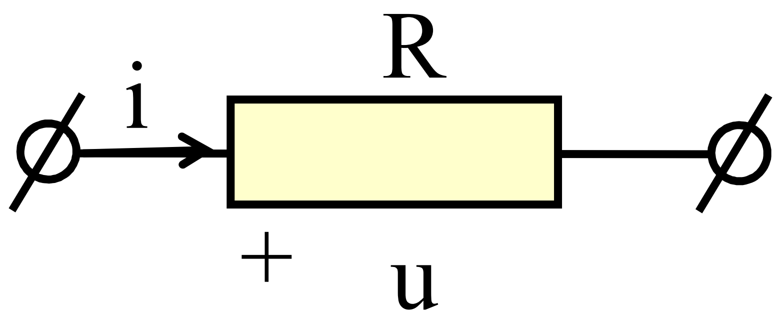
Действующие значения гармонических токов и напряжений

При токе и напряжении:

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \alpha)$$



ПО ЗАКОНУ ДЖОУЛЯ – ЛЕНЦА:

$$\mathbf{W = \int_0^T i^2 R\, dt = I^2 R T,\ Дж}$$

ПО ЗАКОНУ ОМА:

$$\mathbf{u = R\, i,\ В}$$

$$\mathbf{T = {}^{2\pi}\!/_{\omega},\ с}$$

Действующее значение тока

$$\mathbf{I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = I_m / \sqrt{2}}$$

Действующее значение напряжения

$$\mathbf{U} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt} = U_m \big/ \sqrt{2}$$

В результате

$$i = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \alpha)$$

$$u = \sqrt{2}\, U \sin(\omega t + \alpha)$$

Символический метод

Таким образом:

$$\mathbf{i = I_m \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \alpha) =}$$

$$\mathbf{= IM[\sqrt{2}\, I e^{j(\omega t + \alpha)}] = IM[\sqrt{2}\, \underline{I}\, e^{j\omega t}] \Rightarrow}$$

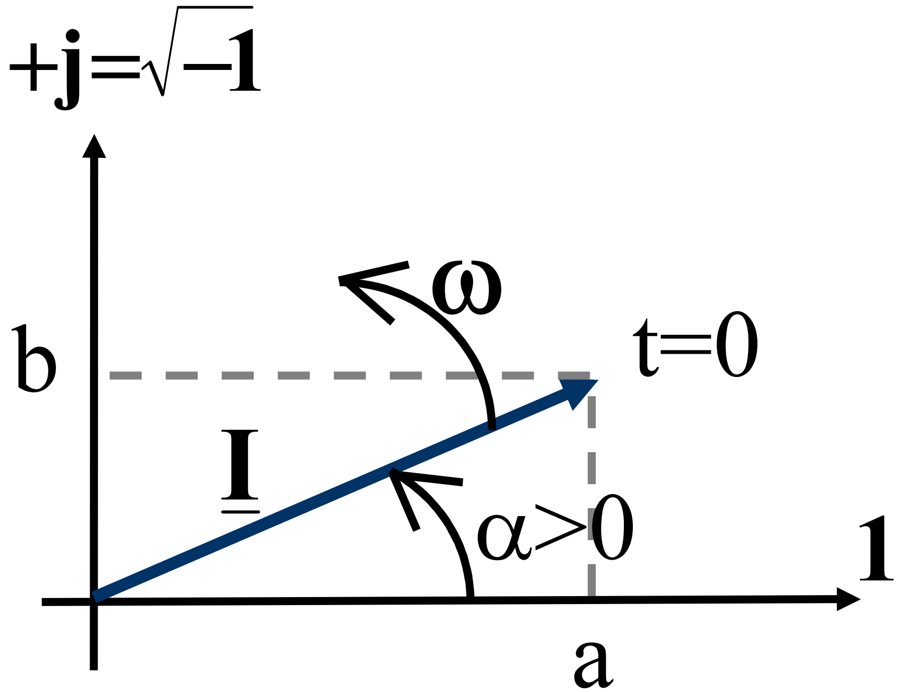
$$\mathbf{\Rightarrow \underline{I} = I\, e^{j\alpha} = I \cos\alpha + jI \sin\alpha =}$$

$$\mathbf{= a + jb}$$

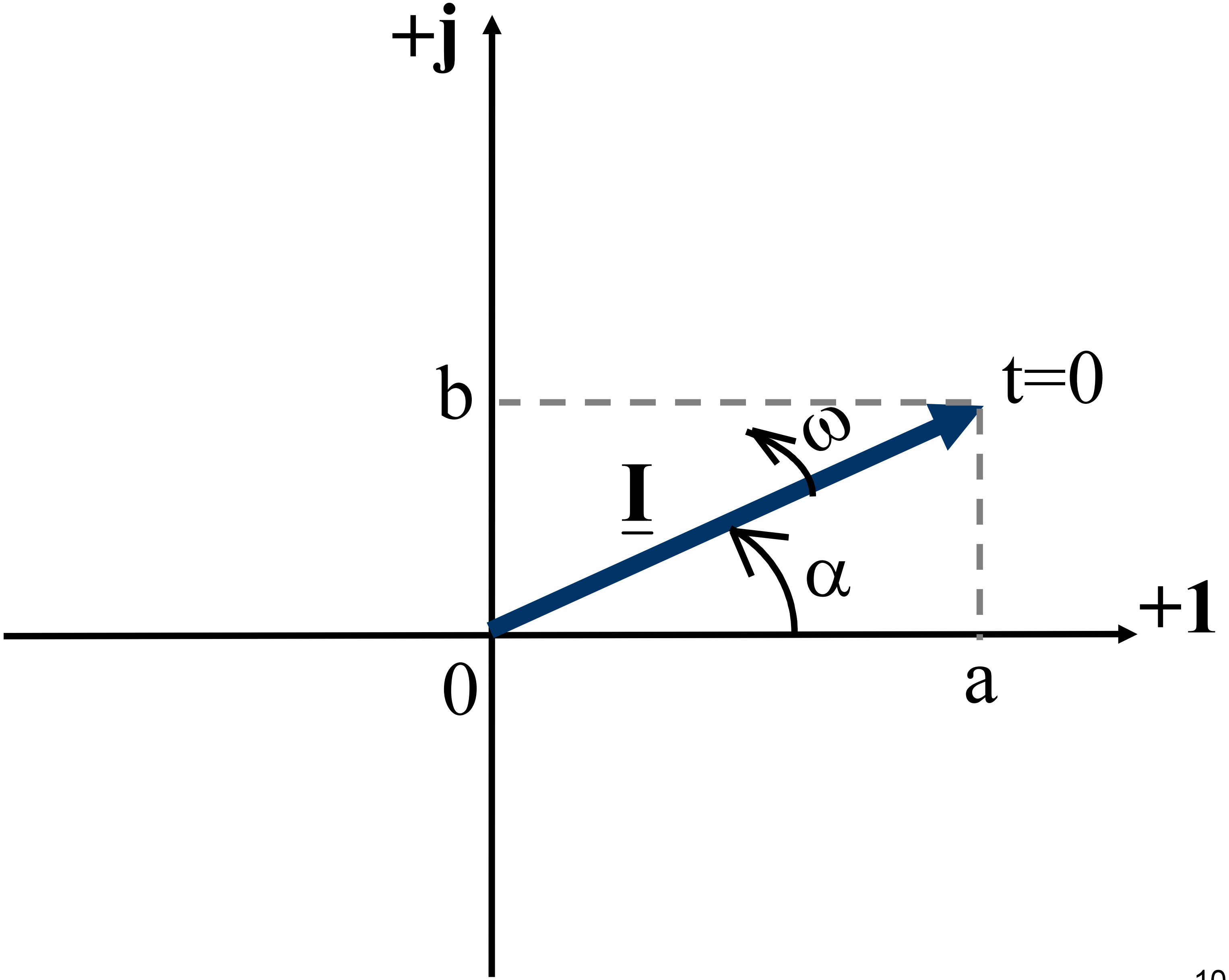
$IM[\sqrt{2}\, Ie^{j(\omega t+\alpha)}]$ – **мнимая составляющая вращающегося вектора**

