухе в точке, удаленной на расстояние $x = 0,05$ м от оси ленты (рис. 4.11).

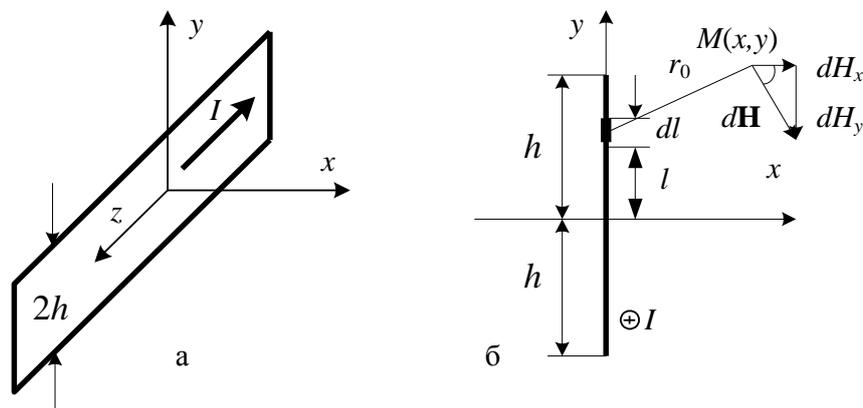


Рис. 4.11

Решение. Магнитное поле, созданное током ленты, является плоскопараллельным, зависящим только от координат x и y , поэтому решение следует выполнить в декартовой системе координат $B = f(x, y)$.

Выделим вдоль всей длины ленты элемент шириной dl , удаленный от оси x на расстояние l . (рис. 4.11, б). Ток выделенного элемента равен

$$dI = \frac{I}{2h} dl.$$

В произвольной точке $M(x, y)$ по закону полного тока элемент тока dI создает напряженность поля

$$dH = \frac{Idl}{2h2\pi\sqrt{(y-l)^2 + x^2}},$$

направленную перпендикулярно отрезку $r_0 = \sqrt{x^2 + (y-l)^2}$.

Проекции вектора \mathbf{H} на координатные оси соответственно равны:

$$dH_x = dH \cos \alpha = dH \frac{y-l}{\sqrt{(y-l)^2 + x^2}};$$

$$dH_y = -dH \frac{x}{\sqrt{(y-l)^2 + x^2}}.$$

Интегрирование dH_x и dH_y по ширине всей ленты определяет проекции искомой напряженности. Полная напряженность поля определяется по формуле

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2}.$$

Результат интегрирования dH_x и dH_y для произвольной точки M в буквенном выражении получается довольно громоздкими, поэтому рассмотрим частный случай, когда точка M лежит на оси x .

Тогда, из условия симметрии будем иметь $H_x = 0$ и $H = H_y$.

Интегрирование dH_y приводит к результату:

$$H = H_y = \frac{I}{2\pi h} \operatorname{arctg} \frac{h}{x},$$

где x - удаление точки от оси ленты.

Найденная напряженность позволяет найти индукцию $B = \mu_0 H_y$.

Численно для рассматриваемого примера

$$B = B_y = \frac{40 \cdot 4\pi \cdot 10^7}{2\pi \cdot 0,1} \operatorname{arctg} \frac{0,1}{0,05} = 8 \cdot 10^{-5} \operatorname{arctg} 20 = 8,9 \cdot 10^{-5} \text{ Тл.}$$

Замечание. Величина $\operatorname{arctg} \frac{h}{x}$ берется в радианах (в долях π).

Пример 4.20. Протяженный провод с током $I = 1$ кА, огибает препятствие под углом в 90° (рис 4.12, а).

Определить магнитную индукцию в точке M , лежащей в плоскости провода.

Решение. Воспользуемся законом Био-Савара и найдем величину магнитной индукции, вызванную током каждой из половин провода в отдельности. Решение проводим в декартовой системе координат с расположением осей по рис. 4.12, б.

Выделенный на горизонтально расположенной части провода элемент тока $I dx$ в точке $M(x, y)$ создает индукцию

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_a I [d\mathbf{x} \cdot \mathbf{1}_r]}{4\pi r^2},$$

где $r = \sqrt{x^2 + b^2}$.

От тока всей расположенной на оси x части провода магнитная индукция составит величину

$$B' = \frac{\mu_a I}{4\pi} \int_{-\infty}^a \frac{\sin \alpha}{x^2 + b^2} dx,$$

где $b = \rho \sin \beta$; $a = \rho \cos \beta$.

Поскольку $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{x^2 + b^2}}$, то $B' = \frac{\mu_a I}{4\pi} b \int_{-\infty}^a \frac{dx}{[x^2 + b^2]^{3/2}}$.

Интегрируя по x , находим

$$B' = \frac{\mu_a I}{4\pi} b \frac{x}{b^2 [x^2 + b^2]^{1/2}} \Big|_{-\infty}^{\alpha}.$$

После подстановки пределов интегрирования получаем:

$$B' = \frac{\mu_a I}{4\pi} \frac{b}{b^2} \left[\frac{\alpha}{(a^2 + b^2)^{1/2}} - \frac{-\infty}{\sqrt{\infty^2 + b^2}} \right].$$

Раскрывая неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$ и переходя к переменным ρ и β , получим:

$$B' = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \left[1 + \frac{\rho \cos \beta}{\rho \cdot (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta)^{1/2}} \right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} (1 + \cos \beta).$$

Составляющую индукции от второй (вертикально расположенной) половины провода можно записать по аналогии

$$B'' = \frac{\mu_0 I \left[1 + \cos(90^\circ - \beta) \right]}{4\pi \rho \sin(90^\circ - \beta)} \quad \text{или} \quad B'' = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \left(\frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta} \right).$$

Поскольку направления составляющих векторов B' и B'' совпадают, величину индукции в точке M определяем как арифметическую сумму составляющих $B = B' + B''$:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \left[\frac{1 + \cos \beta}{\sin \beta} + \frac{1 + \sin \beta}{\cos \beta} \right].$$

Пример 4.21. Ток, протекающий по тонкому проволочному кольцу радиусом $a=8$ см, создает в точке M , расположенной на оси кольца и удаленной от его центра на расстояние b см, напряженность магнитного поля $H=8$ А/м (рис. 4.12).

Определить величину тока.

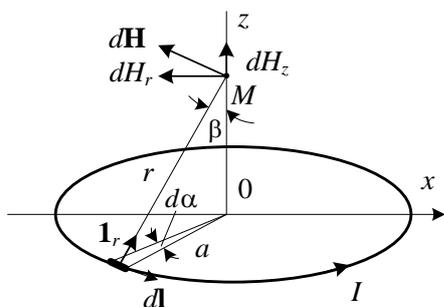


Рис. 4.12

Решение. Будем считать, что ток I задан, а напряженность поля следует найти.

