

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

---

**Г.В. Носов, В.А. Колчанова, Е.О. Кулешова**

## **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

### **ЧАСТЬ 2**

*Рекомендовано в качестве учебного пособия  
Редакционно-издательским советом  
Томского политехнического университета*

Издательство  
Томского политехнического университета  
2014

УДК 621.3.011(075.8)

ББК 31.211я73

Н619

**Носов Г.В.**

Н619

Теоретические основы электротехники. Ч. 2: учебное пособие / Г.В. Носов, В.А. Колчанова, Е.О. Кулешова; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 212 с.

В учебном пособии рассмотрены основные положения и математические понятия теории переходных процессов в линейных цепях, а также методы расчёта нелинейных цепей и цепей с сосредоточенными параметрами. Теоретический материал закрепляется многочисленными примерами и контрольными заданиями.

Пособие подготовлено на кафедре электрических сетей и электротехники и предназначено для студентов ИДО, обучающихся по направлению 140100 «Электроэнергетика и электротехника».

**УДК 621.3.011(075.8)**

**ББК 31.211я73**

*Рецензенты*

Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник  
Института оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН  
*Ф.Ю. Канев*

Кандидат технических наук,  
доцент кафедры ТОЭ ТУСУРа  
*Т.В. Ганджа*

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2014

© Носов Г.В., Колчанова В.А.,

Кулешова Е.О., 2014

© Оформление. Издательство Томского  
политехнического университета, 2014

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>1. Переходные процессы в линейных цепях.....</b>	<b>5</b>
1.1. Переходные процессы в простейших цепях. Нулевые начальные условия .....	5
1.2. Законы коммутации.....	6
1.3. Классический метод расчёта переходных процессов.....	9
1.4. Объединение реактивных элементов .....	10
1.5. Линейная цепь первого порядка .....	12
1.6. Классический метод расчета переходных процессов в цепях первого порядка с гармоническим источником .....	16
1.7. Обобщенные законы коммутации .....	18
1.8. Расчет переходных процессов в цепях 2-го порядка классическим методом .....	22
1.9. Операторный метод расчёта переходных процессов.....	29
1.10. Комбинированный операторно-классический метод расчета переходных процессов .....	41
1.11. Метод переменных состояния.....	44
1.12. Переходные и импульсные характеристики.....	48
1.13. Метод интеграла Дюамеля .....	52
<b>2. Нелинейные цепи.....</b>	<b>56</b>
2.1. Нелинейные резистивные элементы.....	56
2.2. Расчет нелинейных резистивных цепей.....	60
2.3. Нелинейные индуктивные элементы.....	66
2.4. Расчет неразветвленной магнитной цепи .....	72
2.5. Расчет разветвленной магнитной цепи .....	74
2.6. Расчет цепей с линейными и нелинейными индуктивными элементами .....	77
2.7. Нелинейные емкостные элементы.....	80
2.8. Метод эквивалентных синусоид .....	83
2.9. Резонансные явления в нелинейных цепях.....	92
2.10. Переходные процессы в нелинейных цепях.....	101
<b>3. Электрические цепи с распределенными параметрами.....</b>	<b>110</b>
3.1. Установившийся гармонический режим однородной линии .....	111
3.2. Бегущие волны.....	114
3.3. Режимы однородной линии при гармонических напряжениях и токах .....	116
3.4. Однородная линия без искажений.....	120

3.5. Однородная линия без потерь при гармонических напряжениях и токах .....	121
3.6. Режимы однородной линии без потерь .....	123
3.7. Переходные процессы в однородных линиях без потерь ..	126
3.8. Включение однородной линии без потерь на постоянное напряжение .....	129
3.9. Отражение и преломление волн в однородных линиях без потерь .....	132
<b>Задание № 4 Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях .....</b>	<b>139</b>
<b>Задание № 5 Расчет установившегося режима в нелинейных электрических цепях .....</b>	<b>142</b>
<b>Задание № 6 Расчет длинных линий в установившемся и переходном режимах .....</b>	<b>146</b>
Пример 1. Методические указания к заданию № 4 «Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях» .....	149
Пример 2. Методические указания к заданию № 5 «Расчет установившегося режимав нелинейных электрических цепях» .....	180
Пример 3. Методические указания к заданию № 6 «Расчет длинных линий в установившемся и переходном режимах» .....	198
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>211</b>

# 1. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

## 1.1. Переходные процессы в простейших цепях. Нулевые начальные условия

Под переходными процессами понимают процессы перехода от одного установившегося режима работы электрической цепи к другому, чем-либо отличающемуся от предыдущего, например: величиной амплитуды, фазы, частоты или значениями параметров схемы. Переходные процессы возникают при включении или отключении источников, элементов цепи, при коротких замыканиях и обрывах проводов, а также при различных импульсных воздействиях на цепь, например при грозовых разрядах.

Установившиеся значения напряжений и токов характеризуют установившийся режим цепи и могут оставаться неизменными бесконечно долго, причем эти значения задаются источниками электрической энергии.

При анализе и расчете переходных процессов будем считать, что переходные процессы возникают при включении или отключении элементов цепи посредством ключей, причем эта коммутация происходит мгновенно быстро в момент времени  $t = 0$ , при времени  $t = \infty$  переходный процесс теоретически заканчивается и наступает новый установившийся режим. Время  $t < 0$  характеризует режим цепи *до коммутации*, момент времени  $t = 0_-$  соответствует последнему моменту перед коммутацией.

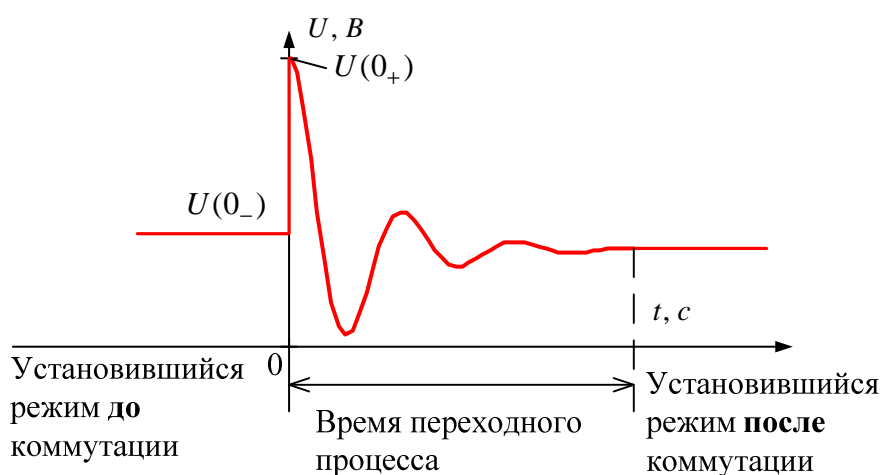


Рис. 1

Момент времени  $t = 0_+$  соответствует первому моменту времени после коммутации. Скачок – это мгновенное изменение напряжения или тока при  $t = 0_+$ .

Анализ и расчет переходных процессов в электроэнергетике осуществляется с целью определения влияния параметров цепи на длительность переходного процесса, что необходимо для различных технологических циклов.

**Коммутация** – это процесс замыкания и размыкания выключателей. Переходные процессы обычно являются быстропротекающими; длительность их составляет десятые, сотые, а иногда даже миллиардные доли секунд. Сравнительно редко длительность переходных процессов достигает секунд и десятков секунд.

Физически переходные процессы представляют собой процессы перехода электрической системы от одного энергетического состояния к другому, т.е. это процесс перераспределения энергии между элементами цепи.

Переходные процессы обусловлены наличием реактивных элементов ( $L$  и  $C$ ).

## 1.2. Законы коммутации

В электрической цепи не может быть мгновенного изменения накопленной в электрических и магнитных полях энергии

$$W(0_-) = W(0_+) = W(0),$$

так как энергия электрического поля конденсатора и энергия магнитного поля индуктивной катушки равны соответственно

$$W_C = C \frac{u_C^2}{2}, \quad W_L = L \frac{i_L^2}{2}.$$

При мгновенном изменении этих величин потребовалась бы бесконечно большая мощность, т.к.  $P_C = \frac{dW_C}{dt}$ ,  $P_L = \frac{dW_L}{dt}$ ; это означает, что в момент коммутации остаются неизменными напряжения на обкладках конденсатора и токи в индуктивных катушках. Для перераспределения энергии требуется время – это процесс инерционный, не мгновенный. Поэтому существуют два закона коммутации.

**Первый закон коммутации:** ток через индуктивность до коммутации  $i_L(0_-)$  равен току через индуктивность после коммутации  $i_L(0_+)$  или **ток индуктивности не может изменяться скачком:**

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = i_L(0). \quad (*)$$

**Второй закон коммутации:** напряжение на ёмкости до коммутации  $u_C(0_-)$  равно напряжению на ёмкости после коммутации  $u_C(0_+)$ , или **напряжение на ёмкости не может изменяться скачком:**

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_C(0). \quad (**)$$

Это есть *независимые начальные условия*. Независимыми они называются потому, что, независимо от того, до или после коммутации мы их наблюдаем, они всё равно одинаковы и равны, и поэтому знаки « $-$ » и « $+$ » в выражениях (\*) и (\*\*) опускают.

Все остальные напряжения и токи электрической цепи в первый момент после коммутации при  $t(0_+)$  называют *зависимыми начальными условиями (ЗНУ)*.

Токи и напряжения после завершения переходного процесса при  $t = \infty$  называют *принуждёнными составляющими* (рис. 1).

### Пример

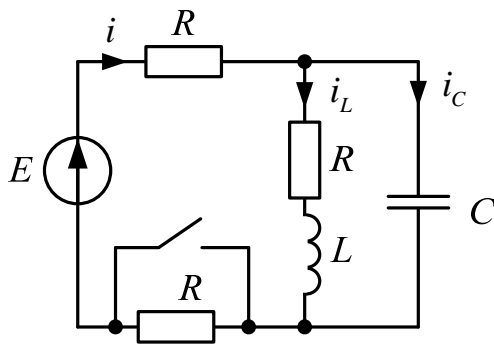


Рис. 2

**Дано:**

$$E = 100 \text{ В};$$

$$L = 1 \text{ Гн};$$

$$R = 100 \text{ Ом}.$$

**Определить:**

начальные условия

и принуждённые составляющие.

Определяем независимые начальные условия (**ННУ**) в схеме **до коммутации**. Так как при постоянном источнике конденсатор представляет собой разрыв, а катушка становится закороткой, то

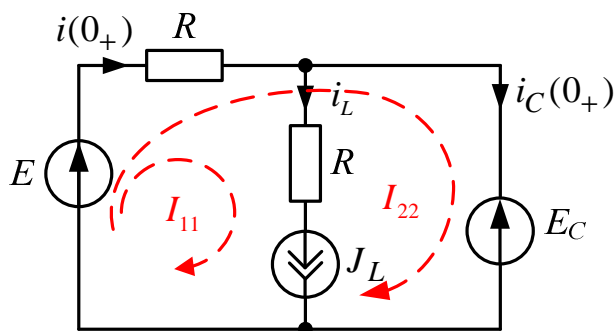
$$i_L(0_-) = \frac{E}{3R} = 1 \text{ А};$$

$$u_C(0_-) = i_L(0_-)R = 100 \text{ В}.$$

Определяем **зависимые начальные условия (ЗНУ)**. Составляем схему для первого мгновения после коммутации при  $t(0_+)$ . По теореме компенсации заменим конденсатор источником напряжения, величина которого равна напряжению на конденсаторе до коммутации

$E_C = u_C(0_-)$ . Индуктивность заменим на источник тока величиной, равной  $J_L = i_L(0_-)$ . Ключ в схеме после коммутации изменяет своё положение на противоположное.

Сопротивление  $R$  закорачивается ключом, поэтому его из схемы можно исключить. Для расчёта токов используем метод контурных токов.



$$\begin{aligned} J_L &= i_L(0_-); \\ E_C &= u_C(0_-). \end{aligned}$$

Рис. 3

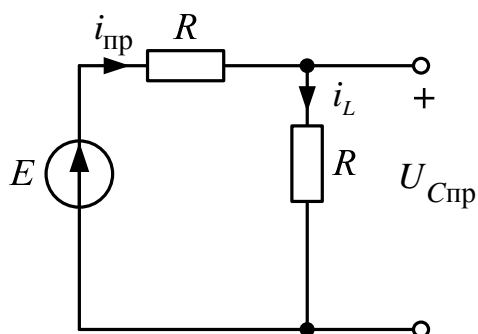
$$\begin{cases} I_{11} = J_L = 1 \text{ A}; \\ I_{22}R + I_{11}R = E - E_C. \end{cases}$$

$$I_{22} = \frac{E - E_C - I_{11}R}{R} = 1 \text{ A}; \quad i(0_+) = I_{11} + I_{22} = 2 \text{ A}; \quad i_C(0_+) = I_{22} = 1 \text{ A}.$$

$$E_C - u_L(0_+) = R \cdot i_L(0_+); \quad u_L(0_+) = E_C - R \cdot i_L(0_+) = 0.$$

Определяем **принуждённые составляющие**.

В установившемся режиме в схеме после коммутации, при  $t = \infty$ ,



$$\begin{aligned} i_{\text{пр}} = i_{L_{\text{пр}}} &= \frac{E}{2R} = 1,5 \text{ A}; \\ u_{C_{\text{пр}}} &= R \cdot i_{L_{\text{пр}}} = 150 \text{ В}; \\ i_{C_{\text{пр}}} &= 0; \\ u_{L_{\text{пр}}} &= 0. \end{aligned}$$

Рис. 4



### 1.3. Классический метод расчёта переходных процессов

Метод используется для расчёта линейных цепей, которые характеризуются линейными дифференциальными уравнениями, составленными по законам Кирхгофа для мгновенных значений в цепи после коммутации:

$$a_n \cdot \frac{d^n f(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} + a_1 \cdot \frac{df(t)}{dt} + a_0 \cdot f(t) = F(t), \quad (1.1)$$

где  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  – постоянные коэффициенты, определяемые параметрами ( $R, L, C$ ) и структурой цепи после коммутации.

Мы получили неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение такого уравнения записывается в виде суммы двух составляющих – общего решения однородного уравнения  $f_{o.p}(t)$  и частного решения неоднородного уравнения  $f_{ч.н}(t)$ :

$$f(t) = f_{o.p}(t) + f_{ч.н}(t) = f_{пр}(t) + f_{св}(t).$$

В электротехнике общее решение однородного уравнения  $f_{o.p}(t)$  называют свободной составляющей  $i_{св}(t) = A \cdot e^{pt}$ , потому что эта составляющая не зависит от источника энергии – внешнего воздействия, т.е. она свободна от внешнего влияния и зависит от параметров цепи.

Частное решение неоднородного уравнения  $f_{ч.н}(t)$  в электротехнике называют принуждённой составляющей. Она зависит от источника энергии и полностью повторяет его функциональную зависимость от времени с неким коэффициентом пропорциональности. Например, если источник энергии постоянный, то принуждённая составляющая будет постоянной. Если источник энергии имеет синусоидальный вид, то и принуждённая составляющая будет иметь синусоидальный вид.

Характеристическое уравнение (1.2) получено из уравнения (1.1), путём замены производных высших порядков на  $p$ :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0, \quad (1.2)$$

где  $p$  – корень характеристического уравнения.

Корни уравнения определяются параметрами цепи. В зависимости от вида корней характеристического уравнения определяется вид свободной составляющей и тип переходного процесса:

- Корни вещественные, отрицательные и кратные.  
*Критический режим*

$$f_{\text{св}}(t) = (A_1 + A_2 t + \dots + A_n t^{n-1}) \cdot e^{p t} .$$

- Корни вещественные отрицательные и неравные.  
*Апериодический режим*

$$f_{\text{св}}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t} .$$

- Корни комплексные попарно-сопряжённые с отрицательной вещественной частью. *Колебательный режим*

$$p_{1,2} = -\delta_2 \pm j\omega_{\text{св}2} ;$$

.....

$$p_{n-1,n} = -\delta_n \pm j\omega_{\text{св}n} .$$

$$f_{\text{св}}(t) = A_2 e^{-\delta_2 t} \cos(\omega_{\text{св}2} t + \beta_2) + A_n e^{-\delta_n t} \cos(\omega_{\text{св}n} t + \beta_n) ,$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_n, \beta_2, \dots, \beta_n$  – постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями;  $\delta_2, \dots, \delta_n$  – коэффициенты затухания свободных колебаний [1/с];  $\omega_{\text{св}2}, \dots, \omega_{\text{св}n}$  – угловые частоты свободных колебаний  $\left( \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right)$ .

#### 1.4. Объединение реактивных элементов

В зависимости от количества необъединяемых реактивных элементов определяется **порядок цепи**. Цепь с одним реактивным элементом  $L$  или  $C$  называется цепью **первого порядка**, цепь с двумя необъединяемыми реактивными элементами – цепью **второго порядка** и т.д.

##### Последовательное соединение

1) индуктивных элементов:

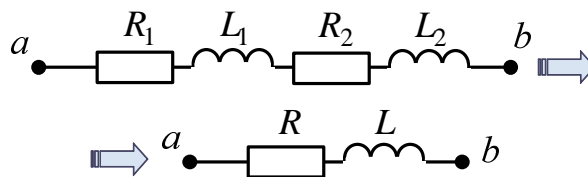


Рис. 5

здесь  $R = R_1 + R_2$ ;  $L = L_1 + L_2$ ;

2) ёмкостей:

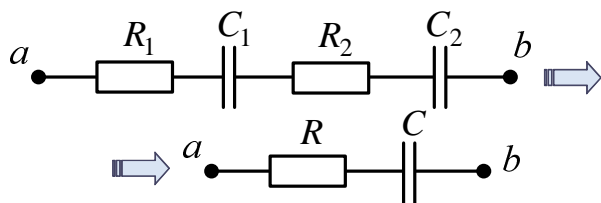


Рис. 6

здесь  $R = R_1 + R_2$ ;  $C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$ .

### Параллельное соединение

1) индуктивных элементов:

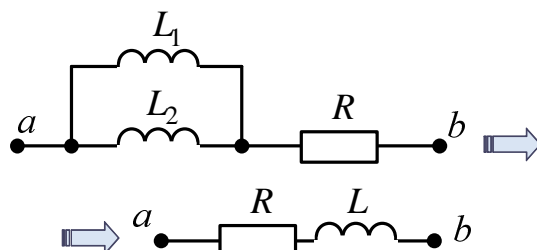


Рис. 7

здесь  $R = R_1 + R_2$ ;  $L = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$ ;

2) ёмкостей:

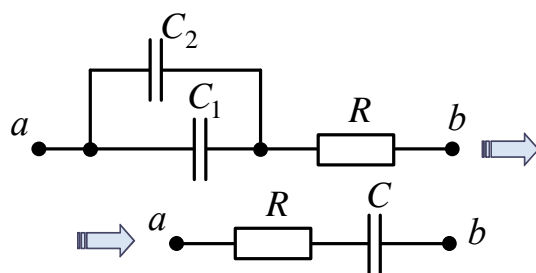


Рис. 8

здесь  $R = R_1 + R_2$ ;  $C = C_1 + C_2$ .

## 1.5. Линейная цепь первого порядка

Цепь первого порядка содержит в послекоммутационной цепи только один реактивный элемент –  $L$  или  $C$ , характеризуется дифференциальным уравнением первого порядка

$$a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = F(t), \quad (1.3)$$

где  $a_1, a_0$  – постоянные коэффициенты;  $f(t)$  – напряжение или ток переходного процесса;  $F(t)$  – функция, определяемая источниками после коммутации.

Характеристическое уравнение

$$a_1 p + a_0 = 0,$$

где  $p = -\frac{a_0}{a_1} < 0$ ,  $\frac{1}{\tau}$  – корень характеристического уравнения.

Решение уравнения (1.3)

$$f(t) = f_{\text{пр}}(t) + f_{\text{св}}(t) = f_{\text{пр}}(t) + Ae^{pt},$$

где  $f_{\text{пр}}(t)$  – принуждённая составляющая;  $f_{\text{св}}(t) = Ae^{pt}$  – свободная составляющая;  $A$  – постоянная интегрирования.

Длительность переходного процесса оценивается с использованием величины, называемой  $\tau = \frac{1}{|p|}$  – **постоянная времени**. Как правило, за  $5\tau \div 10\tau$  переходный процесс заканчивается.

### Порядок расчёта:

1. Записываем решение в виде принужденной и свободной составляющих

$$i(t) = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}(t) = i(\infty) + Ae^{pt} \text{ или } u(t) = u_{\text{пр}} + u_{\text{св}}(t) = u(\infty) + Be^{pt}.$$

2. **ННУ**. Определяем независимые начальные условия в цепи до коммутации  $i_L(0_-)$  или  $u_C(0_-)$ .

3. **ЗНУ**. Определяем искомую величину при  $t(0_+)$ :  $i(0_+)$  или  $u(0_+)$ .

4. Определяем принужденную составляющую в схеме после коммутации  $i_{\text{пр}} = i(\infty)$  или  $u_{\text{пр}} = u(\infty)$ .

5. Определяем корень характеристического уравнения  $p$  через входное сопротивление  $Z(p) = 0$  в схеме после коммутации.

6. Определяем постоянную интегрирования из начальных условий  $A = i(0_+) - i_{пр}(0)$  или  $B = u(0_+) - u_{пр}(0)$ .

Записываем окончательное решение и строим график.

### Пример

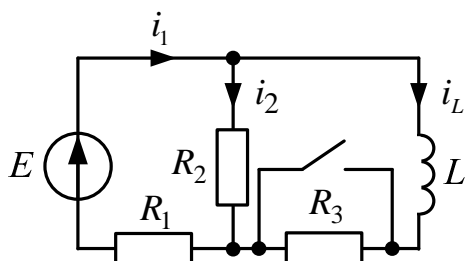


Рис. 9

**Дано:**

$$E = 100 \text{ В};$$

$$L = 1 \text{ Гн};$$

$$R_1 = 100 \text{ Ом};$$

$$R_2 = 25 \text{ Ом};$$

$$R_3 = 100 \text{ Ом}.$$

**Определить:**  $i_1(t)$

1. Для схемы до коммутации определяем независимые начальные условия:

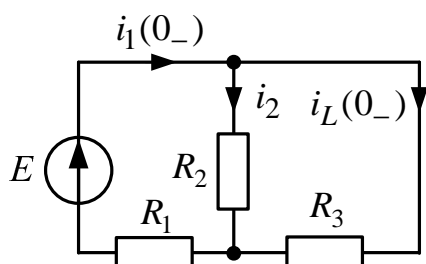


Рис. 10

$$i_1(0_-) = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = 0,833 \text{ А};$$

$$i_L(0_-) = i_1(0_-) \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 0,167 \text{ А}.$$

2. ЗНУ Определяем искомую величину  $i_1(0_+)$  при  $t(0_+)$ :

$$J_L = i_L(0_-);$$

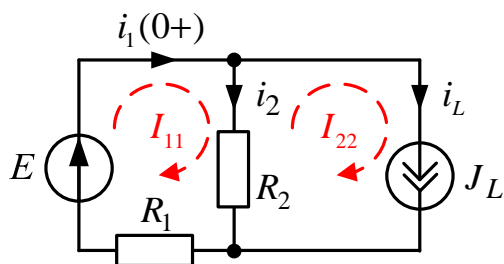


Рис. 11

$$J_L = i_L(0_-);$$

$$\begin{cases} I_{22} = J_L; \\ I_{11}(R_1 + R_2) - I_{22}R_2 = E; \end{cases}$$

$$i_1(0_+) = I_{11} = \frac{e + J_L R_2}{R_1 + R_2} = 0,833 \text{ А}.$$

3. Определяем принужденную составляющую  $i_{1пр} = i(\infty)$  в схеме после коммутации:

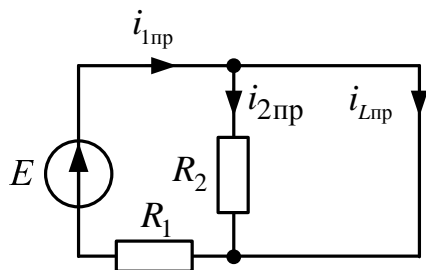
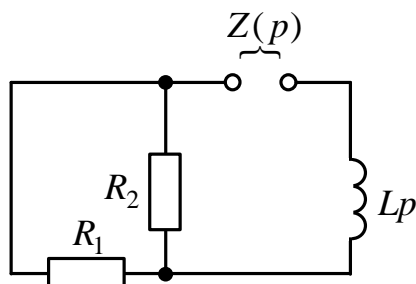


Рис. 12

$$i_{np1} = \frac{E}{R_1} = 1 \text{ А.}$$

4. Определяем корень характеристического уравнения  $p$  :



$$Z(p) = R_1 + \frac{R_2 p L}{R_2 + p L} = 0;$$

$$p = -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} = -20 \frac{1}{\text{с}}.$$

Рис. 13

5. Определяем постоянную интегрирования:

$$A = i_1(0_+) - i_{np1} = -0,167 \text{ А.}$$

6. Записываем окончательный результат:

$$i_1(t) = 1 - 0,167 e^{-20t} = 1 - 0,167 e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ А.}$$

где  $\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ с}$  – постоянная времени.

### Пример

Документ Mathcad

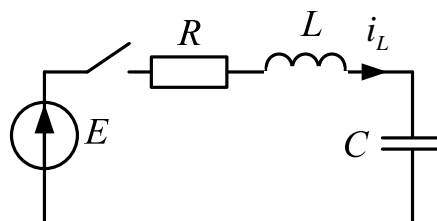
ORIGIN := 1

E := 8

R := 220

L := 100 · 10<sup>-3</sup>

с := 0.22 · 10<sup>-6</sup>



**Классический метод, постоянный источник, цепь второго порядка**

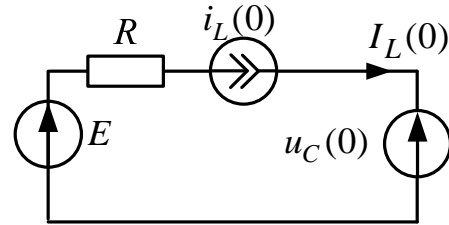
1. Определяем независимые начальные условия:

$$i_{L0} := 0 \quad U_{C0} := 0$$

2. Определяем зависимые начальные условия:

условия:

$$U_{L0} := E \quad U_{L0} = 8$$



3. Определяем принуждённую составляющую:

$$i_{Lпр} := 0$$

4. Определяем корень характеристического уравнения:

$$p := \frac{1}{c \cdot p} + R + L \cdot p \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve, p} \\ \text{float, 5} \end{array} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} (-1100.) - 6651.7 \cdot i \\ (-1100.) + 6651.7 \cdot i \end{bmatrix}$$

5. Определяем постоянные интегрирования:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} i_{L0} - i_{Lпр} \\ \frac{U_{L0}}{L} \end{pmatrix} \quad B := a^{-1} \cdot b \quad B = \begin{pmatrix} 6.014i \times 10^{-3} \\ -6.014i \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

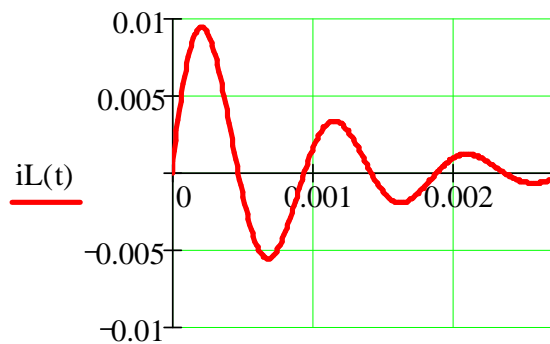
6. Окончательный результат:

$$i_L(t) := i_{Lпр} + B_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + B_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}$$

$$i_L(t) \left| \begin{array}{l} \text{complex} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow .120e-1 \cdot e^{(-.110e4) \cdot t} \cdot \sin(.665e4 \cdot t)$$

7. График искомой функции:

$$\tau := \frac{1}{|\text{Re}(p_1)|} \quad \tau = 9.091 \times 10^{-4} \quad t := 0, \tau \cdot 0.01 .. 5 \cdot \tau \quad T_{\text{osc}} := 3 \cdot \tau$$



## 1.6. Классический метод расчета переходных процессов в цепях первого порядка с гармоническим источником

Установившиеся режимы рассчитываются символическим методом.

### Порядок расчёта:

1. Записываем решение в виде принужденной и свободной составляющих  $i(t) = i(t) + Ae^{pt}$  или  $u(t) = u_{\text{пр}}(t) + Ve^{pt}$ .
2. **ННУ**. Определяем независимые начальные условия в цепи до коммутации  $\dot{I}_L(0_-) \rightarrow i_L(0_-)$  или  $\dot{U}_C(0_-) \rightarrow u_C(0_-)$ .
3. **ЗНУ**. Определяем искомую величину при  $t(0_+)$   $i(0_+)$  или  $u(0_+)$ .
4. Определяем принужденную составляющую в схеме после коммутации  $\dot{I}_{\text{пр}} \rightarrow i_{\text{пр}}(t) \rightarrow i_{\text{пр}}(0)$  или  $\dot{U}_{\text{пр}} \rightarrow u_{\text{пр}}(t) \rightarrow u_{\text{пр}}(0)$ .
5. Определяем корень характеристического уравнения  $p$  через входное сопротивление  $Z(p) = 0$ , в схеме после коммутации.
6. Определяем постоянную интегрирования из начальных условий  $A = i(0_+) - i_{\text{пр}}(0)$  или  $B = u(0_+) - u_{\text{пр}}(0)$ .
7. Записываем окончательное решение и строим график.

### Пример

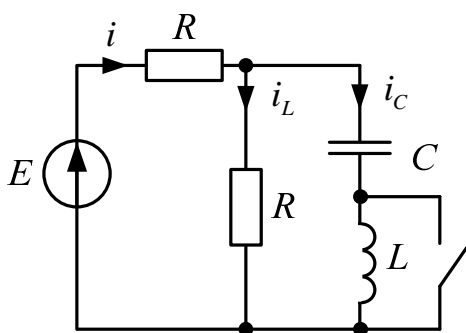


Рис. 14

### Дано:

$$e = 100\sqrt{2} \sin(100t + 45^\circ), \text{ В};$$

$$R = 100 \text{ Ом};$$

$$L = 1 \text{ Гн};$$

$$C = 100 \text{ мкФ}.$$

### Определить: $i(t)$

1. **ННУ**. Определяем независимые начальные условия в цепи до коммутации:

$$\dot{I}_L(0_-) \rightarrow i_L(0_-) \text{ или } \dot{U}_C(0_-) \rightarrow u_C(0_-);$$

$$\dot{E} = 100e^{j45^\circ} \text{ В}; \quad X_L = \omega L = 100 \text{ Ом}; \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = 100 \text{ Ом},$$

т.к.  $Z_{ab}^{(д)} = jX_L - jX_C = 0$  – резонанс напряжений.