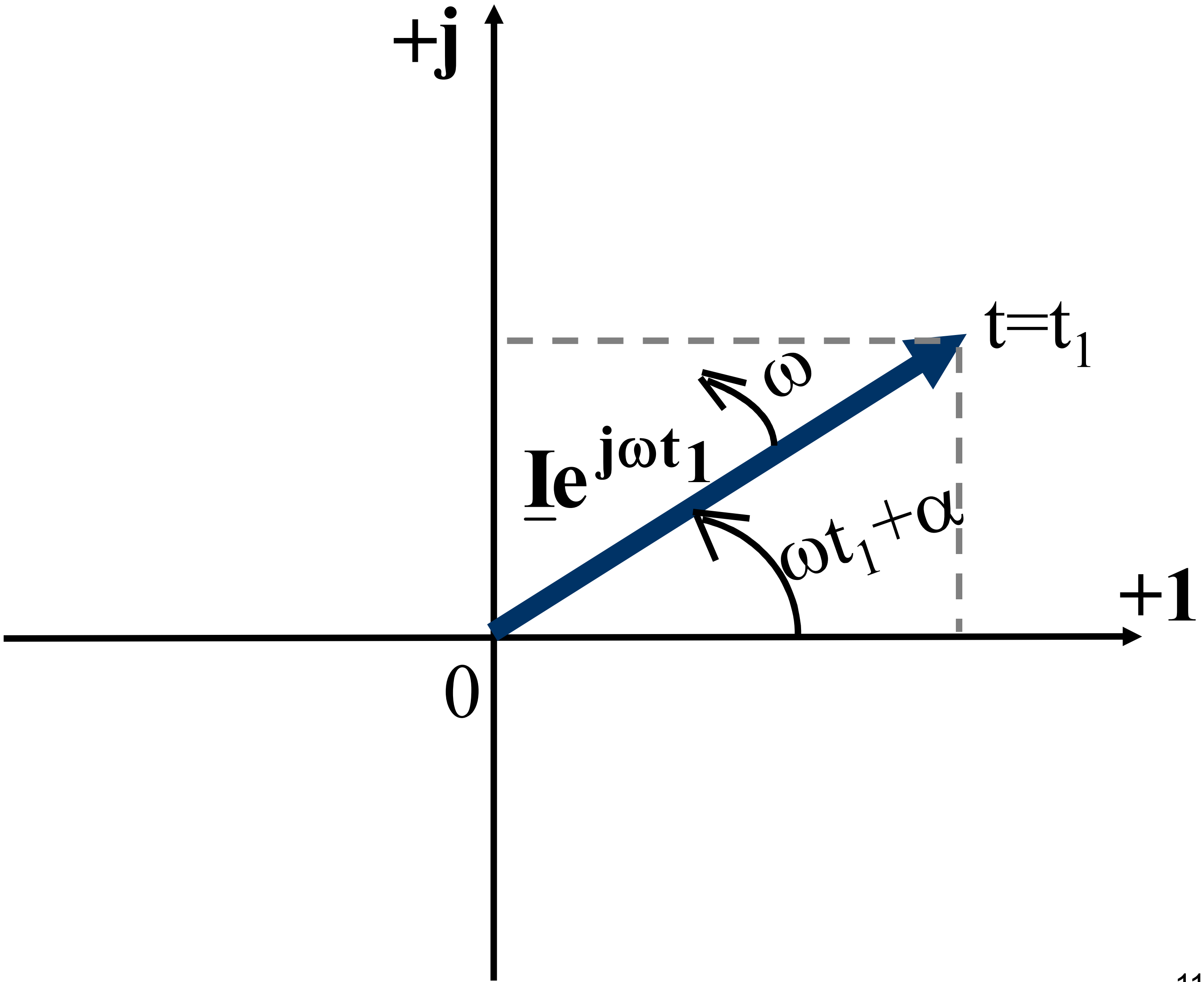
$j = \sqrt{-1}$ – **мнимая единица**

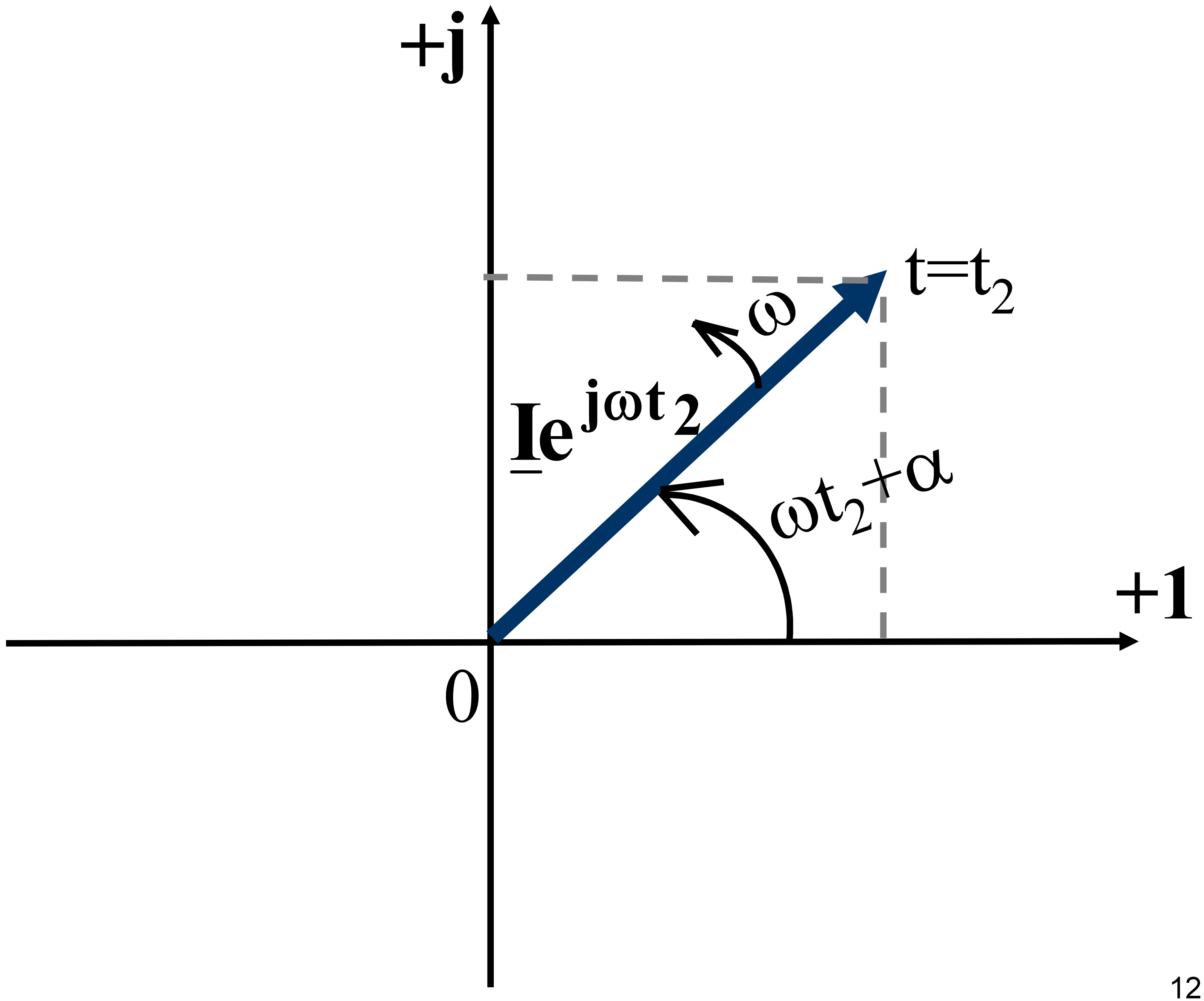
Здесь будет анимация

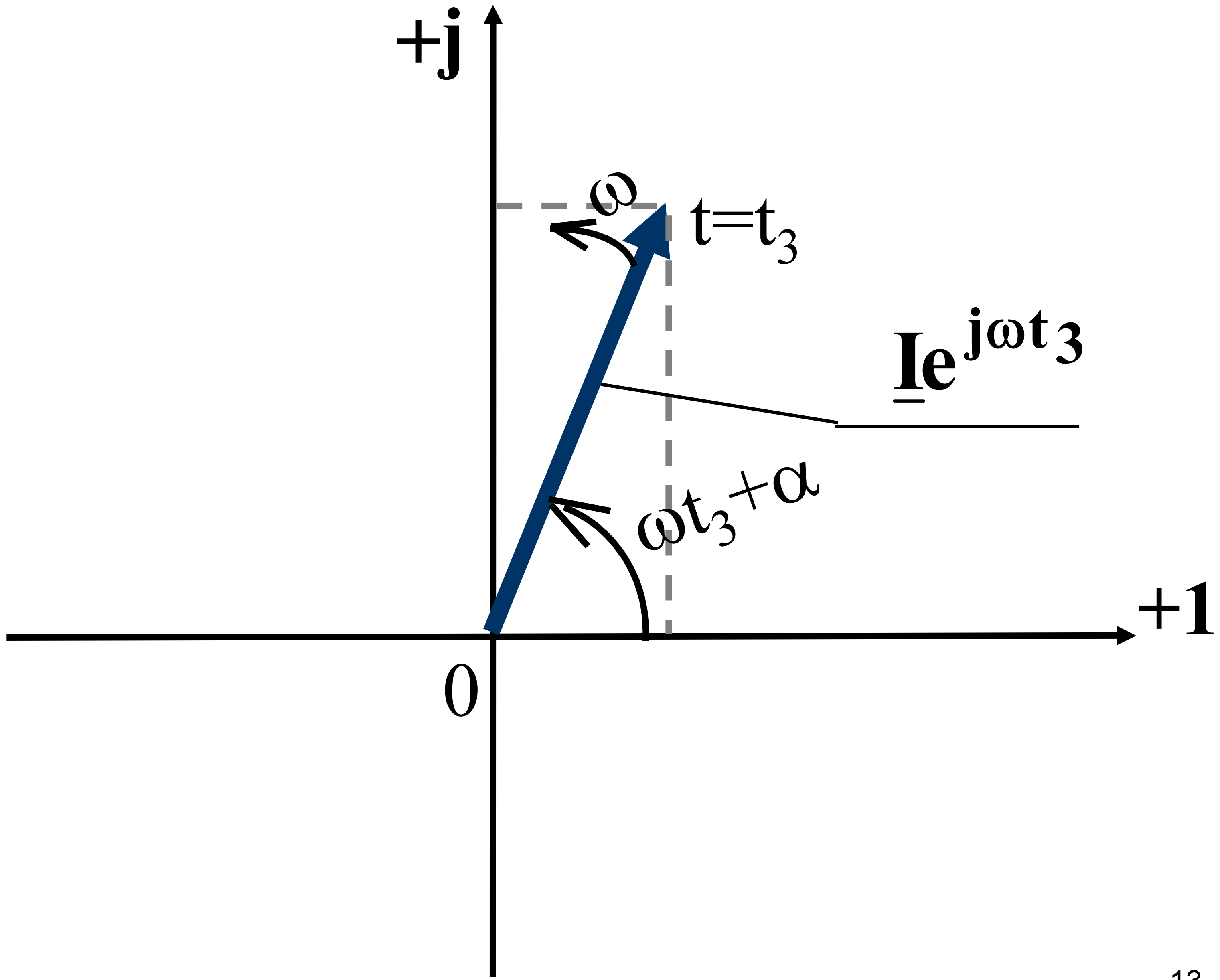


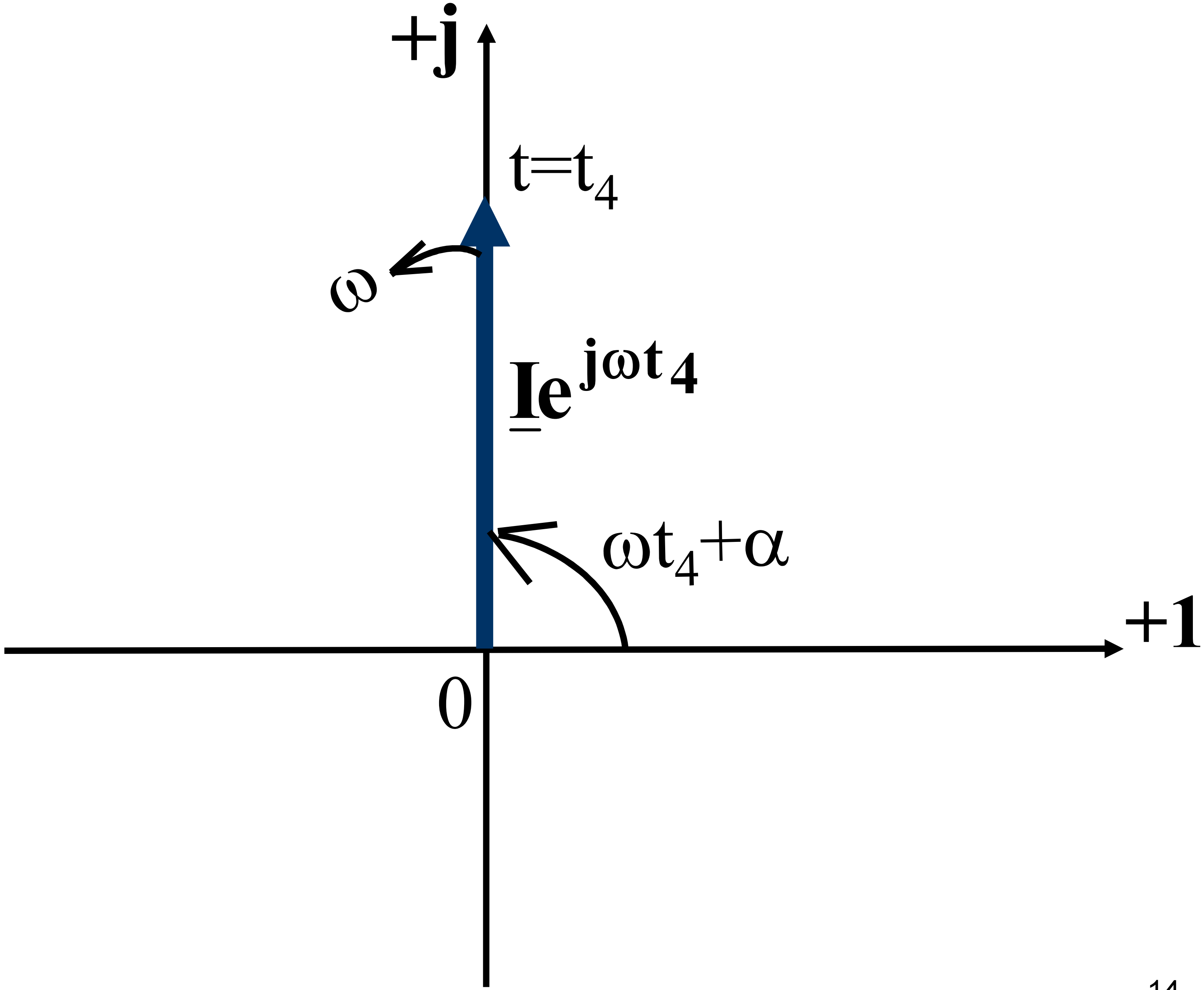
$\underline{\mathbf{I}}$ – комплекс действующего значения тока