Выделим на кольце элемент тока $I d\mathbf{l}$ и воспользуемся законом Био-Савара, определяющим искомую напряженность поля.

От элемента тока $I d\mathbf{l}$ вектор напряженности магнитного поля будет лежать в плоскости, проходящей через эту

ось, и составлять величину
$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi r^2} [d\mathbf{l} \cdot \mathbf{1}_r].$$

Учитывая угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{1}_r$ (90°), получаем:

$$dH = \frac{I}{4\pi r^2} dl.$$

При нахождении составляющих вектора напряженности от всего контура учтем, что в силу симметрии сумма радиальных составляющих равна нулю, а аксиальные (совпадающие с направлением оси z) суммируются арифметически:

$$H = H_z = \frac{I \sin \beta}{4\pi r^2} \oint_l dl = \frac{Ia^2}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} d\alpha,$$

где $\sin \beta = a/r$.

После интегрирования получаем

$$H = \frac{Ia^2}{2r^3} = \frac{Ia^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Отсюда находим ток кольца, равный $I = 2Hr^3/a^2$, что численно составит величину $I = 2,5$ А.

Пример 4.22. Тонкий протяженный провод с током I расположен в воздухе внутри стального двугранного угла ($\mu_{ст} \gg 1$) параллельно его граням (рис. 4.13). Положение провода относительно граней задано (a).

Определить напряженность магнитного поля в точке М, лежащей на грани угла при минимальном удалении от провода.

Решение. Так как магнитная проницаемость стали много больше магнитной проницаемости воздуха, поверхность стали можно считать эквипотенциальной для скалярного потенциала. В таком случае расчет магнитного поля в воздухе (аналогично расчету электростатического поля) выполняется методом зеркальных изображений.

По методу зеркальных изображений исходную систему следует заменить системой 4-х проводов с токами, равной величины и одного направления, как показано на рис. 4.13, б и в. Дальнейший расчет выполняется методом наложения:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3 + \mathbf{H}_4.$$

Модуль вектора напряженности магнитного поля одиночного провода определяется по формуле (4.20), а его направление по правилу буравчика (рис. 4.13, в). Как видно на рис. векторы \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 взаимно противоположны и компенсируют действия друг друга.

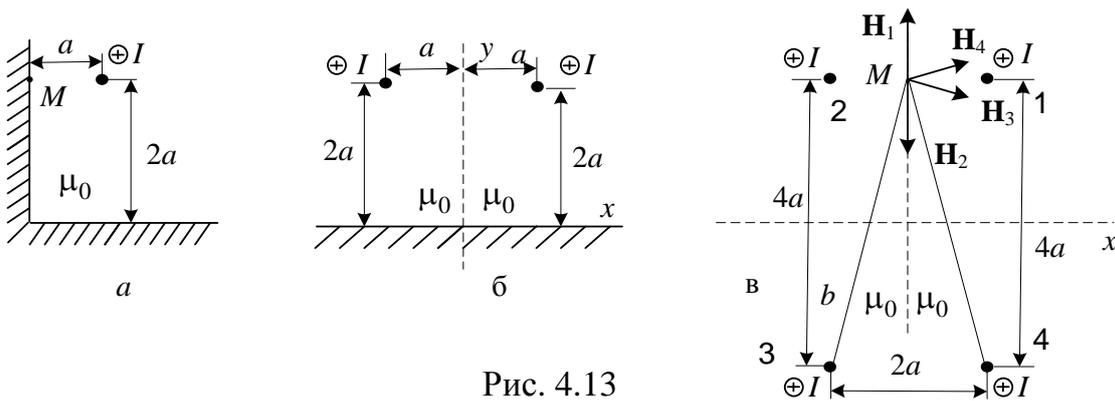


Рис. 4.13

Составляющие напряженности поля от изображений токов 3 и 4 равны друг другу

$$H_{3,4} = \frac{I}{2\pi\sqrt{a^2 + (4a)^2}} = \frac{I}{2\pi a\sqrt{17}},$$

а их сумма имеет только одну составляющую, совпадающую с направлением оси x :

$$H = 2H_{3,4} \cos \alpha = \frac{2I}{2\pi a\sqrt{17}} \frac{4a}{\sqrt{a^2 + (4a)^2}} = \frac{4I}{17\pi a}.$$

4.2.5. Энергия и силы в магнитном поле. Индуктивность

При решении задач данного раздела используются соотношения (4.13) – (4.19), а также известные из курса физики взаимосвязи силы с током и энергией

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]; \quad \mathbf{F} = -\text{grad}W_M. \quad (4.21)$$

Пример 4.23. Определить внутреннюю индуктивность единицы длины протяженного стального цилиндра известного радиуса a (рис. 4.14). Абсолютная магнитная проницаемость цилиндра - μ_a .

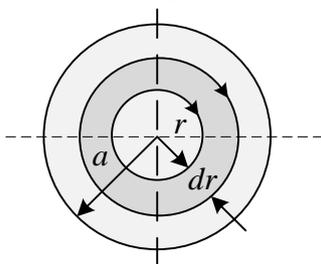


Рис. 4.14

Решение. Воспользуемся соотношением (4.15) и определим внутреннее потокосцепление, создаваемое любым током I при его равномерном распределении по сечению проводника. Для этого выделим в сечении проводника элементарную трубку потока шириной dr на удалении r от его оси.

Поток $d\Phi$, проходящий сквозь сечение такой кольцевой трубки,

будет равен

$$d\Phi = BdS = \frac{\mu_a I'}{2\pi r} dS,$$

где I' – ток, приходящийся на часть провода с сечением радиуса r . Его величина пропорциональна соответствующему сечению $I' = I \frac{r^2}{a^2}$.

Сечение трубки потока единичной длины $dS = dr \cdot 1$, следовательно,

$$d\Phi = \mu_a \frac{Ir}{2\pi a^2} dr.$$

Элементарный поток связан лишь с частью общего тока, поэтому элементарное потокосцепление

$$d\Psi = d\Phi \frac{I'}{I} \quad \text{или} \quad d\Psi = \frac{\mu_a I r^3}{2\pi a^4} dr$$

Полное внутреннее потокосцепление:

$$\Psi = \int d\Psi = \frac{\mu_a I}{2\pi a^4} \int_0^a r^3 dr.$$

После интегрирования получаем

$$\Psi = \frac{\mu_a I}{8\pi}, \quad \text{откуда находим} \quad L_{\text{вн}} = \frac{\mu_a}{8\pi}.$$

Таким образом, внутренняя индуктивность на единицу длины цилиндрического проводника при равномерном распределении тока по его сечению не зависит от радиуса проводника.