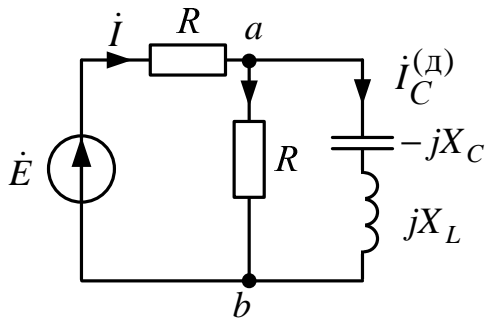


Рис. 15

$$i^{(д)} = i_C^{(д)} = i_L^{(д)} = \frac{\dot{E}}{R} = 1e^{j45^\circ} \text{ A};$$

$$i_L(0_-) = \sqrt{2} \sin 45^\circ = 1 \text{ A};$$

$$\dot{U}_C^{(д)} = (-jX_C) \dot{I}_C = 100e^{-j45^\circ} \text{ В};$$

$$u_C(0_-) = \sqrt{2} \cdot 100 \sin(-45^\circ) = -100 \text{ В}.$$

2. ЗНУ. Определяем искомую величину  $i(0_+)$  или  $u(0_+)$  при  $t(0_+)$ :

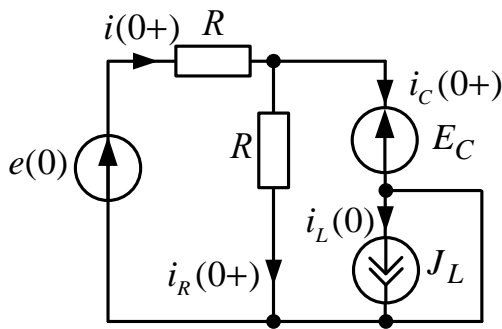


Рис. 16

$$J_L = i_L(0_-); E_C = u_C(0_-).$$

$$e(0) = 100\sqrt{2} \sin(45^\circ) = 100 \text{ В};$$

$$u_L(0_+) = 0;$$

$$e(0) - E_C = R \cdot i(0_+);$$

$$i(0_+) = \frac{e(0) - E_C}{R} = 2 \text{ А}.$$

3. Определяем принужденную составляющую в схеме после коммутации  $\dot{I}_{пр} \rightarrow i_{пр}(t) \rightarrow i_{пр}(0)$  или  $\dot{U}_{пр} \rightarrow u_{пр}(t) \rightarrow u_{пр}(0)$ .

Схема после коммутации, установившийся режим, гармонический источник, символический метод:

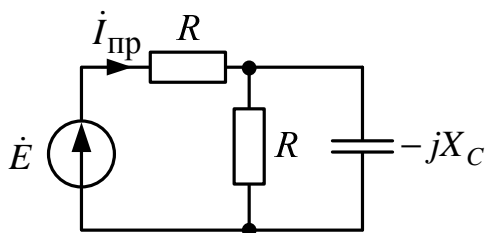


Рис. 17

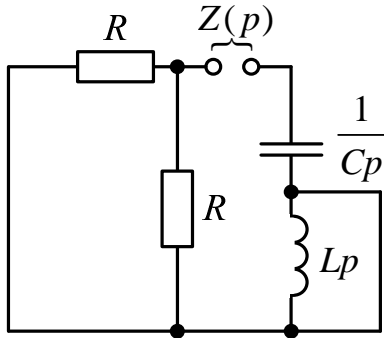
$$\underline{Z}^{(п)} = R + \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C} = 158e^{-j18,4^\circ} \text{ Ом};$$

$$i_{пр} = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}^{(п)}} = 0,63e^{j63,4^\circ} \text{ А};$$

$$i_{пр}(t) = \sqrt{2} \cdot 0,63 \sin(100t + 63,4^\circ), \text{ А};$$

$$i_{пр}(0) = \sqrt{2} \cdot 0,63 \sin 63,4^\circ = 0,8 \text{ А}.$$

4. Определяем корень характеристического уравнения  $p$  через входное сопротивление  $Z(p) = 0$  в схеме после коммутации:



$$Z(p) = \frac{R}{2} + \frac{1}{Cp} = 0;$$

$$p = -\frac{2}{RC} = -200 \frac{1}{c}.$$

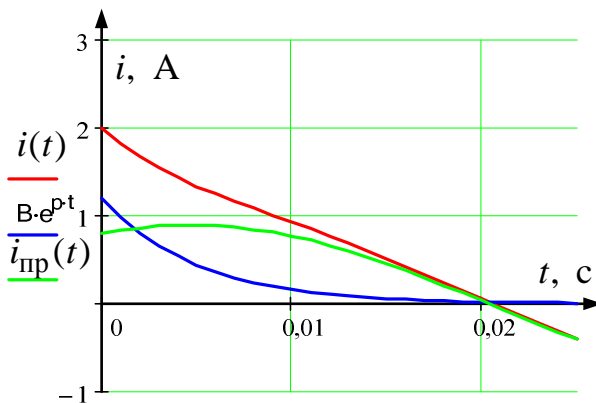
Рис. 18

5. Определяем постоянную интегрирования из начальных условий

$$A = i(0_+) - i_{\text{пр}}(0) = 2 - 0,794 = 1,2 \text{ А}.$$

6. Записываем окончательное решение и строим график:

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 0,63 \sin(100t + 63,4^\circ) + 1,2e^{-200t}, \text{ А};$$



$$\tau = \frac{1}{|p|} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с};$$

$$t_{\text{п}} = 5\tau = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ с};$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 6,28 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$$

Рис. 19

### 1.7. Обобщенные законы коммутации

В переходных режимах может наблюдаться быстрая начальная импульсная часть переходного процесса, которая для упрощения анализа принимается приближенно происходящей мгновенно (скачком).

При этом законы коммутации будут нарушаться, поэтому в этих случаях используются обобщенные законы коммутации:

1. Для каждого контура, в который входят индуктивности, связанные в узел, имеем

$$\sum \Psi_k(0_+) = \sum \Psi_k(0_-) \text{ или } \sum L_k i_{L_k}(0_+) = \sum L_k i_{L_k}(0_-).$$

2. Для каждого из узлов контура, составленного из емкостей, имеем

$$\sum q_k(0_+) = \sum q_k(0_-) \text{ или } \sum C_k u_{C_k}(0_+) = \sum C_k u_{C_k}(0_-).$$

### Пример

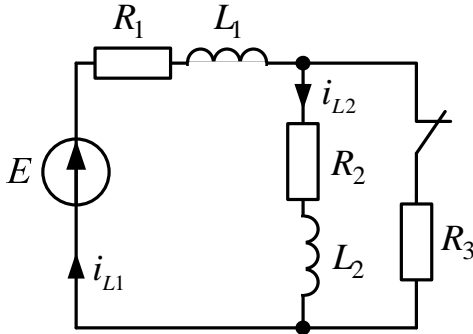


Рис. 20

### Дано:

$$\begin{aligned} E &= 100 \text{ В}; \\ R_1 &= 10 \text{ Ом}; \\ R_2 &= R_3 = 30 \text{ Ом}; \\ L_1 &= 1 \text{ Гн}; \\ L_2 &= 3 \text{ Гн}; \\ C &= 100 \text{ мкФ}. \end{aligned}$$

**Определить:**  $i_{L1}(t)$

1. Для схемы до коммутации определяем независимые начальные условия:

$$i_{L1}(0_-) = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = 4 \text{ А};$$

$$i_{L2}(0_-) = i_{L1}(0_-) \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 2 \text{ А}.$$

Суммарное потокосцепление

$$\sum \Psi_k(0_-) = L_1 i_{L1}(0_-) + L_2 i_{L2}(0_-) = 10 \text{ Вб}.$$

Суммарная энергия

$$W_M(0_-) = \frac{L_1 \cdot i_{L1}^2(0_-)}{2} + \frac{L_2 \cdot i_{L2}^2(0_-)}{2} = 14 \text{ Дж}.$$

2. **ЗНУ.** Схема после коммутации, при  $t(0_+)$ ,  $i_{L1}(0_+) = i_{L2}(0_+)$ , тогда

$$\sum \Psi_k(0_+) = L_1 i_{L1}(0_+) + L_2 i_{L2}(0_+) = (L_1 + L_2) \cdot i_{L1}(0_+),$$

но  $\sum \Psi_k(0_+) = \sum \Psi_k(0_-)$ , тогда

$$i_{L1}(0_+) = i_{L2}(0_+) = \frac{\sum \Psi_k(0_-)}{L_1 + L_2} = 2,5,$$

причём 
$$W_M(0_+) = \frac{L_1 \cdot i_{L1}^2(0_+)}{2} + \frac{L_2 \cdot i_{L2}^2(0_+)}{2} = 12,5 \text{ Дж.}$$

«Пропавшая» энергия  $\Delta W_M = W_M(0_-) - W_M(0_+) = 1,5 \text{ Дж}$ , которая израсходована на потери в проводах, искру и излучение.

3. Определяем принужденную составляющую в схеме после коммутации:

$$i_{1\text{пр}} = i(\infty), \quad i_{L1\text{пр}} = i_{L2\text{пр}} = \frac{E}{R_1 + R_2} = 2,5 \text{ А.}$$

4. Определяем корень характеристического уравнения  $p$

$$Z(p) = R_1 + pL_1 + R_2 + pL_2 = 0;$$

$$p = -\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2} = -10 \frac{1}{\text{с}}.$$

5. Определяем постоянную интегрирования  $A = i_{L1}(0_+) - i_{L1\text{пр}} = 0$ , т.е. переходного процесса не будет.

6. Записываем окончательный результат:

$$i_{L1}(t) = i_{L1\text{пр}} + Ae^{pt} = 2,5 \text{ А.}$$

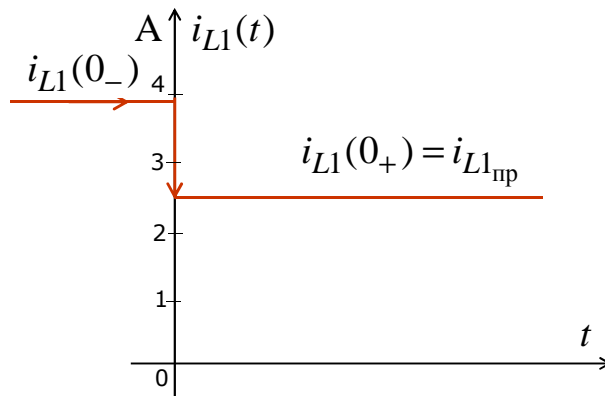


Рис. 21

### Пример

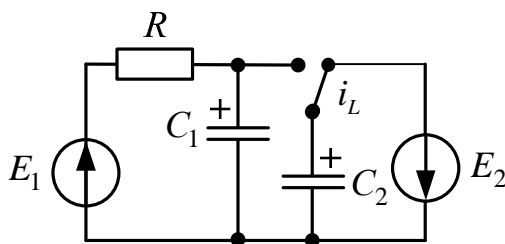


Рис. 22

### Дано:

$$E_1 = E_2 = 100 \text{ В;}$$

$$C_1 = 200 \text{ мкФ;}$$

$$C_2 = 100 \text{ мкФ;}$$

$$R = 100 \text{ Ом.}$$

**Определить:**  $u_{C_2}(t)$

1. Для схемы до коммутации определяем независимые начальные условия:

$$u_{C_1}(0_-) = E_1 = 100 \text{ В}; \quad u_{C_2}(0_-) = -E_2 = -100 \text{ В}.$$

Суммарный заряд

$$\sum q_k(0_-) = C_1 u_{C_1}(0_-) + C_2 u_{C_2}(0_-) = 0,01 \text{ Кл}.$$

Суммарная энергия

$$W_9(0_-) = \frac{C_1 \cdot u_{C_1}^2(0_-)}{2} + \frac{C_2 \cdot u_{C_2}^2(0_-)}{2} = 1,5 \text{ Дж}.$$

2. **ЗНУ**. Схема после коммутации, при  $t(0_+)$ ,  $u_{C_1}(0_+) = u_{C_2}(0_+)$ , тогда

$$\sum q_k(0_+) = C_1 u_{C_1}(0_+) + C_2 u_{C_2}(0_+) = (C_1 + C_2) \cdot u_{C_2}(0_+),$$

но  $\sum q_k(0_+) = \sum q_k(0_-)$ , тогда

$$u_{C_2}(0_+) = \frac{\sum q_k(0_-)}{C_1 + C_2} = 33,333 \text{ В},$$

причём

$$W_9(0_+) = \frac{C_1 \cdot u_{C_1}^2(0_+)}{2} + \frac{C_2 \cdot u_{C_2}^2(0_+)}{2} = 0,166 \text{ Дж}.$$

«Пропавшая» энергия  $\Delta W_9 = W_9(0_-) - W_9(0_+) = 1,334 \text{ Дж}$ , которая израсходована на потери в проводах, искру и излучение.

3. Определяем принужденную составляющую в схеме после коммутации:

$$u_{C_2_{\text{пр}}} = u_{C_1_{\text{пр}}} = E_1 = 100 \text{ В}.$$

4. Определяем корень характеристического уравнения  $p$ :

$$Z(p) = R + \frac{1}{p(C_1 + C_2)} = 0;$$

$$p = -\frac{1}{R(C_1 + C_2)} = -33,333 \frac{1}{\text{с}}.$$

5. Определяем постоянную интегрирования:

$$B = u_{C_2}(0_+) - u_{C_2_{\text{пр}}} = -66,666 \text{ В}.$$

6. Записываем окончательный результат:

$$u_{C2}(t) = u_{C2_{\text{пр}}} + Be^{pt} = 100 - 66,666e^{-33,333t}, \text{ В};$$

$$\tau = \frac{1}{|p|} = 0,03 \text{ с}, \quad t_{\text{п}} = 5\tau = 0,15 \text{ с}.$$

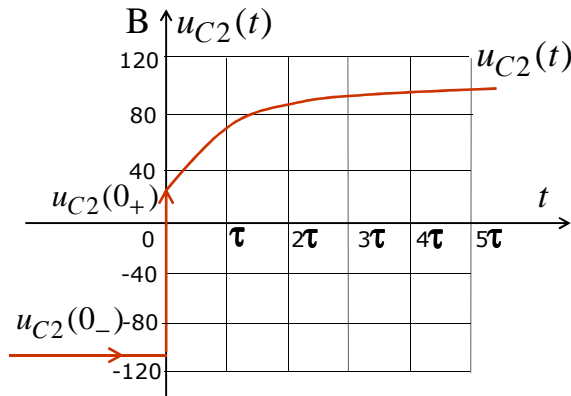


Рис. 23

### 1.8. Расчет переходных процессов в цепях 2-го порядка классическим методом

Цепь 2-го порядка после коммутации:

содержит

–  $L$  и  $C$ ;

– или две  $L$ ;

– или две  $C$ ;

характеризуется уравнениями

$$a_2 \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = F(t);$$

$$f(t) = f_{\text{пр}}(t) + f_{\text{св}}(t),$$

где  $f(t)$  – напряжение или ток переходного процесса;  $a_0, a_1, a_2$  – постоянные коэффициенты;  $F(t)$  – функция, определяемая источниками после коммутации;  $f_{\text{пр}}$  и  $f_{\text{св}}$  – принужденная и свободная составляющие.

Характеристическое уравнение –  $a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$ .

Корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2}}.$$

В зависимости от корней характеристического уравнения возможны следующие виды переходных процессов:

- Если  $\frac{a_1^2}{4a_2^2} > \frac{a_0}{a_2}$ , корни – вещественные, отрицательные и разные.

*Апериодический режим*

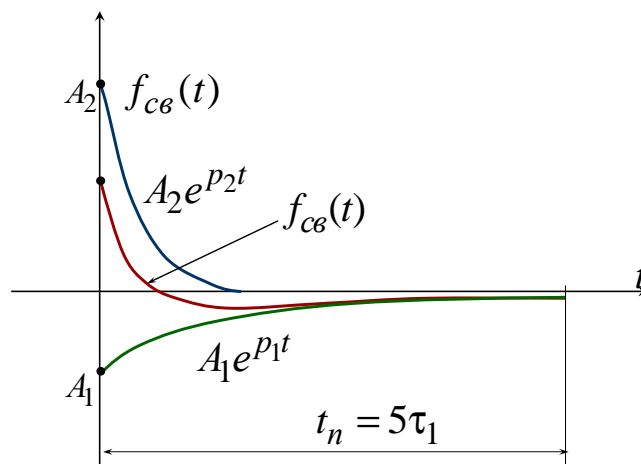


Рис. 24

$$f_{св}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t},$$

$$\tau_1 = \frac{1}{|p_1|}, \quad \tau_2 = \frac{1}{|p_2|} \text{ – постоянные времени;}$$

$$t_{\Pi} = 5 \cdot \max(\tau_{1,2}) \text{ – длительность переходного процесса.}$$

- Если  $\frac{a_1^2}{4a_2^2} = \frac{a_0}{a_2}$ , корни – вещественные, отрицательные и равные:

*Критический режим*

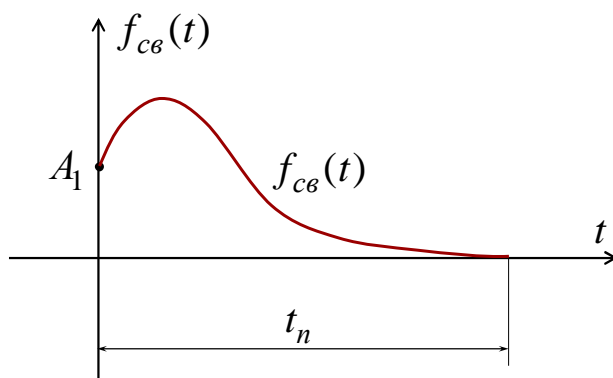


Рис. 25

$$f_{св}(t) = (A_1 + A_2 t + \dots + A_n t^{n-1}) \cdot e^{pt},$$

$$p = p_1 = p_2 = -\frac{a_1}{2a_2}; \quad t_{\Pi} = \frac{5}{|p|} \text{ – длительность переходного процесса.}$$

- Если  $\frac{a_1^2}{4a_2^2} = \frac{a_0}{a_2}$ , корни – комплексно-сопряжённые, с отрицательной вещественной частью:

*Колебательный режим, или периодический режим*

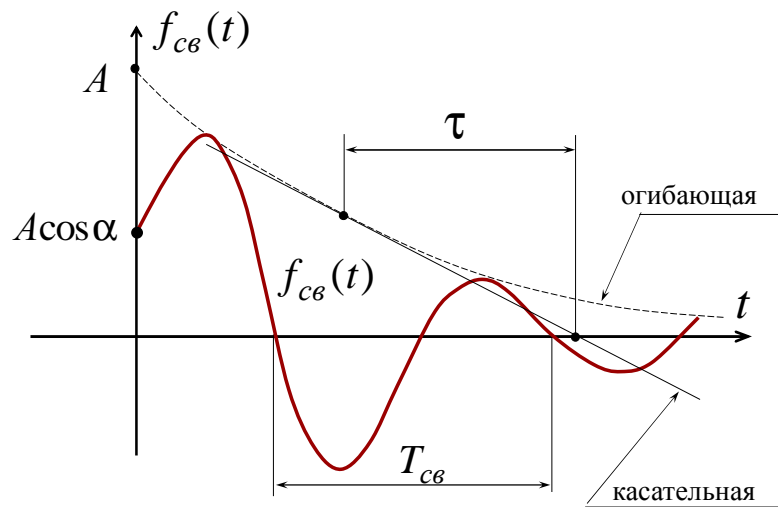


Рис. 26

$$f_{св}(t) = A \cdot e^{-\delta_{св} t} \cos(\omega_{св} t + \alpha),$$

где  $p_{1,2} = -\delta_{св} \pm j\omega_{св}$  ;

$$\delta_{св} = \frac{a_1}{2a_2} \left( \frac{1}{c} \right) \text{ – коэффициент затухания свободных колебаний;}$$

$$\omega_{св} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2} - \frac{a_1^2}{4a_2^2}} \left( \frac{1}{c} \right) \text{ – угловая частота свободных колебаний;}$$

$$T_{св} = \frac{2\pi}{\omega_{св}} \text{ – период свободных колебаний;}$$

$$\tau = \frac{1}{\delta_{св}} \text{ (с) – постоянная времени огibaющей свободных колебаний;}$$

$$t_{\Pi} = 5\tau \text{ (с) – длительность переходного процесса;}$$

$A, \alpha$  – постоянные интегрирования.



### Пример

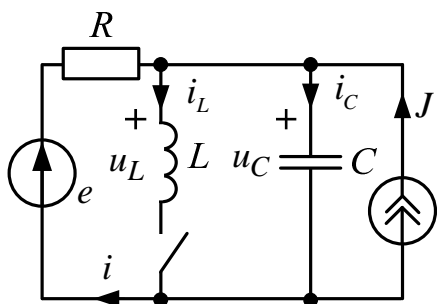


Рис. 27

**Дано:**

$$E = 100 \text{ В};$$

$$J = 2 \text{ А};$$

$$L = 6,25 \text{ Гн};$$

$$C = 100 \text{ мкФ};$$

$$R = 100 \text{ Ом}.$$

**Определить:**  $i(t)$

Для схемы после коммутации по законам Кирхгофа составляем уравнения

$$-i - J + i_L + i_C = 0; \quad (1.4)$$

$$u_C = u_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad (1.5)$$

$$e = R \cdot i + u_C, \quad (1.6)$$

причём

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}. \quad (1.7)$$

Из уравнений (1.6) и (1.7)

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d(e - R \cdot i)}{dt} = C \frac{de}{dt} - R \cdot C \frac{di}{dt}. \quad (1.8)$$

Из уравнений (1.5) и (1.6)

$$i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt = \frac{1}{L} \int u_C dt = \frac{1}{L} \int (e - R \cdot i) dt. \quad (1.9)$$

Из уравнений (1.4), (1.8), (1.9)

$$-i - J + \frac{1}{L} \int (e - R \cdot i) dt + C \frac{de}{dt} - R \cdot C \frac{di}{dt} = 0. \quad (1.10)$$

Продифференцируем уравнение (1.10)

$$-\frac{di}{dt} - \frac{dJ}{dt} + \frac{e}{L} - \frac{R}{L} \cdot i + C \frac{d^2 e}{dt^2} - R \cdot C \frac{d^2 i}{dt^2} = 0. \quad (1.11)$$

В результате из уравнения (1.11)

$$R \cdot C \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{e}{L} + C \frac{d^2 e}{dt^2} - \frac{dJ}{dt}, \quad (1.12)$$

или

$$F(t) = \frac{e}{L} + C \frac{d^2 e}{dt^2} - \frac{dJ}{dt},$$

где  $a_2 = R \cdot C$ ;  $a_1 = 1$ ;  $a_0 = \frac{R}{L}$ .

Решение уравнения (1.12):  $i(t) = i_{\text{пр}}(t) + i_{\text{св}}(t)$ . Так как  $e = 100 = \text{const}_1$ ,  $J = 2 = \text{const}_2$ , то  $i_{\text{пр}}(t) = I_{\text{пр}} = \text{const}_3$ . Подставим  $I_{\text{пр}}$  в уравнение (1.12):

$$RC \frac{d^2 I_{\text{пр}}}{dt^2} + \frac{dI_{\text{пр}}}{dt} + \frac{R}{L} I_{\text{пр}} = \frac{e}{L} + C \frac{d^2 e}{dt^2} - \frac{dJ}{dt}.$$

$\begin{matrix} \swarrow & \swarrow & & \swarrow & \swarrow \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{matrix}$

Тогда  $I_{\text{пр}} = \frac{e}{R} = 1$ ;

$$i_{\text{пр}}(t) = I_{\text{пр}}$$

можно также найти из расчета установившегося режима после коммутации ( $t = \infty$ ). По второму закону Кирхгофа  $e = R \cdot I_{\text{пр}}$ ,  $I_{\text{пр}} = \frac{e}{R} = 1$  А.

Характеристическое уравнение –

$$RCp^2 + p + \frac{R}{L} = 0; \quad (1.10)$$

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}}, \quad p_1 = -20 \left( \frac{1}{\text{с}} \right), \quad p_2 = -80 \left( \frac{1}{\text{с}} \right) -$$

апериодический переходный процесс. Уравнение (1.10) можно также получить из  $Z(p) = 0$  после коммутации:

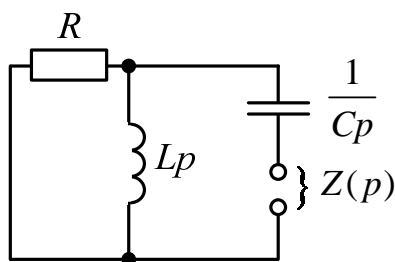


Рис. 28

$$Z(p) = \frac{1}{pC} + \frac{pL \cdot R}{pL + R} = 0,$$

или

$$RCp^2 + p + \frac{R}{L} = 0.$$

При апериодическом переходном процессе  $i_{CB}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$ , тогда

$$i(t) = i_{\text{пр}}(t) + i_{CB}(t) = 1 + A_1 e^{-20t} + A_2 e^{-80t}.$$

Для определения  $A_1$  и  $A_2$  найдем  $i(0_+)$  и  $\left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0_+}$  – это зависимые начальные условия.

Определяем независимые начальные условия  $i_L(0_-)$  и  $u_C(0_-)$ :

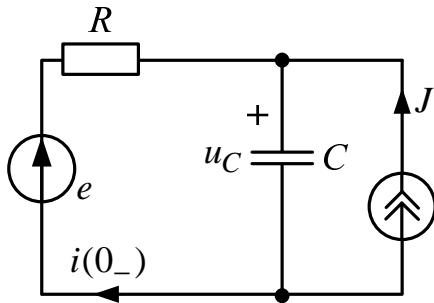


Рис. 29

$$i_L(0_-) = 0;$$

$$u_C(0_-) = e + RJ = 300 \text{ В},$$

причём

$$i(0_-) = -J = -2 \text{ А}.$$

Схема после коммутации при  $t = 0_+$ :

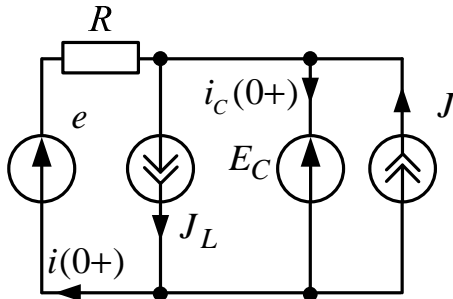


Рис. 30

$$J_L = i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0;$$

$$E_C = u_C(0_-) = u_C(0_+) = 300 \text{ В}.$$

По второму закону Кирхгофа

$$e - E_C = R \cdot i(0_+),$$

тогда  $i(0_+) = \frac{e - E_C}{R} = -2 \text{ А}.$

Для определения  $\left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0_+}$  используем уравнение (1.6)

$e = R \cdot i(t) + u_C$ , которое продифференцируем:

$$\frac{de}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{du_C}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i_C}{C},$$

0

т.е. 
$$\left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0_+} = -\frac{i_C(0_+)}{RC};$$

$i_C(0_+)$  найдем по первому закону Кирхгофа:

$$-i(0_+) - J + J_L + i_C(0_+) = 0;$$

$$i_C(0_+) = i(0_+) + J - J_L = -2 + 2 - 0 = 0, \text{ тогда } \left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0_+} = 0 \left( \frac{\text{A}}{\text{с}} \right).$$

Таким образом,

$$i(t) = 1 + A_1 e^{-20t} + A_2 e^{-80t}; \quad \frac{di(t)}{dt} = -20A_1 e^{-20t} - 80A_2 e^{-80t}.$$

$$\text{Или, при } t = 0_+, \begin{cases} i(0_+) = 1 + A_1 + A_2 = -2; \\ \left. \frac{di(t)}{dt} \right|_{t=0_+} = -20A_1 - 80A_2 = 0; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1 = -4 \text{ (A)}; \\ A_2 = 1 \text{ (A)}. \end{cases}$$

Окончательный результат  $i(t) = 1 - 4e^{-20t} + 1e^{-80t}$ , А;

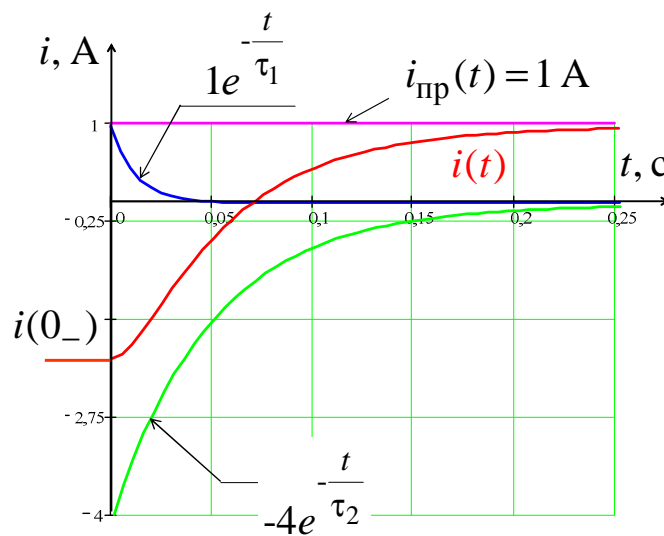


Рис. 31

$$\tau_1 = \frac{1}{20} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ с};$$

$$\tau_2 = \frac{1}{80} = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ с};$$

$$t_{\text{п}} = 5 \max(\tau_{1,2}) = 5 \cdot \tau_1 = 25 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$$

**Порядок расчета** переходных процессов в цепях 2-го порядка с постоянными или периодическими источниками:

- Для искомого напряжения или тока  $f(t)$  определяются начальные условия  $f(0_+)$  и  $\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=0_+}$ .
- Определяется принужденная составляющая  $f_{пр}(t)$ .
- При помощи  $Z(p)=0$  находятся корни характеристического уравнения.
- В зависимости от  $p_1$  и  $p_2$  записывается  $f_{св}(t)$ .
- По начальным условиям  $f(0_+)$  и  $\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=0_+}$  и находятся постоянные интегрирования.
- Записывается окончательный результат  $f(t) = f_{пр}(t) + f_{св}(t)$ .

### 1.9. Операторный метод расчёта переходных процессов

Операторный метод (преобразование Лапласа) расчета переходных процессов используется для того, чтобы обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (в пространстве оригиналов) преобразовать в алгебраические (в пространстве изображений). Очевидно, что алгебраические уравнения решаются проще. После решения алгебраического уравнения над полученной функцией (изображением) производится обратное преобразование Лапласа, получается оригинал. Полученный оригинал – это функция, которая и будет решением дифференциального уравнения.

Любой функции можно сопоставить её преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

где  $F(p)$  – изображение;  $f(t)$  – оригинал.

Приведём изображение нескольких часто встречающихся функций.

Определим изображение константы  $f(t) = A(\text{const})$ :

$$F(p) = A \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p}.$$

Найдем изображение экспоненциальной функции  $f(t) = e^{\alpha t}$ :

$$F(p) = A \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha}.$$

Изображение экспоненциальной функции поможет нам найти изображения синусоидальной косинусной функции  $\sin(\omega t)$ ,  $\cos(\omega t)$ . Для этого запишем эти функции через формулу Эйлера. Далее осуществляем следующую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} \sin(\omega t) &= \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \rightarrow \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega} \right) = \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{p+j\omega - p+j\omega}{p^2 + \omega^2} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}; \\ \cos(\omega t) &= \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{p+j\omega + p-j\omega}{p^2 + \omega^2} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Определим изображение производной  $\frac{df(t)}{dt}$  функции  $f(t)$ , имеющей изображение  $F(p)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt &= \int_0^{\infty} e^{-pt} df(t) = f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \\ &= -f(0) + pF(p). \end{aligned}$$

И наконец, определим изображение интегрального выражения  $\int_0^t f(t') dt'$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left( \int_0^t f(t') dt' \right) e^{-pt} dt &= -\frac{1}{p} \int_0^{\infty} \left( \int_0^t f(t') dt' \right) d(e^{-pt}) = \\ &= \frac{e^{-pt} \int_0^t f(t') dt'}{p} \Big|_0^{\infty} + \frac{\int_0^t f(t) e^{-pt} dt}{p} = \frac{F(p)}{p}. \end{aligned}$$

### Таблица преобразований Лапласа

$f(t)$ -оригинал	$F(p)$ -изображение
1	$1/p$
$e^{\alpha t}$	$1/(p - \alpha)$
$e^{-\alpha t}$	$1/(p + \alpha)$
$\sin(\omega t)$	$\omega/(p^2 - \omega^2)$
$\cos(\omega t)$	$p/(p^2 + \omega^2)$
$df(t)/dt$	$-f(0) + pF(p)$
$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(p)}{p}$

Для определения оригинала  $f(t)$  используется обратное преобразование Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\delta - j\infty}^{\delta + j\infty} F(p) \cdot e^{pt} dp.$$

На основании обратного преобразования Лапласа получена **теорема разложения**.