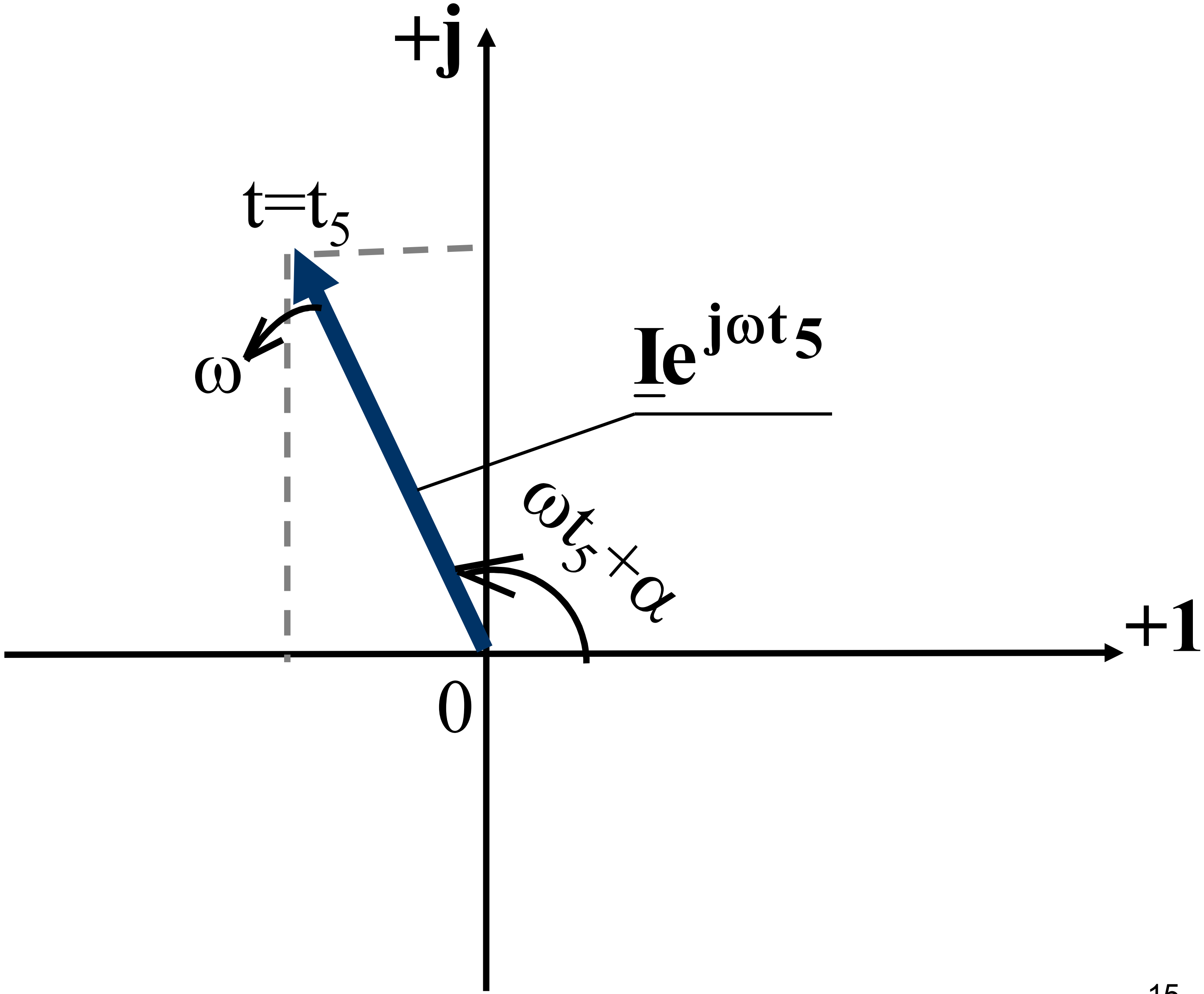

+j
b
t=0
ω
I
α
+1
0
a


+j
t=t1
ω
Ie jωt1
ωt1+α
+1
0


+j
t=t2
ω
Ie jωt 2
ωt2+α
+1
0


+j
ω
t=t3
Ie^jωt3
ωt3+α
+1
0


+j
t=t4
ω
Ie jωt 4
ωt4+α
+1
0


+j
t=t5
ω
Ie jωt 5
ωt5 +α
+1
0

Например: току

$$\mathbf{i} = 2.82 \cdot \mathbf{sin}(\omega \mathbf{t} - 30^\circ), \mathbf{A}$$

соответствует

$$\underline{\mathbf{I}} = \dot{\mathbf{I}} = \frac{2.82}{\sqrt{2}} \cdot \mathbf{e}^{-\mathbf{j}30^\circ}$$

или

$$\underline{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}} = 100 \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{j}45^\circ}, \mathbf{B}$$

соответствует синусоидальная функция времени

$$\mathbf{u} = \sqrt{2} \cdot 100 \cdot \mathbf{Sin}(\omega \mathbf{t} + 45^\circ), \mathbf{B}$$

Действия с комплексными числами

Где:

$\underline{F} = F \cdot e^{j\alpha} = a + jb$ **- комплексное число**

F **- модуль**

α **- аргумент (фаза)**

a **- вещественная составляющая**

b **- мнимая составляющая**

1. Переход от алгебраической формы записи к показательной форме

$$\mathbf{a + jb \Rightarrow Fe^{j\alpha}}$$

$$F = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = (\pm 180) + arctg\,\frac{b}{a}$$

2. Переход от показательной формы записи к алгебраической форме

$$Fe^{j\alpha} \Rightarrow a + jb$$

$$a = F\cos\alpha$$

$$b = F\sin\alpha$$

3. Сложение и вычитание

$$F_1 e^{j\alpha 1} \pm F_2 e^{j\alpha 2} =$$

$$= (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) =$$

$$= (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) =$$

$$= a + jb = Fe^{j\alpha}.$$

4. Умножение

$$(a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) =$$

$$= F_1 e^{j\alpha_1} \cdot F_2 e^{j\alpha_2} =$$

$$= F_1 F_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)} =$$

$$= F e^{j\alpha}.$$

5. Деление

$$\frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{F_1 e^{j\alpha_1}}{F_2 e^{j\alpha_2}} =$$

$$= \frac{F_1}{F_2} e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} =$$

$$= F e^{j\alpha}.$$

6. Возведение в степень

$$(a_1 + jb_1)^m =$$

$$= (F_1 e^{j\alpha_1})^m =$$

$$= F_1^m e^{jm\alpha_1} =$$

$$= F e^{j\alpha}.$$

7. Некоторые соотношения

$$\boxed{j = \sqrt{-1}}$$

$$\boxed{j^2 = -1}$$

$$\boxed{1/j = -j}$$

$$\boxed{j^3 = -j}$$

$$j = e^{j90°}$$

$$-j = e^{-j90°}$$

$$1 = e^{j0°}$$

$$-1 = e^{j180°}$$

Действия с синусоидальными величинами

1. Сложение

$$f(t) = \sqrt{2}F\sin(\omega t + \alpha) =$$

$$= f_1(t) + f_2(t)$$

$$f_1(t) = \sqrt{2}F_1 \sin(\omega t + \alpha_1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{F}_1 = F_1 e^{j\alpha_1}$$

$$f_2(t) = \sqrt{2}F_2 \sin(\omega t + \alpha_2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{F}_2 = F_2 e^{j\alpha_2}$$

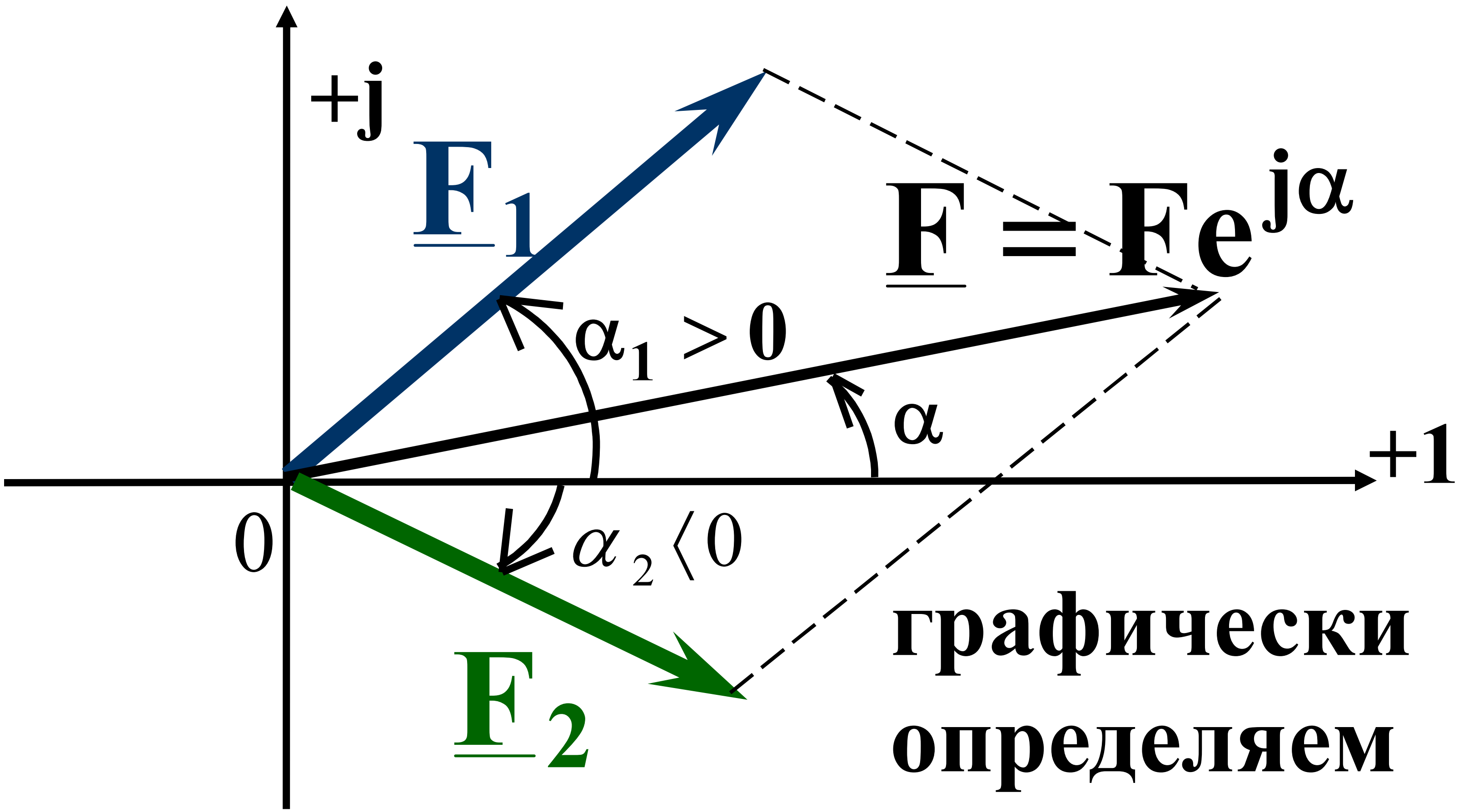
Для определения F и α используются:

а) комплексные числа

$$F_1 e^{j\alpha_1} + F_2 e^{j\alpha_2} = F e^{j\alpha}$$

$\Rightarrow$определяются F и α

б) вектора на комплексной плоскости



графически определяем F и α

2. Вычитание

$$f(t)=\sqrt{2}F\sin(\omega t+\alpha)=$$

$$=f_1(t)-f_2(t)$$

$$f_1(t) \rightarrow \quad \underline{F}_1 = F_1 e^{j\alpha_1}$$

$$f_2(t) \rightarrow \quad \underline{F}_2 = F_2 e^{j\alpha_2}$$

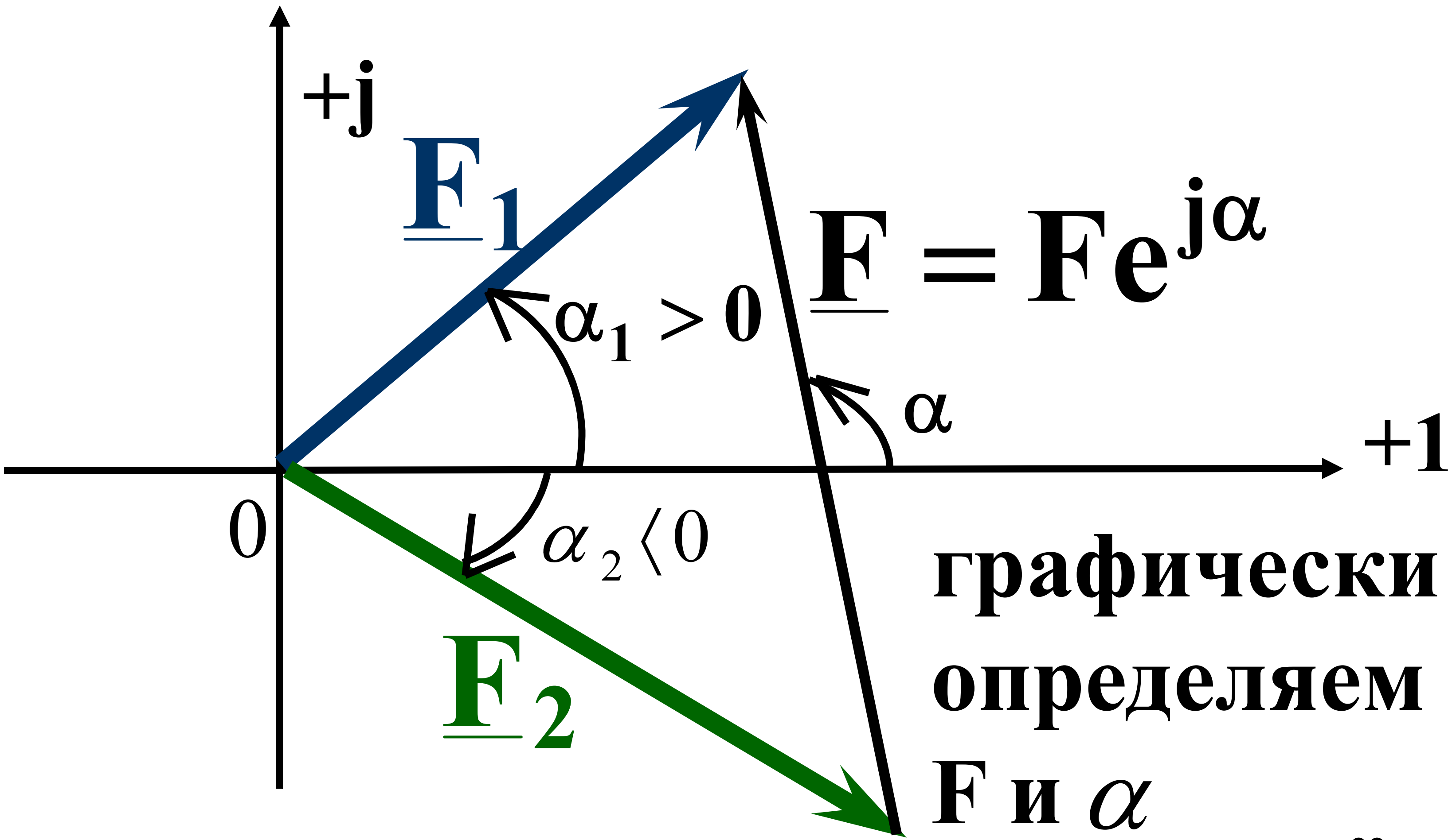
Для определения $\mathbf{F}$ и α используются:

а) комплексные числа

$$F_1 e^{j\alpha_1} - F_2 e^{j\alpha_2} = F e^{j\alpha}$$

$\Rightarrow$определяются F и α

б) вектора на комплексной плоскости



графически определяем F и α

3. Дифференцирование

$$f(t) = \sqrt{2}F\sin(\omega t + \alpha) \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{F} = Fe^{j\alpha}$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \sqrt{2}\omega F\sin(\omega t + \alpha + 90°) \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega Fe^{j(\alpha+90°)} = j\omega\underline{F}$$

В результате при

$$\mathbf{f(t) \rightarrow \underline{F}}$$

имеем

$$\mathbf{\frac{df(t)}{dt} \rightarrow j\omega\underline{F}}$$

4. Интегрирование

$$f(t) = \sqrt{2}F\sin(\omega t + \alpha) \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{F} = Fe^{j\alpha}$$

$$\int f(t)dt = \frac{\sqrt{2}F}{\omega}\sin(\omega t + \alpha - 90°) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{F}{\omega}e^{j(\alpha - 90°)} = \frac{\underline{F}}{j\omega}$$

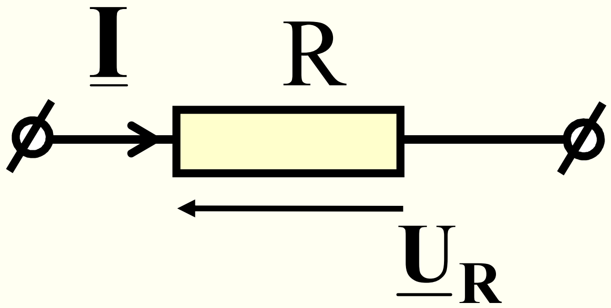
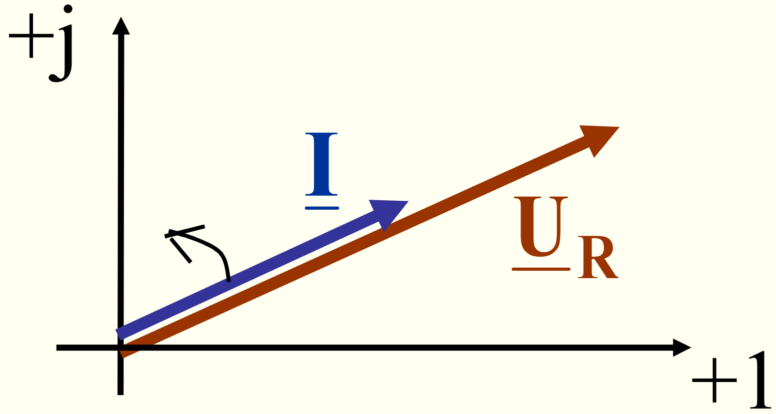
В результате при

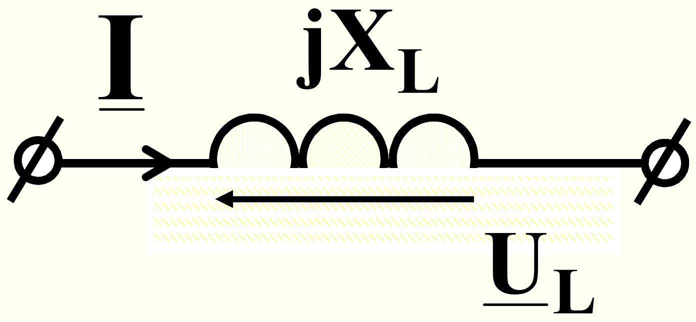
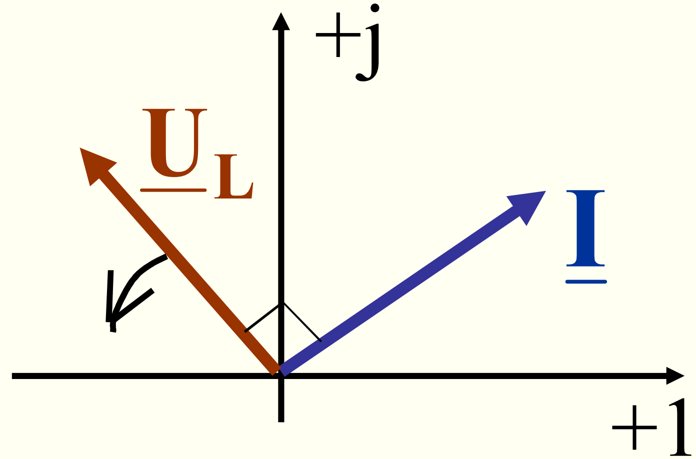
$$\mathbf{f(t) \to \underline{F}}$$

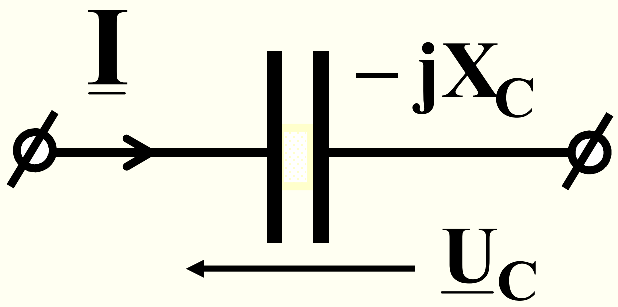
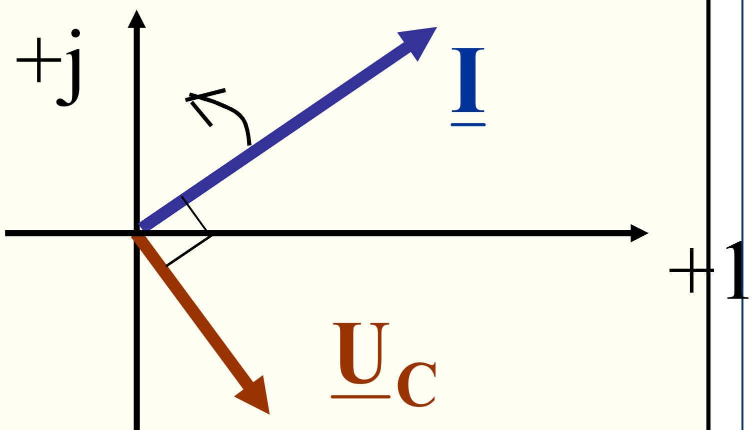
имеем

$$\int \mathbf{f(t)dt \to \frac{\underline{F}}{j\omega}}$$

ЗАКОН ОМА
В КОМПЛЕКСНОЙ
ФОРМЕ

<table>
<tr><td>Резистивный элемент</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Комплекс напряжения</td><td>$$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}$$</td></tr>
<tr><td>Вектора напряжения и тока</td><td>
</td></tr>
</table>

Индуктивный элемент	
Комплекс напряжения	$$\underline{U}_L = j\omega L\underline{I} = jX_L\underline{I}$$
Вектора напряжения и тока	

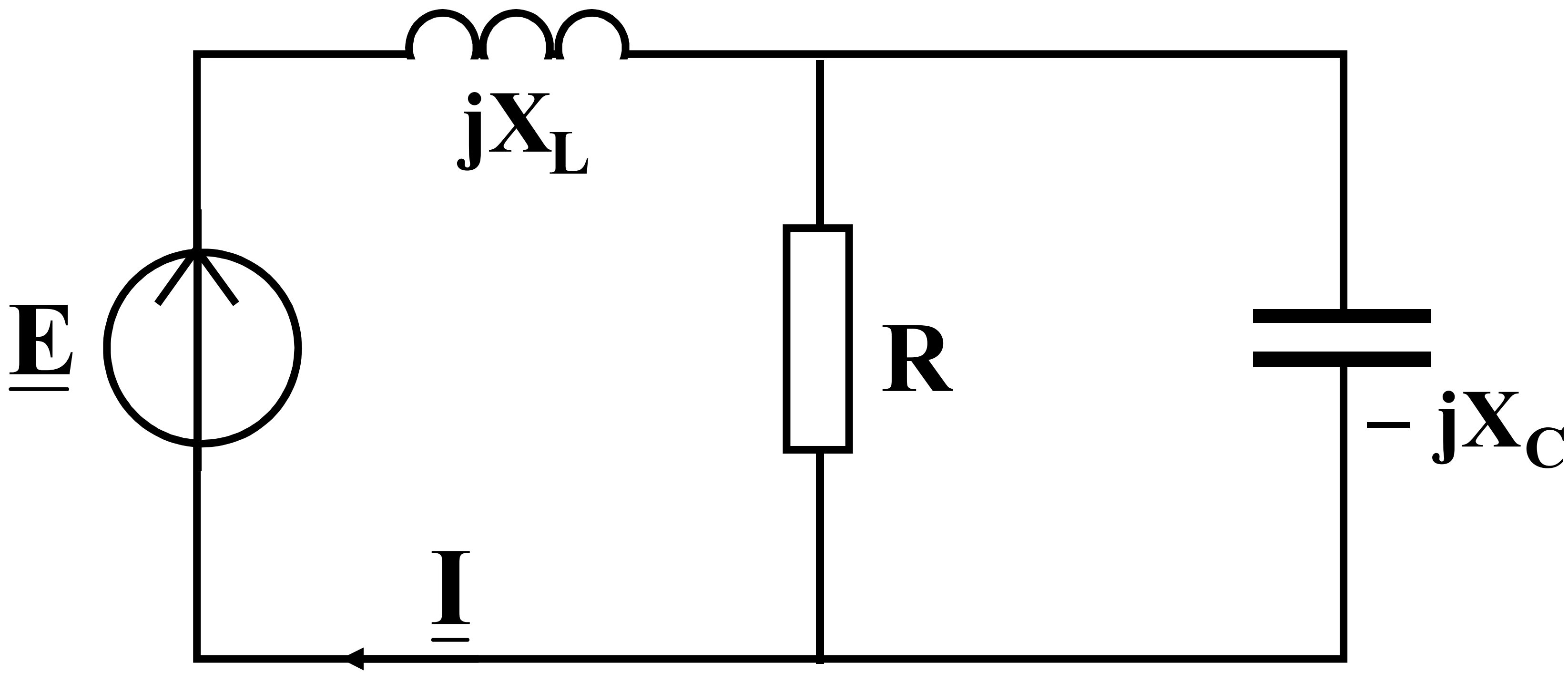
Емкостный элемент	
Комплекс напряжения	$\underline{U}_C = -\frac{j}{\omega C}\underline{I} = -jX_C\underline{I}$
Вектора напряжения и тока	