Пример 4.24. Определить энергию магнитного поля, сосредоточенную внутри единицы длины цилиндрического проводника радиусом a с током I , равномерно распределенным по его сечению. Магнитная проницаемость проводника μ_a .

Решение. Согласно (4.16) энергия, сосредоточенная внутри проводника

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2} LI^2, \quad \text{где} \quad L = L_{\text{вн}} = \frac{\mu_a}{8\pi}.$$

Таким образом, энергия магнитного поля, сосредоточенная внутри единицы длины цилиндрического проводника $W_{\text{м}} = \frac{\mu_a I^2}{16\pi}$.

Достаточно просто определить энергию и по уравнению (4.13).

В цилиндрических координатах элементарный объем равен

$$dV = r dr d\alpha dl.$$

Внутри проводника напряженность поля в любой точке, удаленной от оси на расстояние r найдена в примере 4.10 и равна

$$H = \frac{Ir}{2\pi a^2}.$$

Следовательно, энергия, содержащаяся в элементарном объеме dV

$$dW_M = \frac{\mu_a H^2}{2} dV = \frac{\mu_a I^2 r^3}{8\pi^2 a^4} dr d\alpha dl.$$

Интегрируя, получаем прежний результат

$$W_M = \frac{\mu_a I^2}{8\pi^2 a^4} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^l r^3 dr d\alpha dl = \frac{\mu_a I^2}{16\pi}.$$

Замечание. Внутреннюю индуктивность в примере 4.21 проще было найти, определив предварительно энергию магнитного поля, как показано в примере 4.22.

Пример 4.25. Двухпроводная линия с расстоянием между проводами d и радиусом проводов a расположена в воздухе (рис. 4.15).

Определить внешнюю индуктивность линии на единицу длины.

Решение. Внешнюю индуктивность найдем по соотношению (4.15), где учитывается магнитный поток, проходящий между проводами линии без учета потока, пронизывающего сами провода

$$L_{\text{вн}} = \Phi_{\text{вн}} / I.$$

Согласно (4.8) поток можно найти как интеграл от скалярного произведения $\mathbf{B}d\mathbf{S}$ по площади S , заключенной между проводами

$$\Phi_{\text{вн}} = \oint_S \mathbf{B}d\mathbf{S}.$$

В силу симметрии поток от каждого из проводов одинаковый, поэтому можно найти поток от одного из проводов $\Phi'_{\text{вн}}$, а полученный результат удвоить.

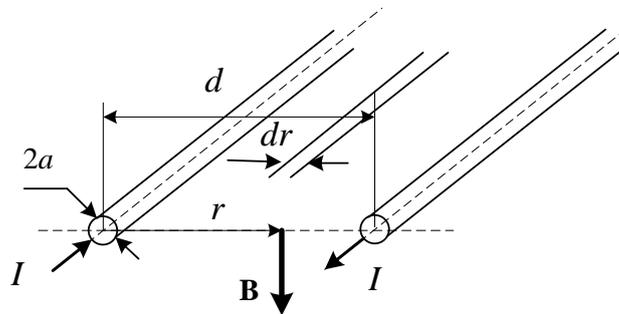


Рис. 4.15

Для отыскания потока выберем между проводами площадку единичной длины $d\mathbf{S}$, как показано на рис. 4.15 и учтем, что индукция, создаваемая одиночным проводом \mathbf{B}' , равна $\mu_0 I / 2\pi r$.

Тогда
$$\Phi'_{\text{вш}} = \oint_S \mathbf{B}' d\mathbf{S} = \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I dr}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{d-a}{a}.$$

Удвоив полученный результат, найдем внешнюю индуктивность на единицу длины

$$L_{\text{вш}} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}.$$

Пример 4.26. Определить взаимную индуктивность двух концентрических проволочных колец радиусами R_1 и R_2 , лежащих в одной плоскости (рис. 4.16). Магнитное поле внутри малого кольца можно считать однородным. Кольца расположены в воздухе.

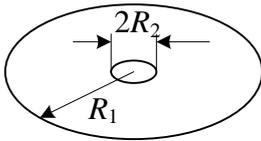


Рис. 4.16

Решение. Вычислим взаимный поток Φ_{12} , создаваемый кольцом большего радиуса R_1 , пронизывающий плоскость малого кольца. При сделанном допущении однородности поля в пределах малого кольца

$$\Phi_{12} = B_1 S_2,$$

где $S_2 = \pi R_2^2$ – площадь малого кольца,

B_1 – магнитная индукция, созданная током большого кольца в центре кольца. В примере 4.21 напряженность поля в центре кольца найдена, поэтому можно записать

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2R_1} \quad \text{и} \quad \Phi_{12} = \mu_0 I_1 \frac{\pi R_2^2}{2R_1}.$$

Взаимная индуктивность колец, таким образом, будет равна

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \mu_0 \frac{\pi R_2^2}{2R_1}.$$

Пример 4.27. Определить взаимную индуктивность между кольцевой катушкой, намотанной на немагнитный сердечник с внутренним и внешним радиусами a и b , соответственно, и проводом, проходящим по оси катушки (рис. 4.17). Высота катушки h , число витков w .

Решение. Допустим, что магнитное поле создано током I , проходящим по линейному проводу и определим магнитный поток, пронизывающий поперечное сечение кольцевой катушки. Совместим ось z цилиндрической системы координат с осью провода. Тогда, в силу симметрии, вектор магнитной индукции будет иметь только одну составляющую $\mathbf{B} = \mathbf{1}_\alpha B_\alpha$, зависящую от координаты r

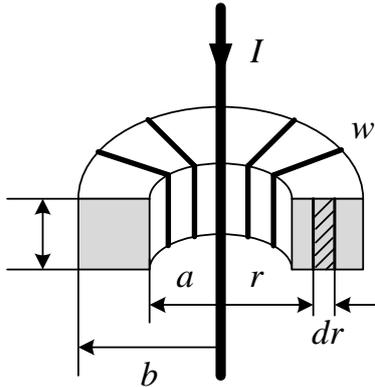


Рис. 4.17

$$B = B_\alpha = \mu_0 H_\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Элементарный поток, пронизывающий площадку dS , выделенную в сечении катушки, равен

$$d\Phi = BdS,$$

где $dS = hdr$.