Если  $F(p) = \frac{D(p)}{B(p)} = \frac{d_0 + d_1 p + d_2 p^2 + \dots + d_m p^m}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n}$ , причем:

- $m < n$ ;
- корни  $B(p) = 0$  различны;
- корни  $D(p) = 0$  и  $B(p) = 0$  различны,

тогда

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{D(p_k)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t},$$

где  $p_k$  – корни  $B(p) = 0$ ;

$$B'(p_k) = \left. \frac{dB(p)}{dp} \right|_{p=p_k}.$$

### Пример

Дано: изображение

$$F(p) = I(p) = \frac{p+10}{p^3+6p^2+8p} = \frac{D(p)}{B(p)} \quad (\text{Ac})$$

Определить:  
оригинал

$$B(p) = p^3 + 6p^2 + 8p = p(p^2 + 6p + 8) = 0;$$

$$p_1 = 0; \quad p_2 = -2 \left( \frac{1}{c} \right); \quad p_3 = -4 \left( \frac{1}{c} \right);$$

$$B'(p) = 3p^2 + 12p + 8;$$

$$i(t) = \sum_{k=1}^{n=3} \frac{D(p_k)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t};$$

$$i(t) = \frac{0+10}{3 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 + 8} \cdot e^{0t} + \frac{-2+10}{3 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) + 8} \cdot e^{(-2)t} + \\ + \frac{-4+10}{3 \cdot (-4)^2 + 12 \cdot (-4) + 8} \cdot e^{(-4)t};$$

$$i(t) = 1,25 - 2e^{-2t} + 0,75e^{-4t}, \text{ A.}$$

### Пример

Дано: изображение

$$F(p) = U(p) = \frac{2 \cdot 10^4 p + 2 \cdot 10^6}{p(p^2 + 200p + 2 \cdot 10^4)} = \frac{D(p)}{B(p)} \quad (\text{Bc})$$

Определить:  
оригинал

$$B(p) = p(p^2 + 200p + 2 \cdot 10^4) = 0;$$

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = -100 \pm j100 \left( \frac{1}{c} \right);$$

$$B'(p) = \left( p(p^2 + 200p + 2 \cdot 10^4) \right)' = 3p^2 + 400p + 2000;$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n=3} \frac{D(p_k)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t};$$



$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 0 + 2 \cdot 10^6}{3 \cdot 0^2 + 400 \cdot 0 + 2000} e^{0t} + \frac{2 \cdot 10^4 \cdot p_2 + 2 \cdot 10^6}{3p_2^2 + 400p_2 + 2000} e^{p_2 t} + \\
&+ \frac{2 \cdot 10^4 \cdot p_3 + 2 \cdot 10^6}{3p_3^2 + 400p_3 + 2000} e^{p_3 t} = \\
&= 100 + 70,5 e^{-j135^\circ} e^{(-100+j100)t} + 70,5 e^{j135^\circ} e^{(-100-j100)t} = \\
&= 100 + 2 \cdot 70,5 e^{-100t} \cdot \frac{e^{j(100t-135^\circ)} + e^{-j(100t-135^\circ)}}{2} = \\
&= 100 + 141 e^{-100t} \cos(100t - 135^\circ), \text{ В.}
\end{aligned}$$

### Пример

**Дано:** изображение

$$F(p) = U(p) = \frac{2 \cdot 10^4 p + 2 \cdot 10^6}{p(p^2 + 200p + 2 \cdot 10^4)} = \frac{D(p)}{B(p)}, \text{ (Вс)}$$

**Определить:**

Оригинал

$$B(p) = p(p^2 + 200p + 2 \cdot 10^4) = 0;$$

$$p_1 = 0; \quad p_{2,3} = -100 \pm j100 \left( \frac{1}{c} \right);$$

$$B'(p) = (p^3 + 200p^2 + 2 \cdot 10^4 p)' = 3p^2 + 400p + 2 \cdot 10^4,$$

тогда

$$\begin{aligned}
u(t) &= \sum_{k=1}^{n=3} \frac{D(p_k)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 0 + 2 \cdot 10^6}{0^2 + 400 \cdot 0 + 2 \cdot 10^4} e^{0t} + \\
&+ 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{2 \cdot 10^4 \cdot p_2 + 2 \cdot 10^6}{3p_2^2 + 400p_2 + 2 \cdot 10^4} e^{p_2 t} \right] = 100 + 2 \operatorname{Re} \left[ 70,5 e^{-j135^\circ} e^{(-100+j100)t} \right] = \\
&= 100 + 2 \operatorname{Re} \left[ 70,5 e^{j(-135^\circ+100t)} e^{-100t} \right] = 100 + 141 e^{-100t} \cos(100t - 135^\circ), \text{ В.}
\end{aligned}$$

## Пример

Дано: изображение

$$I(p) = \frac{p^2 + p + 0,5}{p(p^2 + 2p + 1)} = \frac{D(p)}{B(p)} \quad (\text{Ac})$$

Определить:

оригинал

$$B(p) = p(p^2 + 2p + 1) = 0; \quad p_1 = 0; \quad p_2 = p_3 = -1 \left( \frac{1}{c} \right).$$

Используем метод неопределённых коэффициентов.

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{(p+1)^2} = \frac{(a+b)p^2 + (2a+b+c)p + a}{p(p+1)^2}.$$

Сравнивая коэффициенты числителей, находим

$$\begin{cases} (a+b) = 1; \\ (2a+b+c) = 1; \\ a = 0,5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0,5; \\ b = 0,5; \\ c = -0,5. \end{cases}$$

Оригиналы каждой из простых дробей определим по таблице преобразований Лапласа:  $i(t) = 0,5 + 0,5e^{-t} - 0,5te^{-t}$ , (А).

### Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме

- Для резистивного элемента;

$$\text{при } I_R(p) = \int_0^{\infty} i_R(t)e^{-pt} dt,$$

$$U_R(p) = \int_0^{\infty} u_R(t)e^{-pt} dt = R \int_0^{\infty} i_R(t)e^{-pt} dt;$$

$U_R(p) = R \cdot I_R(p)$  – закон Ома в операторной форме для резистивного элемента.

- Для индуктивного элемента  $u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = L \cdot i'_L(t)$ ;

$$I_L(p) = i_L(t), \quad i'_L(t) = p \cdot I_L(p) - i_L(0_+);$$

$$U_L(p) = L \cdot [p \cdot I_L(p) - i_L(0_+)] \quad \text{или} \quad U_L(p) = Z_L(p) \cdot I_L(p) - L \cdot i_L(0_+);$$

при  $Z_L(p) = pL$  и  $i_L(0_+) = 0$  получаем закон Ома в операторной форме для индуктивного элемента.

- Для ёмкостного элемента  $u_C(t) = u_C(0_+) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt$ .

При  $I_C(p) = i_C(t)$ ,  $\int_0^t i_C(t) dt = \frac{I_C(p)}{p}$  имеем

$$U_C(p) = \frac{u_C(0_+)}{p} + \frac{I_C(p)}{pC},$$

или

$$U_C(p) = Z_C(p) \cdot I_C(p) + \frac{u_C(0_+)}{p}.$$

При  $Z_C(p) = 1/pC$  и  $u_C(0_+) = 0$  получаем закон Ома в операторной форме для емкостного элемента.

- Пассивный двухполюсник при нулевых начальных условиях, когда  $i_L(0_+) = 0$  и  $u_C(0_+) = 0$ ,  $u = f[R; L; C; i; i'; \int_0^t idt]$ .

При  $I(p) = i(t)$ , по аналогии с законом Ома, для отдельных элементов можно записать операторное изображение напряжения;

$U(p) = Z(p) \cdot I(p)$  – закон Ома в операторной форме при нулевых начальных условиях, где  $Z(p)$  – эквивалентное операторное сопротивление двухполюсника.

### Пример

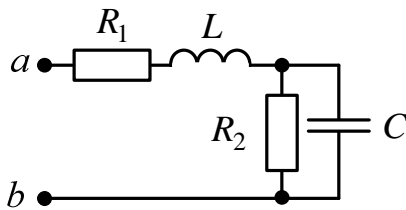
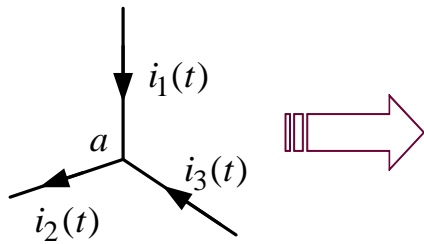


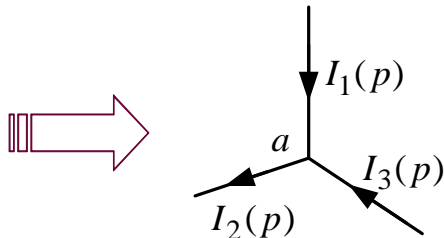
Рис. 32

$$Z(p) = R_1 + pL + \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}}.$$

- Первый закон Кирхгофа в операторной форме. Так как  $\sum \pm i_k(t) = 0$ , то  $\sum \pm \int_0^\infty i_k(t) e^{-pt} dt = 0$ ;
- $\sum \pm I_k(p) = 0$  – первый закон Кирхгофа в операторной форме.



$$-i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) = 0;$$



$$-I_1(p) + I_2(p) - I_3(p) = 0.$$

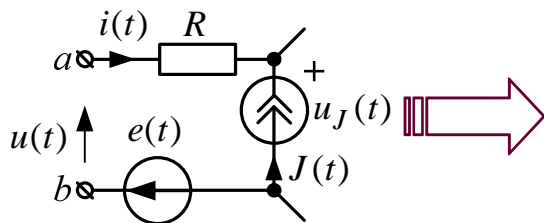
- Второй закон Кирхгофа в операторной форме.

Так как  $\sum \pm u_{\Pi}(t) = \sum \pm e_k(t) + \sum \pm u_{J_q}(t)$ ,

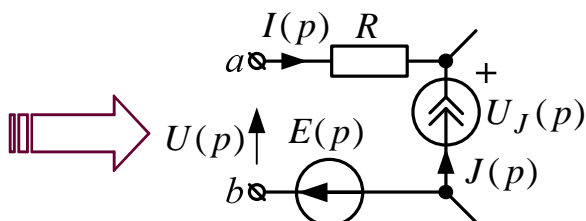
то 
$$\sum_{\pm} \int_0^{\infty} u_{\Pi}(t) e^{-pt} dt = \sum_{\pm} \int_0^{\infty} e_k(t) e^{-pt} dt + \sum_{\pm} \int_0^{\infty} u_{J_q}(t) e^{-pt} dt,$$

или 
$$\sum \pm U_{\Pi}(p) = \sum \pm E_k(p) + \sum \pm U_{J_q}(p)$$
 – второй закон Кирхгофа в операторной форме,

где  $U_{\Pi}(p)$  – операторное изображение напряжения на пассивном элементе;  $E_k(p)$  – операторное изображение ЭДС;  $U_{J_q}(p)$  – операторное изображение напряжения на источнике тока.



$$R i(t) = u(t) + e(t) - u_J(t);$$



$$R I(p) = U(p) + E(p) - U_J(p).$$

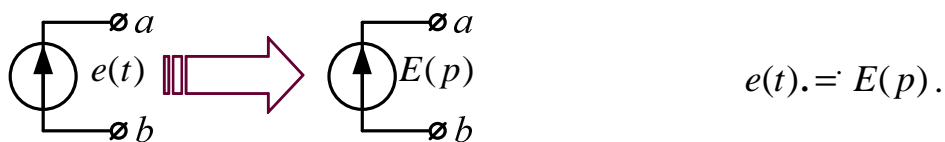
Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме аналогичны этим законам на постоянном токе, поэтому к операторным схемам замещения применимы те же методы расчета, но в операторной форме:

- Метод законов Кирхгофа.
- Метод контурных токов.
- Метод узловых потенциалов.
- Метод наложения.
- Метод эквивалентного генератора.
- Метод преобразований.

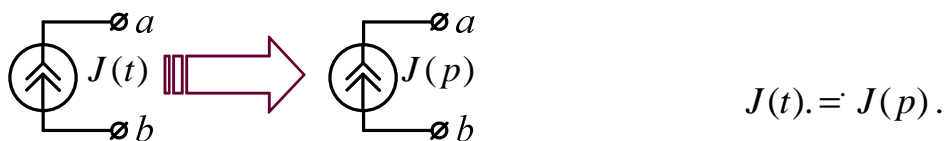
Операторная схема замещения составляется для цепи после коммутации на основании операторных схем отдельных элементов.

Схемы отдельных элементов следуют из законов Ома и Кирхгофа в операторной форме:

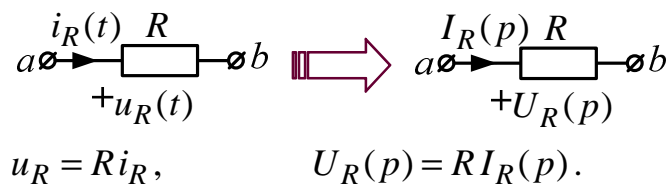
1. Источник ЭДС:



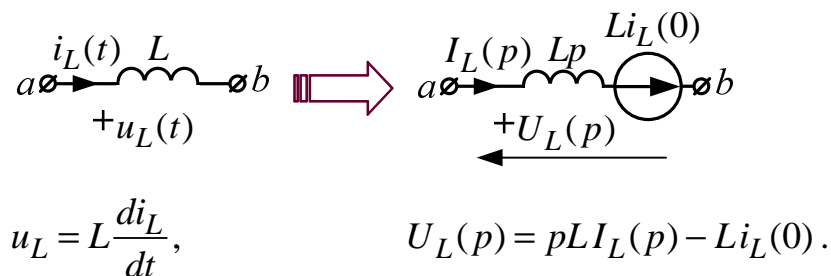
2. Источник тока:



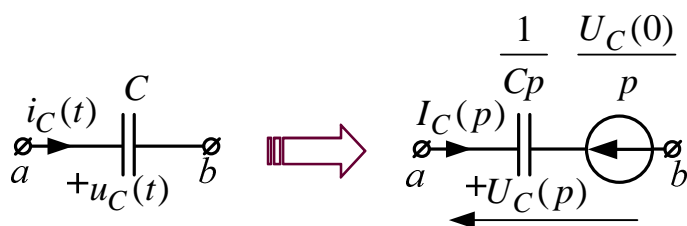
3. Резистивный элемент:



4. Индуктивный элемент:



### 5. Емкостный элемент:



$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt,$$

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} I_C(p) + \frac{u_C(0)}{p}.$$

### Порядок расчета переходных процессов операторным методом:

1. Определяются независимые начальные условия  
 $i_L(0_-) = i_L(0)$  и  $u_C(0_-) = u_C(0)$ .
2. Для схемы после коммутации изображается операторная схема, которая рассчитывается любым методом в операторной форме.
3. По теореме разложения определяются напряжения и токи переходного процесса в функции времени.

### Пример

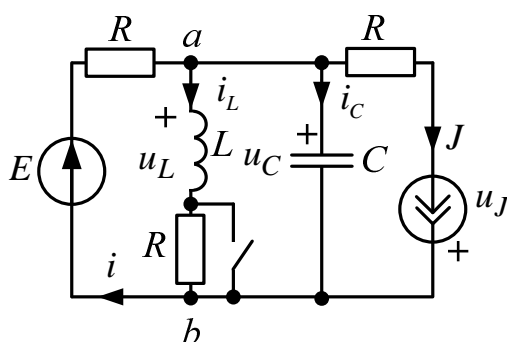


Рис. 33

#### Дано:

- $E = 100$  В;
- $J = 2$  А;
- $L = 1$  Гн;
- $C = 50$  мкФ;
- $R = 100$  Ом.

**Определить:**  $i(t)$ ,  $u_J(t)$

1. Определяются независимые начальные условия:

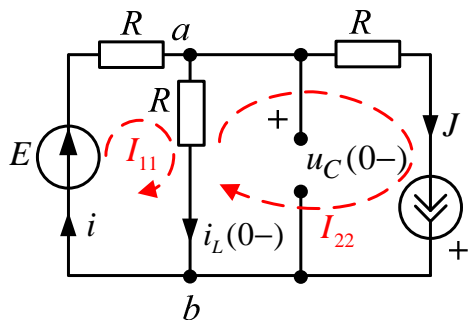


Рис. 34

$$i_L(0_-) = i_L(0); \quad u_C(0_-) = u_C(0);$$

$$I_{22} = J = 2 \text{ А};$$

$$I_{11} \cdot 2R - I_{22}R = E; \quad I_{11} = \frac{E + JR}{2R} = 1,5 \text{ А};$$

$$i_L(0_-) = I_{11} - I_{22} = -0,5 \text{ А};$$

$$u_C(0_-) = i_L(0_-)R = -50.$$

2. Для схемы после коммутации изображается операторная схема, которая рассчитывается любым методом в операторной форме:

$$i_L(0) = i_L(0_-) = -0,5 \text{ А}, u_C(0) = u_C(0_-) = -50 \text{ В}.$$

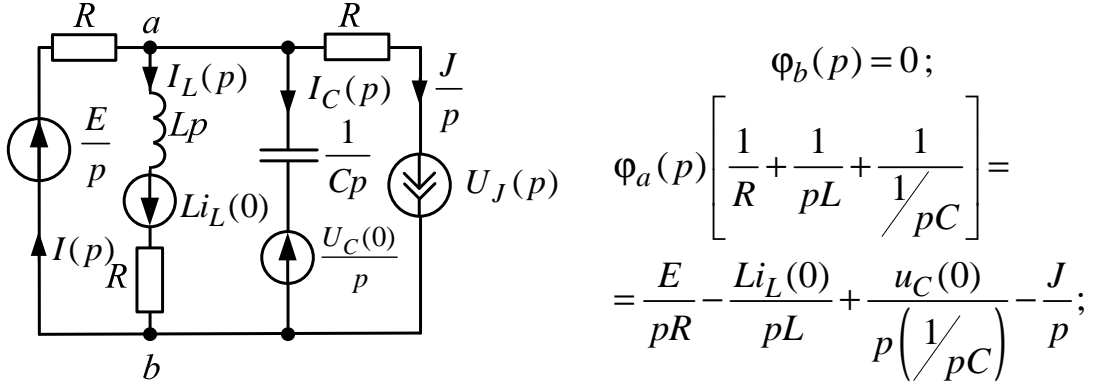


Рис. 35

$$\Phi_a(p) = \frac{EL - RLi_L(0) - RLJ + RLCu_c(0)p}{RLCp^2 + Lp + R}.$$

$$I(p) = \frac{\Phi_b(p) - \Phi_a(p) + E/p}{R} = \frac{E}{Rp} - \frac{\Phi_a(p)}{R};$$

$$I(p) = \frac{E}{Rp} - \frac{EL/R - Li_L(0) - JL + LCu_c(0)p}{RLCp^2 + Lp + R};$$

$$I(p) = \frac{1}{p} + \frac{0,5 + 25 \cdot 10^{-4} p}{0,005 p^2 + p + 100} = \frac{1}{p} + \frac{D_1(p)}{B_1(p)}.$$

По второму закону Кирхгофа

$$\Phi_a(p) - \Phi_b(p) + U_J(p) = R \cdot \frac{J}{p}, \quad U_J(p) = \frac{RJ}{p} - \Phi_a(p);$$

$$U_J(p) = \frac{200}{p} + \frac{50 + 0,25p}{0,005 p^2 + p + 100} = \frac{200}{p} + \frac{D_2(p)}{B_2(p)}.$$

3. По теореме разложения определяются  $i(t)$  и  $u_J(t)$ :

$$i(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n=2} \frac{D_1(p_k)}{B_1(p_k)} e^{p_k t} = 1 + 0,707 e^{-100t} \cdot \cos(100t - 45^\circ), \text{ А}.$$

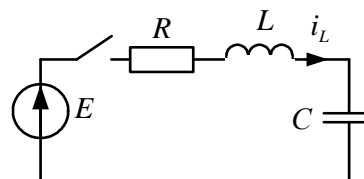
$$u_J(t) = 200 + \sum_{k=1}^{n=2} \frac{D_2(p_k)}{B_2(p_k)} e^{p_k t} = 200 + 70,7 e^{-100t} \cdot \cos(100t - 45^\circ), \text{ В}.$$

## Достоинства операторного метода

- Не нужно определять ЗНУ, принужденные составляющие, корни характеристического уравнения и постоянные интегрирования.
- Можно использовать известные методы расчета операторных схем замещения.
- Можно использовать известные методы расчета операторных схем замещения.

## Пример решения в MathCAD

$\text{ORIGIN} := 1$   
 $E := 8$        $L := 100 \cdot 10^{-3}$   
 $R := 220$        $C := 0.22 \cdot 10^{-6}$



## Операторный метод, постоянный источник, цепь второго порядка

1. Определяем независимые начальные условия:

$$U_{C0} := 0 \quad i_{L0} := 0$$

2. Определяем изображение искомой функции:

$$I(p) := \frac{\frac{E}{p} - \frac{U_{C0}}{p} + L \cdot i_{L0}}{\frac{1}{C \cdot p} + L \cdot p + R}$$

$$I(p) \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float}, 5 \end{array} \right. \rightarrow \frac{.16000e14}{.90909e19 + .44000e15 \cdot p + .20000e12 \cdot p^2}$$

3. Определяем оригинал искомой функции:

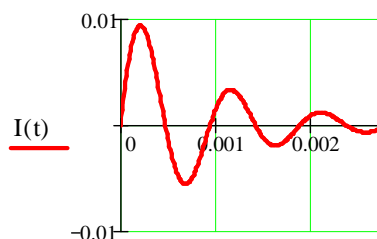
$$I(t) := I(p) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace}, p \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow .120e-1 \cdot e^{(-.110e4) \cdot t} \cdot \sin(.665e4 \cdot t)$$

$$I(t) \rightarrow .120e-1 \cdot e^{(-.110e4) \cdot t} \cdot \sin(.665e4 \cdot t)$$

4. Строим график искомой функции:

$$p := .909e19 + .200e12 \cdot p^2 + .440e15 \cdot p \left| \begin{array}{l} \text{solve}, p \\ \text{float}, 5 \end{array} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} (-1100.) - 6651.3 \cdot i \\ (-1100.) + 6651.3 \cdot i \end{bmatrix}$$

$$\tau := \frac{1}{|\text{Re}(p_1)|} \quad \tau = 9.091 \times 10^{-4} \quad t := 0, \tau \cdot 0.01 .. 5 \cdot \tau \quad T_w := 3 \cdot \tau$$





### 1.10. Комбинированный операторно-классический метод расчета переходных процессов

Цель метода – упрощение операторных изображений искомых напряжений и токов.

Сущность метода – применение принципа наложения.

Принужденные составляющие находятся из расчета установившегося режима после коммутации, а свободные составляющие определяются из расчета операторной схемы (после коммутации).

#### Порядок расчета:

1. Определяются независимые начальные условия:

$$i_L(0_-) = i_L(0) \text{ и } u_C(0_-) = u_C(0).$$

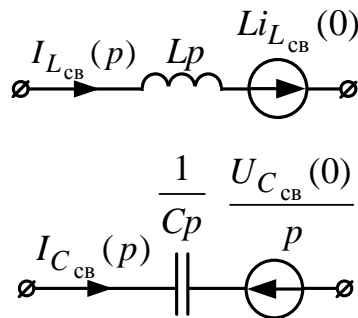
2. Определяются принужденные составляющие тока в индуктивности, напряжения емкости и искомых величин, например  $i_{пр}(t)$ .

3. Определяются значения свободных составляющих при  $t = 0$ :

$$i_{L_{св}}(0) = i_L(0) - i_{прL}(0);$$

$$u_{C_{св}}(0) = u_C(0) - u_{прC}(0).$$

4. Рассчитывается операторная схема после коммутации для свободных составляющих, где источники ЭДС закорочены, ветви с источниками тока разорваны, причем индуктивности и емкости изображаются так:



Находится операторное изображение свободной составляющей, например  $I_{св}(p) = \frac{D(p)}{B(p)}$ .

5. По теореме разложения и принципу наложения находим

$$i(t) = i_{\text{пр}}(t) + \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{D(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}}_{i_{\text{св}}(t)}$$

### Пример

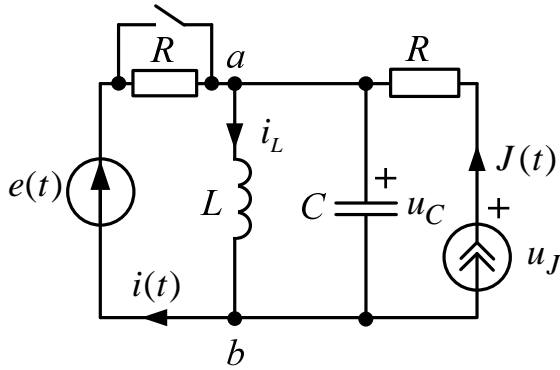


Рис. 36

**Дано:**

$$e(t) = 200 \sin(100t + 90^\circ), \text{ В};$$

$$J(t) = 1 \sin 100t, \text{ А};$$

$$L = 1 \text{ ГН};$$

$$C = 100 \text{ мкФ};$$

$$R = 100 \text{ Ом}.$$

**Определить:**  $i(t)$ ,  $u_J(t)$

**Решение:**

1. Определяются независимые начальные условия:

$$i_L(0_-) = i_L(0) \text{ и } u_C(0_-) = u_C(0);$$

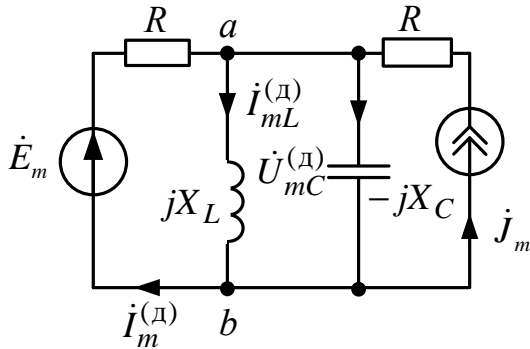


Рис. 37

$$\dot{E}_m = 200e^{j90^\circ}, \text{ В};$$

$$j_m = 1e^{j0^\circ}, \text{ А};$$

$$X_L = \omega L = 100 \text{ Ом};$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 100 \text{ Ом}.$$

Так как  $Z_{ab} = \frac{jX_L(-jX_C)}{jX_L - jX_C} = \infty$ , то  $\dot{i}_m^{(d)} = -j_m$ ,

$$\dot{U}_{mC}^{(d)} = \dot{E}_m - \dot{i}_m^{(d)} R = 200e^{j90^\circ} + 2e^{j0^\circ} \cdot 100 = 282e^{j45^\circ}, \text{ В};$$

$$\dot{i}_{mL}^{(d)} = \frac{\dot{U}_{mC}^{(d)}}{jX_L} = \frac{282e^{j45^\circ}}{j100} = 2,82e^{-j45^\circ}, \text{ А};$$

$$i_L^{(d)} = 2,82 \sin(100t - 45^\circ), \quad i_L(0) = i_L^{(d)}(0) = 2,82 \sin(-45^\circ) = -2 \text{ А};$$

$$u_C^{(d)} = 282 \sin(100t + 45^\circ), \quad u_C(0) = u_C^{(d)}(0) = 282 \sin(45^\circ) = 200 \text{ В}.$$

2. Определяются принужденные составляющие тока в индуктивности, напряжения емкости и искомым величин:  $i_{прL}(t)$ ,  $i_{пр}(t)$ ,  $u_{прC}$ ,  $u_{прJ}(t)$ .

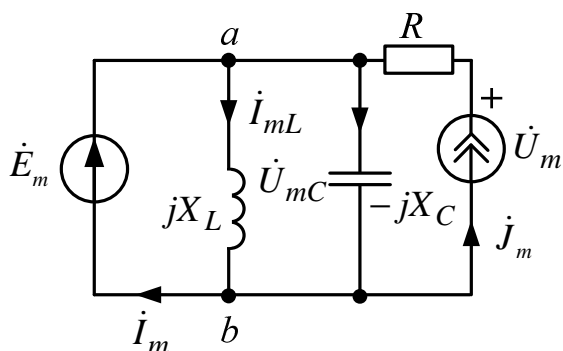


Рис. 38

$$X_L = X_C;$$

$$\dot{U}_{mC} = \dot{E}_m = 200e^{j90^\circ}, \text{ В};$$

$$\dot{i}_{mL} = \dot{U}_{mC} / jX_L = 2e^{j0^\circ}, \text{ А};$$

$$\dot{i}_m = -\dot{J}_m = 2e^{j180^\circ}, \text{ А};$$

$$\dot{U}_m = R\dot{J}_m + \dot{U}_{mC} = 282e^{j45^\circ}, \text{ В}.$$

$$i_{прL}(t) = 2 \sin 100t \text{ А}, \quad u_{прC}(t) = 200 \sin(100t + 90^\circ), \text{ В};$$

$$i_{пр}(t) = 2 \sin(100t + 180^\circ) \text{ А}, \quad u_{прJ}(t) = 282 \sin(100t + 45^\circ), \text{ В}.$$

3. Определяются значения свободных составляющих при  $t = 0$ :

$$i_{L_{св}}(0) = i_L(0) - i_{прL}(0) = 2 - 2 \sin 0 = -2 \text{ А};$$

$$u_{C_{св}}(0) = u_C(0) - u_{прC}(0) = 200 - 200 \sin 90^\circ = 0 \text{ В}.$$

4. Рассчитывается операторная схема после коммутации для свободных составляющих, где источники ЭДС закорочены, ветви с источниками тока разорваны, причем индуктивности и емкости изображаются так:

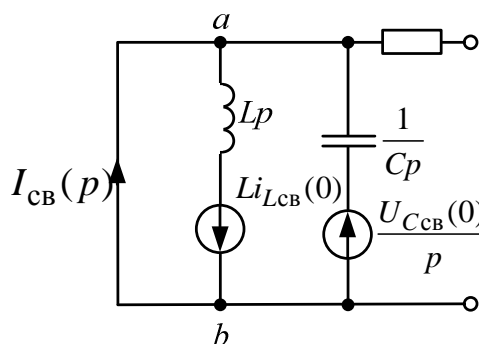


Рис. 39

$$I_{св}(p) = \frac{Li_{L_{св}}(0)}{pL} = -\frac{2}{p} = \frac{D(p)}{B(p)};$$

$$U_{св}(p) = 0.$$

5. По теореме разложения и принципу наложения находим

$$i(t) = i_{пр}(t) + \sum_{k=1}^{n=1} \frac{D(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t} = 2 \sin(100t + 180^\circ) - 2, \text{ А};$$

$$u_J(t) = u_{прJ}(t) + u_{св}(t) = 282 \sin(100t + 45^\circ), \text{ В}.$$

### 1.11. Метод переменных состояния

Метод переменных состояния используется для численного расчета переходных процессов, особенно в цепях высокого порядка ( $n > 2$ ), когда применение аналитических методов затруднительно. Суть метода заключается в сведении дифференциального уравнения электрической цепи  $n$ -го порядка к системе  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка. Система дифференциальных уравнений первого порядка должна быть разрешена относительно производных. Коэффициенты при производных должны быть равны единице. Такая форма записи называется формой Коши. В качестве переменных состояния выбираются величины, однозначно определяющие состояние цепи – величины, подчиняющиеся законам коммутации, т.е. **токи в индуктивностях и напряжения на емкостях**.

Таким образом, составляются уравнения по законам Кирхгофа для мгновенных значений в послекоммутационной цепи, записываются в нормализованной форме или форме Коши и решаются численно с помощью встроенных функций MathCAD или Matlab.

Уравнения состояния в матричной форме:

$$[\mathbf{X}'(t)] = [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{X}(t)] + [\mathbf{B}] \cdot [\mathbf{F}(t)], \quad (1.14)$$

где  $[\mathbf{X}'(t)]$  – матрица-столбец производных от токов в индуктивностях и напряжений в емкостях ( $n$ -элементов);

$\mathbf{A}$  – квадратная матрица коэффициентов при переменных состояния ( $n$ -строк и  $n$ -столбцов);

$[\mathbf{B}]$  – прямоугольная матрица связи, состоящая из коэффициентов перед источниками ЭДС и тока ( $n$ -строк,  $m$ -столбцов);

$[\mathbf{F}(t)]$  – матрица-столбец (независимых) источников ЭДС и тока ( $m$ -элементов);

$\mathbf{D}(x, t)$  – расширенная матрица.