Где:

$X_L = \omega L$ **- индуктивное сопротивление (Ом)**

$X_C = 1/\omega C$ **- емкостное сопротивление (Ом)**

Например, комплексная схема замещения цепи:



$$\underline{\mathbf{Z}} = \mathbf{j}\mathbf{X}_{\mathrm{L}} + \frac{\mathbf{R}(-\mathbf{j}\mathbf{X}_{\mathrm{C}})}{\mathbf{R} - \mathbf{j}\mathbf{X}_{\mathrm{C}}}$$

$$\underline{\mathbf{I}} = \frac{\underline{\mathbf{E}}}{\underline{\mathbf{Z}}}$$

Где:

$$\underline{Z} = R_Э + jX_Э = Z \cdot e^{j\varphi}$$

– эквивалентное комплексное сопротивление цепи (Ом)

$$Z = \sqrt{R_Э{}^2 + X_Э{}^2}$$

- модуль сопротивления (Ом)

$$\varphi = arctg\frac{X_Э}{R_Э}$$

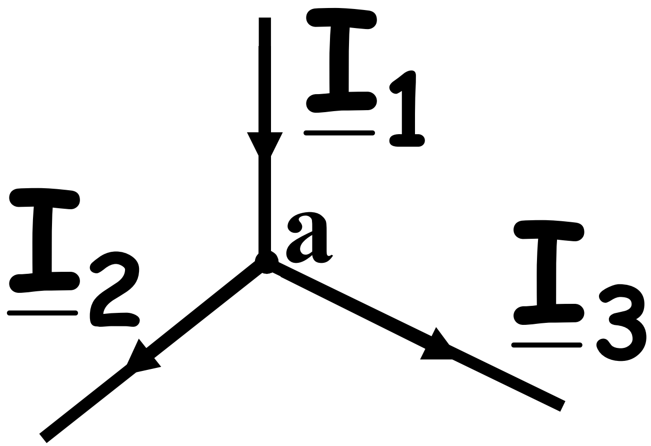
-аргумент (фаза) сопротивления (Град)

ЗАКОНЫ КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

1. ПЕРВЫЙ ЗАКОН КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

$$\sum \pm \underline{I}_k = 0$$

Например:



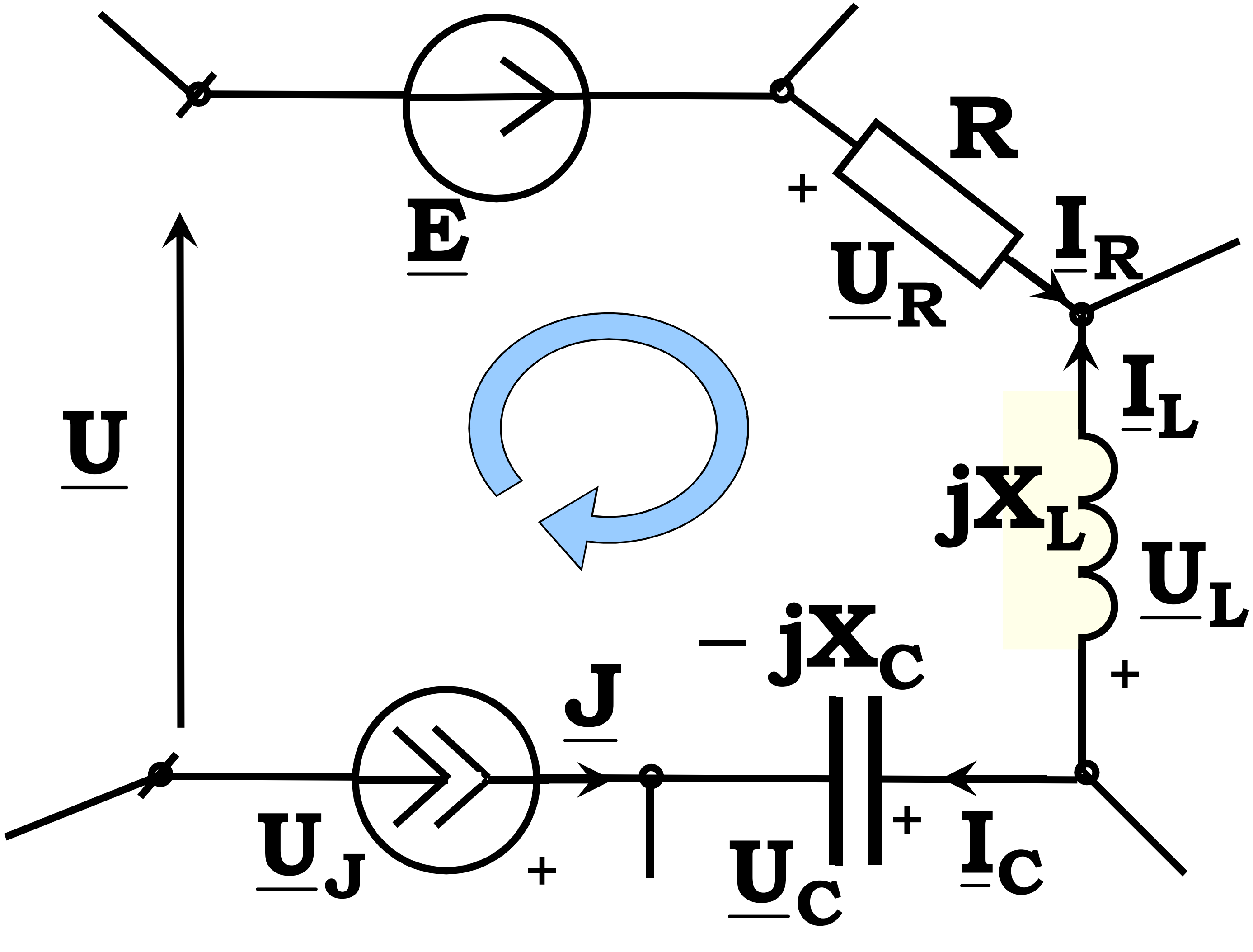
узел **а:**

$$-\underline{\mathbf{I}}_1 + \underline{\mathbf{I}}_2 + \underline{\mathbf{I}}_3 = 0$$

2. ВТОРОЙ ЗАКОН КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

$$\sum \pm \underline{U}_n = \sum \pm \underline{E}_k + \sum \pm \underline{U}_{J_q} + \sum \pm \underline{U}_p$$

Например:



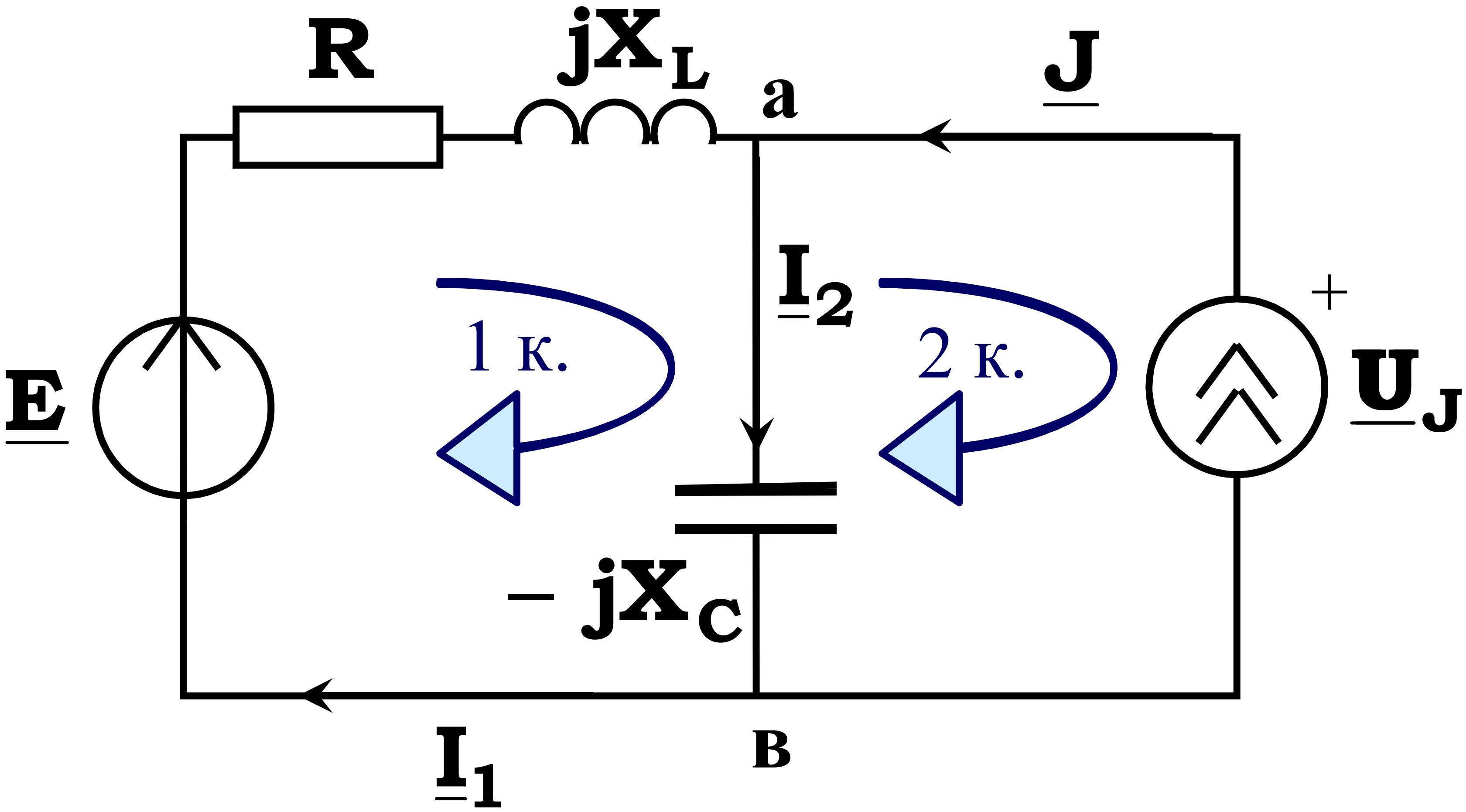
$$\underline{U}_R - \underline{U}_L + \underline{U}_C = \underline{E} - \underline{U}_J + \underline{U}$$

или

$$R\underline{I}_R - jX_L\underline{I}_L + (-jX_C)\underline{I}_C = \underline{E} - \underline{U}_J + \underline{U}$$

3. МЕТОД ЗАКОНОВ КИРХГОФА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Например:



$n_у = 2$ | $n_в = 3$

$$n_1 = n_у - 1 = 1$$

$$n_2 = n_в - n_1 = 2$$

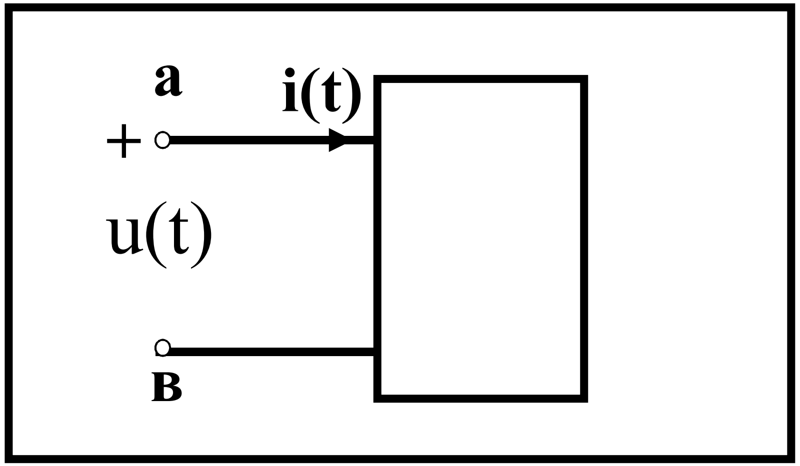
$$\mathbf{a:}\qquad -\underline{\mathbf{I}}_1 + \underline{\mathbf{I}}_2 - \underline{\mathbf{J}} = 0$$

$$\mathbf{1к:}\qquad (\mathbf{R} + \mathbf{jX_L}) \cdot \underline{\mathbf{I}}_1 + (-\mathbf{jX_C}) \cdot \underline{\mathbf{I}}_2 = \underline{\mathbf{E}}$$

$$\mathbf{2к:}\qquad -(-\mathbf{jX_C}) \cdot \underline{\mathbf{I}}_2 = -\underline{\mathbf{U}}_\mathbf{J}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ (R + jX_L) & (-jX_C) & 0 \\ 0 & jX_C & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{U}_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{J} \\ \underline{E} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Мощность при гармонических напряжениях и токах



$$u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \alpha), \ (B)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \beta), \ (A)$$