Интегрируя по всему сечению катушки, получаем искомый магнитный поток:

$$\Phi = \frac{\mu_0 h I}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 h I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Потокосцепление со всеми витками катушки $\Psi = w\Phi = \frac{\mu_0 h w I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$

определяет взаимную индуктивность провода и катушки

$$M = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 w h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Пример 4.28. Определить взаимную индуктивность на единицу длины двух двухпроводных воздушных линий, расположенных по рис. 4.18. Влиянием земли и смещением магнитных осей проводов можно пренебречь.

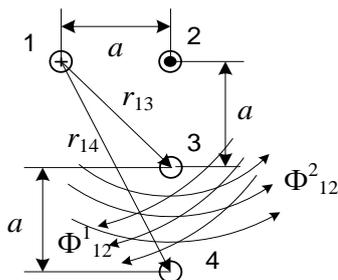


Рис. 4.18

Решение. Взаимная индуктивность между линиями определяется как

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\Psi_{21}}{I_2},$$

где $\Psi_{12} = \Phi_{12}$ – потокосцепление (поток) второй линии, создаваемое током первой линии I_1 ; $\Psi_{21} = \Phi_{21}$ – потокосцепление, создаваемое током второй линии I_2 .

Определим Φ_{12} методом наложения: $\Phi_{12} = \Phi_{12}^2 - \Phi_{12}^1$,

где Φ_{12}^1 и Φ_{12}^2 – потоки, создаваемые током I_1 в прямом (1) и обратном (2) проводах первой линии. Их направления определяются правилом буравчика (показаны на рис. 4.18).

Магнитный поток Φ_{12}^1 согласно рис. 4.18 определится:

$$\Phi_{12}^1 = \int_{r_{13}}^{r_{14}} \int_0^1 B(r) dr dl = \int_{r_{13}}^{r_{14}} B(r) dr.$$

Закон изменения магнитной индукции линейного тока от расстояния r до рассматриваемой точки известен $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (из предыдущих примеров), поэтому магнитный поток будет равен:

$$\Phi_{12}^1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{r_{13}}^{r_{14}} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln \frac{r_{14}}{r_{13}}.$$

Аналогично определяем магнитный поток Φ_{12}^2 , созданный током второго провода

$$\Phi_{12}^2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln \frac{r_{24}}{r_{23}}.$$

Магнитный поток от двух проводов запишется следующим образом:

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \ln \frac{r_{24} r_{13}}{r_{23} r_{14}}.$$

Взаимная индуктивность, таким образом, будет равна

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_{24} r_{13}}{r_{23} r_{14}}.$$

Выразив расстояния между проводами согласно рис. 4.18, найдем численное значение взаимной индуктивности на единицу длины линий

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \sqrt{1,6} \quad \text{или} \quad M = 47 \text{ мкГн/км.}$$

Пример 4.29. Внутри цилиндра из ферромагнетика ($\mu_1=10$), расположенного в воздухе, симметрично его оси расположена двухпроводная линия (рис. 4.19, а). Радиус медных проводов линии $r_0=1$ мм, радиус цилиндра $R=5$ см. Расстояния между проводами $2a=2,5$ см.

Определить индуктивность линии, пренебрегая магнитным потоком внутри проводов.

Решение. Радиусы проводов много меньше радиуса цилиндра и расстояния между проводами, поэтому поле вне проводов будет таким же, как поле линейных токов, совмещенных с геометрическими осями проводов.

Чтобы учесть влияние поверхностного тока на границе раздела сред, при расчете поля внутри ферромагнитного цилиндра введем фиктивные токи I_1 , как показано на рис. 4.19, б. При этом магнитную проницаемость среды внутри и вне цилиндра принимаем равной μ_1 . Местоположение фиктивных токов определяется согласно теореме Аполлония ($b = R^2 / a$), а их величина из граничных условий.

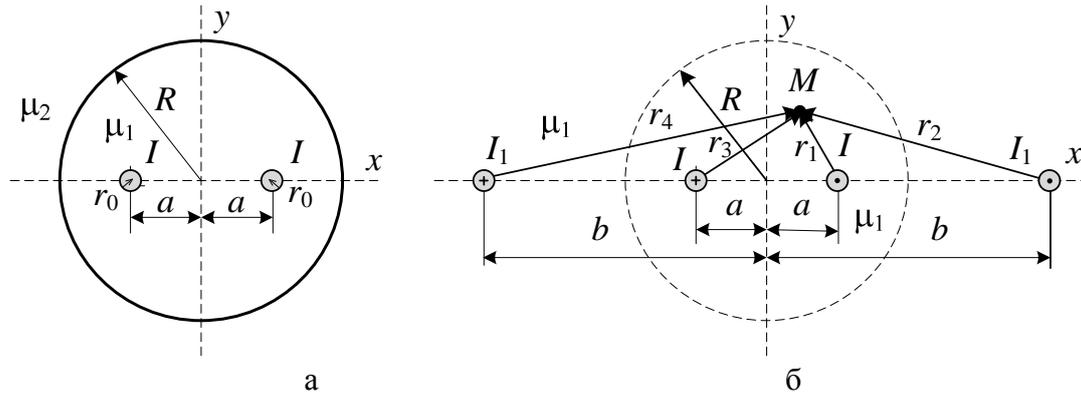


Рис. 4. 19

Чтобы граничные условия выполнялись, фиктивные токи должны быть равны

$$I_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I.$$

Индуктивность линии определим, как и в примере 4.25, по соотношению $L_{\text{ВШ}} = \Phi_{\text{ВШ}} / I$, где $\Phi_{\text{ВШ}}$ – поток, проходящий между проводами линии, без учета потока, пронизывающего сами провода. Этот поток создается двумя двухпроводными линиями, поэтому можно воспользоваться результатами расчета из примера 4.28 и на основании метода наложения записать

$$\Phi_{\text{ВШ}} = \frac{\mu_1 a I}{\pi} \left(\ln \frac{2a - r_0}{r_0} + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \ln \frac{b + a - r_0}{b - a + r_0} \right).$$

Численно индуктивность на единицу длины линии равна

$$L_{\text{ВШ}} = \frac{10 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi} \left(\ln \frac{2,5 - 0,1}{0,1} + \frac{10 - 1}{10 + 1} \ln \frac{5 + 1,25 - 0,1}{5 - 1,2 + 0,1} \right) = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ Гн/м.}$$

Пример 4.30. Определить, с какой силой F на единицу длины тонкий прямолинейный провод с током $I = 100$ А притягивается к ферромагнитной плите, находящейся на удалении $h = 10$ см от него (рис. 4.20, а). Провод расположен в воздухе параллельно плоскости плиты.