Алгебраические уравнения для выходных величин в матричной форме:

$$[\mathbf{Y}(t)] = [\mathbf{C}] \times [\mathbf{X}(t)] + [\mathbf{D}] \times [\mathbf{F}(t)], \quad (1.15)$$

где  $[\mathbf{Y}(t)]$  – матрица-столбец выходных величин ( $k$ -элементов);

$[\mathbf{C}]$  – прямоугольная матрица связи выходных величин с переменными состояния ( $k$ -строк,  $n$ -столбцов);

$[\mathbf{D}]$  – прямоугольная матрица связи выходных величин с источниками ( $k$ -строк,  $m$ -столбцов).

### Порядок расчета:

1. **ННУ.** Определяем независимые начальные условия в цепи до коммутации:  $i_L(0_-)$  или  $u_C(0_-)$ .

2. Для схемы после коммутации по законам Кирхгофа составляем уравнения (1.14, 1.15).

3. Решаем уравнения (1.14, 1.15) численно с помощью встроенных функций MathCAD или MatLab.

Записываем окончательное решение и строим график.

### Пример

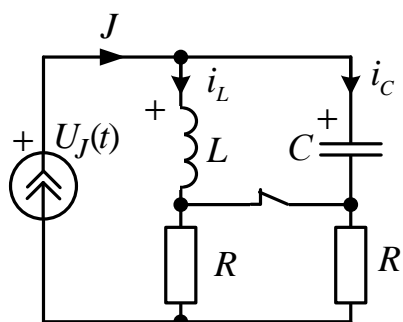


Рис. 40

### Дано:

$$J = 1 \text{ А};$$

$$L = 1 \text{ Гн};$$

$$C = 10 \text{ мкФ};$$

$$R = 100 \text{ Ом}.$$

**Определить:**  $U_J(t)$

1. **ННУ.** Для схемы до коммутации определяем независимые начальные условия:

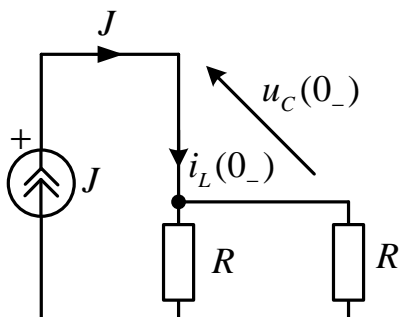


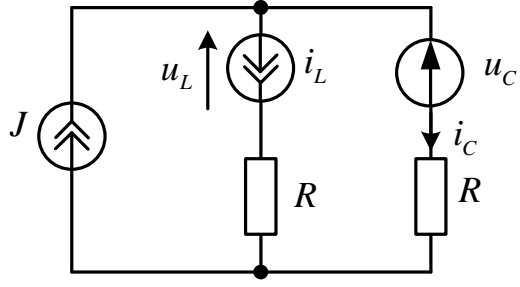
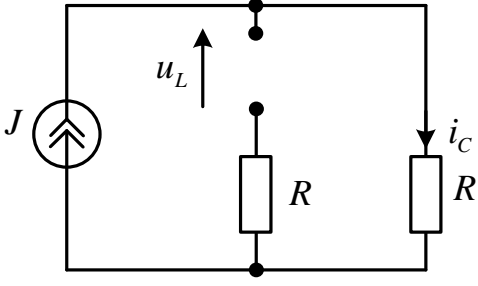
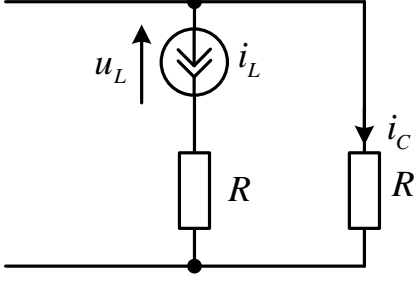
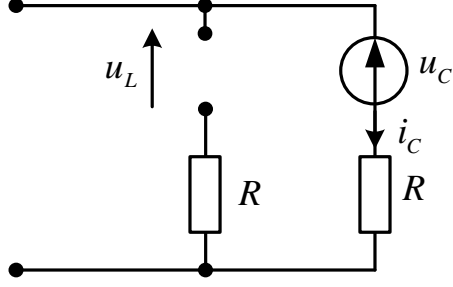
Рис. 41

$$i_L(0_-) = J \text{ А};$$

$$u_C(0_-) = 0 \text{ В}.$$

2. Для схемы после коммутации составляем уравнения по законам Кирхгофа. Система дифференциальных уравнений первого порядка должна быть разрешена относительно производных для получения уравнений в виде (1.14). Для получения уравнений вида (1.14) можно воспользоваться **методом наложения**.

В **послекоммутационной** цепи по теореме компенсации заменим реактивные элементы источниками: индуктивность – источником тока, величиной  $i_L$ , а ёмкость – источником ЭДС, величиной  $u_C$ . В полученной схеме определим **методом наложения** две величины:  $i_C$  и  $u_L$ :

 <p style="text-align: center;">Рис. 42</p>	
<p><b>Первая подсхема</b> – токи и напряжения от действия источника тока <math>J</math>:</p>  <p style="text-align: center;">Рис. 43</p>	$i_C' = J;$ $u_L' = JR$
<p><b>Вторая подсхема</b> – определяем токи и напряжения от действия источника тока величиной <math>i_L</math>:</p>  <p style="text-align: center;">Рис. 44</p>	$i_C'' = -i_L;$ $u_L'' = -i_L 2R$
<p><b>Третья подсхема</b> – токи и напряжения от действия источника ЭДС, величиной <math>u_C</math>:</p>  <p style="text-align: center;">Рис. 45</p>	$i_C''' = 0;$ $u_L''' = u_C$

$$u_L = u_L' + u_L'' + u_L''' = JR - i_L 2R - u_C; \quad \text{или} \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{u_L}{L} = \frac{-2R}{L}i_L + \frac{1}{L}u_C + \frac{R}{L}J(t);$$

$$i_C = i_C' + i_C'' + i_C''' = J - i_L + 0 \quad \frac{du_C}{dt} = \frac{i_C}{C} = -\frac{1}{C}i_L + 0 \cdot u_C + \frac{1}{C}J(t),$$

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} \cdot J(t), \text{ где } [\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -2R/L & 1/L \\ -1/C & 0 \end{bmatrix}; [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} R/L \\ 1/C \end{bmatrix}.$$

$$u_J = u_C + Ri_C = u_C + (J - i_L) = -Ri_L + u_C + RJ,$$

$$\text{тогда } [u_J] = [-R \ 1] \cdot \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + [R][J], \text{ где } [\mathbf{C}] = [-R \ 1]; [\mathbf{D}] = [R].$$

**Дано:** Документ Mathcad

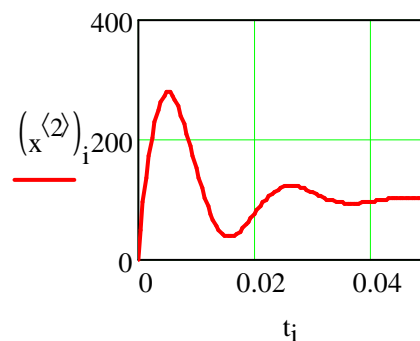
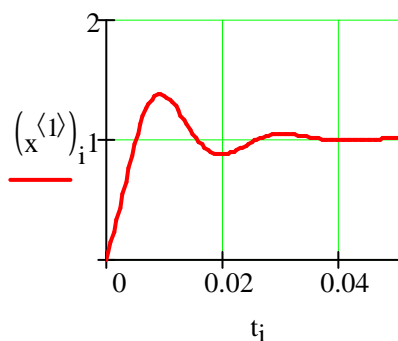
$$\begin{array}{ll} \underline{J} := 1 & \underline{L} := 1 \\ \underline{R} := 100 & \underline{C} := 10 \cdot 10^{-6} \end{array} \quad \underline{A} := \begin{pmatrix} \frac{-2R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{B} := \begin{pmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{pmatrix}$$

$$\lambda := \text{eigenval}(A) \quad \lambda = \begin{pmatrix} -100 + 300i \\ -100 - 300i \end{pmatrix}$$

$$D(t, x) := A \cdot x + B \quad \tau := \frac{1}{|\max(\text{Re}(\lambda))|} \quad \tau = 0.01 \quad \underline{T} := 5\tau$$

$$x := \text{rkfixed} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, T, N, D \right) \quad t := x^{(0)} \quad \underline{N} := 100 \quad i := 0..N$$

Строим графики искомым  $i_L, u_C$  (переменных состояния):



Документ Mathcad

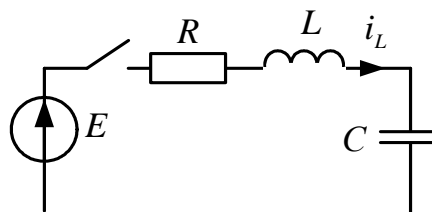
**Аналитический метод решения переходных процессов методом переменных состояния**

Находим матрицу состояния  $A$  используя операции Given и Find. Составляем уравнения по законам Кирхгофа, исключая в них все величины кроме переменных состояния  $U_C, i_L$ :

Given

$$i_L \cdot R + L \cdot di_L + U_C = E$$

$$i_L = C \cdot dU_C$$



$$Ao(U_C, i_L, E) := \text{Find}(dU_C, di_L) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{i_L}{C} \\ \frac{-(i_L \cdot R + U_C - E)}{L} \end{bmatrix}$$

Записываем матрицу переменных состояния  $A$  и матрицу-столбец правых частей  $B$ :

$$A := \text{augment}(Ao(1, 0, 0), Ao(0, 1, 0))$$

$$B := Ao(0, 0, E)$$

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{-1}{L} & \frac{-R}{L} \end{pmatrix} \quad B \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{L} \end{pmatrix}$$

**Дано:**  $E := 8$       $L := 100 \cdot 10^{-3}$       $R := 220$       $C := 0.22 \cdot 10^{-6}$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{-1}{L} & \frac{-R}{L} \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{L} \end{pmatrix}$$

Определяем собственные числа матрицы состояния  $A \Rightarrow \lambda$

$$\lambda := \text{eigenvals}(A) \quad \lambda = \begin{pmatrix} -1100 + 6651.657i \\ -1100 - 6651.657i \end{pmatrix}$$



Для проверки определяем корни характеристического уравнения через импеданс схемы  $Z(p)$ :

$$Z(p) := L \cdot p + \frac{1}{C \cdot p} + R \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve, p} \\ \text{float, 5} \end{array} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} (-1100.) - 6651.7 \cdot i \\ (-1100.) + 6651.7 \cdot i \end{bmatrix}$$

Для проверки определяем принуждённые составляющие

$$i_{Lпр} := 0 \quad U_{спр} := E$$

$$-A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} U_{спр} \\ i_{Lпр} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Составляем расширенную матрицу

$$D(t, x) := A \cdot x + B$$

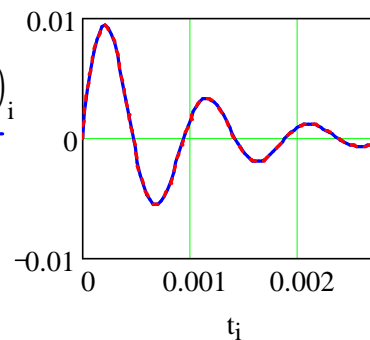
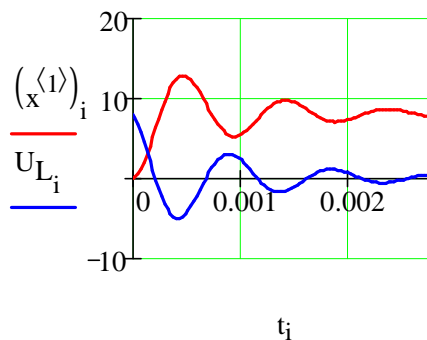
$$\tau := \frac{1}{\left| \overrightarrow{\max(\text{Re}(\lambda))} \right|} \quad \tau = 9.091 \times 10^{-4} := 3\tau \quad N := 100$$

$$x := \text{rkfixed} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, T, N, D \right] \quad t := x^{(0)} \quad i := 0..N$$

Определим для приведенной схемы  $i_C$  и  $U_L$ . Для этого нужно расширенную матрицу умножить на диагональную матрицу:

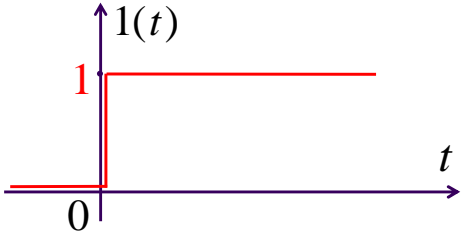
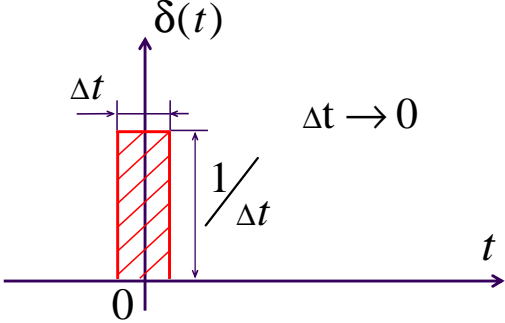
$$\begin{pmatrix} i_{C_i} \\ U_{L_i} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \cdot D \left[ t_i, \begin{bmatrix} (x^{(1)})_i \\ (x^{(2)})_i \end{bmatrix} \right]$$

Строим графики искомым  $U_C, i_L$  (переменных состояния  $x^{(1)}, x^{(2)}$ ) и  $U_L$  и  $i_C$ :



## 1.12. Переходные и импульсные характеристики

Переходные  $h(t)$  и импульсные  $K(t)$  характеристики используются для расчета переходных процессов при нулевых начальных условиях и импульсных воздействиях на линейные пассивные цепи. Для получения этих характеристик применяются две специальные функции.

<p>Единичная функция</p> $1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t > 0; \end{cases}$ $1(t) = \frac{1}{p}$	 <p style="text-align: center;">Рис. 46</p>
<p>Единичный импульс (дельта-функция)</p> $\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt};$ $\delta(t) \cdot \Delta t = 1,$ <p>при этом <math>\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1;</math></p> $\delta(0) = \infty$	 <p style="text-align: center;">Рис. 47</p>

Переходная характеристика  $h(t)$  зависит от времени  $t$ , параметров цепи  $R, L, C$  и может быть безразмерной, иметь размерность сопротивления или проводимости. Переходные характеристики  $h(t)$  определяются экспериментально или аналитически, например операторным методом при подключении ЭДС в 1 (В) или источника тока в 1 (А).

Если  $Y(t)$  – прямоугольный импульс источника ЭДС или тока,

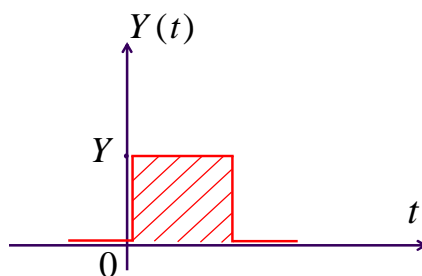


Рис. 48

тогда  $X(t)$  – напряжение или ток:

а) на интервале  $0 < t < t_{\text{и}}$  равен  $X(t) = Y \cdot h(t)$ ;

б) при  $t > t_{\text{и}}$   $X(t) = Y \cdot h(t) - Y \cdot h(t - t_{\text{и}})$ ,

где  $h(t)$  – переходная характеристика.

**Импульсная характеристика  $K(t)$**  – это реакция цепи в виде тока или напряжения на единичный возмущающий импульс  $\delta(t)$  источника при нулевых начальных условиях.

Импульсная характеристика

$$K(t) = h(0) \cdot \delta(t) + \frac{dh(t)}{dt}.$$

### Пример

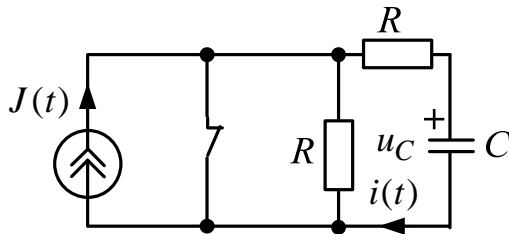


Рис. 49

**Дано:**

$$J(t) = \begin{cases} J & \text{при } 0 < t < t_{\text{и}}; \\ 0 & \text{при } t > t_{\text{и}}. \end{cases}$$

$$J = 2 \text{ А};$$

$$C = 100 \text{ мкФ};$$

$$R = 100 \text{ Ом};$$

$$t_{\text{и}} = 0,01 \text{ с}.$$

**Определить:**  $h(t)$ ,  $K(t)$

для  $i(t)$ ,  $i(t)$

1. Переходную характеристику  $h(t)$  для  $i(t)$  найдем операторным методом:

1.1. ННУ.  $u_C(0) = u_C(0_-) = 0$ .

1.2. Операторная схема.

По правилу разброса

$$\begin{aligned} h(p) &= \frac{1}{p} \cdot \frac{R}{2R + \frac{1}{pC}} = \\ &= \frac{RC}{1 + 2RCp} = \frac{0,01}{1 + 0,02p} = \frac{D_1(p)}{B_1(p)}. \end{aligned}$$

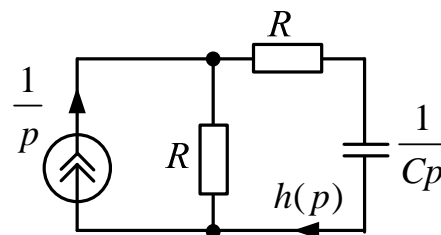


Рис. 50

1.3. По теореме разложения

$$h(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_1(p_k)}{B_1'(p_k)} \cdot e^{p_k t} = 0,5e^{-50t}$$

– переходная функция.

2. Для  $i(t)$  найдем  $K(t)$  операторным методом:

2.1. ННУ.  $u_C(0) = u_C(0_-) = 0$ .

2.2. Операторная схема.

По правилу разброса

$$K(p) = 1 \cdot \frac{R}{2R + \frac{1}{pC}} = \frac{RCp}{1 + 2RCp};$$

$$K(p) = \frac{2RCp + 1 - 1}{2(1 + 2RCp)} = 0,5 - \frac{0,5}{1 + 2RCp} =$$

$$= 0,5 - \frac{0,5}{1 + 0,02p} = 0,5 - \frac{D_2(p)}{B_2(p)}.$$

2.3. По теореме разложения

$$K(t) = 0,5 \cdot \delta(t) - \sum_{k=1}^{n=1} \frac{D_2(p_k)}{B_2(p_k)} \cdot e^{p_k t} = 0,5 \cdot \delta(t) - 25e^{-50t}, \frac{1}{c},$$

– импульсная характеристика.

3. Определяем ток:

а) на интервале  $0 < t < t_{\text{н}}$   $i(t) = J \cdot h(t) = 1 \cdot e^{-50t}$ , А;

б) на интервале  $t > t_{\text{н}}$

$$i(t) = J \cdot h(t) - J \cdot h(t - t_{\text{н}}) = 1 \cdot e^{-50t} - 1 \cdot e^{-50(t - t_{\text{н}})}, \text{ А.}$$

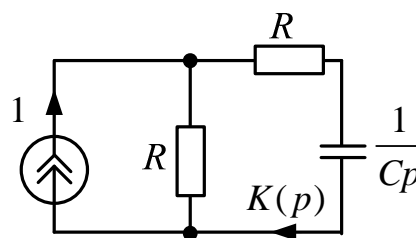


Рис. 51

### 1.13. Метод интеграла Дюамеля

Интеграл Дюамеля используется для расчета переходных процессов в линейных пассивных цепях с нулевыми начальными условиями при воздействии импульса произвольной формы источника электроэнергии.

Пусть на такую цепь воздействует импульс источника  $Y(t)$  произвольной формы, который заменим ступенчатой функцией.

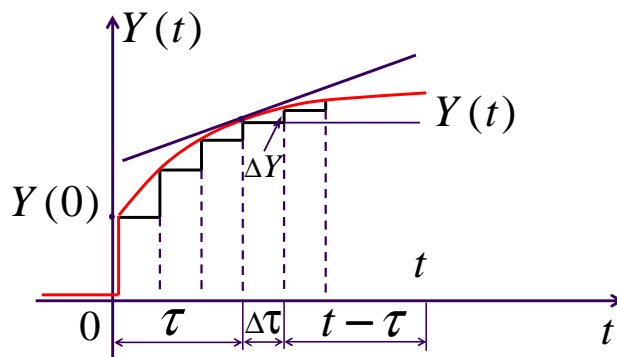


Рис. 52

Тогда ток или напряжение, согласно наложению, составят

$$X(t) = Y(0) \cdot h(t) + \sum \Delta X,$$

где  $\Delta X = \Delta Y \cdot h(t - \tau) = (\Delta \tau \cdot \operatorname{tg} \alpha) \cdot h(t - \tau) = \Delta \tau \cdot Y'(\tau) \cdot h(t - \tau)$  или

$$X(t) = Y(0) \cdot h(t) + \int_0^t Y'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau - \text{интеграл Дюамеля.}$$

Если  $X(t)$  является  $i_L(t)$  или  $u_C(t)$ ,

$$\text{тогда } X(t) = \int_0^t Y(\tau) \cdot K(t - \tau) d\tau.$$

Если  $X(t)$  является сложной функцией, тогда:

а) на интервале  $0 < t < t_1$

$$X(t) = Y_1(0) \cdot h(t) + \int_0^t Y_1'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau;$$

б) на интервале  $t > t_1$

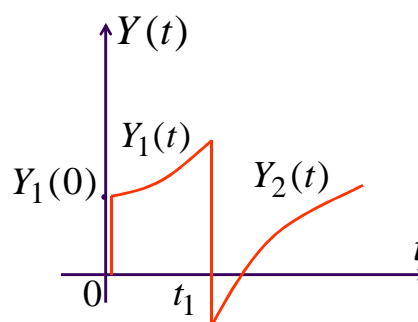


Рис. 53

$$X(t) = Y_1(0) \cdot h(t) + \int_0^{t_1} Y_1'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau +$$

$$+ [Y_2(t_1) - Y_1(t_1)] \cdot h(t - t_1) + \int_{t_1}^t Y_2'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau.$$

42

## Пример

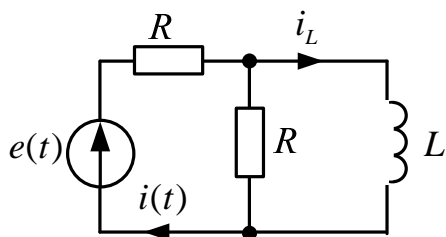


Рис. 54

**Дано:**

$$e(t) = 100e^{-200t}, \text{ В};$$

$$L = 1 \text{ Гн};$$

$$R = 100 \text{ Ом}.$$

**Определить:**  $i(t)$

**1. Переходную характеристику  $h(t)$  для  $i(t)$  найдем операторным методом:**

1.1. ННУ.  $i_L(0) = i_L(0_-) = 0$ .

1.2. Операторная схема.

По правилу разброса

$$h(p) = \frac{\frac{1}{p}}{R + \frac{RpL}{R + pL}} =$$

$$= \frac{R + pL}{p(R^2 + 2RLp)} = \frac{D(p)}{B(p)}.$$

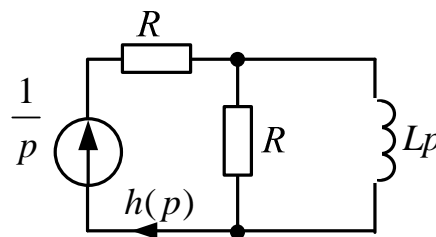


Рис. 55

1.3. По теореме разложения

$$h(t) = \sum_{k=1}^{n=2} \frac{D(p_k)}{B'(p_k)} \cdot e^{p_k t} = \frac{1}{R} - \frac{1}{2R} \cdot e^{-\frac{R}{2L}t}, \frac{1}{\text{Ом}}, \text{ -- переходная проводимость.}$$

**2. Расчет  $i(t)$  интегралом Дюамеля:**

$$i(t) = e(0) \cdot h(t) + \int_0^t e'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau;$$

$$e(0) = 100 \text{ В};$$

$$e'(\tau) = -2 \cdot 10^4 \cdot e^{-200\tau}, \text{ В/с};$$

$$h(t - \tau) = \frac{1}{R} - \frac{1}{2R} \cdot e^{-\frac{R}{2L}(t - \tau)} = 0,005 - 0,0025 \cdot e^{-100(t - \tau)}, \frac{1}{\text{Ом}};$$

$$\begin{aligned}
i(t) &= 0,5 - 0,25 \cdot e^{-100t} + \int_0^t \left[ -2 \cdot 10^4 \cdot e^{-200\tau} \right] \cdot \left[ 0,005 - 0,0025 \cdot e^{-100(t-\tau)} \right] d\tau = \\
&= 0,5 - 0,25 \cdot e^{-100t} - 100 \int_0^t e^{-200\tau} d\tau + 50 \cdot e^{-100t} \int_0^t e^{-100\tau} d\tau = \\
&= 0,5 - 0,25 \cdot e^{-100t} + 0,5 \cdot e^{-200\tau} \Big|_0^t - 0,5 \cdot e^{-100t} \cdot e^{-100\tau} \Big|_0^t = \\
&= 0,5 - 0,25 \cdot e^{-100t} + 0,5 \cdot (e^{-200t} - 1) - 0,5 \cdot e^{-100t} \cdot (e^{-100t} - 1) = \\
&= 0,25 \cdot e^{-100t}, \text{ A.}
\end{aligned}$$

Проверка:

$$i(\infty) = 0;$$

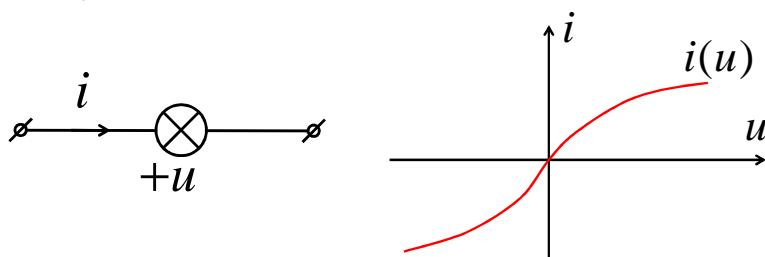
$$i(0+) = e(0) / 2R = 0,25 \text{ A.}$$

## 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

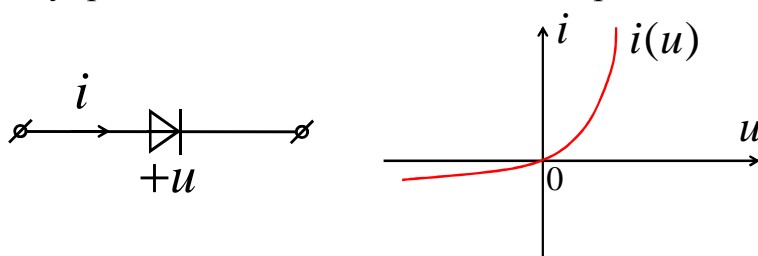
### 2.1. Нелинейные резистивные элементы

Нелинейные резистивные элементы (НРЭ) имеют нелинейную ВАХ  $i(u)$  и необратимо преобразуют электрическую энергию в тепло. К нелинейным резистивным элементам относятся, например:

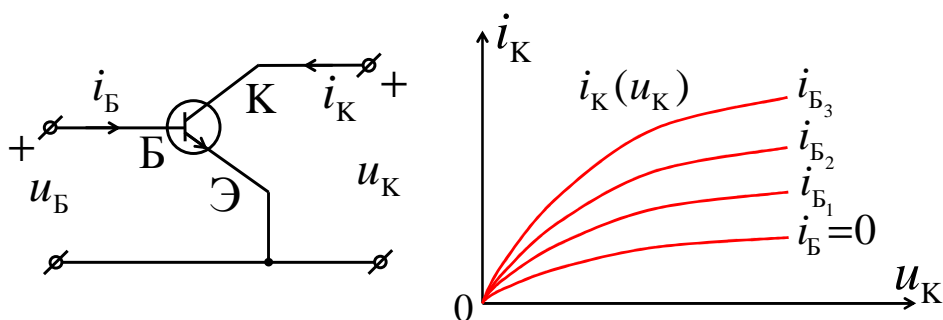
- лампа накаливания; имеет симметричную вольт-амперную характеристику:



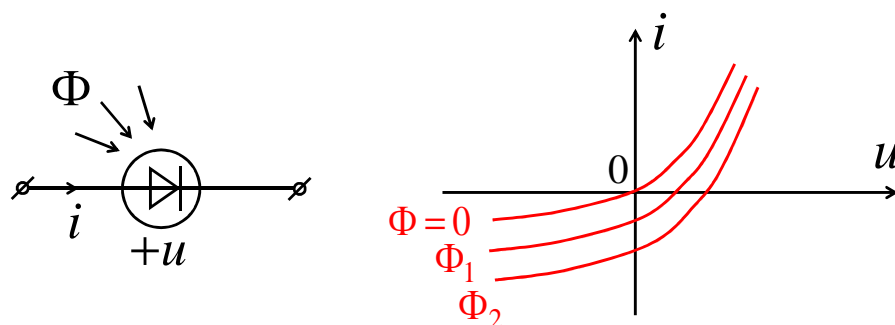
- полупроводниковый диод с несимметричной ВАХ:



- биполярный транзистор, имеет семейство ВАХ:



- фотодиод (активный НРЭ):





Нелинейные резистивные элементы **подразделяются:**

- на пассивные;
- активные;
- управляемые;
- инерционные;
- безынерционные.

У пассивных НРЭ ВАХ  $i(u)$  расположена в 1 и 3 квадрантах, а у активных НРЭ участок ВАХ  $i(u)$  должен проходить дополнительно во 2 или 4 квадрантах, причем управляемые НРЭ имеют семейства ВАХ  $i(u)$ .

Инерционные НРЭ имеют линейные динамические ВАХ, а статические ВАХ и ВАХ для действующих значений нелинейны из-за их тепловой инерции, причем у этих элементов за счет линейности динамических ВАХ формы  $u(t)$  и  $i(t)$  одинаковы.

Безынерционные НРЭ имеют нелинейные динамические ВАХ, причем за счет этого формы  $u(t)$  и  $i(t)$  различны.

Лампа накаливания – инерционный пассивный НРЭ с симметричной ВАХ  $i(u)$ .

Полупроводниковый диод – безынерционный пассивный НРЭ с несимметричной ВАХ  $i(u)$ .