Мощность в функции времени

$$P(t) = u(t) \cdot i(t) =$$

$$= \mathbf{P} - \mathbf{S}\,\mathbf{cos}(\mathbf{2}\omega\mathbf{t} + \alpha + \beta),\ (\mathbf{Вт})$$

$$P = UI\cos\varphi, \ (\text{Вт})$$

- средняя или активная мощность

$$S = UI, \ (\text{ВА})$$

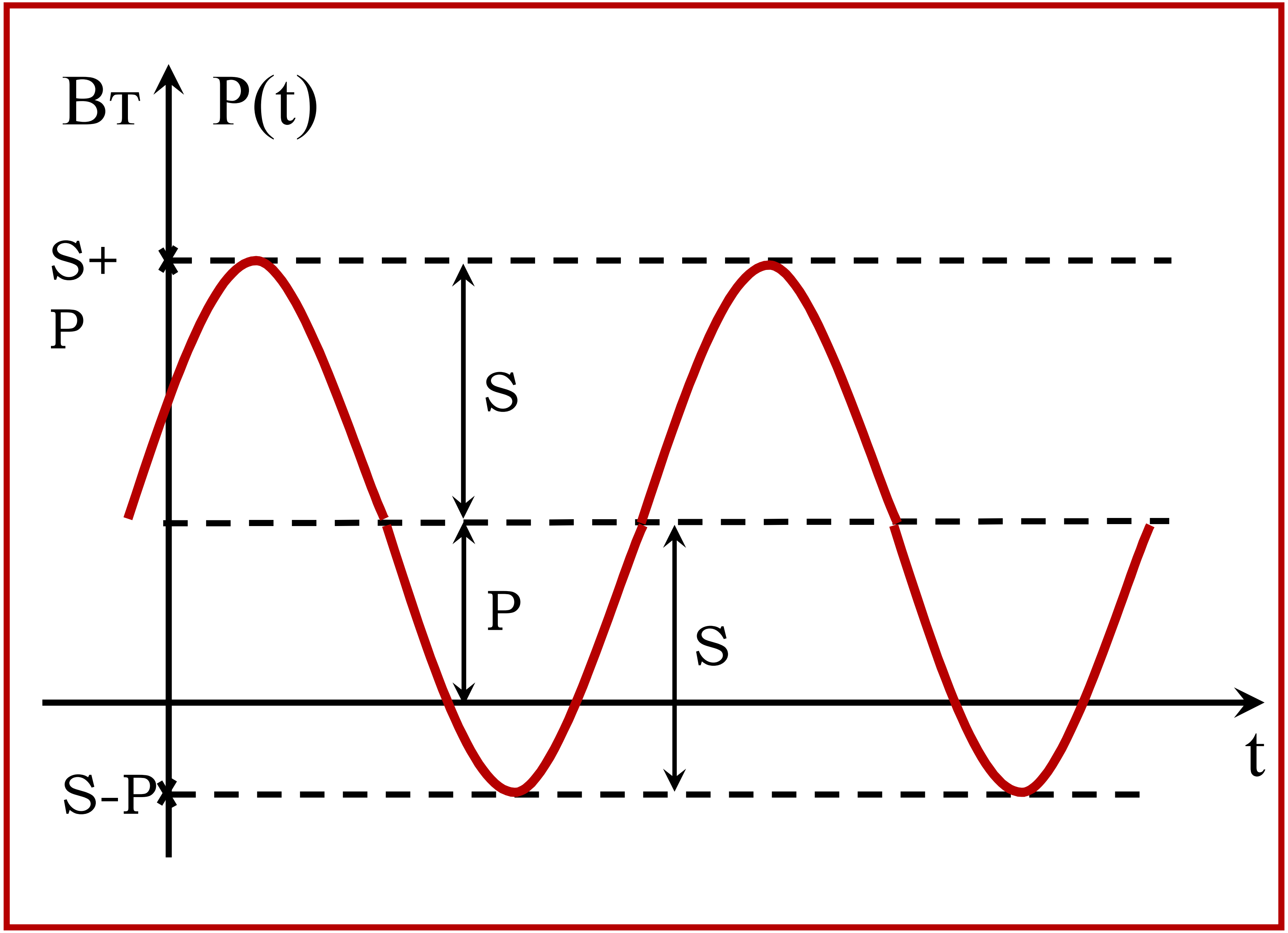
-амплитуда гармонической составляющей мощности или полная мощность

$$\varphi = \alpha - \beta, \text{ (град)}$$

- **угол сдвига фаз между напряжением и током**

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} \leq 1, \text{ т.е. } S \geq P$$

- **коэффициент мощности**



Bт
P(t)
S+
P
S
P
S
S-P
t

Когда

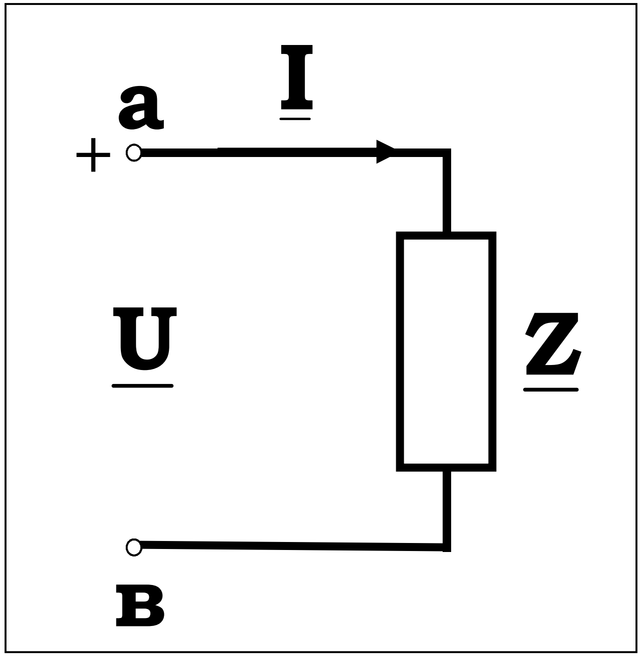
$$\boxed{P(t) > 0}$$

- энергия поступает в двухполюсник

$$\boxed{P(t) < 0}$$

- энергия поступает из двухполюсника во внешнюю цепь

Пусть задано:



$$\underline{U} = Ue^{j\alpha}, \text{ (B)}$$

$$\underline{I} = Ie^{j\beta}, \text{ (A)}$$

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = R + jX, \text{ (Ом)}$$

При $\boxed{\overset{*}{\underline{I}} = Ie^{-j\beta}}$ **находим**

$$\boxed{\underline{S} = \underline{U}\overset{*}{\underline{I}} = P + jQ, (BA)}$$

- комплекс полной мощности

где $\boxed{\overset{*}{\underline{I}} = Ie^{-j\beta}}$ **-сопряженное значение тока**

$$\boxed{Q = UI\sin\varphi, \text{ (вар)}}$$

- реактивная мощность

Т.к. $\boxed{\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{I}}}$, то

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{S} = \underline{U}\overset{*}{\underline{I}} = (\underline{Z}\underline{I})\overset{*}{\underline{I}} = \\ &= \underline{Z}I^2 = I^2R + jI^2X, (BA) \end{aligned}}$$

Таким образом активная мощность:

$$\boxed{P = UI\cos\varphi = I^2R,\ (\text{Вт})}$$

- это мощность тепловой энергии

Реактивная мощность:

$$\boxed{Q = UI\sin\varphi = I^2X, (\text{вар})}$$

- пропорциональна максимальной энергии, запасаемой в электромагнитном поле

Полная мощность:

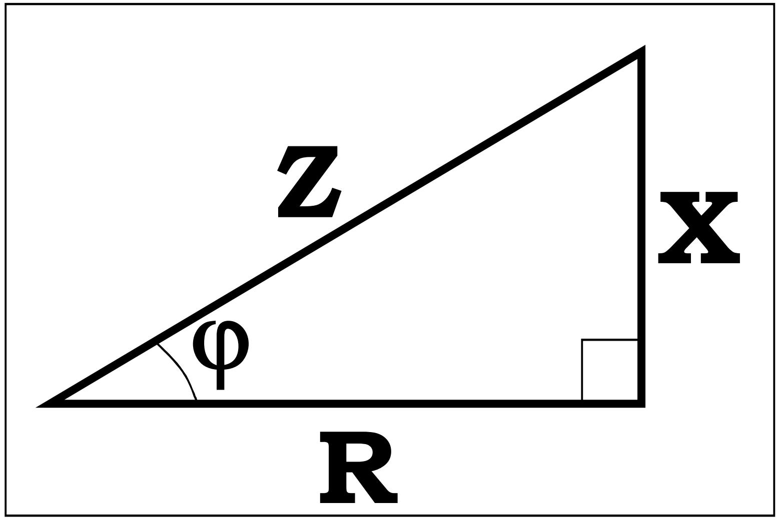
$$\boxed{S = UI = \frac{P}{\cos\varphi}, (BA)}$$

-это максимально возможная активная мощность

при $\boxed{\cos\varphi = 1}$

Можно изобразить:

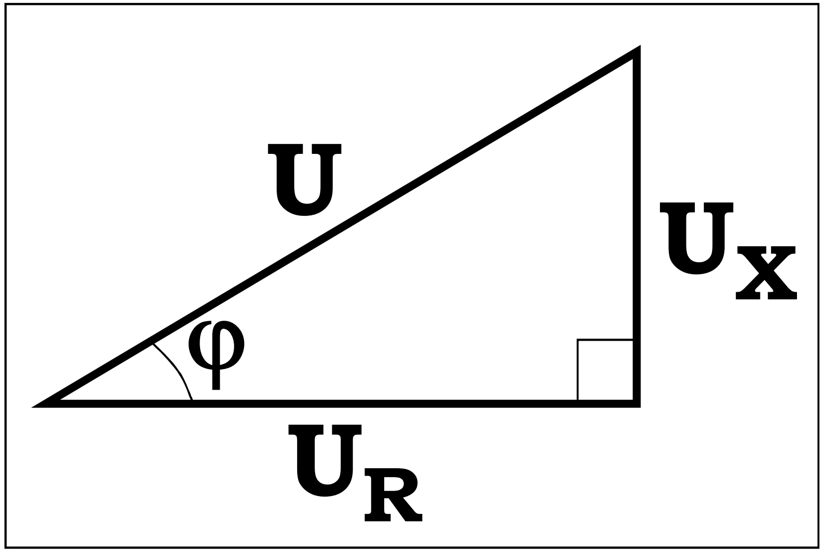
а) треугольник сопротивлений



$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

б) треугольник напряжений

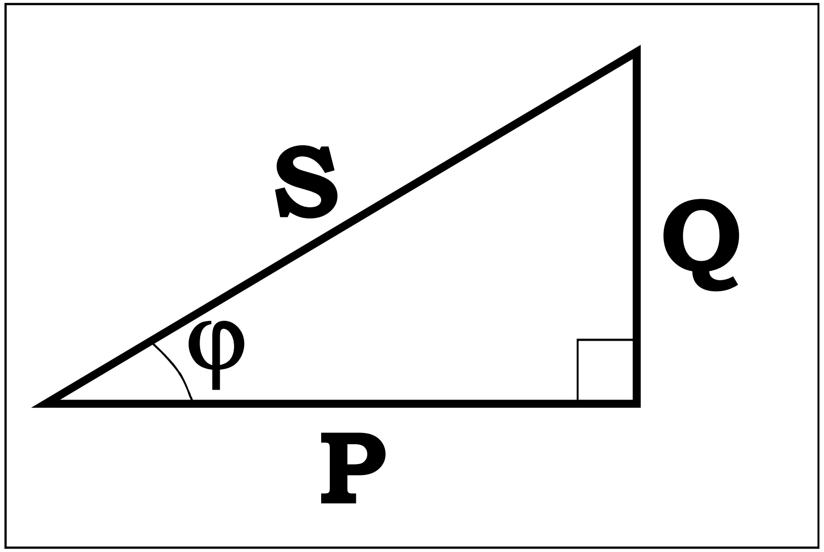


$$U = \sqrt{U_R^2 + U_x^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{U_R}{U}$$