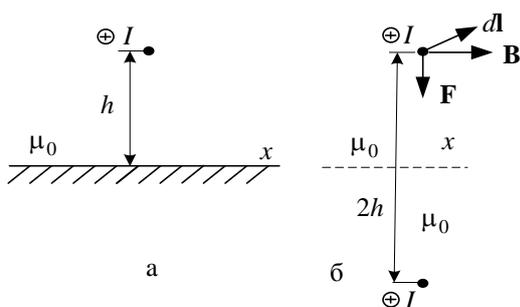


Рис. 4.20

магнитной плите, находящейся на удалении $h = 10$ см от него (рис. 4.20, а). Провод расположен в воздухе параллельно плоскости плиты.

Решение. Воспользуемся методом зеркальных изображений и вместо плиты, магнитная проницаемость которой $\mu \rightarrow \infty$, в расчет введем зеркальное изображение провода с током того же знака и той же величины (рис. 4.20, б). В поле двух

магнитной плите, находящейся на удалении $h = 10$ см от него (рис. 4.20, а). Провод расположен в воздухе параллельно плоскости плиты.

параллельных проводов с токами одного направления действующую силу определим по уравнению (4.21).

Магнитная индукция, создаваемая одним из проводов в окрестности другого и равная $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi 2h}$, направлена перпендикулярно оси провода (между элементом длины и вектором индукции угол составляет 90°).

На каждый элемент длины dl провода приходится сила $dF = IB \sin(90^\circ) dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi 2h} Idl$, стремящаяся сблизить оба проводника.

На отрезок единичной длины действует сила

$$F = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi h} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100^2}{4\pi \cdot 0,1} = 10^{-2} \text{ Н.}$$

Пример 4.31. Через выключатель (рис. 4.21) проходит ток короткого замыкания $I=1$ кА.

Определить силу, действующую на траверсу выключателя АВ, если расстояние между проводами линии $d=15$ см, а ширина контактов выключателя $a=2$ см.

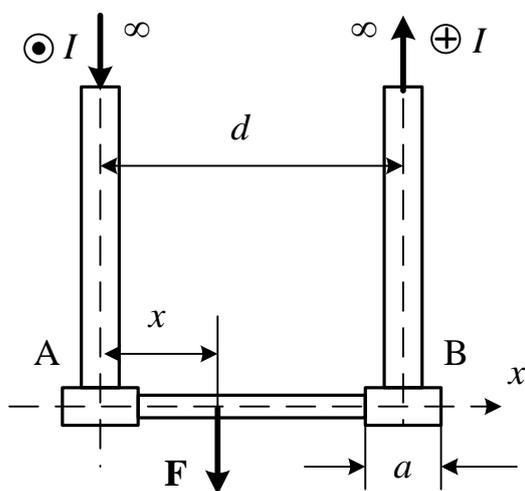


Рис. 4.21

Решение. Сила, действующая на траверсу выключателя и стремящаяся разомкнуть контакты, обусловлена полем токов проводов.

В точке x на оси траверсы от токов в проводах напряженность магнитного поля составит величину

$$H = \frac{I}{4\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right),$$

равную половине напряженности поля двухпроводной линии.

На элемент dx траверсы действует сила (4.21)

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]; \quad dF = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\frac{dx}{x} + \frac{dx}{d-x} \right) \sin(d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}).$$

Поскольку $\sin(d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}) = 1$, то сила, действующая на всю траверсу

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \int_{a/2}^{d-a/2} \left(\frac{dx}{x} + \frac{dx}{d-x} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 \ln \frac{2d-a}{a}.$$

Подставляя числовые данные, найдем: $F = 0,53 \text{ Н}$.

Пример 4.31. Трубчатый молниеотвод радиусом $a = 1,25 \text{ см}$, много меньшим его длины, с тонкими стенками был сплюснен при протекании тока молнии.

Оценить величину тока молнии.

Решение. Атмосферное давление, действующее на каждую из сторон трубки, положим равным $P_{\text{атм}}$. Чтобы трубка сплюсцилась, нужно иметь магнитное поле, силовое воздействие которого, по крайней мере, скомпенсирует атмосферное давление со стороны внутренней поверхности трубки.

Совместив ось трубки с осью z цилиндрической системы координат, нетрудно установить, что в силу симметрии вектор \mathbf{H} не зависит от угловой координаты α , а его величина определяется известным соотношением $H = I / 2\pi r$. По правилу буравчика находим, что ток молнии, протекая по трубке, создает поле, силовое воздействие которого направлено к оси трубки, т.е. сила имеет только радиальную составляющую $\mathbf{F} = -\mathbf{1}_r F_r$.

Силу магнитного поля, действующую на поверхность трубки, можно определить по формуле (4.21)

$$\mathbf{F} = -\text{grad}W_M,$$

где $W_M = \frac{1}{2} \int_V \mu_0 H^2 dV$.

Так как вектор \mathbf{H} изменяется только по координате r , элемент силы, действующий на единицу поверхности трубки, будет равен

$$dF = dF_r = \frac{dW_M}{dr} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 dS.$$

Сила, действующая на единицу поверхности:

$$F' = \frac{dF_r}{dS} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2.$$

При равенстве $F' = P_{\text{атм}}$ атмосферное давление сплюснит трубку.

Учитывая в выражении для напряженности $r = a$, находим:

$$I = 2\pi a \sqrt{\frac{2P_{\text{атм}}}{\mu_0}}.$$

Принимая атмосферное давление равным 760 мм. рт. ст, что составляет 10^5 Н/м , и подставляя числовые данные, получаем

$$I = 6,28 \cdot 1,25 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{1,256} \cdot 10^6} = 31325 \text{ А}.$$