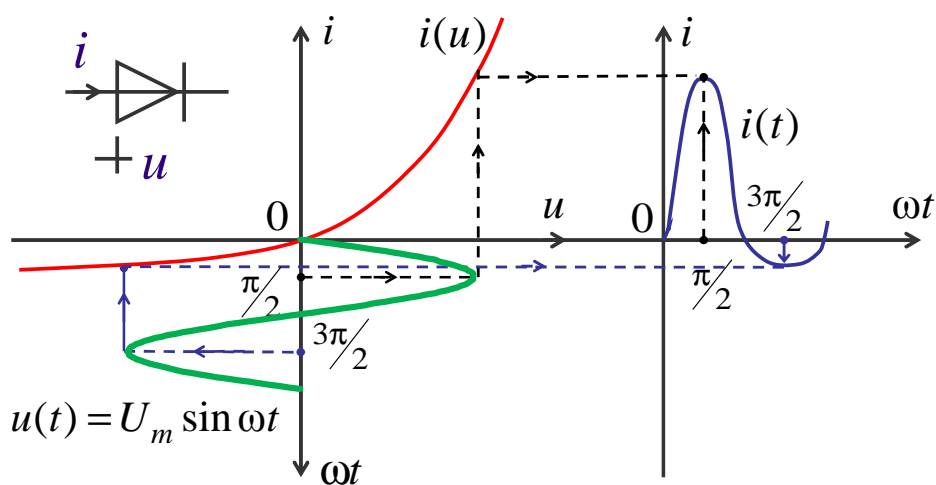


Рис. 56. Безынерционные элементы являются источником высших гармоник

В общем случае НРЭ изображаются:

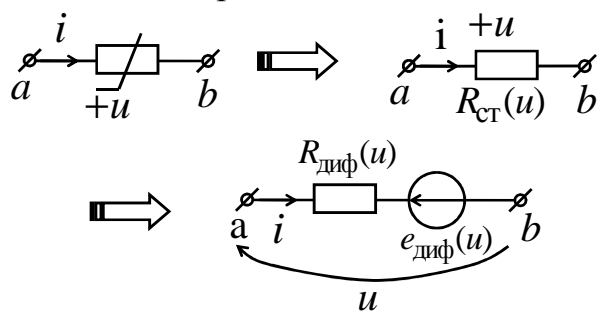


Рис. 57

Статическое сопротивление

$$R_{\text{ст}}(u) = \frac{u}{i(u)}, \text{ Ом.}$$

Дифференциальное сопротивление

$$R_{\text{диф}}(u) = \frac{du}{di} = \frac{u - e_{\text{диф}}(u)}{i(u)} = R_{\text{ст}}(u) - \frac{e_{\text{диф}}(u)}{i(u)}, \text{ Ом.}$$

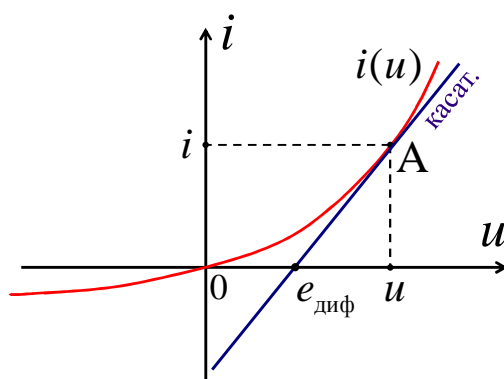


Рис. 58

Закон Ома:

$$i(u) = \frac{u}{R_{\text{ст}}(u)} = \frac{u - e_{\text{диф}}(u)}{R_{\text{диф}}(u)}, \text{ А.}$$

Закон Джоуля – Ленца:

$$P(u) = u \cdot i(u) = \frac{u^2}{R_{\text{ст}}(u)} = \frac{u^2 - u \cdot e_{\text{диф}}(u)}{R_{\text{диф}}(u)}, \text{ Вт.}$$

## Пример

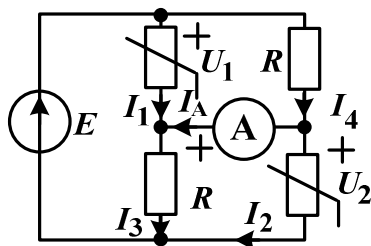


Рис. 59

### Дано:

$$E = 50 \text{ В};$$

$$R = 100 \text{ Ом.}$$

НРЭ имеют ВАХ

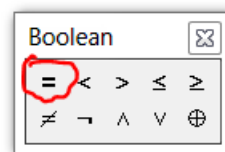
$$U_1 = 200 \cdot I_1^2, \text{ В};$$

$$I_2 = 2 \cdot 10^{-4} U_2^2, \text{ А.}$$

### Определить:

показание амперметра  $I_A$  (А)

Запишем уравнения по законам Кирхгофа и решим с помощью Given и Fihd в MatCAD. Для записи равенства в системе уравнений после Given используется сочетание двух клавиш Ctrl= либо выбираем из палитры логических символов.



## Пример решения в MathCAD

ORIGIN := 1

$$E := 50 \quad R := 100 \quad U_1(I_1) := 200 \cdot I_1^2 \quad U_2(I_2) := \sqrt{\frac{I_2}{2 \cdot 10^{-4}}}$$

Given

$$U_1(I_1) = I_4 \cdot R$$

$$E = U_1(I_1) + I_3 \cdot R$$

$$E = I_4 \cdot R + U_2(I_2)$$

$$I_1 + I_a = I_3$$

$$I_4 = I_a + I_2$$

$$I = I_1 + I_4$$

Возможные варианты ответов, из которых выбираем 1 столбец (все положительные),  $I_A = 0$  А:

$$A := \text{find}(I_a, I, I_1, I_2, I_3, I_4) \text{ float}, 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & .50 \\ .60 & -1.6 & -.50 \\ .30 & -.80 & -.50 \\ .20 & 1.3 & 0 \\ .30 & -.80 & 0 \\ .20 & 1.3 & .50 \end{pmatrix}$$

## Пример

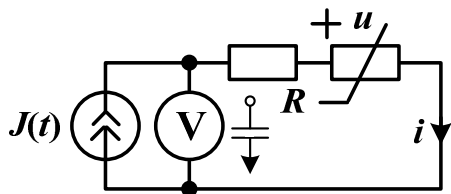


Рис. 60

**Дано:**

$$J(t) = I_m \sin \omega t \text{ (A);}$$

$$R = \dots \text{ Ом.}$$

НРЭ имеет ВАХ  $u = m \cdot i^3$  (В).

**Определить:**

показание вольтметра  $U_V$  (В).

*Примечание:*

$$\sin^3 \omega t = 0,75 \sin \omega t - 0,25 \sin 3\omega t$$

По второму закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} u_V(t) &= R \cdot i + u_{\text{НРЭ}} = R \cdot i + m \cdot i^3 = R \cdot I_m \sin \omega t + m (I_m \sin \omega t)^3 = \\ &= R \cdot I_m \sin \omega t + m I_m^3 \left( \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t \right) = \\ &= \left( R \cdot I_m + m I_m^3 \frac{3}{4} \right) \sin \omega t - \frac{1}{4} m I_m^3 \sin 3\omega t. \end{aligned}$$

Напряжение вольтметра  $U_V = \sqrt{U_1^2 + U_3^2}$ , В, где действующие значения напряжения первой и третьей гармоники

$$U_1 = \frac{R \cdot I_m}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \frac{m \cdot I_m^3}{\sqrt{2}}, \text{ В;} \quad U_3 = -\frac{1}{4} \frac{m \cdot I_m^3}{\sqrt{2}}, \text{ В.}$$

## 2.2. Расчет нелинейных резистивных цепей

Расчёт ведется графоаналитическими методами с использованием статических или динамических ВАХ НРЭ.

1. **Метод эквивалентного генератора** применяется для цепей с одним НРЭ.

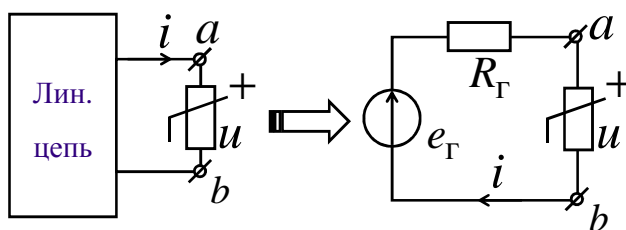


Рис. 61

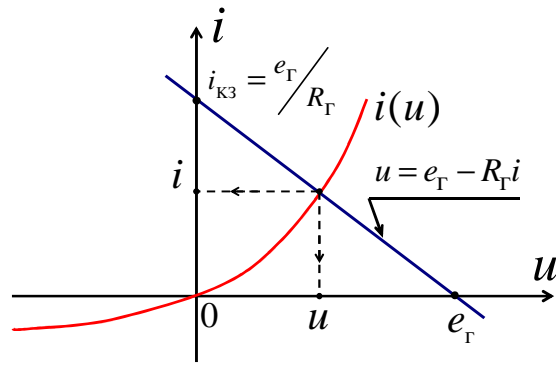


Рис. 62

2. **Сложение ВАХ** применяется для упрощения схем.

При этом на основании законов Кирхгофа ВАХ  $i(u)$  последовательно соединенных НРЭ складываются вдоль оси  $u$ , а ВАХ параллельно соединенных НРЭ складываются вдоль оси  $i$ .

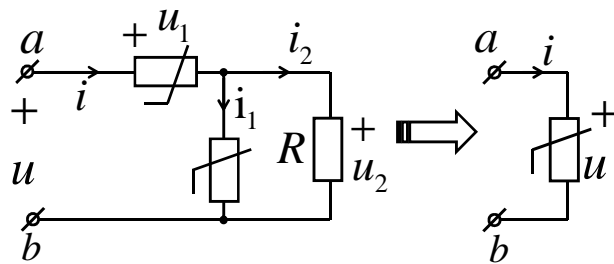


Рис. 63

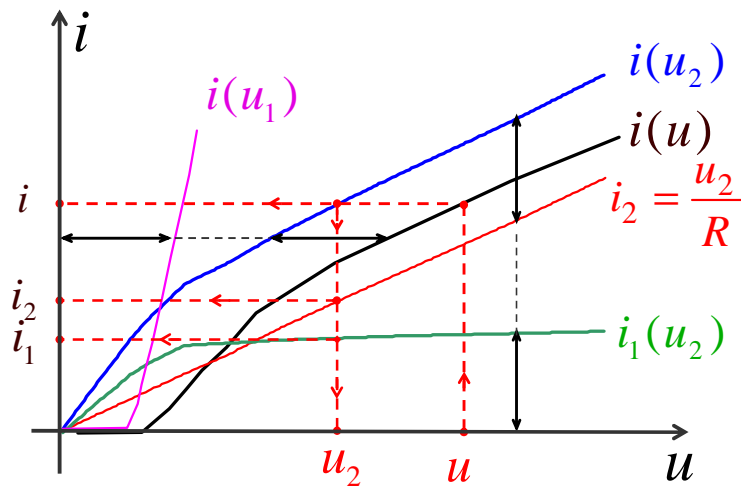


Рис. 64

3. **Метод двух узлов** применяется для схем с двумя узлами.

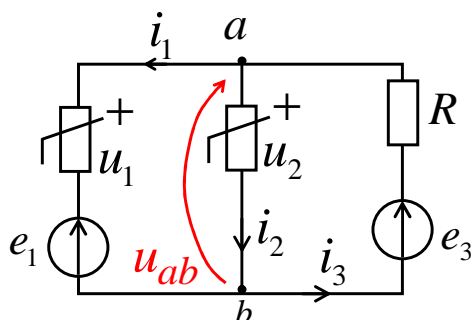


Рис. 65

Уравнения по законам Кирхгофа:

$$i_3 = i_1 + i_2;$$

$$u_{ab}(i_1) = e_1 + u_1(i_1);$$

$$u_{ab}(i_2) = u_2(i_2);$$

$$u_{ab}(i_3) = e_3 - Ri_3.$$

Так как  $i_3 = i_1 + i_2$ , то  $u_{ab}(i_1)$  и  $u_{ab}(i_2)$  складываем вдоль оси  $i$ , причем точка пересечения полученной ВАХ  $u_{ab}(i_1 + i_2)$  с  $u_{ab}(i_3)$  даст решение.

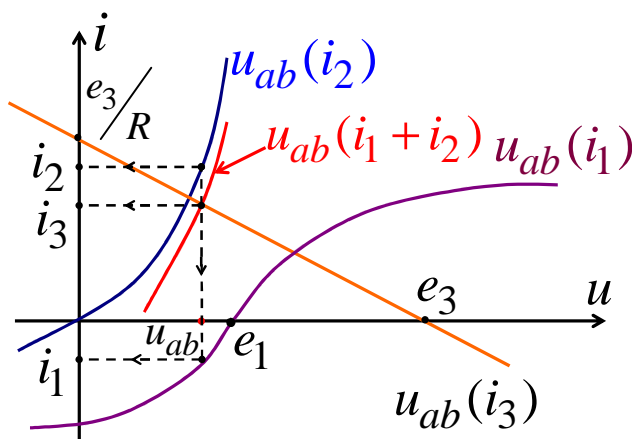


Рис. 66. Графическое решение

4. **Метод итераций** применяется для расчета схем с использованием вычислительной техники.

При этом НРЭ обозначаются в виде неизвестных статических сопротивлений  $R_{ст}$ , причем для лучшей сходимости итерационное выражение составляется для тока в НРЭ, если его ВАХ загибается к оси  $i$ , иначе составляется для  $u$ . Расчет ведется до повторения результатов.

### Пример

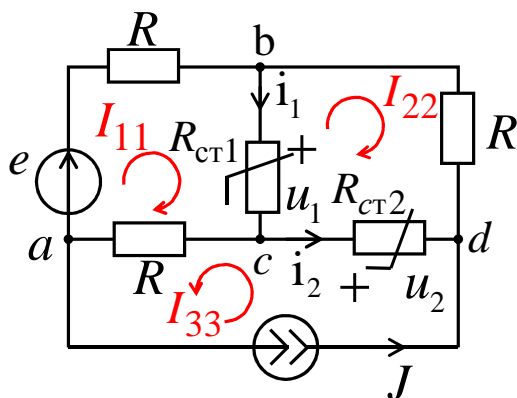


Рис. 67

**Дано:**

$$e(t) = \dots \text{ В};$$

$$J(t) = \dots \text{ А};$$

$$R = \dots \text{ Ом.}$$

ВАХ нелинейных элементов.

**Определить:**

$$i_1, u_1, i_2, u_2$$

По ВАХ определяем статические сопротивления нелинейных элементов.

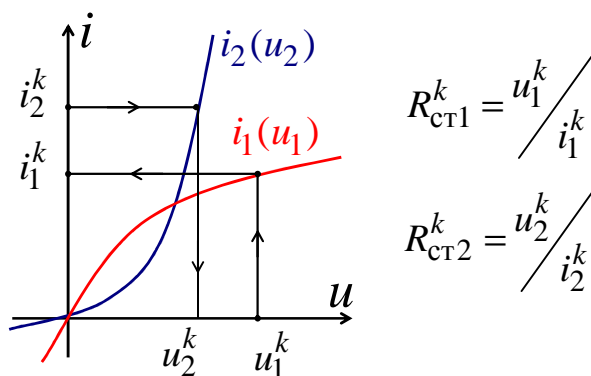


Рис. 68

Для расчета статических сопротивлений  $R_{ст1}^k$  и  $R_{ст2}^k$  используем метод контурных токов:

$$\begin{cases} [2R + R_{ст1}^k] \cdot I_{11}^{(k+1)} - R_{ст1}^k \cdot I_{22}^{(k+1)} = e - R \cdot J; \\ -R_{ст1}^k \cdot I_{11}^{(k+1)} + [R_{ст1}^k + R_{ст2}^k + R] \cdot I_{22}^{(k+1)} = -R_{ст2}^k \cdot J; \\ I_{33} = J. \end{cases}$$

Итерационные выражения:

$$\begin{cases} u_1^{(k+1)} = R_{\text{ст1}}^k \cdot i_1^{(k+1)} = R_{\text{ст1}}^k \cdot [I_{11}^{(k+1)} - I_{22}^{(k+1)}]; \\ i_2^{(k+1)} = -I_{22}^{(k+1)} - J. \end{cases}$$

Задаемся произвольными значениями  $u_1^{(0)}$  и  $i_2^{(0)}$ , по ВАХ находим  $i_1^{(0)}$  и  $u_2^{(0)}$ , рассчитываем  $R_{\text{ст1}}^{(0)}$  и  $R_{\text{ст2}}^{(0)}$ , по итерационным выражениям определяем  $u_1^{(1)}$  и  $i_2^{(1)}$ , по ВАХ находим  $i_1^{(1)}$  и  $u_2^{(1)}$  и т.д.

Расчет ведется до повторения результатов.

**5. Метод линеаризации ВАХ** в области предполагаемого решения применяется как приближенный метод:

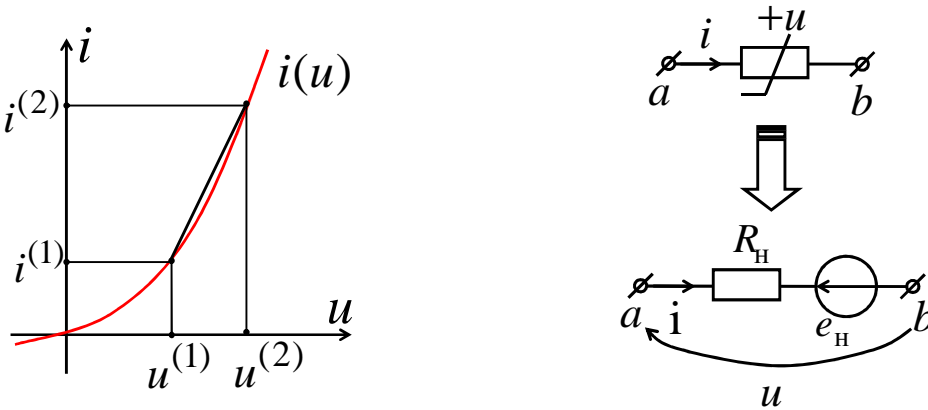


Рис. 69

$$u \approx e_H + R_H i;$$

$$R_H = \frac{u^{(2)} - u^{(1)}}{i^{(2)} - i^{(1)}}, \text{ Ом};$$

$$e_H = u^{(1)} - R_H i^{(1)}, \text{ В.}$$

После замены нелинейных элементов линейными резисторами  $R_H$  и ЭДС  $e_H$  расчет ведется любым методом.

Если найденные токи  $i$  лежат в выбранных интервалах  $i^{(1)} < i < i^{(2)}$ , то  $i$  приближенно истинные.



6. Применение MathCAD для расчета переменных напряжений и ТОКОВ.

**Пример**

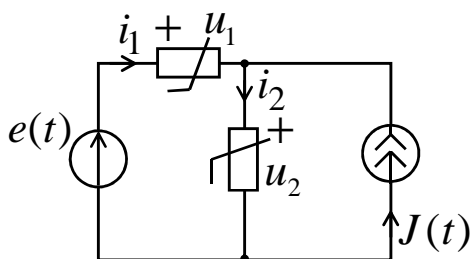


Рис. 70

**Дано:**

$$e(t) = 200 \sin 314t, \text{ В};$$

$$J(t) = 1 \cos 314t, \text{ А};$$

$$i_1 = 0,1 \cdot (e^{0,02 \cdot u_1} - 1), \text{ А};$$

$$u_2 = 100 \cdot i_2^3, \text{ В}.$$

**Определить:**

$$i_1, u_1, i_2, u_2$$

По законам Кирхгофа  $-i_1 + i_2 - J(t) = 0$ ,  $e(t) = u_1 + u_2$ ;

$$u_1 := 100 \quad i_2 := -1 \quad t := 0$$

Given

$$-0,1 \cdot (e^{0,02 \cdot u_1} - 1) + i_2 - 1 \cdot \cos(314 \cdot t) = 0$$

$$u_1 + 100 \cdot i_2^3 - 200 \cdot \sin(314 \cdot t) = 0$$

$$A := \text{Find}(u_1, i_2)$$

$$A_0 := u_1 \quad A_1 := i_2$$

$$i_1 := i_2 - 1 \cdot \cos(314 \cdot t)$$

$$u_2 := 200 \cdot \sin(314 \cdot t) - u_1$$

Изменяем  $t := 0.001$  и повторяем расчет. Затем строим графики, например  $i_1(t)$  и  $u_2(t)$ .

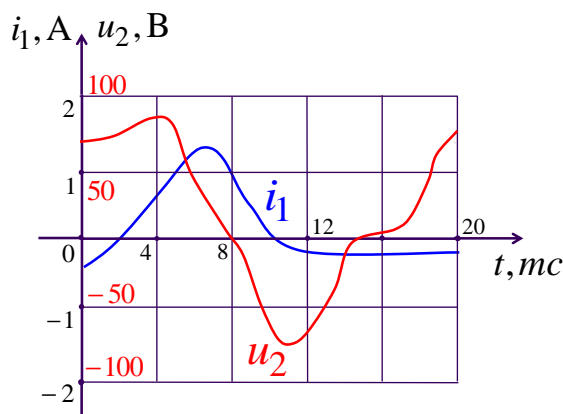


Рис. 71

### 2.3. Нелинейные индуктивные элементы

Нелинейные индуктивные элементы (НИЭ) запасают энергию в магнитном поле и задаются нелинейной веберамперной характеристикой  $\Psi(i_L)$ ;

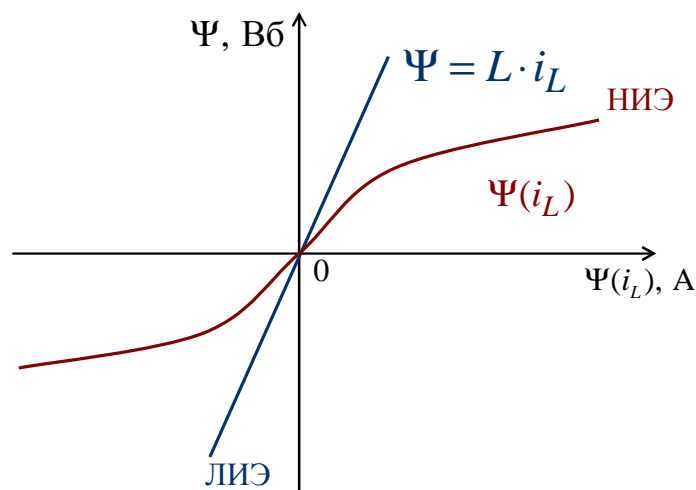


Рис. 72

$\Psi$  – потокосцепление, Вб;

$i_L$  – ток НИЭ, А.

НИЭ обозначаются:

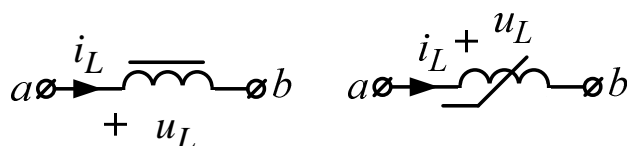


Рис. 73

НИЭ характеризуются:

а) статической индуктивностью  $L_{ст}(i_L) = \frac{\Psi}{i_L}$ , Гн;

б) дифференциальной индуктивностью  $L_{диф}(i_L) = \frac{d\Psi}{di_L}$ , Гн.

Для линейного индуктивного элемента (ЛИЭ)

$$L = L_{ст} = L_{диф} = \text{const}.$$

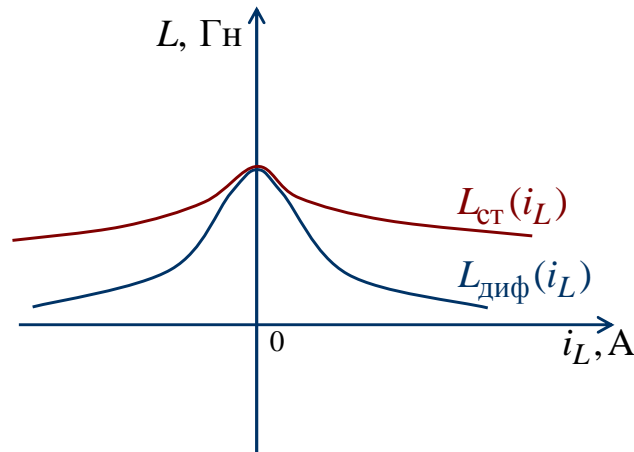


Рис. 74

Напряжение НИЭ

$$u_L = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\Psi}{di_L} \cdot \frac{di_L}{dt} = L_{\text{диф}}(i_L) \cdot \frac{di_L}{dt}.$$

Веберамперная характеристика (ВБАХ) НИЭ

$$i_L \approx k_1 \Psi + k_3 \Psi^3 + k_5 \Psi^5 + \dots,$$

где  $k_1, k_3, k_5 \dots$  – постоянные коэффициенты.

Энергия магнитного поля НИЭ в момент  $t = t_0$

$$\begin{aligned} W_M(t_0) &= \int_0^{t_0} u_L i_L dt = \int_0^{t_0} \frac{d\Psi}{dt} \cdot i_L dt = \\ &= \int_0^{\Psi_0} i_L d\Psi = \frac{k_1 \Psi_0^2}{2} + \frac{k_3 \Psi_0^4}{4} + \frac{k_5 \Psi_0^6}{6} + \dots, \text{ Дж,} \end{aligned}$$

где  $\Psi_0$  – значение потокосцепления в момент  $t = t_0$ ;  $\Psi(0) = 0$  – значение при  $t = 0$ .

НИЭ – это безынерционный элемент, т.е. формы кривых  $i_L(t)$  и  $u_L(t)$  различны.

Если  $u_L(t) = U_m \cos \omega t$ , то  $\Psi(t) = \int u_L dt + A = \frac{U_m}{\omega} \sin \omega t$ , Вб.

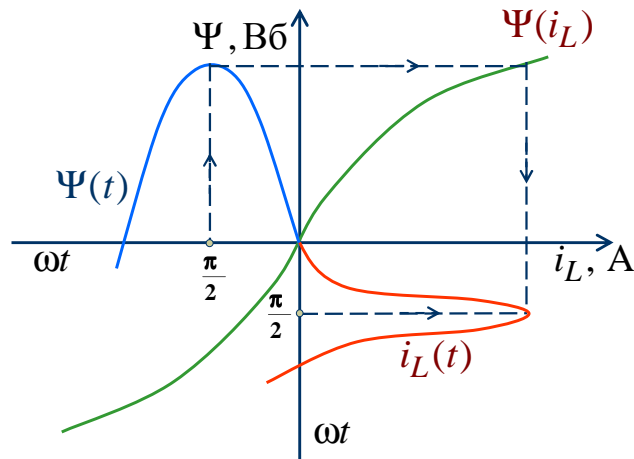


Рис. 75

Ток  $i_L(t)$  содержит нечетные гармоники  $k = 1, 3, 5$ .

Физически НИЭ – это катушка с ферромагнитным магнитопроводом;

$\Psi(i_L)$  – это соединенные между собой вершины петель гистерезиса.

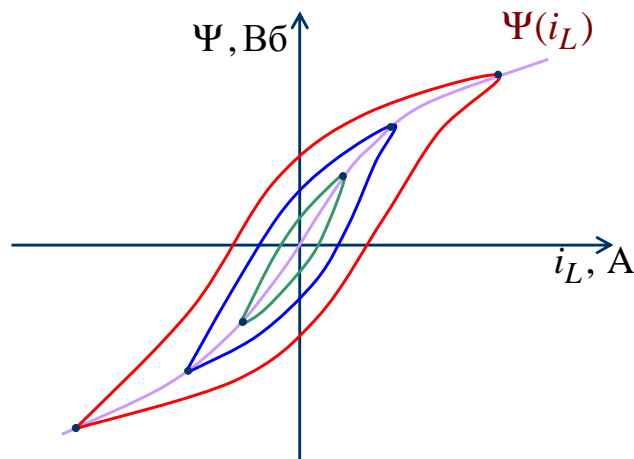


Рис. 76

### Законы Кирхгофа для магнитных цепей

Магнитопроводы НИЭ образуют магнитные цепи, которые предназначены для концентрации и усиления магнитного потока  $\Phi$ . Законы Кирхгофа используются для определения  $\Phi$  и  $\Psi(i_L)$  НИЭ.

Магнитные цепи характеризуются:

- средней длиной участка  $\ell$  (м);
- площадью сечения участка  $S$  (м<sup>2</sup>);
- величиной воздушного зазора  $\delta$  (м);
- магнитной индукцией  $B$  (Тл);

- магнитной напряженностью  $H$  (А/м);
- магнитным потоком  $\Phi = BS$  (Вб);
- числом витков катушки  $w$  (в);
- намагничивающей силой  $w \cdot i$  (Ав).

### Первый закон Кирхгофа

Для любого узла магнитной цепи алгебраическая сумма магнитных потоков равна нулю, причем магнитные потоки, выходящие из узла, берутся со знаком плюс («+»), а входящие в узел – со знаком минус («-»):

$$\sum \pm \Phi_k = 0.$$

Физически первый закон Кирхгофа основывается на законе непрерывности магнитного потока:

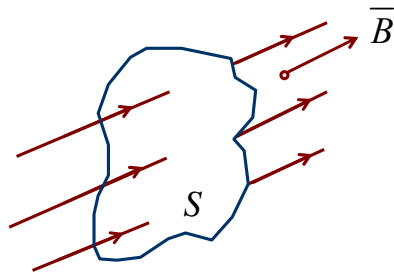


Рис. 77

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0,$$

$\bar{B}$  – вектор индукции магнитного поля (Тл).

### Второй закон Кирхгофа

Для любого контура магнитной цепи алгебраическая сумма намагничивающих сил равна алгебраической сумме магнитных напряжений, причем со знаком плюс («+») записываются те слагаемые, положительные направления которых совпадают с направлением обхода контура

$$\sum \pm i_q w_q = \sum \pm U_{\text{МК}}.$$

Физически второй закон Кирхгофа основывается на законе полного тока:

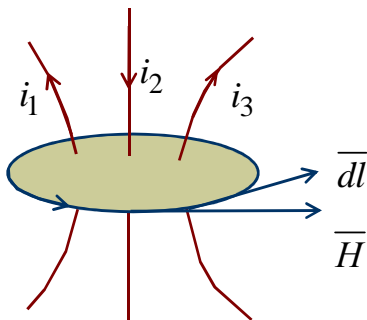


Рис. 78

$$\oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = \sum \pm i_k = i_1 - i_2 + i_3,$$

$\bar{H}$  – вектор напряженности магнитного поля (А/м);

$\bar{B} = \mu_0 \bar{H}$  – для воздуха;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  (Гн/м) – магнитная постоянная.

$\bar{B} = \mu(H) \cdot \bar{H}$  – для магнитопровода.  $\mu(H)$  – магнитная проницаемость (Гн/м).

Для ферромагнитного материала  $B(H)$  – кривая намагничивания.

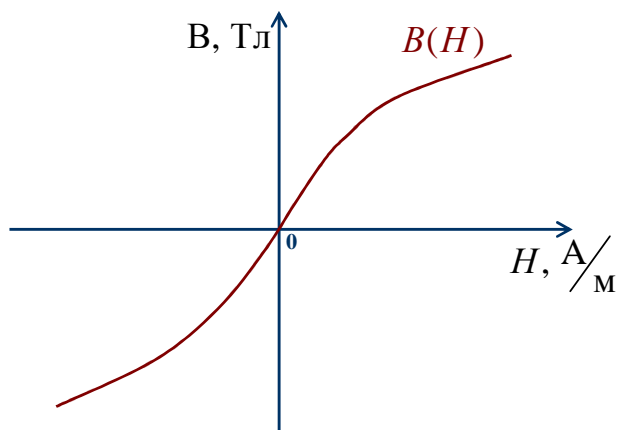


Рис. 79

1. **Намагничивающая сила** –  $i_q w_q$  (А), где  $i_q$  – ток (А),  $w_q$  – число витков катушки.

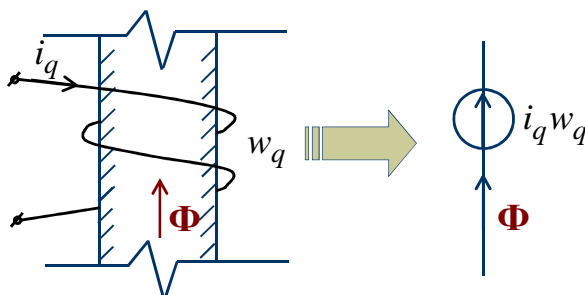


Рис. 80

2. **Нелинейное магнитное сопротивление** участка магнитопровода –

$$R_M \left( \frac{1}{\text{Гн}} \right).$$

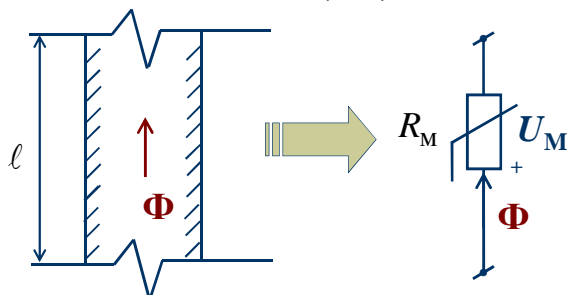


Рис. 81

Для ферромагнитного материала  $R_M = \frac{\ell}{\mu(H) \cdot S} = \frac{H\ell}{BS} \left[ \frac{1}{\Gamma_H} \right]$ .