$$U_R = IR; \qquad U_X = IX$$

в) треугольник мощностей

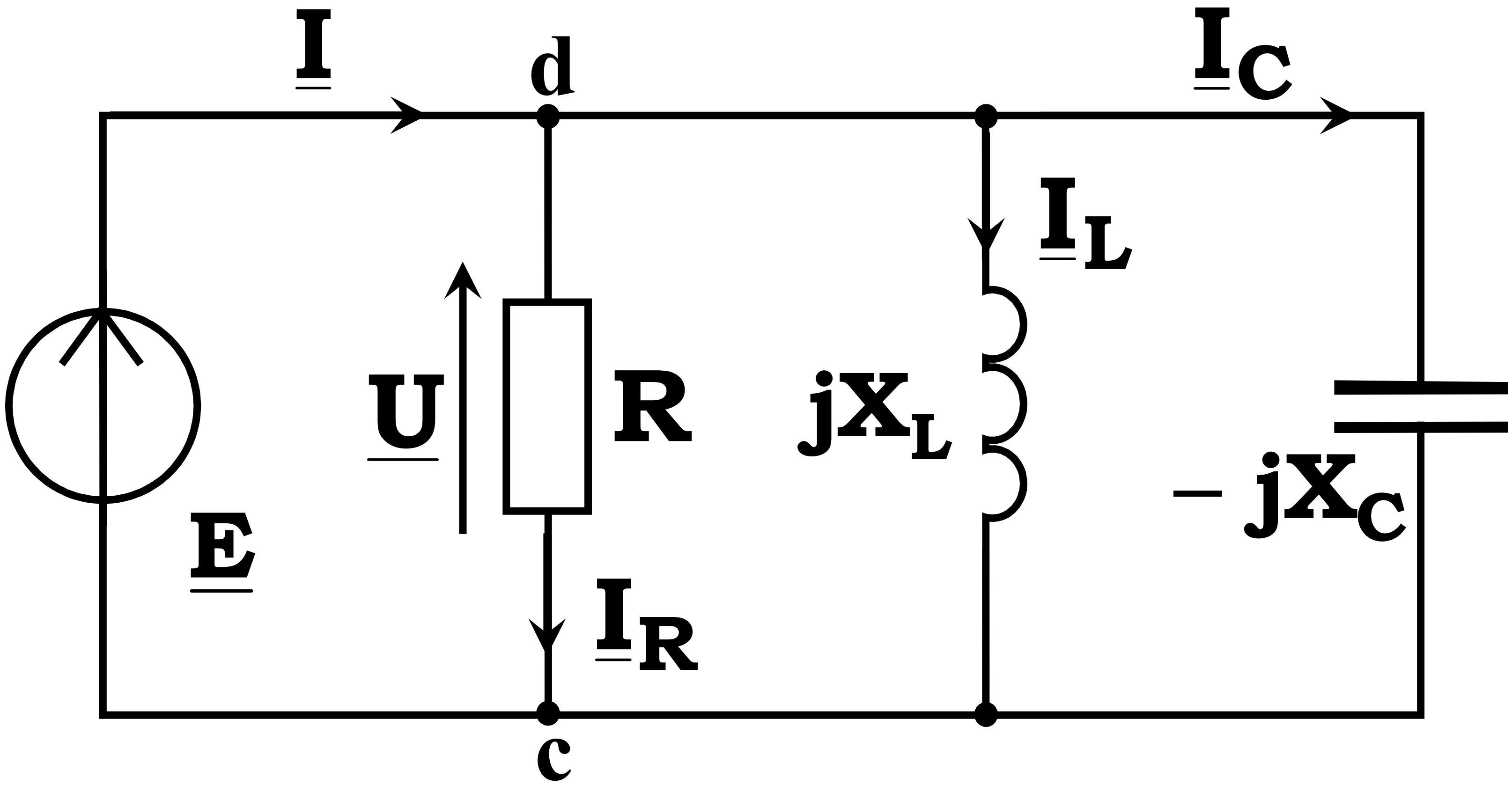


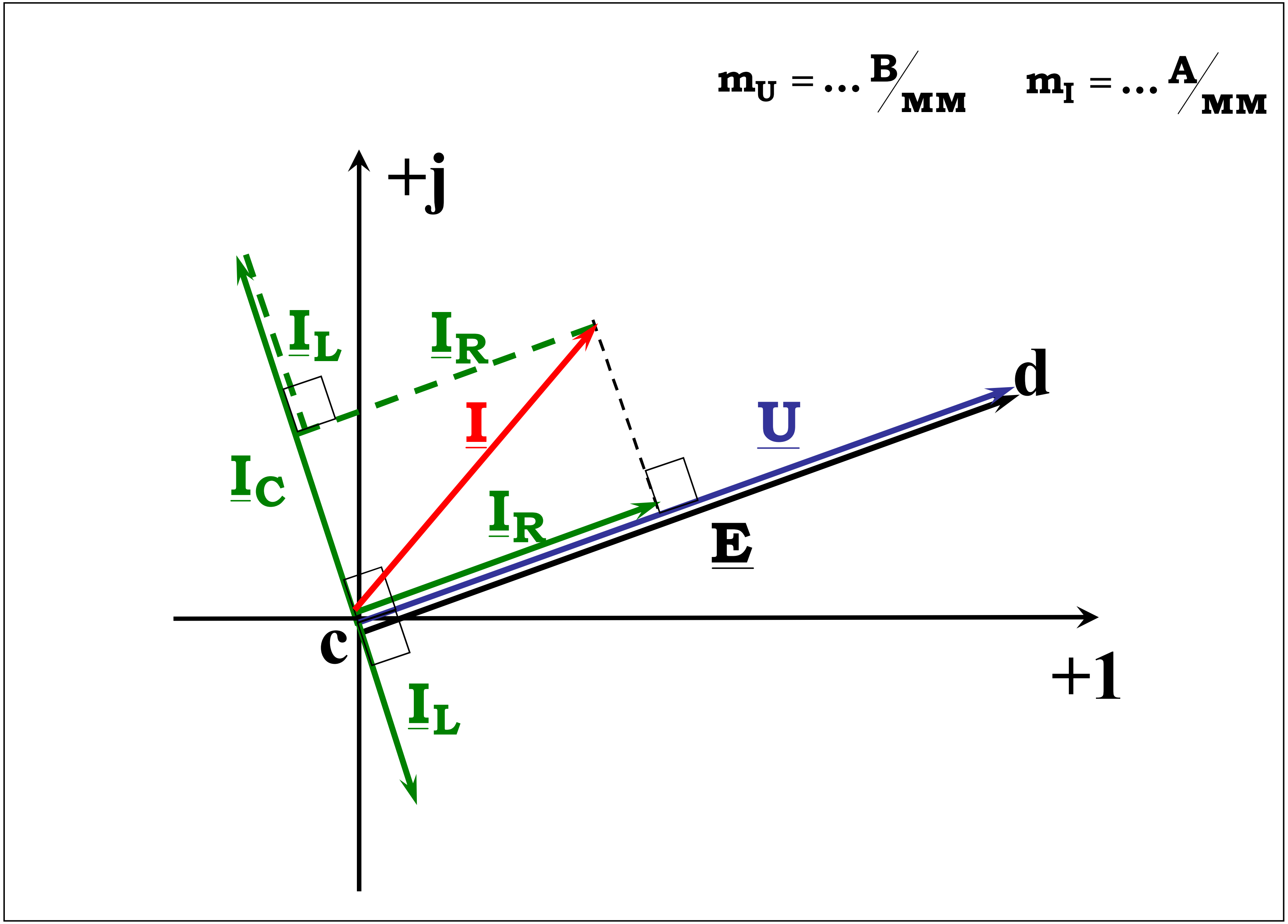
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{P}{S}$$