Литература

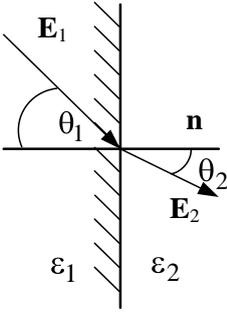
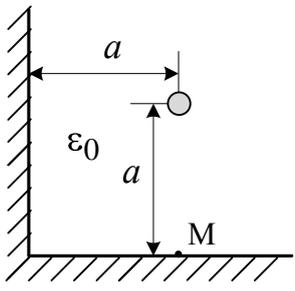
1. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. Том 3.- Спб.: Питер, 2003. - 377с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. – М.: Высш. школа, 1986. – 263 с.
3. Вольман В.И., Пименов Ю.В., Техническая электродинамика. – М.: «Связь», 1971. – 487 с.
4. Сборник программированных задач по теоретическим основам электротехники \ под редакцией Н.Г. Максимовича и И.Б. Буделько. – Львов.: «Вища школа», 1976, 504 с.
5. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники \ под редакцией П.А. Ионкина. - М.: Энергоиздат, 1982. – 768 с.
6. Теоретические основы электротехники. Том 2. Нелинейные цепи и основы теории электромагнитного поля \ под редакцией П.А. Ионкина. - М.: «Высш. школа», 1976. – 383 с.
7. Сборник задач по теоретическим основам электротехники: Учеб. пособие для энерг. и приборост. спец. вузов \ под редакцией Л.А. Бессонова. - М.:Высш. школа. 1988.-543 с.
8. Исаев Ю.Н., Купцов А.М. Электротехника. Решение задач в системе MathCAD. Учеб. пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. – 126 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Основные уравнения электромагнитного поля

Электрическое поле		Магнитное поле постоянного тока
в диэлектрике	в проводящей среде без сторонних источников	
интегральная форма		
$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q_{\text{св}};$ $\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = 0$	$\oint_S \boldsymbol{\delta} d\mathbf{S} = I;$ $\oint_S \boldsymbol{\delta} d\mathbf{S} = 0$	$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = q_{\text{св}};$ $\int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \Phi$
$\int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} = \varphi_1 - \varphi_2$	$\int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} = \varphi_1 - \varphi_2$	$\int_1^2 \mathbf{H} d\mathbf{l} = \varphi_{M1} - \varphi_{M2}$
$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$	$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$	$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = I;$ $\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0$
Дифференциальная форма		
$\text{div } \mathbf{D} = \rho_{\text{св}};$ $\text{div } \mathbf{D} = 0$	$\text{div } \boldsymbol{\delta} = 0$	$\text{div } \mathbf{B} = 0$
$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}$	$\boldsymbol{\delta} = \gamma \mathbf{E}$	$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}$
$\text{rot } \mathbf{E} = 0$	$\text{rot } \mathbf{E} = 0$	$\text{rot } \mathbf{H} = \boldsymbol{\delta};$ $\text{rot } \mathbf{H} = 0$
$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$	$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$	$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A};$ $\mathbf{H} = -\text{grad } \varphi_M$
$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}; \quad \Delta \varphi = 0$	$\Delta \varphi = 0$	$\Delta \mathbf{A} = -\mu_a \boldsymbol{\delta};$ $\Delta \varphi_M = 0$
$w_3 = \frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{2}$	$p = \boldsymbol{\delta} \mathbf{E}$	$w_M = \frac{\mathbf{H} \mathbf{B}}{2}$
Граничные условия		
$E_{\tau 1} = E_{\tau 2};$ $\varphi_1 = \varphi_2$	$E_{\tau 1} = E_{\tau 2};$ $\varphi_1 = \varphi_2$	$H_{\tau 1} = H_{\tau 2};$ $\varphi_{M1} = \varphi_{M2}$
$D_{n1} = D_{n2}$	$\delta_{n1} = \delta_{n2}$	$B_{n1} = B_{n2}$

Задачи для самостоятельной работы

ЭЛЕКТРОСТАТИКА		1
1	<p>Запишите уравнение взаимосвязи между объемной плотностью свободного заряда и потенциалом</p>	
2		<p>Найти угол θ_2 под которым линии напряженности однородного электрического поля выходят из стекла с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_1=7$ в трансформаторное масло с проницаемостью $\epsilon_2=2,5$, если угол $\theta_1=35^\circ$.</p>
3	<p>Объемный заряд распределен равномерно с плотностью ρ внутри непроводящей сферы радиусом R. Определить напряженность поля вне сферы на расстоянии r от ее центра, если среда, окружающая сферу – воздух.</p>	
4		<p>Длинный цилиндрический провод с линейной плотностью заряда τ расположен в воздухе внутри прямого двугранного угла параллельно его граням. Найти напряженность поля в точке М, расположенной на нижней грани угла под проводом.</p>
5	<p>Плоский конденсатор емкостью $C=50$ пФ со слюдяным диэлектриком, пробивная прочность которого $E_{\text{проб}}=800$ кВ/см, ($\epsilon_c=6,28$) должен быть рассчитан на рабочее напряжение 20 кВ и четырехкратный запас прочности по напряженности. Определить толщину диэлектрика и площадь пластин.</p>	

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

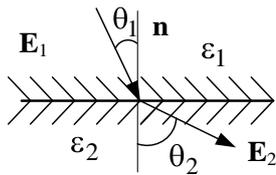
2

1

В воздухе создано электрическое поле, потенциал которого зависит только от координаты x декартовой системы координат $\varphi = 5x^2 + 12x$ В.

Найти объемную плотность свободных зарядов в этом поле.

2



Напряженность равномерного электрического поля в масле ($\epsilon_1=2,5$) равна $E_1=2000$ В/см и составляет с нормалью к поверхности фарфоровой пластины ($\epsilon_2=7,5$) угол $\theta_1=30^\circ$.

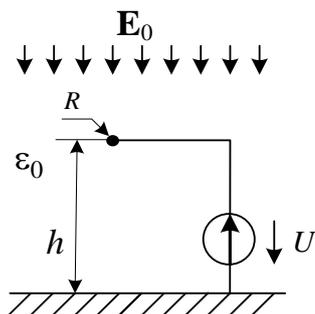
Найти напряженность поля в фарфоре.

3

Объемный заряд распределен равномерно внутри проводящей сферической оболочки радиусом R с плотностью ρ .

Определить напряженность поля E вне оболочки на расстоянии r от ее центра, если проницаемость среды ϵ_a , а оболочка изолирована.

4



Одиночный протяженный провод радиусом $R=1$ см на высоте $h=5$ м над поверхностью земли находится под напряжением $U=11$ кВ в однородном поле грозовой тучи $E_0=2$ кВ/м.

Найти линейную плотность заряда провода.

5

Определить емкость цилиндрического конденсатора с радиусами электродов $R_1=1$ см, $R_2=2$ см и длиной $l=10$ см. Диэлектрическая проницаемость диэлектрика $\epsilon=2,5$. Искажением поля у краев конденсатора пренебречь.

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

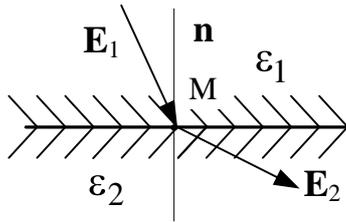
3

1

В воздухе создано плоскопараллельное электрическое поле, вектор напряженности которого в декартовой системе координат изменяется по закону $\mathbf{E} = \mathbf{i}4x^2 + \mathbf{j}3y$ кВ/м.