Магнитное напряжение –  $U_M = R_M \Phi$  А.

### 3. Линейное магнитное сопротивление воздушного зазора –

$$R_\delta = \frac{\delta}{\mu_0 S} \left[ \frac{1}{\Gamma_H} \right].$$

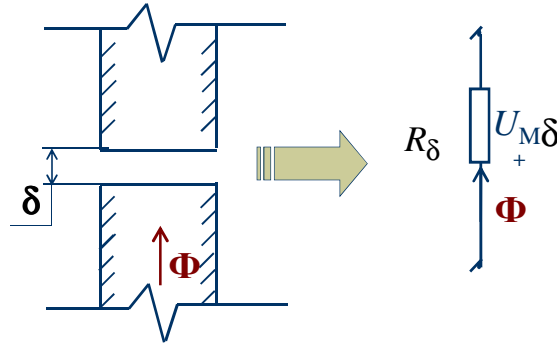


Рис. 82

Магнитное напряжение  $U_{M\delta} = R_\delta \Phi = \frac{B\delta}{\mu_0}$ , А.

Таким образом,  $\sum \pm i_q w_q = \sum \pm R_{M_k} \Phi_k + \sum \pm R_{\delta_k} \Phi_k$ .

Аналогия между резистивной и магнитной цепями:

$$i \rightarrow \Phi;$$

$$u \rightarrow U_M;$$

$$e \rightarrow iw.$$

## 2.4. Расчет неразветвленной магнитной цепи

Неразветвленная магнитная цепь содержит один магнитный поток.

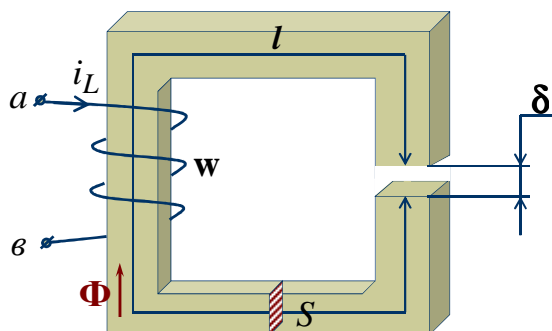


Рис. 83

Схема замещения магнитной цепи:

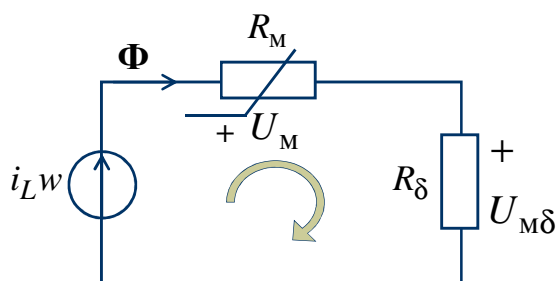


Рис. 84

По второму закону Кирхгофа

$$i_L w = R_M \Phi + R_\delta \Phi = H l + \frac{B \delta}{\mu_0}, \text{ А,}$$

где  $\Phi = B S$ , Вб.

### Прямая задача

Когда известен магнитный поток  $\Phi$ , тогда  $B = \Phi / S$  и по  $B(H)$  графически находим  $H$ .

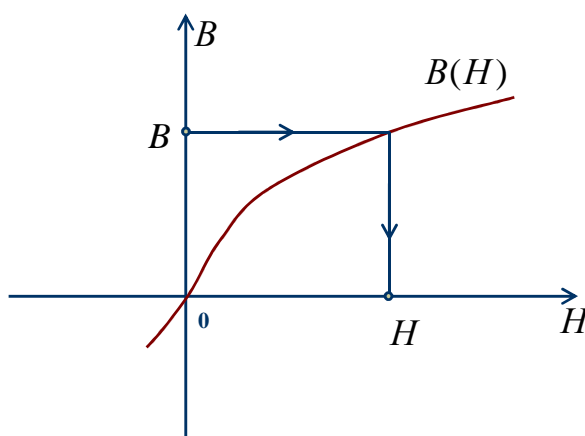


Рис. 85

В результате находим:



- а) ток  $i_L = \frac{Hl + B \frac{\delta}{\mu_0}}{w}$ , А;
- б) потокосцепление  $\Psi = w\Phi$ , Вб;
- в) статическую индуктивность  $L_{ст} = \frac{\Psi}{i_L}$ , Гн;
- г) энергию магнитного поля  $W_M \approx \frac{BH}{2} S\ell + \frac{B^2}{2\mu_0} S\delta$ , Дж;
- д) силу, стягивающую зазор,  $P = \frac{B^2}{2\mu_0} S$ , Н.

### Обратная задача

Когда известен ток  $i_L$ , тогда из уравнения  $i_L w = H \cdot \ell + \frac{B \cdot \delta}{\mu_0}$  получаем уравнение прямой линии

$$B = a - b \cdot H,$$

где  $a = \frac{\mu_0 i_L w}{\delta}$ , Тл;  $b = \frac{\mu_0 \cdot \ell}{\delta} \left[ \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \right]$ .

Графически определяем  $B$  и  $H$ , а затем по известным формулам находятся  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $L_{ст}$ ,  $W_M$ ,  $P$ .

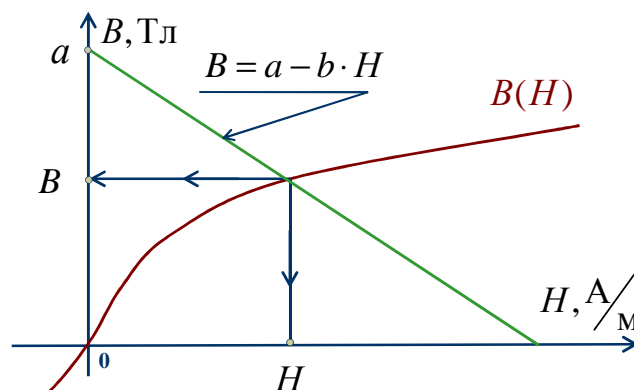
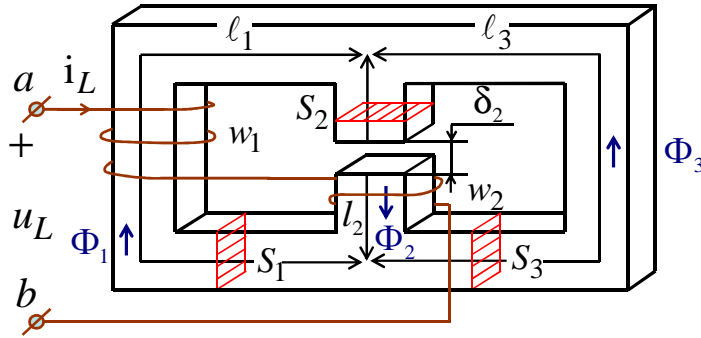


Рис. 86. Графическое решение

## 2.5. Расчет разветвленной магнитной цепи

Разветвленная магнитная цепь содержит несколько магнитных потоков.

### Пример



**Дано:**

$$\delta_1 = \delta_3 = 0;$$

$$w_3 = 0;$$

$$l_1, l_2, l_3, S_1, S_2, S_3, \delta_2;$$

$B(H)$  – кривая намагничивания стали.

**Определить:**

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$$

4

Рис. 87

Схема замещения магнитной цепи

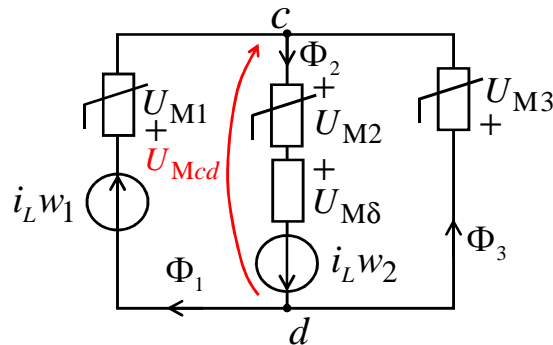


Рис. 88

Воспользуемся методом двух узлов ( $c$  и  $d$ ) и составим уравнения по законам Кирхгофа:

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3; \quad (2.1)$$

$$U_{mcd}(\Phi_1) = i_L w_1 - U_{M1}(\Phi_1); \quad (2.2)$$

$$U_{mcd}(\Phi_2) = -i_L w_2 + U_{M2}(\Phi_2) + U_{M\delta}(\Phi_2); \quad (2.3)$$

$$U_{mcd}(\Phi_3) = -U_{M3}(\Phi_3). \quad (2.4)$$

Магнитные напряжения:

$$U_{M1}(\Phi_1) = H_1 \ell_1; \quad (2.5)$$

$$U_{M2}(\Phi_2) = H_2 \ell_2; \quad (2.6)$$

$$U_{M3}(\Phi_3) = H_3 \ell_3; \quad (2.7)$$

$$U_{M\delta}(\Phi_2) = \frac{B_2 \delta_2}{\mu_0}. \quad (2.8)$$

### Прямая задача

Известны  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , тогда  $\Phi_3 = \Phi_2 - \Phi_1$ ,

$$B_1 = \Phi_1 / S_1, \quad B_2 = \Phi_2 / S_2, \quad B_3 = \Phi_3 / S_3.$$

По  $B(H)$  и  $B_{1,2,3}$  находим  $H_{1,2,3}$ .

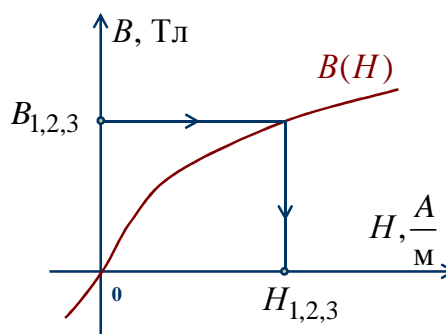


Рис. 89

По уравнениям (2.5 – 2.8) рассчитываем  $U_{M1}(\Phi_1)$ ,  $U_{M2}(\Phi_2)$ ,  $U_{M3}(\Phi_3)$ ,  $U_{M\delta}(\Phi_2)$ .

По уравнениям (2.1 – 2.4) определяем  $U_{Mcd} = U_{Mcd}(\Phi_3)$ ,  $i_L w_1$ ,  $i_L w_2$ .

При заданном токе  $i_L$  находим:

числа витков  $w_1$  и  $w_2$ ;

суммарное потокосцепление  $\Psi = w_1 \Phi_1 + w_2 \Phi_2 + w_3 \Phi_3$ , Вб;

суммарную статическую индуктивность  $L_{ст} = \Psi / i_L$ , Гн.

### Обратная задача

При заданном токе  $i_L$  и числах витков  $w_1$  и  $w_2$  определяем н.с.  $i_L w_1$  и  $i_L w_2$ . Рассчитываем уравнения (2.1 – 2.4) и (2.5 – 2.8), заполняем табл. 2.1 и 2.2.

Таблица 2.1

$B_{1,2,3}$ , Тл	0	0,6	1	...	2,5
$H_{1,2,3}$ , А/м	0	250	500	...	$2 \cdot 10^5$
$\Phi_1 = B \cdot S_1$ , Вб					
$\Phi_2 = B \cdot S_2$ , Вб					
$\Phi_3 = B \cdot S_3$ , Вб					
$U_{M1}(\Phi_1)$ , А					
$U_{M2}(\Phi_2)$ , А					
$U_{M\delta}(\Phi_2)$ , А					
$U_{M3}(\Phi_3)$ , А					

Таблица 2.2

$B_{1,2,3}$ , Тл	0	0,6	1	...	2,5
$U_{Mcd}(\Phi_1)$ , А					
$U_{Mcd}(\Phi_2)$ , А					
$U_{Mcd}(\Phi_3)$ , А					

Строим графики  $U_{Mcd}(\Phi_1)$ ,  $U_{Mcd}(\Phi_2)$ ,  $U_{Mcd}(\Phi_3)$ . Так как  $\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3$ , то  $U_{Mcd}(\Phi_1)$  и  $U_{Mcd}(\Phi_3)$  складываем вдоль оси  $\Phi$ . По точке пересечения  $U_{Mcd}(\Phi_1 + \Phi_3)$  с  $U_{Mcd}(\Phi_2)$  определяем  $U_{Mcd}$  и  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ .

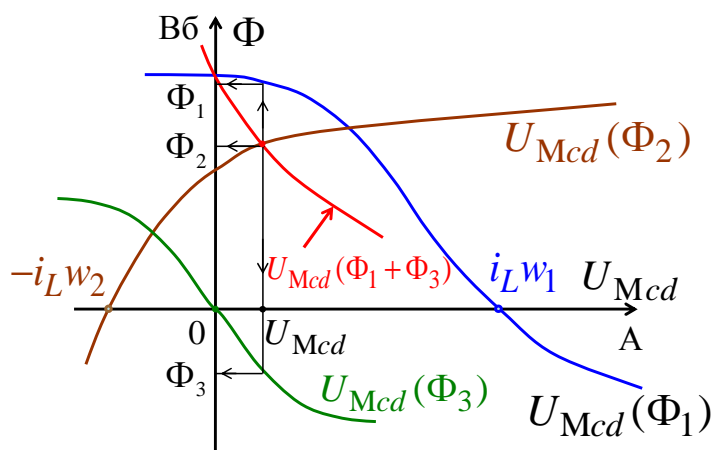


Рис. 90

Если изменить ток  $i_L$ , то необходимо повторить расчет, начиная с табл. 2.2, и определить другое значение  $\Psi$ . В результате можно построить ВБАХ  $\Psi(i_L)$  НИЭ.

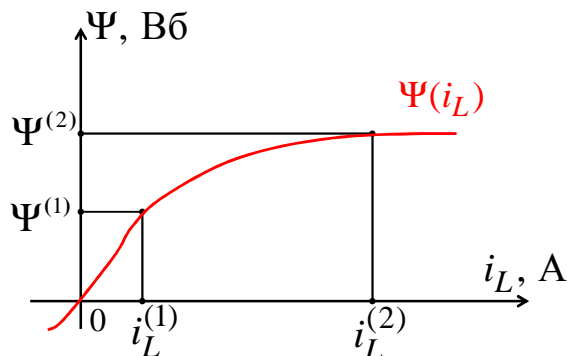


Рис. 91

## 2.6. Расчет цепей с линейными и нелинейными индуктивными элементами

Расчет осуществляется графоаналитическими методами с использованием ВБАХ  $\Psi(i_L)$ .

1. Группа линейных и нелинейных индуктивных элементов на основании законов Кирхгофа заменяется одним НИЭ с эквивалентной ВБАХ  $\Psi(i_L)$ :

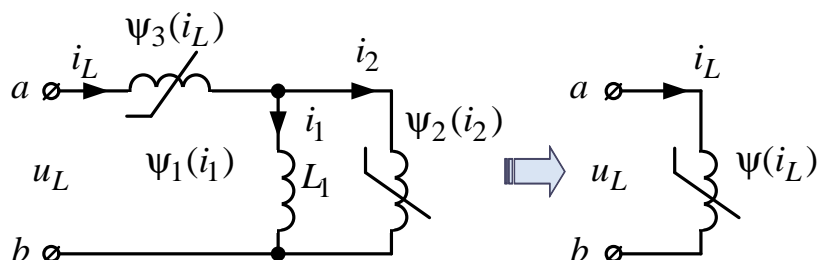


Рис. 92

$$\text{Потокосцепление } \Psi(t) = \int u_L(t) dt + A;$$

$$\left. \begin{array}{l} \Psi = \Psi(t_0) \\ i_L = i_L(t_0) \end{array} \right\} \text{— мгновенные значения;}$$

$t = t_0$  — расчетный момент времени.

Графически определяем мгновенные значения  $i_L$ ,  $i_1$  и  $i_2$ , причем ВБАХ параллельных элементов складываются вдоль оси  $i$ , а последовательно соединенных — вдоль оси  $\Psi$ .

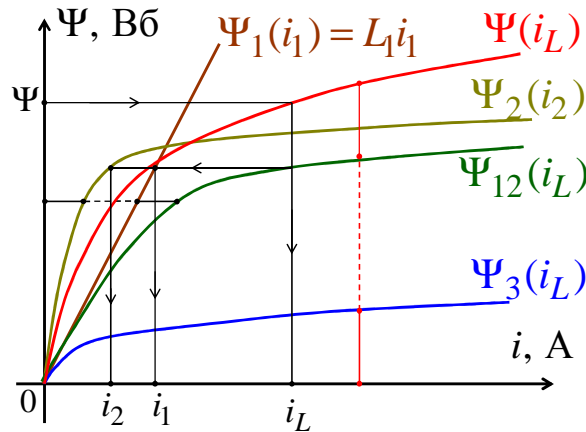
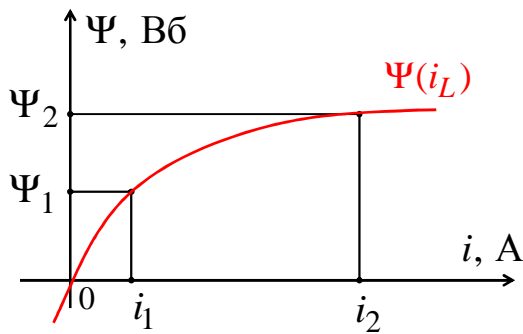


Рис. 93

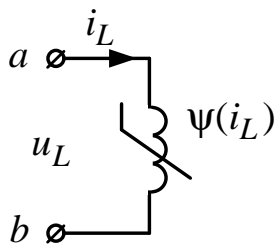
2. Заданная ВБАХ  $\Psi(i_L)$  НИЭ может приближенно заменяться зависимостью  $i_L \approx k_1 \Psi + k_3 \Psi^3 + \dots$ , коэффициенты  $k_1$  и  $k_3$  находятся из решения уравнений



$$\begin{cases} i_1 = k_1 \Psi_1 + k_3 \Psi_1^3; \\ i_2 = k_1 \Psi_2 + k_3 \Psi_2^3. \end{cases}$$

Рис. 94

Если веберамперная характеристика нелинейного индуктивного элемента задана аналитически,  $i_L \approx k_1 \Psi + k_3 \Psi^3$ . Напряжение на НИЭ  $u_L(t) \approx \sqrt{2}U_L \cos(\omega t + \beta)$ , тогда



$$\Psi(t) = \int u_L(t) dt + A = \frac{\sqrt{2}U_L}{\omega} \sin(\omega t + \beta);$$

$$\begin{aligned} i_L &\approx k_1 \Psi(t) + k_3 \Psi^3(t) = \\ &= \frac{\sqrt{2}k_1 U_L}{\omega} \sin(\omega t + \beta) + \\ &+ \frac{2\sqrt{2}k_3 U_L^3}{\omega^3} \sin^3(\omega t + \beta); \end{aligned}$$

$$\sin^3(\omega t + \beta) = \frac{3}{4} \sin(\omega t + \beta) - \frac{1}{4} \sin(3\omega t + 3\beta);$$

$$i_L(t) \approx \sqrt{2} I_1 \sin(\omega t + \beta) + \sqrt{2} I_3 \sin(3\omega t + 3\beta).$$

Действующие значения:

$$I_1 = \frac{k_1 U_L}{\omega} + \frac{3k_3 U_L^3}{2\omega^3}; \quad I_3 = -\frac{k_3 U_L^3}{2\omega^3}; \quad I_L = \sqrt{I_1^2 + I_3^2}.$$

Изменяя  $U_L$ , можно рассчитать  $I_1$ ,  $I_3$ ,  $I_L$  и получить ВАХ  $U_L(I_L)$  НИЭ для действующих значений. При расчете  $U_L(I_L)$  удобно заполнять таблицу.

$U_L, \text{ В}$				
$I_1, \text{ А}$				
$I_3, \text{ А}$				
$I_L, \text{ А}$				
$k_r = \frac{I_1}{I_3}$				

### Пример

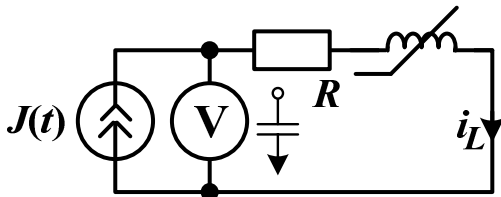


Рис. 95

**Дано:**

$$J(t) = I_m \sin \omega t \text{ (А);}$$

$$R = \dots \text{ (Ом).}$$

НИЭ имеет ВБАХ

$$\Psi = m \cdot i_L^3 \text{ (Вб).}$$

**Определить:**

показание вольтметра  $U_V$  (В)

*Решение:*

$$u_L(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = (m \cdot i_L^3)';$$

$$m I_m^3 \sin^3 \omega t = m I_m^3 \left( \frac{3}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t \right);$$

$$\left( m I_m^3 \frac{3}{4} \sin \omega t - m I_m^3 \frac{1}{4} \sin 3\omega t \right)' = m I_m^3 \frac{3}{4} \omega \cos \omega t - m I_m^3 \frac{1}{4} 3\omega \cos 3\omega t;$$

$$u_V(t) = R \cdot i + u_L = R \cdot I_m \sin \omega t + m I_m^3 \frac{3}{4} \omega \cos \omega t - m I_m^3 \frac{1}{4} 3\omega \cos 3\omega t.$$

Напряжение вольтметра

$$U_V = \sqrt{|U_1|^2 + |U_3|^2}, \text{ В,}$$

где действующие значения напряжения первой и третьей гармоники:

$$U_1 = \left| \frac{R \cdot I_m}{\sqrt{2}} + \frac{m I_m^3 \frac{3}{4} \cdot \omega}{\sqrt{2}} e^{90i} \right|, \text{ В};$$

$$U_3 = -\frac{m I_m^3 \frac{3}{4} \cdot 3\omega}{\sqrt{2}}.$$

## 2.7. Нелинейные емкостные элементы

НЕЭ запасают энергию в электрическом поле и имеют нелинейную кулонвольтную характеристику (КВХ)  $q(U_C)$ .

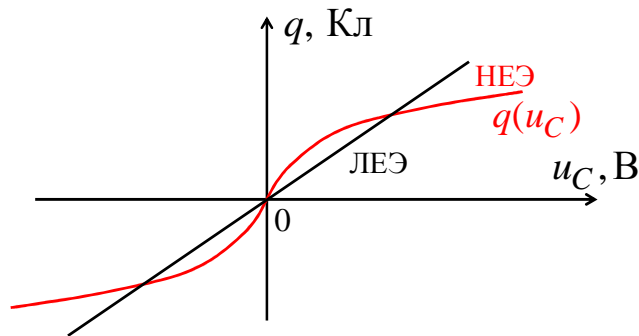


Рис. 96

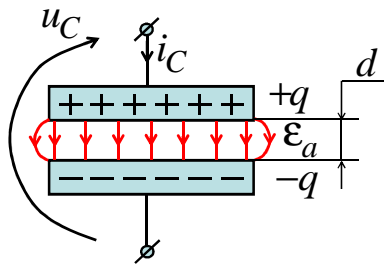


Рис. 97

$q$  – заряд НЕЭ, Кл;  
 $u_C$  – напряжение, В;  
 $\epsilon_a$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость, Ф/м;  
 $d$  – расстояние между обкладками, м.

НЕЭ обозначаются:

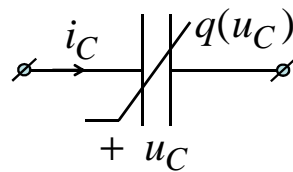


Рис. 98



НЕЭ характеризуется:

1) статической емкостью  $C_{ст}(u_C) = q/u_C$ , Ф;

2) дифференциальной емкостью  $C_{диф}(u_C) = \frac{dq}{du_C}$ , Ф.

Для линейного емкостного элемента  $C = C_{ст} = C_{диф} = \text{const}$ .

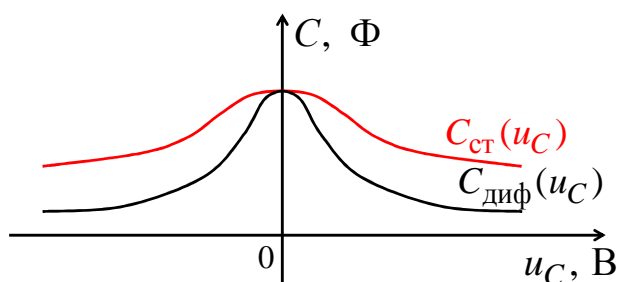


Рис. 99

Ток НЕЭ  $i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du_C} \cdot \frac{du_C}{dt} = C_{диф}(u_C) \cdot \frac{du_C}{dt}$ , А.

Кулонвольтная характеристика нелинейного элемента может быть задана аналитически, например

$$u_C \approx m_1 q + m_3 q^3 + m_5 q^5 + \dots,$$

где  $m_1, m_3, m_5, \dots$  — постоянные коэффициенты.

Энергия НЕЭ

$$\begin{aligned} W_{Э}(t_0) &= \int_0^{t_0} u_C i_C dt = \int_0^{t_0} u_C \frac{dq}{dt} dt = \int_0^{q_0} u_C dq \approx \\ &\approx \frac{m_1 q_0^2}{2} + \frac{m_3 q_0^4}{4} + \frac{m_5 q_0^6}{6} + \dots, \text{ Дж,} \end{aligned}$$

где  $q_0$  — значение заряда в момент времени  $t = t_0$ , причем  $q(0) = 0$ .

**НЕЭ — это безынерционный элемент.**

Если  $i_C(t) = I_m \cos \omega t$ , то  $q(t) = \int i_C(t) dt + A = \frac{I_m}{\omega} \sin \omega t$ , Кл.

Графически определяем напряжение  $u_C(t)$

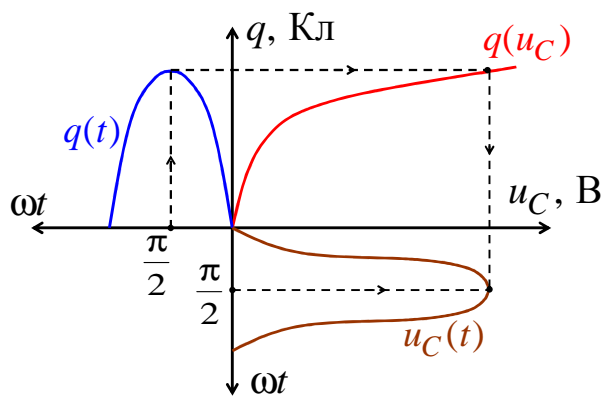


Рис. 100

Напряжение  $u_C(t)$  содержит нечетные гармоники.  
Физически НЕЭ – это вариконды и варикапы.

1. **Вариконды** содержат сегнетоэлектрики (титанат бария), у которых зависимость  $\epsilon_r = f(E)$  нелинейна (рис. 91).

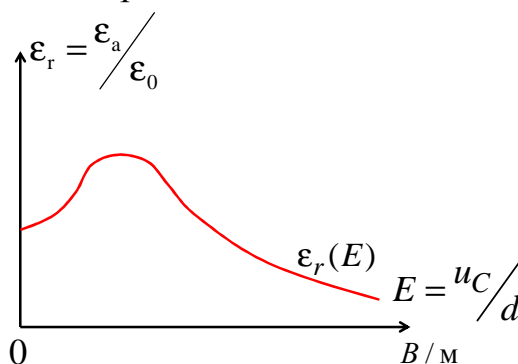


Рис. 101

**Вариконды** имеют КВХ  $q(U_C)$  в виде семейства петель гистерезиса.

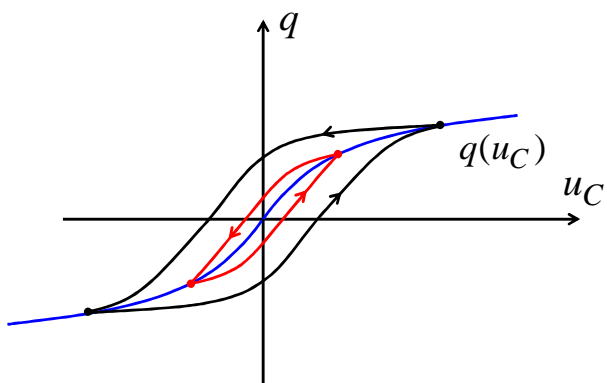


Рис. 102

2. **Варикап** – это барьерная емкость обратно смещенного  $p-n$ -перехода специального диода.

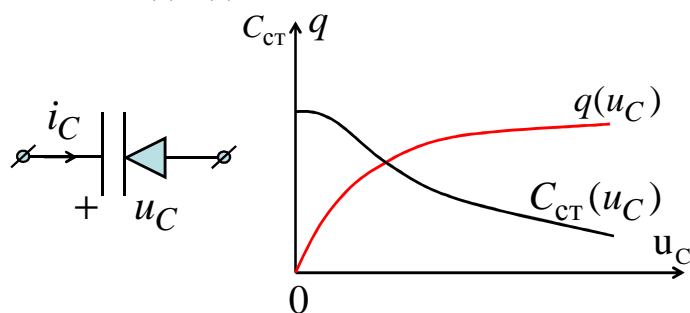


Рис. 103

Для расчета цепей с ЛЕЭ и НЕЭ используются графоаналитические методы с применением:

- КВХ  $q(U_C)$  емкостных элементов, которые складываются между собой согласно законам Кирхгофа, причем КВХ последовательных НЕЭ складываются вдоль оси  $U_C$ , а параллельных НЕЭ – вдоль оси  $q$ .

- КВХ  $q(U_C)$  может приближенно заменяться зависимостью  $u_C \approx m_1 q + m_3 q^3 + \dots$ , тогда при  $i_C(t) = \sqrt{2} I_C \cos(\omega t + \alpha)$  получаем

$$q(t) = \frac{\sqrt{2} I_C}{\omega} \sin(\omega t + \alpha);$$

$$u_C \approx m_1 q(t) + m_3 q(t)^3 = \sqrt{2} U_1 \sin(\omega t + \alpha) + \sqrt{2} U_3 \sin(3\omega t + 3\alpha), \text{ В,}$$

где  $U_1 = \frac{m_1 I_C}{\omega} + \frac{3m_3 I_C^3}{2\omega^3}$ ;  $U_3 = -\frac{m_3 I_C^3}{2\omega^3}$ ;  $U_C = \sqrt{U_1^2 + U_3^2}$ ;  $k_r = \left| \frac{U_3}{U_1} \right|$ .

## 2.8. Метод эквивалентных синусоид

Метод применяется для приближенного расчета установившегося режима в нелинейных цепях, которые содержат нелинейные элементы и подключены к периодическим источникам с одинаковым периодом  $T$ .

При этом напряжения  $u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} U_k \sin(k\omega t + \beta_k + \varphi_k)$  и токи

$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_k \sin(k\omega t + \beta_k)$  заменяются эквивалентными синусоидами

$$u(t) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \beta + \varphi); \quad i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \beta),$$

где  $U = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2}$ ;  $I = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2}$ ;  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ;  $P = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k$ ;

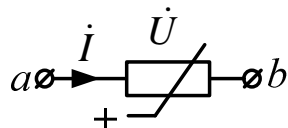
$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k.$$

Активная потребляемая мощность  $P = UI \cos \varphi$ , Вт, должна остаться неизменной, поэтому:

а) если  $Q < 0$ ,  $\varphi = -\arccos \frac{P}{UI}$ ;

б) если  $Q > 0$ ,  $\varphi = \arccos \frac{P}{UI}$ .