Топографические и лучевые векторные диаграммы

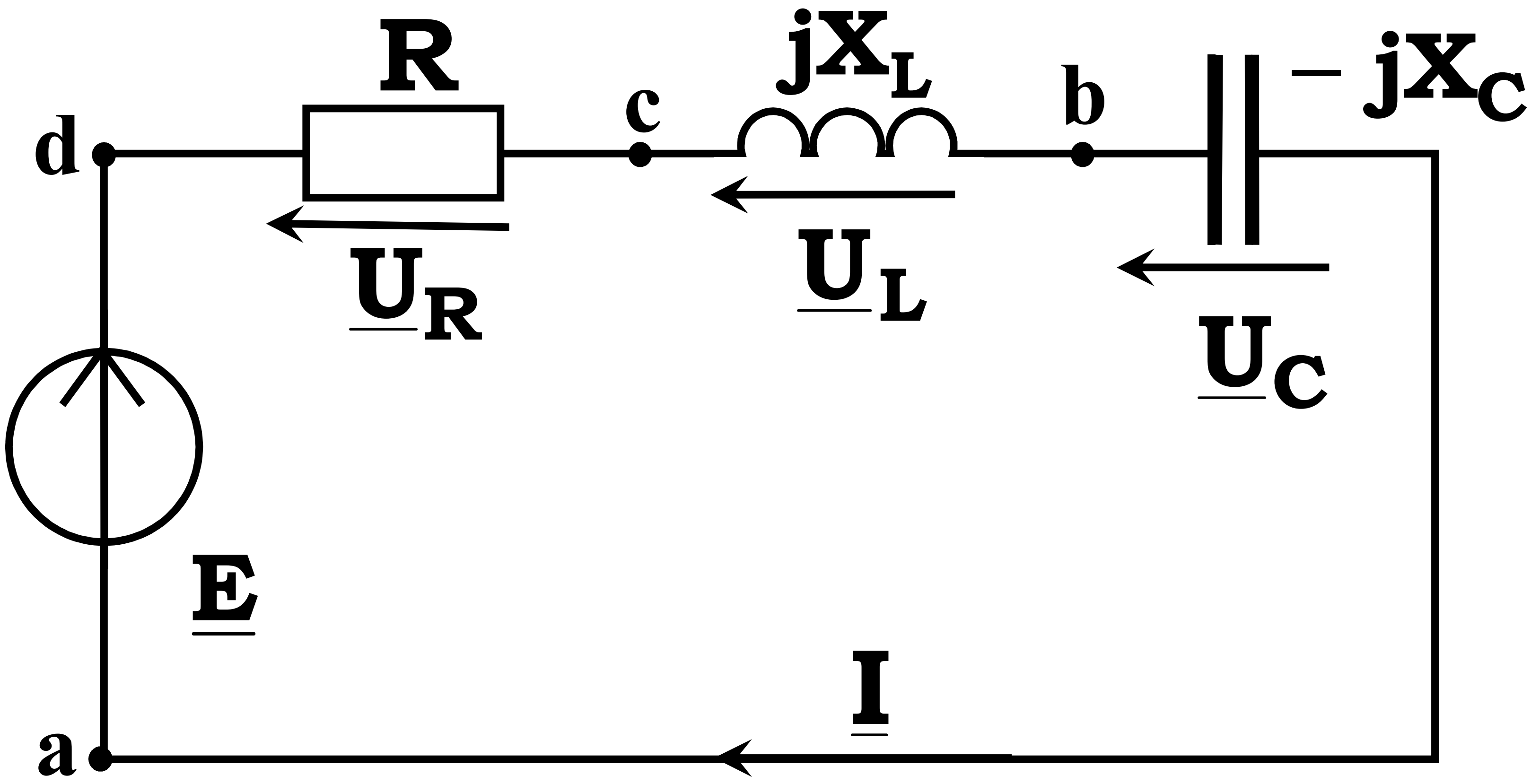
Пример 1

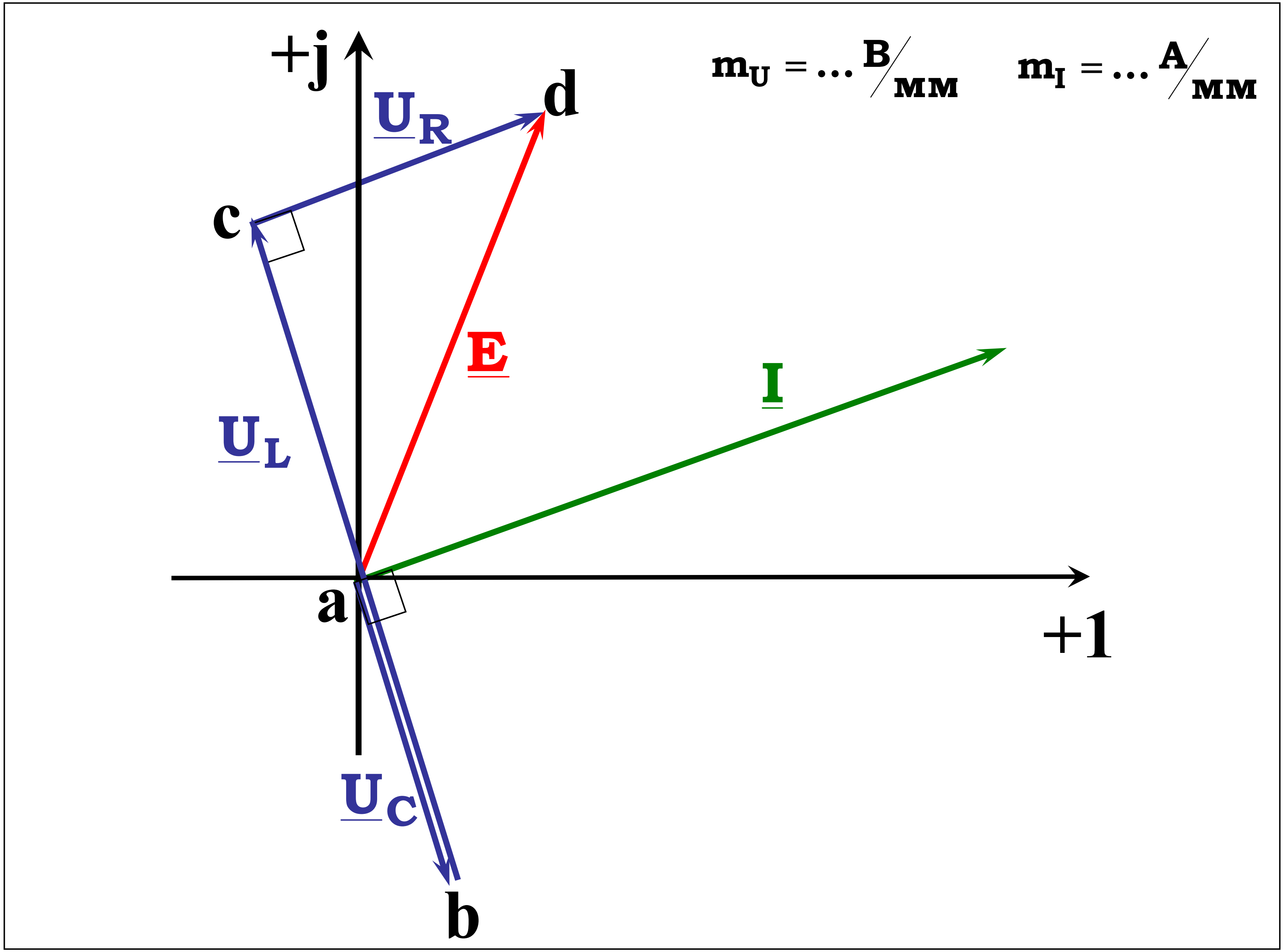




$m_U = \ldots$ В/мм
$m_I = \ldots$ А/мм
+j
+1
d
c
$\underline{I}_L$
$\underline{I}_R$
$\underline{I}$
$\underline{U}$
$\underline{I}_C$
$\underline{I}_R$
$\underline{E}$
$\underline{I}_L$

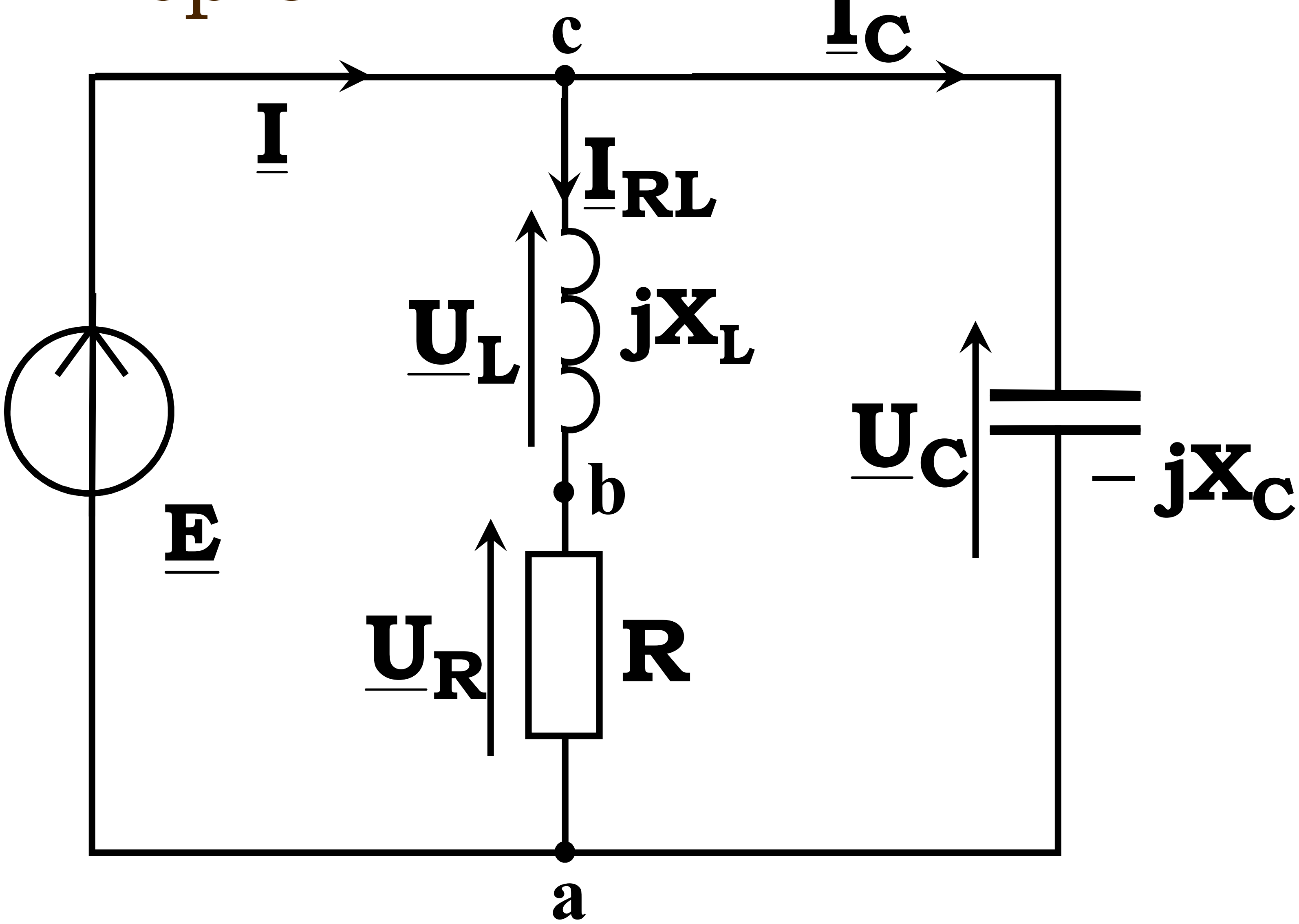
Пример 2

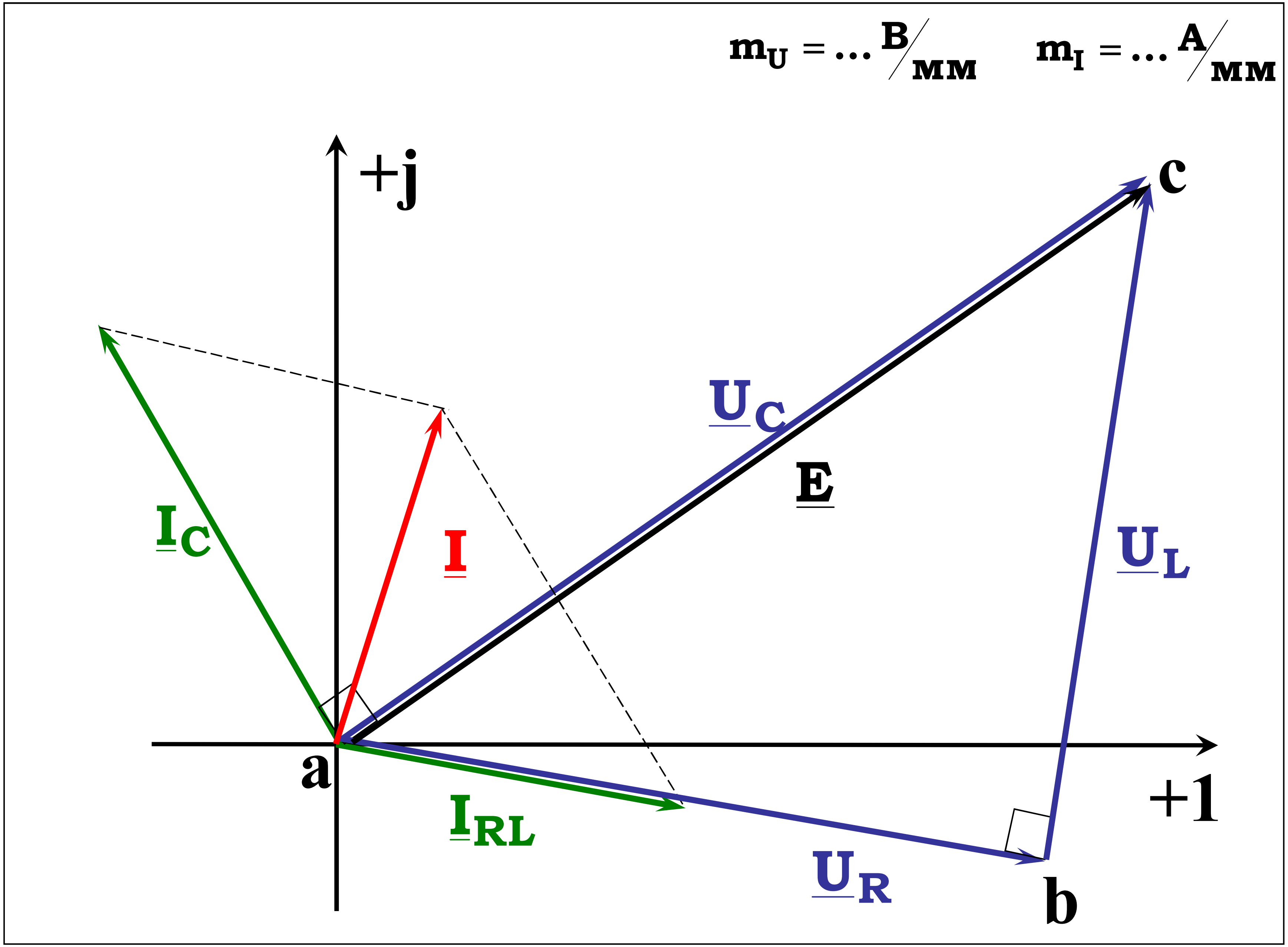




$m_U = \dots$ В/мм
$m_I = \dots$ А/мм
+j
+1
$\underline{U}_R$
$\underline{U}_L$
$\underline{U}_C$
$\underline{E}$
$\underline{I}$
a
b
c
d

Пример 3





$m_U = \dots$ В/мм
$m_I = \dots$ А/мм
+j
c
$\underline{U}_C$
$\underline{E}$
$\underline{U}_L$
$\underline{I}_C$
$\underline{I}$
a
+1
$\underline{I}_{RL}$
$\underline{U}_R$
b