Найти дивергенцию вектора E в точке, принятой за начало координат ($x=0$; $y=0$).

2



В точке M со стороны диэлектрика с проницаемостью $\epsilon_1=2,5$ составляющие вектора напряженности плоскопараллельного поля $E_{1n}=80$ В/см и $E_{1\tau}=30$ В/см.

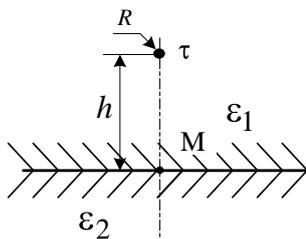
Найти напряженность поля в этой точке со стороны диэлектрика $\epsilon_2=5$.

3

Две бесконечно длинные нити, заряженные разноименно с плотностью $\tau=10$ мкКл/м, находятся в воздухе на расстоянии 1 м друг от друга.

Найти напряженность поля в точке, лежащей на линии, соединяющей оси и равноудаленной от них.

4



Над плоской границей раздела двух диэлектриков с относительными проницаемостями $\epsilon_1=1$ и $\epsilon_2=7$ на высоте $h=3$ м подвешен тонкий провод радиусом $R=1$ см с линейным зарядом $\tau=10^{-9}$ Кл/м.

Определить поверхностный плотность заряда под проводом в точке M .

5

Определить погонную емкость C_0 двухпроводной линии в среде с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon=2$, если радиус проводов $r=2$ мм, а расстояние между их осями $d=50$ см.

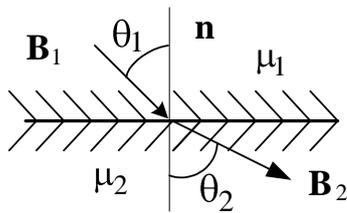
СТАЦИОНАРНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

1

1

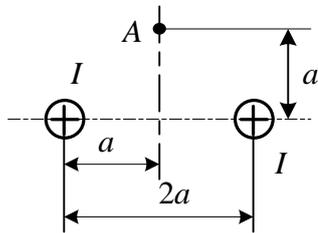
Поле вектора \mathbf{V} в декартовых координатах задано выражением: $\mathbf{V} = iC \sin y$, где C – постоянная.
 Определить векторный потенциал поля.

2



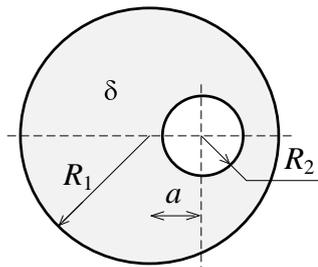
Вектор магнитной индукции \mathbf{B}_1 в воздухе ($\mu_1=1$) составляет с нормалью к границе раздела сред угол $\theta_1=45^\circ$.
 Определить угол θ_2 , под которым вектор \mathbf{B}_2 выходит в среду с магнитной проницаемостью $\mu_2=10$.

3



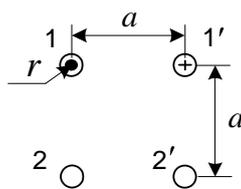
Найти величину тока двухпроводной линии, при котором напряженность магнитного поля в точке A равна $H=6,37$ А/м. Расстояние $a=10$ см.

4



Плотность тока в цилиндрическом проводе радиусом $R=3$ см, имеющим цилиндрическую полость радиусом $r=1$ см, постоянная и равна $\delta=4$ А/мм².
 Определить напряженность магнитного поля H на оси полости, если она смещена от оси цилиндра на $a=1,5$ см.

5

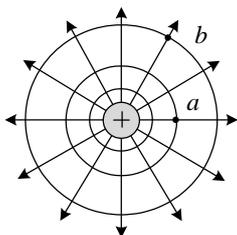


Определить взаимную индуктивность на единицу длины двух двухпроводных линий, расположенных согласно рис, полагая радиусы проводов r и расстояние a известными ($r < a$).

СТАЦИОНАРНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

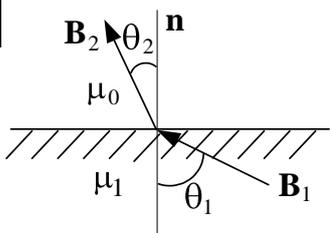
2

1



Определите минимальную разность скалярных магнитных потенциалов между точками a и b в магнитном поле линейного провода с током $I=30$ А.

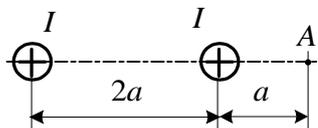
2



Линии магнитной индукции \mathbf{B}_1 в ферромагнитной среде ($\mu_1=100$) составляют угол $\theta_1=60^\circ$ по отношению к нормали.

Найти угол θ_2 , под которым линии магнитной индукции \mathbf{B}_2 выходят в воздух.

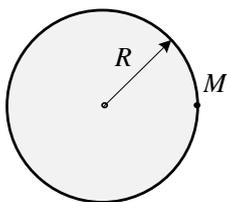
3



Магнитное поле создано токами одного направления в длинных параллельных проводах.

Определить напряженность магнитного поля в точке А.

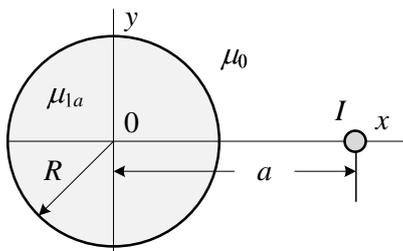
4



Плотность тока в медном проводе радиусом $R=1$ см постоянная и равна $\delta=1$ А/мм².

Определить векторный магнитный потенциал в точке M , принимая его значение на оси провода равным нулю.

5



Проводник с током $I=10$ А проходит в воздухе параллельно оси длинного цилиндра ($\mu_1=50$) радиусом $R=5$ см на расстоянии $a=10$ см от нее.

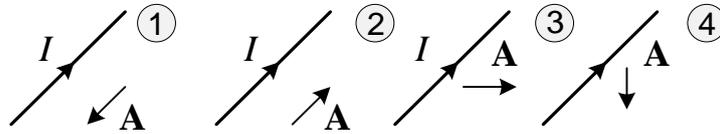
Определить силу притяжения провода к цилиндру на единицу длины провода.

СТАЦИОНАРНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

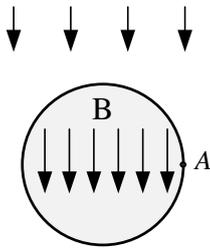
3

1

Укажите, на каком из рисунков вектор-потенциал магнитного поля показан верно.



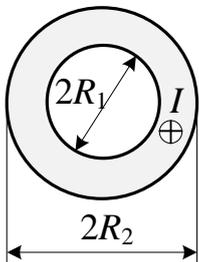
2



Внутри стального цилиндра ($\mu=20$), внесенного во внешнее магнитное поле в воздухе, установилось однородное поле с индукцией $B=2,5 \cdot 10^{-4}$ Тл.

Определить напряженность поля H в точке A со стороны воздуха.

3



Определить напряженность магнитного поля на оси полого трубчатого провода с током $I=100$ А, расположенного в воздухе.

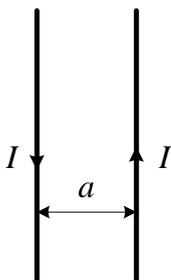
Геометрические размеры провода считать известными.

4



Определить ток, протекающий по изогнутому полукольцом (радиусом $R=10$ см) проводнику, если в центре полукольца напряженность магнитного поля составляет величину $H=15$ А/см.

5



Определить силу взаимодействия между проводами воздушной линии на единицу длины с указанным направлением токов $I=100$ А. Расстояние между проводами $a=10$ см.

Ответы к задачам для самостоятельной работы

Электростатика

1.1. $\rho = -\varepsilon_a \nabla^2 \varphi$;

1.2. $\theta_2 = 14^\circ$;

1.3. $E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$;

1.4. $E = \frac{2\tau}{\pi\varepsilon_0 a}$;

1.5. $d = 0,1$ см; $S = 9$ см.

2.2. $\rho = -10\varepsilon_0$;

2.2. $E_2 = 1,15$ кВ/см;

2.3. $E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_a r^2}$;

2.4. $\tau = 8,1 \cdot 10^{-12}$ Кл/м;

2.5. $C = 20$ пФ.

3.1. $\operatorname{div} \mathbf{E} = 3$ кВ/м²;

3.2. $E_2 = 50$ В/см;

3.3. $E = 7,2$ кВ/см;

3.4. $\sigma_{\text{связ}} = 23,9 \cdot 10^{-12}$ Кл/м²;

3.5. $C = 10 \cdot 10^{-12}$ Ф = 10 пФ.

Стационарное магнитное поле

1.1. $\mathbf{A} = -\mathbf{i} \cdot C \cos y$;

1.2. $\theta_2 = 84,3^\circ$;

1.3. $I = 4$ А;

1.4. $H = 300$ А/см;

1.5. $M = 137$ мкГн/км.

2.2. $\varphi = 5$ А;

2.2. $\theta_2 = 0,99^\circ$;

2.3. $H_A = \frac{2}{3\pi a}$;

2.4. $A_M = -3,14 \cdot 10^{-5}$ Вб/м;

2.5. $f = 3,92 \cdot 10^{-5}$ Н/м.

3.1. Рис. 2;

3.2. $H_A = 9,95$ А/м;

3.3. $H = 0$;

3.4. $I = 6$ А;

3.5. $f = 10^{-2}$ Н/м.

Предисловие	3
Основные обозначения	4
1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.....	5
1.1. Общие сведения	5
1.2. Векторы электромагнитного поля.....	6
1.2.1. Векторы электрического поля.....	6
1.2.2. Векторы магнитно поля.....	8
1.3. Классификация сред.....	10
1.4. Основные уравнения электромагнитного поля.....	11
1.4.1. Первое уравнение Максвелла	11
1.4.2. Второе уравнение Максвелла.....	13
1.4.3. Третье уравнение Максвелла.....	14
1.4.4. Четвертое уравнение Максвелла.....	15
1.4.5. Закон Ома в дифференциальной форме.....	16
1.5. Граничные условия	16
1.5.1. Граничные условия для векторов электрического поля....	17
1.5.2. Граничные условия для векторов магнитного поля.....	19
1.5.3. Условия для векторов электрического поля на границе раздела проводящих сред.....	20
1.6. Энергия электромагнитного поля	21
1.7. Векторный и скалярный потенциалы.....	23
1.8. Частные виды электромагнитных явлений.....	24
1.9. Графическое изображение электромагнитного поля.....	25
2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ.....	27
2. 1. Основные уравнения электростатики.....	27
2.1.1. Теорема единственности.....	28
2.1.2. Принцип непрерывности.....	29
2.1.3. Энергия электростатического поля.....	29
2.1.4. Емкость, потенциальные и емкостные коэффициенты. Частичные емкости.....	29
2. 2. Примеры расчета полей простой структуры.....	31
2.2.1. Вводные задачи анализа полей.....	31
2.2.2. Определение граничных условий.....	33
2. 3. Использование теоремы Гаусса	35
2. 4. Общие методы и приемы расчета полей.....	44
2.5. Емкость, сила и энергия поля	56

3. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА	63
3.1. Основные уравнения электрического поля	63
3.2. Аналогия между электростатическим полем и электрическим полем в проводящей среде.....	64
3.3. Примеры расчета стационарного электрического поля.....	65
4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА.....	75
4. 1. Основные уравнения магнитного поля.....	76
4. 1.1. <i>Граничные условия</i>	76
4. 1.2. <i>Энергия стационарного магнитного поля</i>	77
4. 1.3. <i>Индуктивность</i>	77
4.2. Примеры расчета магнитных полей.....	78
4.2.1. <i>Вводные задачи анализа магнитных полей</i>	78
4.2.2. <i>Определение граничных условий</i>	81
4.2.3. <i>Использование закона полного тока, симметрии и принципа наложения</i>	83
4.2.4. <i>Уравнения Лапласа и Пуассона. Закон Био-Савара. Зеркальные изображения и другие приемы</i>	87
4.2.5. <i>Энергия и силы в магнитном поле. Индуктивность</i>	95
Литература.....	104
Приложение 1. Основные уравнения электромагнитного поля....	105
Приложение 2. Примеры задач для самостоятельной работы.....	106
Ответы к задачам для самостоятельной работы...	112

Учебное издание

КУПЦОВ Анатолий Михайлович

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Решения типовых задач, ч3

Учебное пособие

Компьютерная верстка автора

Подписано к печати 04.04.2010 Формат 60x84/8. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. Уч.-изд. л.
Заказ . Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский поли-
технический университет

Система менеджмента качества

Томского политехнического университета сертифицирована

NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO
9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  **ТПУ**. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8 (3822) 56-35-35, www.tpu.ru