Нелинейные элементы задаются ВАХ  $U(I)$  и ФАХ  $\varphi(I)$  для действующих значений, при этом применяется символический метод



$$\dot{U} = U e^{j[\beta + \varphi(I)]}, \quad \dot{I} = I e^{j\beta}, \quad P(I) = U(I) \cdot I \cos \varphi(I).$$

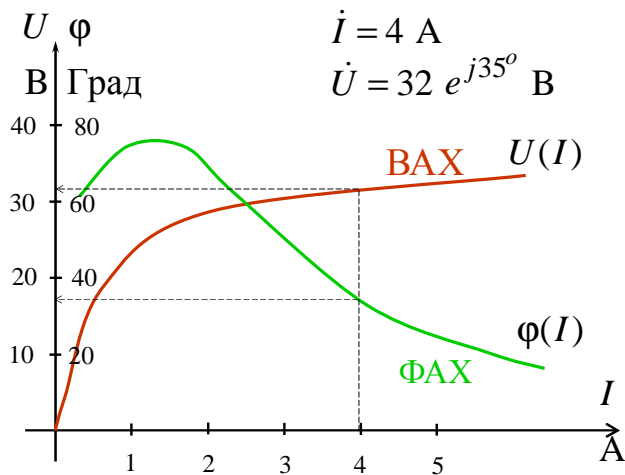


Рис. 104

ВАХ  $U(I)$  и ФАХ  $\varphi(I)$  нелинейных элементов получают экспериментально или расчетом.

**1. Метод эквивалентного генератора** применяется для цепей с одним нелинейным элементом.

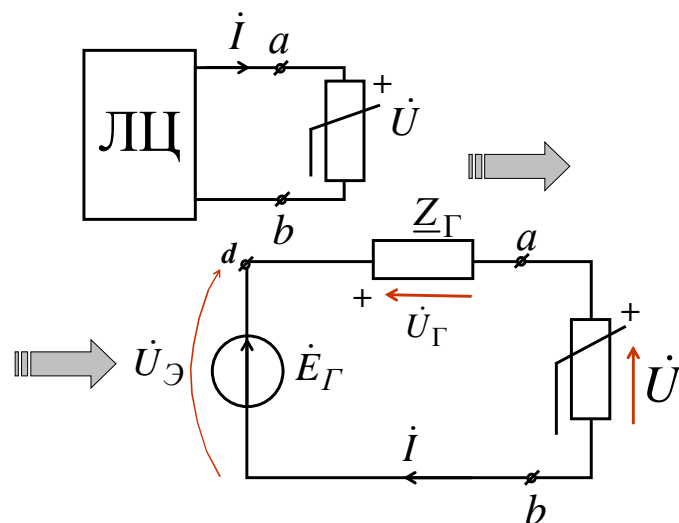


Рис. 105

Для линейной цепи (ЛЦ) определяются параметры эквивалентного генератора  $\dot{E}_Г = E_Г e^{j\alpha_Г} (В)$ ,  $\underline{Z}_Г = Z_Г e^{j\phi_Г} (Ом)$ .

Задаемся  $\dot{i}^{(1)} = I^{(1)} e^{j0^\circ}$  и по известным  $U(I)$  и  $\phi(I)$  НЭ графически находим  $U^{(1)}$  и  $\phi^{(1)}$ .

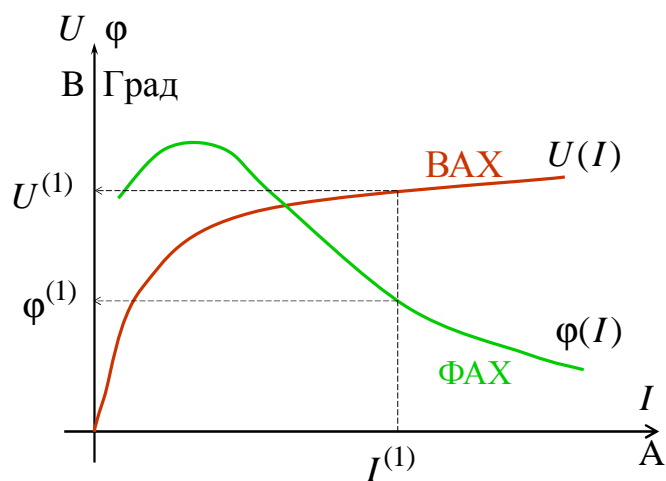


Рис. 106

Рассчитываем  $\dot{U}_\Gamma^{(1)} = \underline{Z}_\Gamma \cdot \dot{I}^{(1)}$  и по второму закону Кирхгофа определяем эквивалентное напряжение  $\dot{U}_\Delta^{(1)} = U_\Delta^{(1)} \cdot e^{j\varphi_\Delta^{(1)}} = \dot{U}_\Gamma^{(1)} + U^{(1)} \cdot e^{j\varphi^{(1)}}$ .

Определяем  $U_\Delta^{(1)}$  и  $\varphi_\Delta^{(1)}$ , соответствующие току  $I^{(1)}$ .

Для иллюстрации строим векторную диаграмму.

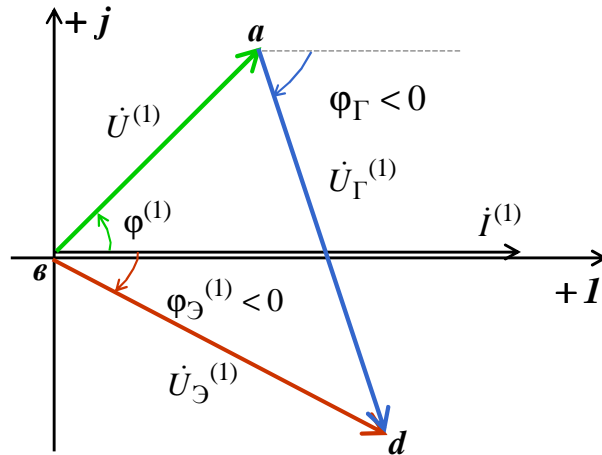


Рис. 107

Задаемся другим значением  $\dot{I}^{(2)} = I^{(2)} e^{j0^\circ}$  и аналогично определяем  $U_\Delta^{(2)}$  и  $\varphi_\Delta^{(2)}$ .

Строим эквивалентные характеристики  $U_\Delta(I)$  и  $\varphi_\Delta(I)$ , по которым, при  $U_\Delta = E_\Gamma$ , графически находим  $I, \varphi_\Delta, \varphi, U$ .

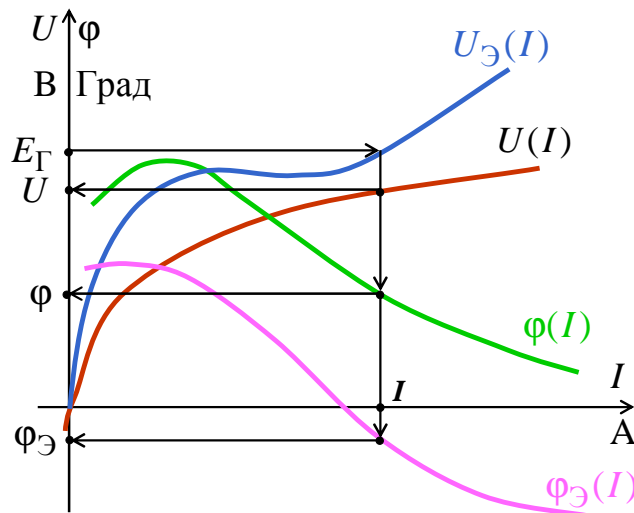


Рис. 108

В результате  $\dot{I} = I e^{j\beta}$ ,  $\dot{U} = U e^{j(\beta+\varphi)}$ ,  $\beta = \alpha_\Gamma - \varphi_\Delta$ .

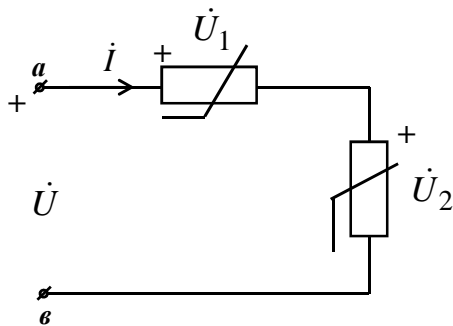
Рассчитываем  $P = E_r I \cos \varphi_3$ , Вт,  $\underline{Z}_H = \frac{U}{I} e^{j\varphi}$ , Ом.

При известном сопротивлении НЭ  $\underline{Z}_H$  рассчитываем линейную цепь (ЛЦ).

**2. Группы линейных и нелинейных элементов** для упрощения схем при помощи законов Кирхгофа в комплексной форме могут быть заменены эквивалентными НЭ с эквивалентными ВАХ и ФАХ:

а) **последовательное соединение.**

### Пример



**Дано:**

$$\dot{U} = U e^{j\alpha};$$

$$U_1(I), \varphi_1(I);$$

$$U_2(I), \varphi_2(I).$$

**Определить:**

$$\dot{I} = I e^{j\beta}$$

Рис. 109

Задаемся током  $\dot{I}^{(1)} = I^{(1)} \cdot e^{j0^\circ}$ , по характеристикам нелинейных элементов находим  $U_1^{(1)}$ ,  $\varphi_1^{(1)}$  и  $U_2^{(1)}$ ,  $\varphi_2^{(1)}$ .

По второму закону Кирхгофа определяем входное напряжение

$$\dot{U}^{(1)} = U^{(1)} \cdot e^{j\varphi^{(1)}} = U_1^{(1)} \cdot e^{j\varphi_1^{(1)}} + U_2^{(1)} \cdot e^{j\varphi_2^{(1)}}.$$

Задаемся другим значением тока  $\dot{I}^{(2)} = I^{(2)} \cdot e^{j0^\circ}$ , повторяем расчет и находим  $\dot{U}^{(2)} = U^{(2)} \cdot e^{j\varphi^{(2)}}$ .

Строим эквивалентные характеристики  $U(I)$  и  $\varphi(I)$ , по которым графически находим  $I$  и  $\varphi$ , тогда  $\dot{I} = I e^{j(\alpha-\varphi)}$ .

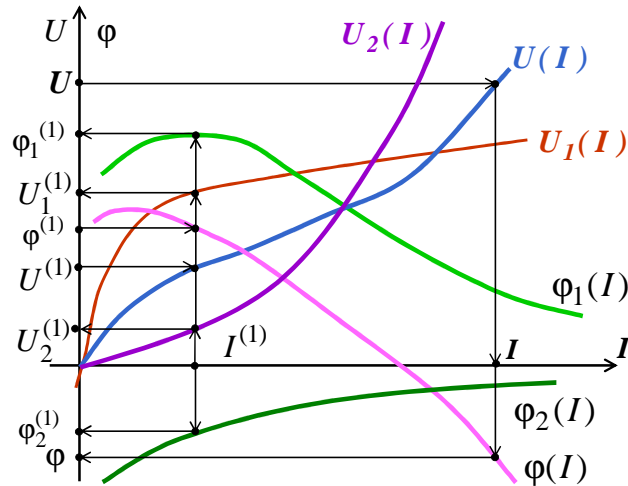


Рис. 110

б) параллельное соединение.

Пример

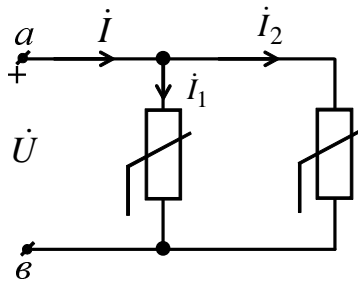


Рис. 111

Дано:

$$\dot{I} = I e^{j\beta};$$

$$U_1(I), \varphi_1(I);$$

$$U_2(I), \varphi_2(I).$$

Определить:

$$\dot{U} = U e^{j\alpha}$$

Задаемся напряжением  $\dot{U}^{(1)} = U^{(1)} \cdot e^{j0^\circ}$ , по характеристикам нелинейных элементов находим  $I_1^{(1)}$ ,  $\varphi_1^{(1)}$  и  $I_2^{(1)}$ ,  $\varphi_2^{(1)}$ .

По 1 закону Кирхгофа определяем входной ток

$$\dot{I}^{(1)} = I^{(1)} \cdot e^{-j\varphi^{(1)}} = I_1^{(1)} \cdot e^{-j\varphi_1^{(1)}} + I_2^{(1)} \cdot e^{-j\varphi_2^{(1)}}.$$

Задаемся другим значением напряжения  $\dot{U}^{(2)} = U^{(2)} \cdot e^{j0^\circ}$ , повторяем расчет и находим  $\dot{I}^{(2)} = I^{(2)} \cdot e^{-j\varphi^{(2)}}$ .

Строим эквивалентные характеристики  $U(I)$  и  $\varphi(I)$ , по которым графически находим  $U$  и  $\varphi$ , тогда  $\dot{U} = U e^{j(\beta+\varphi)}$ .



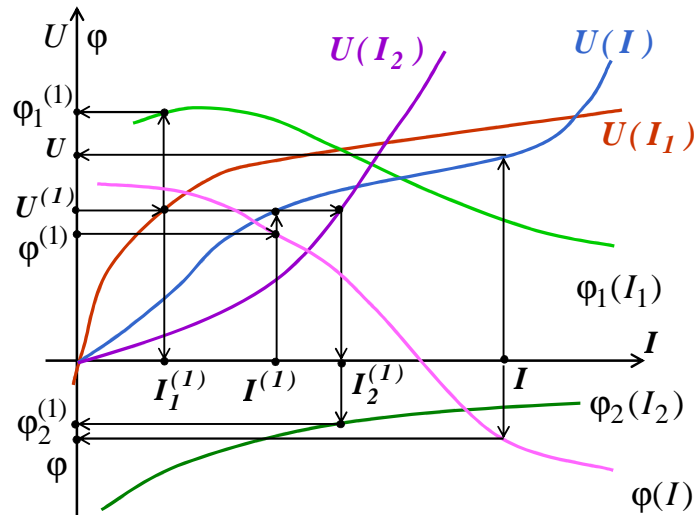


Рис. 112

**3. Метод итераций** используется для расчета сложных схем с применением вычислительной техники. При этом нелинейные элементы представляются в виде неизвестных комплексных сопротивлений  $\underline{Z}_H = \frac{U(I)}{I} \cdot e^{j\varphi(I)}$ , Ом.

Затем, при помощи любого метода расчета, в комплексной форме составляются итерационные выражения:

а) для тока в НЭ, если ВАХ  $U(I)$  загибается к оси тока:

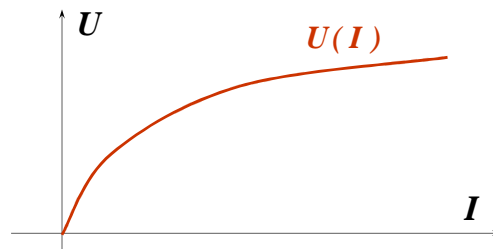


Рис. 113

б) для напряжения в НЭ, если ВАХ  $U(I)$  загибается к оси напряжения:

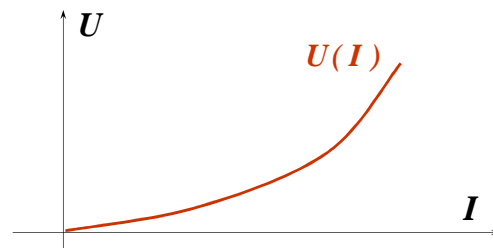
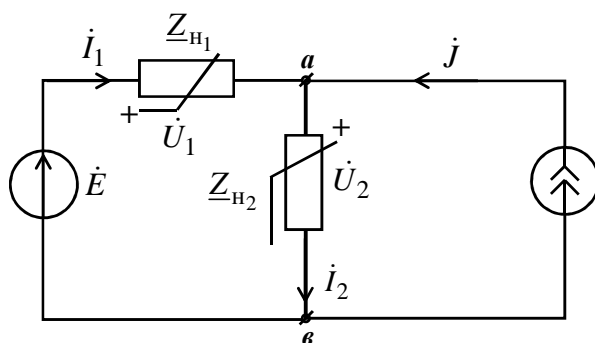


Рис. 114

### Пример



**Дано:**

$$\dot{E} = Ee^{j\alpha}, \quad \dot{J} = Je^{j\beta},$$

$$U_1(I), \quad \varphi_1(I),$$

$$U_2(I), \quad \varphi_2(I).$$

**Определить:**

$$\dot{I}_1, \quad \dot{I}_2, \quad \dot{U}_1, \quad \dot{U}_2$$

Рис. 115

Обозначим:

$$\underline{Z}_{H1} = \frac{U_1(I_1)}{I_1} \cdot e^{j\varphi_1(I_1)}, \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{H2} = \frac{U_2(I_2)}{I_2} \cdot e^{j\varphi_2(I_2)}, \text{ Ом}.$$

По методу узловых потенциалов:

$$\phi_b = 0, \quad \phi_a \left[ \frac{1}{\underline{Z}_{H1}} + \frac{1}{\underline{Z}_{H2}} \right] = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}_{H1}} + \dot{J},$$

тогда

$$\phi_a = \frac{\dot{E} + \dot{J} \cdot \underline{Z}_{H1}}{1 + \frac{\underline{Z}_{H1}}{\underline{Z}_{H2}}}.$$

Итерационные выражения:

$$\dot{U}_1 = \dot{E} - \phi_a = \frac{(\dot{E} - \dot{J} \cdot \underline{Z}_{H2}) \cdot \underline{Z}_{H1}}{\underline{Z}_{H1} + \underline{Z}_{H2}}, \text{ В}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\phi_a - \phi_b}{\underline{Z}_{H2}} = \frac{(\dot{E} + \dot{J} \cdot \underline{Z}_{H1})}{\underline{Z}_{H1} + \underline{Z}_{H2}}, \text{ А}.$$

Задаемся  $U_1 = \dots$ , В,  $I_2 = \dots$ , А.

Находим по ВАХ и ФАХ:  $I_1 = \dots$ , А,  $\varphi_1 = \dots$ , град,

$U_2 = \dots$ , В,  $\varphi_2 = \dots$ , град.

Рассчитываем  $\underline{Z}_{H1}$ ,  $\underline{Z}_{H2}$ ,  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{I}_2$ .

Находим по ВАХ и ФАХ:  $I_1$ ,  $U_2$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и т.д.

Расчет ведется до тех пор, пока результаты не начнут повторяться.

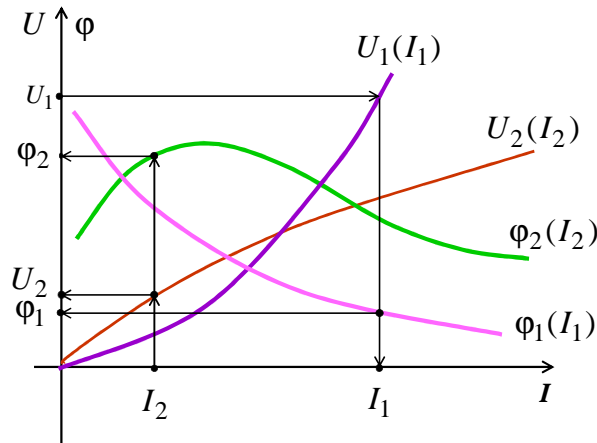


Рис. 116

### Пример

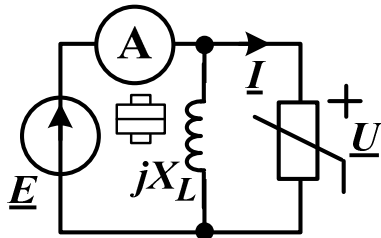


Рис. 117

**Дано:**

$$\dot{E} = 30e^{j20^\circ}, \text{ В};$$

$$X_L = 20 \text{ Ом.}$$

$$\text{НЭ имеет ВАХ } I = 10^{-4} \cdot U^2, \text{ А}$$

$$\text{ФАХ } \varphi = 40^\circ - 30^\circ \cdot I,$$

где ток  $I$  – в амперах.

**Определить:**

показание амперметра  $I_A$  (А)

Расчёт произведём в MathCAD:

Исходные данные:

$$E := 30 \cdot e^{20i \cdot \text{deg}} \quad \varphi_{\text{эдс}} := 20 \quad x_L := 20$$

$$I(U) := 10^{-4} \cdot U^2 \quad \varphi(I) := 40 - 30(I)$$

Решение:

$$I_L := \frac{E}{i \cdot x_L} \quad I_{\text{НЭ}} := I(|E|) \quad \varphi_{\text{НЭ}} := \varphi(I_{\text{НЭ}})$$

$$I_{\text{НЭ}} := I(|E|) \cdot e^{i[(\varphi_{\text{эдс}}) - (\varphi_{\text{НЭ}})] \cdot \text{deg}}$$

$$I := I_L + I_{\text{НЭ}} \quad |I| = 1.556$$

## 2.9. Резонансные явления в нелинейных цепях

Резонансные явления в нелинейных цепях возможны при периодических напряжениях и токах и наличии индуктивного и емкостного элементов. Резонансные явления в нелинейных цепях сопровождаются рядом особенностей, которые обусловлены зависимостью параметров цепи от величин напряжений и токов.

- Резонанс может наступать при изменении величины напряжения или тока источника питания.

- Напряжения или токи негармонические, поэтому резонанс возможен на первой или других гармониках.

- Возможны скачки амплитуд напряжений и токов (релейный эффект) при изменении знака угла сдвига фаз  $\varphi$  (опрокидывание фазы).

Ограничимся рассмотрением феррорезонанса, т.е. резонансных явлений в цепях с нелинейным индуктивным элементом. Для упрощения анализа представим напряжения и токи эквивалентными синусоидами и будем использовать характеристики для действующих значений.

**Феррорезонанс напряжений** – это резонансные явления при последовательном соединении катушки с сердечником и конденсатора. Рассмотрим без учета потерь энергии.

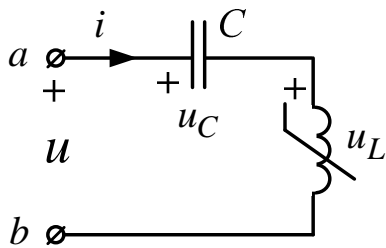


Рис. 118

Эквивалентные синусоиды:

$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \beta);$$

$$u_L = \sqrt{2} U_L \sin(\omega t + \beta + 90^\circ);$$

$$u_C = \sqrt{2} U_C \sin(\omega t + \beta - 90^\circ).$$

По второму закону Кирхгофа

$$u = u_C + u_L = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \beta \pm 90^\circ),$$

$$\text{где } U = |U_L - U_C|.$$

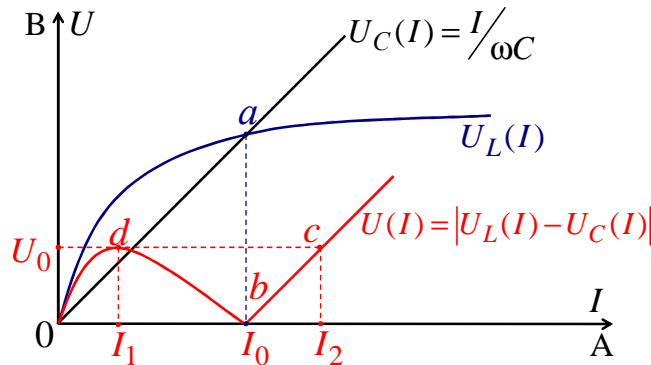


Рис. 119

Необходимое условие феррорезонанса напряжений – пересечение  $U_L(I)$  и  $U_C(I)$ , поэтому точки  $a$  и  $b$  – это точки резонанса, когда  $U_L = U_C$ :

- а)  $0 < I < I_0$ ;  
 $U_L > U_C$ ;  
 $\varphi = \varphi_1 = 90^\circ$ .

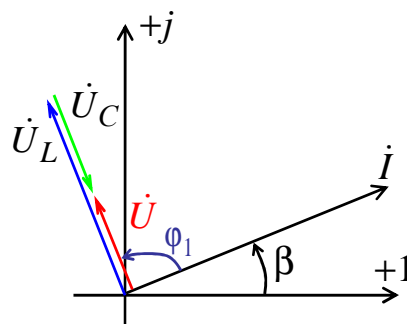


Рис. 120

- б)  $I > I_0$ ;  
 $U_L < U_C$ ;  
 $\varphi = \varphi_2 = -90^\circ$ .

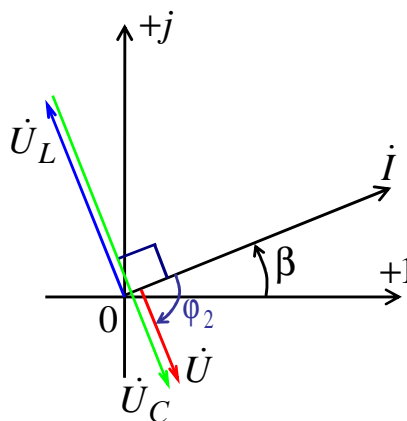


Рис. 121

При питании от источника с малым сопротивлением ( $Z_{\text{и}} \rightarrow 0$ ), при незначительном изменении напряжения ( $U$ ), наблюдаются скачки тока ( $I$ ):

а) при плавном увеличении  $U$  наблюдается скачок  $I$  от  $I_1$  до  $I_2$  при изменении  $\varphi$  от  $\varphi_1 = 90^\circ$  до  $\varphi_2 = -90^\circ$ . Это релейный эффект с опрокидыванием фазы, причем  $I_2 \gg I_1$ ;

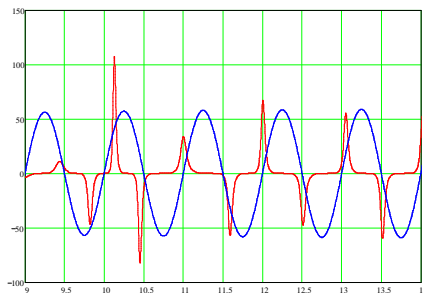


Рис. 122

б) при плавном уменьшении  $U$  наблюдается скачок  $I$  от  $I_0$  до 0. При наличии потерь энергии в катушке и  $Z_{\text{н}} \rightarrow 0$  также наблюдаются скачки тока  $I$ .

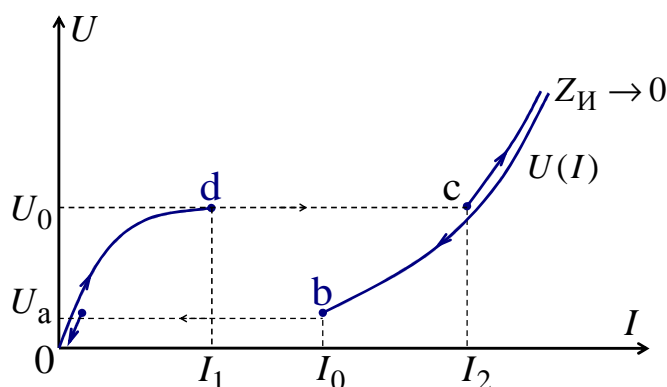


Рис. 123

Таким образом, при  $Z_{\text{н}} \rightarrow 0$  невозможно экспериментально получить участок  $db$   $U(I)$  и достигнуть устойчивый феррорезонанс в точке  $b$ .

При питании от источника с  $Z_{\text{н}} \rightarrow \infty$  можно без скачков снять всю ВАХ  $U(I)$  и в точке  $b$  получить устойчивый феррорезонанс.

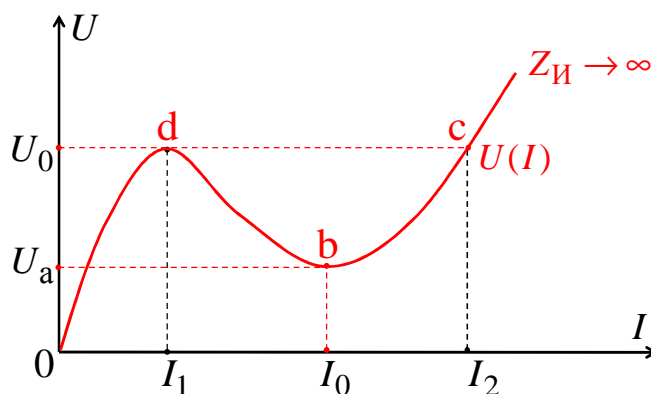


Рис. 124

$R_a \approx \frac{U_a}{I_0}$  – сопротивление, характеризующее потери энергии в катушке.

ВАХ  $U(I)$ , с учетом потерь энергии, можно рассчитать по формуле

$$U(I) = \sqrt{I^2 R_a^2 + [U_L(I) - I \cdot X_C]^2},$$

которая следует из векторной диаграммы

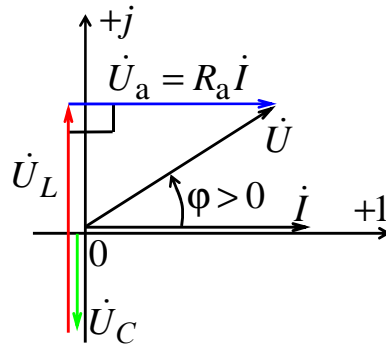


Рис. 125

Феррорезонанс напряжений может применяться:

- Для стабилизации переменного напряжения источника с  $Z_{\text{и}} \rightarrow 0$ .

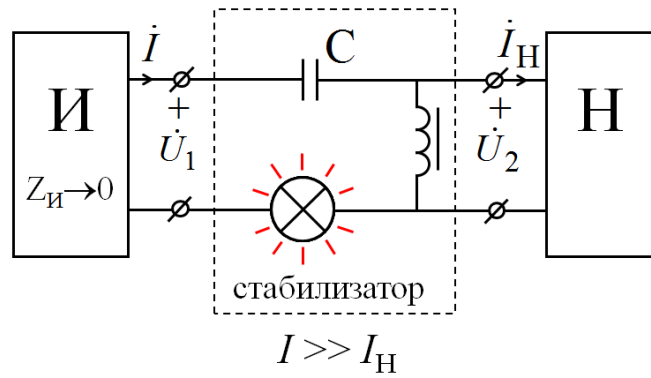


Рис. 126

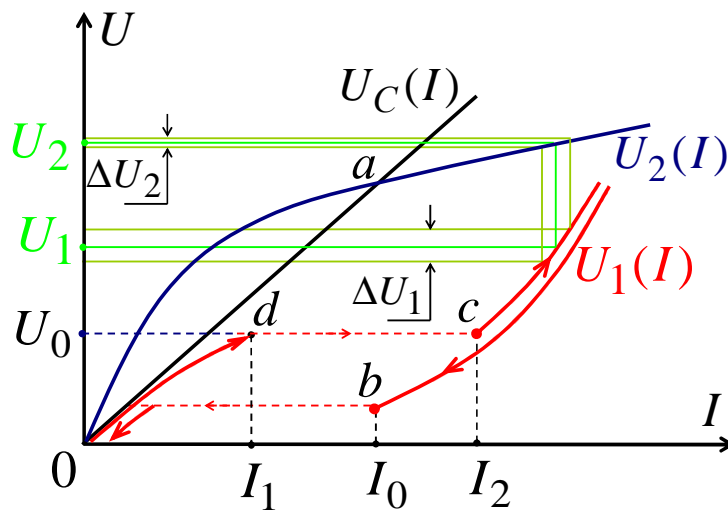


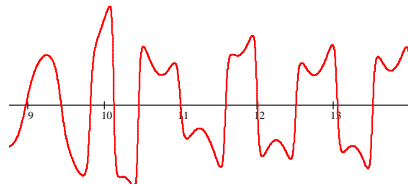
Рис. 127

Коэффициент стабилизации напряжения

$$K_{\text{ст}} = \frac{(\Delta U_1) \cdot U_2}{(\Delta U_2) \cdot U_1} > 1,$$

причем  $\Delta U_1 > \Delta U_2$ .

Недостаток такого стабилизатора – несинусоидальное выходное напряжение;



- для защиты от повышения переменного напряжения сети.

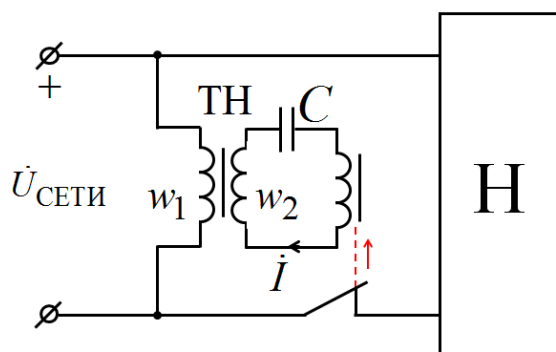


Рис. 128

Происходит отключение нагрузки при  $U_{\text{сети}} \geq U_0 \cdot \frac{w_1}{w_2}$ , причем

$w_1 > w_2$  – количество витков.

**Феррорезонанс токов** – это резонансные явления при параллельном соединении катушки с сердечником и конденсатора.

Рассмотрим без учета потерь энергии.

Эквивалентные синусоиды:

$$u = \sqrt{2} \cdot U \sin(\omega t + \alpha);$$

$$i_L = \sqrt{2} \cdot I_L \sin(\omega t + \alpha - 90^\circ);$$

$$i_C = \sqrt{2} \cdot I_C \sin(\omega t + \alpha + 90^\circ).$$

По первому закону Кирхгофа

$$i = i_L + i_C = \sqrt{2} \cdot I \sin(\omega t + \alpha \pm 90^\circ),$$

$$\text{где } I = |I_L - I_C|.$$

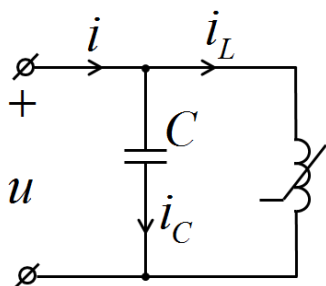


Рис. 129



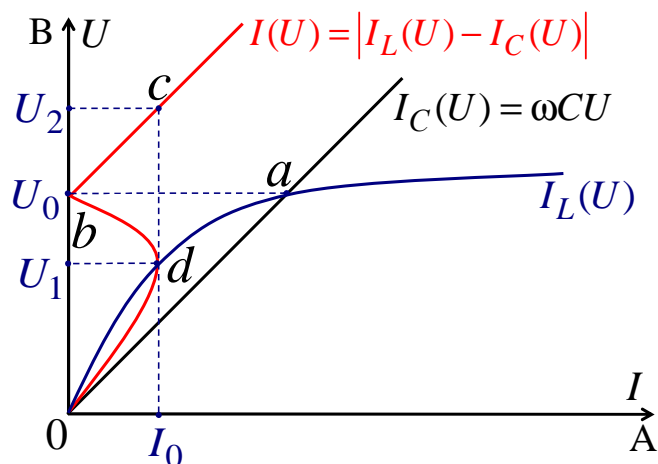


Рис. 130

Необходимое условие феррорезонанса токов – пересечение  $I_L(U)$  и  $I_C(U)$ . Поэтому точки  $a$  и  $b$  – это точки резонанса, когда  $I_L = I_C$ :

- а)  $0 < U < U_0$ ;  
 $I_C > I_L$ ;  
 $\varphi = \varphi_1 = -90^\circ$ .

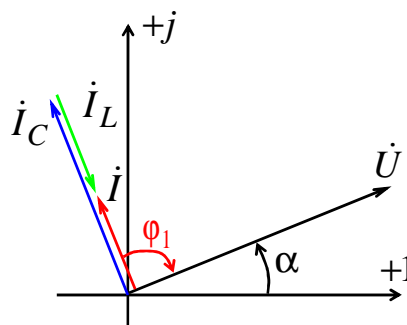


Рис. 131

- б)  $U > U_0$ ;  
 $I_C < I_L$ ;  
 $\varphi = \varphi_2 = 90^\circ$ .

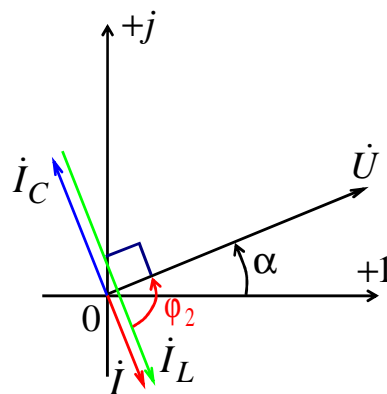


Рис. 132

При питании от источника с большим сопротивлением ( $Z_{\text{и}} \rightarrow \infty$ ) при незначительном изменении тока ( $I$ ) наблюдаются скачки напряжения ( $U$ ):

а) при плавном увеличении тока наблюдается скачок напряжения от  $U_1$  до  $U_2$  при изменении  $\varphi$  от  $\varphi_1 = -90^\circ$  до  $\varphi_2 = 90^\circ$ . Это релейный эффект с опрокидыванием фазы, причем  $U_2 > U_1$ .

Напряжение после скачка опережает ток на  $90^\circ$  и явно несинусоидально.

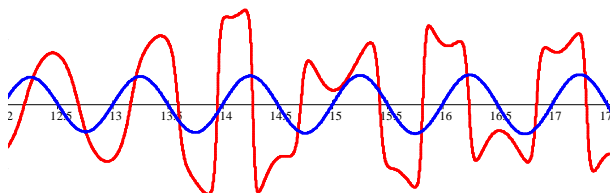


Рис. 133

При наличии потерь энергии в катушке и  $Z_{\text{и}} \rightarrow \infty$  также наблюдаются скачки напряжения  $U$ ;

б) при плавном уменьшении тока наблюдается скачок напряжения от  $U_0$  до 0. При наличии потерь энергии в катушке и  $Z_{\text{и}} \rightarrow \infty$  также наблюдаются скачки напряжения  $U$ .

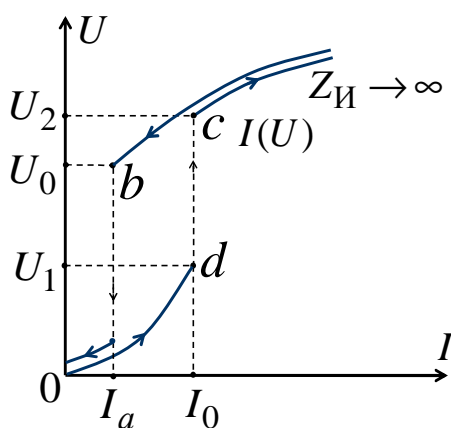


Рис. 134

Таким образом, при  $Z_{\text{и}} \rightarrow \infty$  невозможно экспериментально получить участок  $db$   $I(U)$  и достигнуть устойчивый феррорезонанс в точке  $b$ .

При питании от источника с  $Z_{\text{и}} \rightarrow \infty$  можно без скачков снять всю ВАХ  $I(U)$  и в точке  $b$  получить устойчивый феррорезонанс;

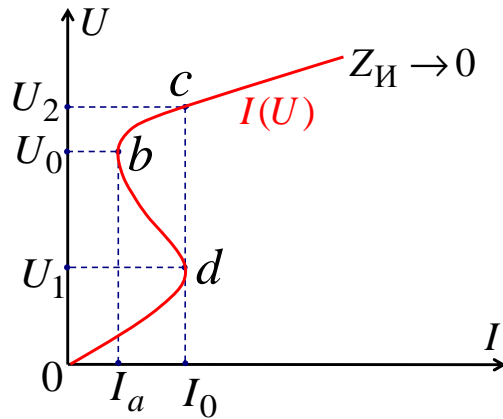


Рис. 135

$g_a \approx \frac{I_a}{U_0} \left( \frac{1}{\text{Ом}} \right)$  – проводимость, характеризующая потери энергии

в катушке.

ВАХ  $I(U)$ , с учетом потерь энергии, можно рассчитать, изменяя  $U$ , по формуле

$$I(U) = \sqrt{U^2 g_a^2 + [I_L(U) - \omega C U]^2},$$

которая следует из векторной диаграммы.

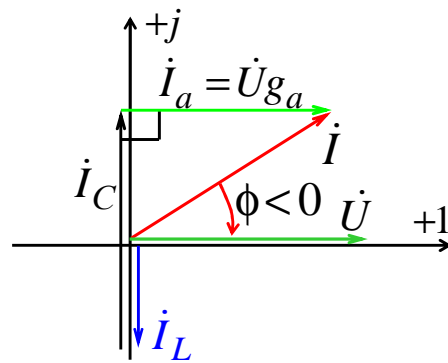


Рис. 136

Феррорезонанс токов может применяться:

а) для стабилизации переменного напряжения источника с  $Z_{И} \rightarrow \infty$ .

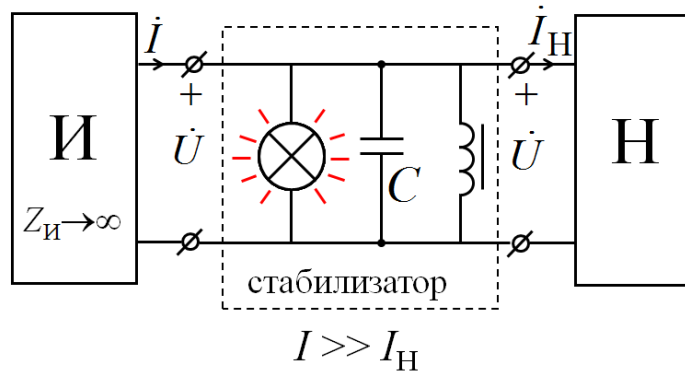


Рис. 137

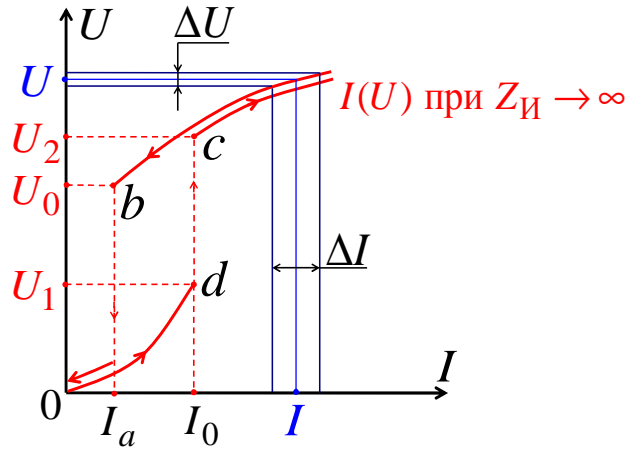


Рис. 138

Коэффициент стабилизации напряжения

$$K_{\text{ст}} = \frac{(\Delta I) \cdot U}{I \cdot (\Delta U)} > 1,$$

причём  $(\Delta I) / I > (\Delta U) / U$ ;

б) для защиты от повышения переменного тока сети.

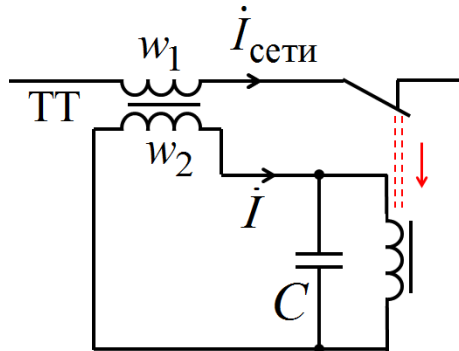


Рис. 139

Происходит отключение нагрузки при  $I_{\text{сети}} \geq I_0 \cdot \frac{w_2}{w_1}$ , причём  $w_1 < w_2$  – количество витков.

## 2.10. Переходные процессы в нелинейных цепях

Расчет переходных процессов имеет ряд особенностей, обусловленных зависимостью параметров нелинейных элементов от величин напряжений и токов.

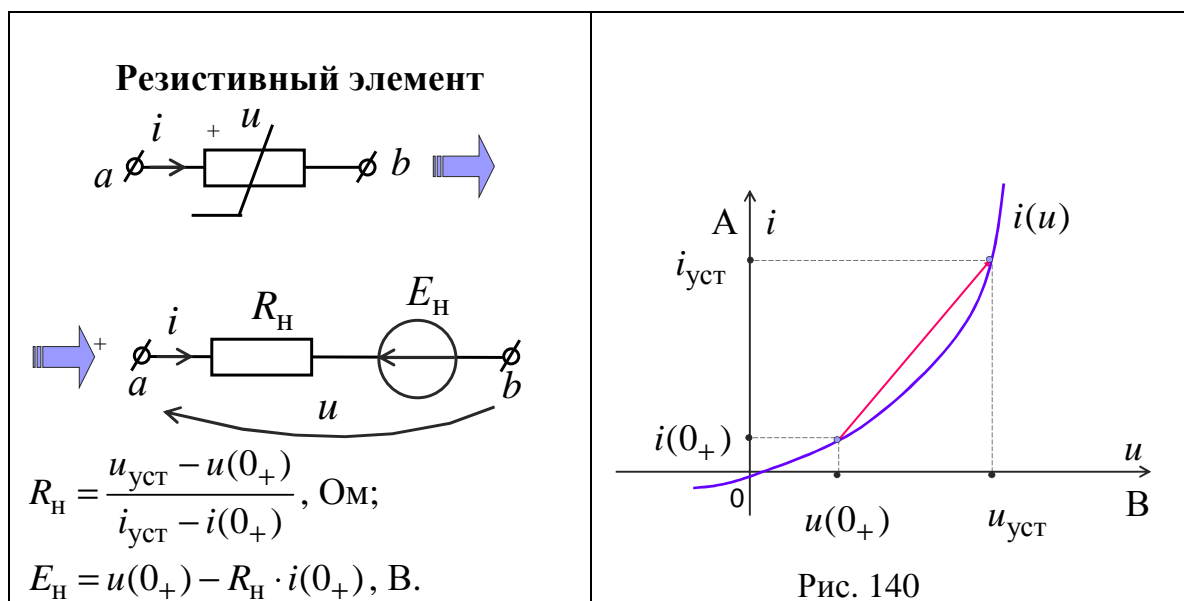
1. Для нелинейных цепей неприменим метод наложения – классический метод и интеграл Дюамеля нельзя использовать.
2. Нелинейные цепи характеризуются нелинейными дифференциальными уравнениями – операторный метод нельзя использовать.
3. Для расчета переходных процессов в нелинейных цепях используют приближенные методы и численные расчеты на ЭВМ.

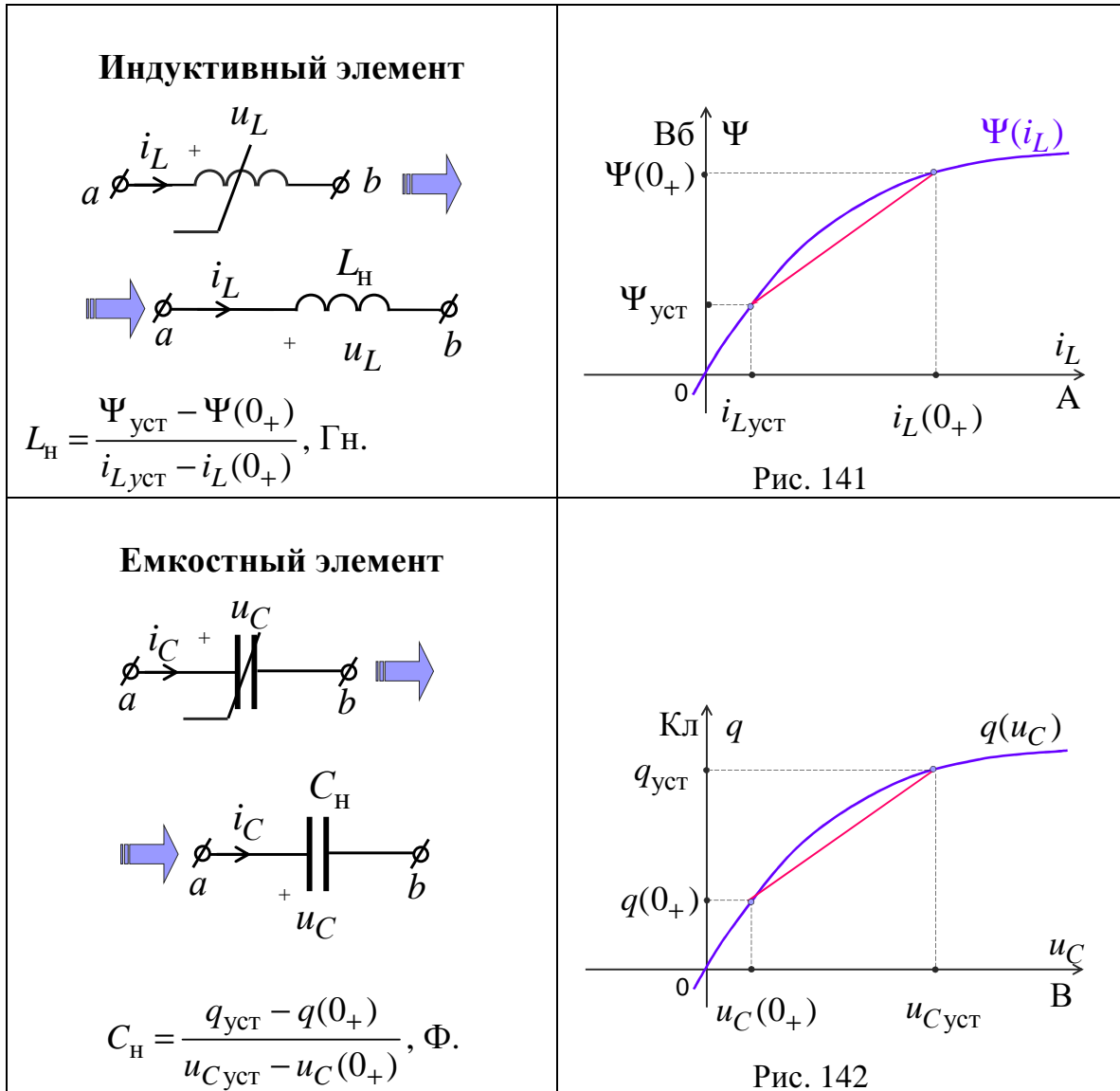
### Метод условной линеаризации

Дает ориентировочное решение и заключается в условной замене нелинейных элементов линейными элементами.

Напряжения и токи переходного процесса находятся в виде приближенных функций времени классическим или операторным методом. Этот метод наиболее удобно применять для нелинейных цепей с постоянными источниками.

Условимся, что замена нелинейных элементов линейными осуществляется следующим образом:





**Порядок расчёта** переходных процессов методом условной линеаризации с использованием классического метода:

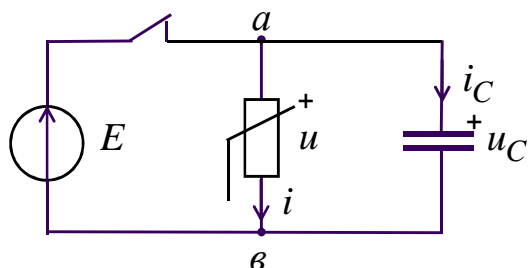
1. **ННУ.** Определяем независимые начальные условия в цепи до коммутации  $i_L(0_-)$  или  $u_C(0_-)$ .
2. **ЗНУ.** Определяем искомую величину при  $t(0_+) - i(0_+)$  или  $u(0_+)$ .
3. Из расчета установившегося режима после коммутации находим установившиеся значения при  $t = \infty : i_{уст}$  и  $u_{уст}$ .
4. Линеаризуем участок характеристики НЭ и определяем его условно линейные параметры.
5. Определяем корень характеристического уравнения  $p$  через входное сопротивление  $Z(p) = 0$  в схеме после коммутации.

6. Определяем постоянную интегрирования из начальных условий  $A = i(0_+) - i_{уст}(0)$  или  $B = u(0_+) - u_{уст}(0)$ .

7. Записываем окончательное решение:

$$i(t) \approx i_{уст} + i_{св}(t) = i(\infty) + Ae^{pt} \text{ или } u(t) \approx u_{уст} + u_{св}(t) = u(\infty) + Be^{pt}.$$

### Пример



**Дано:**

$$e(t) = \text{const}, \text{ В};$$

$$C = 100 \text{ мкФ};$$

$i(u)$  – ВАХ нелинейного элемента.

**Определить:**  $i(t)$

Рис. 143

1. **ННУ.** Определяем независимые начальные условия в цепи до коммутации  $u_C(0_-) = u_C(0_+) = E$ .

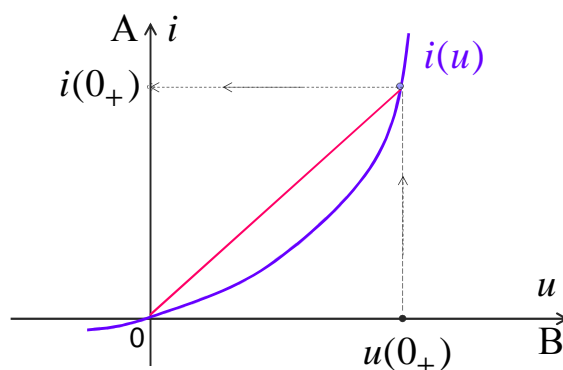
2. **ЗНУ.** Определяем искомую величину при  $t(0_+)$ ;  $i(0_+)$  находим графически по  $i(u)$  и  $u(0_+) = u_C(0_+) = E$ .

3. Из расчета установившегося режима после коммутации находим установившиеся значения при  $t = \infty$ :  $i_{уст} = 0$  или  $u_{уст} = 0$ .

4. Линеаризуем участок характеристик и НЭ и определяем его условно линейные параметры.

$$R_H = \frac{u_{уст} - u(0_+)}{i_{уст} - i(0_+)} = \dots \text{ Ом};$$

$$E_H = u(0_+) - R_H \cdot i(0_+) = 0.$$



В результате при  $t > 0$  получим схему (рис. 144)

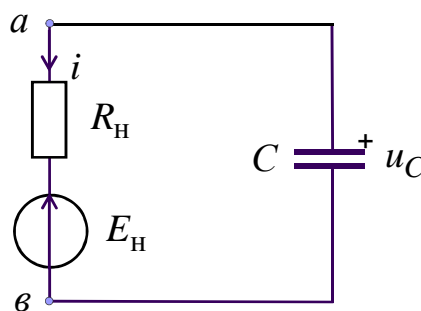


Рис. 144

5. Определяем корень характеристического уравнения  $p$  через входное сопротивление  $Z(p) = 0$  в схеме после коммутации:

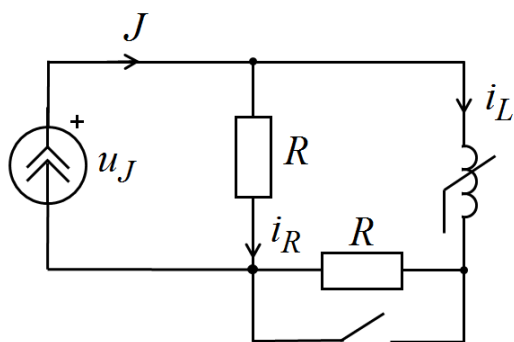
$$Z(p) = R_H + \frac{1}{pC} = 0; \quad p = -\frac{1}{R_H C} = \dots, \frac{1}{c}.$$

6. Определяем постоянную интегрирования из начальных условий  $A = i(0_+) - i_{уст} = \dots$ .

7. Записываем окончательное решение

$$i(t) \approx i_{уст} + Ae^{pt} = i(0_+) \cdot e^{-t/R_H C}, \text{ А.}$$

### Пример



#### Дано:

$$J = \text{const};$$

$$R = \dots \text{ Ом};$$

$$C = 100 \text{ мкФ};$$

$\Psi(i_L)$  – ВБАХ нелинейного индуктивного элемента.

**Определить:**  $u_J(t)$

Рис. 145

1. **ННУ.** Определяем независимые начальные условия в цепи до коммутации  $i_L(0_-) = i_L(0_+) = \frac{J \cdot R}{R + R} = J/2$ .

2. **ЗНУ.** Определяем искомую величину при  $t(0_+)$

$$i_R(0_+) = J - i_L(0_+) = J/2:$$

$$u_J(0_+) = R \cdot i_R(0_+) = R \cdot J/2.$$

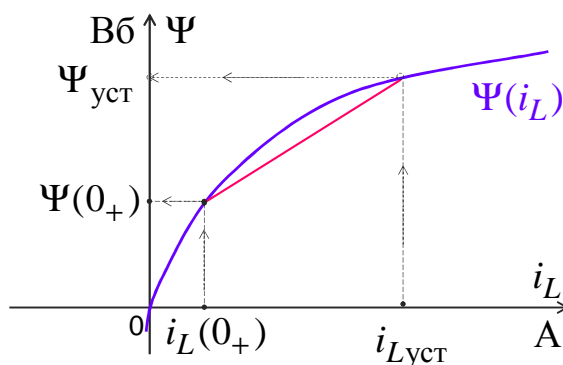
3. Из расчета установившегося режима после коммутации находим установившиеся значения при  $t = \infty$ :

$$i_{Lуст} = J, \quad u_{Jуст} = 0; \quad \Psi_{уст} \text{ находим графически по } \Psi(i_L) \text{ и } i_{Lуст}.$$

4. Линеаризуем участок характеристики НЭ и определяем его условно линейные параметры.



$$L_H = \frac{\Psi_{уст} - \Psi(0_+)}{i_{Lуст} - i_L(0_+)} = \dots$$



В результате при  $t > 0$  получим схему (рис. 146).

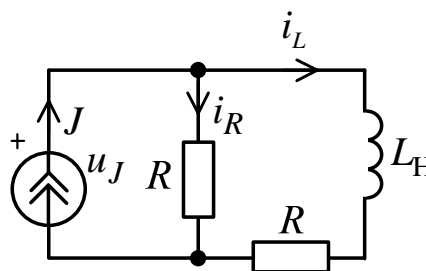


Рис. 146

5. Определяем корень характеристического уравнения  $p$  через входное сопротивление  $Z(p) = 0$ , в схеме после коммутации:

$$Z(p) = R + pL_H = 0; \quad p = -\frac{R}{L_H} = \dots \quad 1/c.$$

6. Определяем постоянную интегрирования из начальных условий

$$B = u_J(0_+) - u_{Jуст} = R \cdot J/2.$$

7. Записываем окончательное решение:

$$u_J(t) \approx u_{Jуст} + [u_J(0_+) - u_{Jуст}] \cdot e^{pt} = \frac{R \cdot J}{2} \cdot e^{-Rt/L_H}, \text{ В.}$$

### Пример

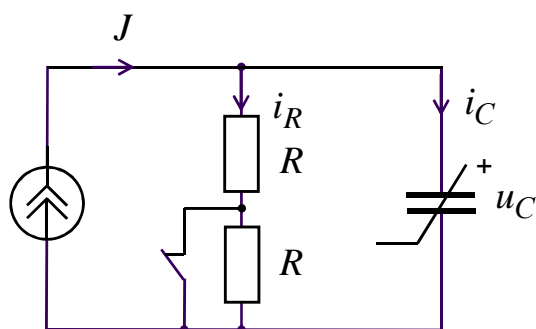


Рис. 147

### Дано:

- $J = \text{const}$ ;
- $R = \dots \text{ Ом}$ ;
- $C = 100 \text{ мкФ}$ ;
- $q(u_C)$  – КВХ нелинейного ёмкостного элемента.

**Определить:**  $i_R(t)$

1. **ННУ.** Определяем независимые начальные условия в цепи до коммутации  $u_C(0_-) = u_C(0_+) = J \cdot R$ .

2. **ЗНУ.** Определяем искомую величину  $i_R(0_+) = \frac{u_C(0_+)}{2R} = J/2$  при  $t(0_+)$ ,  $q(0_+)$  находим графически по  $q(u_C)$  и  $u_C(0_+)$ .

3. Из расчета установившегося режима после коммутации находим установившиеся значения при  $t = \infty$ :  $i_{R\text{уст}} = J$ ,  $u_{C\text{уст}} = 2R \cdot J$ ;  $q_{\text{уст}}$  находим графически по  $q(u_C)$  и  $u_{C\text{уст}}$ .

4. Линеаризуем участок характеристики НЭ и определяем его условно линейные параметры:

$$C_H = \frac{q_{\text{уст}} - q(0_+)}{u_{C\text{уст}} - u_C(0_+)} = \dots \Phi.$$

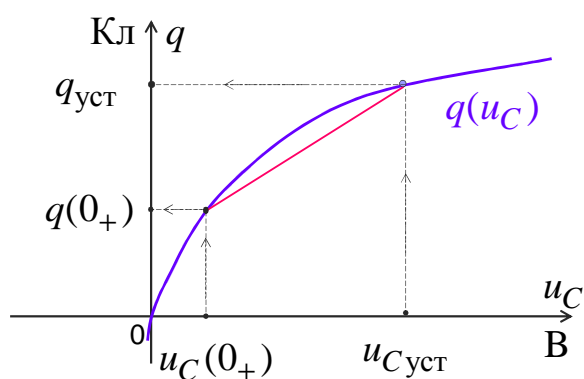


Рис. 148

В результате при  $t > 0$  получим схему (рис. 149).

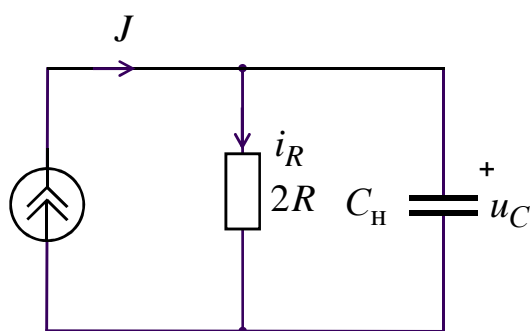


Рис. 149

5. Определяем корень характеристического уравнения  $p$  через входное сопротивление  $Z(p) = 0$  в схеме после коммутации:

$$Z(p) = 2R + \frac{1}{pC_H} = 0; \quad p = -\frac{1}{2RC_H} = \dots \frac{1}{c}.$$

6. Определяем постоянную интегрирования из начальных условий  
 $A = i_R(0_+) - i_{R_{уст}} = -J/2$ .

7. Записываем окончательное решение:

$$i_R(t) \approx i_{R_{уст}} + A \cdot e^{-t/2RC_H} = J - \frac{J}{2} \cdot e^{-t/2RC_H}, A.$$

### Метод последовательных интервалов

Является приближенным численным методом, заключающимся в замене нелинейных дифференциальных уравнений алгебраическими уравнениями, содержащими конечные приращения исследуемых величин за малые интервалы времени:

а) нелинейные элементы:  $u_L = \frac{d\Psi}{dt} \approx \frac{\Delta\Psi}{\Delta t}$ ,  $i_C = \frac{dq}{dt} \approx \frac{\Delta q}{\Delta t}$ ;

б) линейные элементы:  $u_L = L \frac{di_L}{dt} \approx L \cdot \frac{\Delta i_L}{\Delta t}$ ,  $i_C = C \frac{du_C}{dt} \approx C \frac{\Delta u_C}{\Delta t}$ .

**Пример**

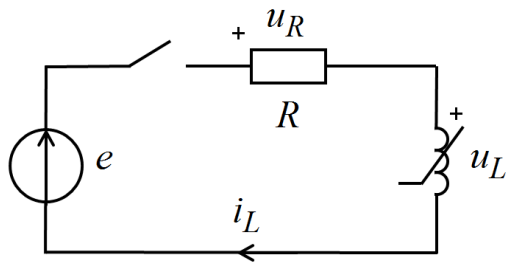


Рис. 150

**Дано:**

$$e = E_m \cdot \sin(\omega t + \alpha), \text{ В;}$$

$$R = \dots \text{ Ом;}$$

$$C = 100 \text{ мкФ;}$$

$\Psi(i_L)$  – ВбАХ нелинейного индуктивного элемента.

**Определить:**  $i_L(t)$

По второму закону Кирхгофа  $e = u_R + u_L = R \cdot i_L + \frac{d\Psi}{dt}$ .

Тогда  $E_m \cdot \sin(\omega t_k + \alpha) \approx R \cdot i_L^{(k)} + \frac{\Delta\Psi^{(k)}}{\Delta t}$ ;

$$\Delta\Psi^{(k)} = [E_m \cdot \sin(\omega t_k + \alpha) - R \cdot i_L^{(k)}] \cdot \Delta t,$$

при этом  $\Psi^{(k+1)} = \Psi^{(k)} + \Delta\Psi^{(k)}$ ,  $t_k = k \cdot \Delta t$ ,  $k = 0, 1, 2, 3 \dots$

Начальные условия  $k = 0$ ,

$$i_L(0) = i_L^{(0)} = 0, \quad \Psi_L(0) = \Psi^{(0)} = 0,$$

причём  $\Delta t \ll T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Расчет удобно вести, заполняя следующую таблицу:

$k$	$t_k$	$\Psi^{(k)}$	$i_L^{(k)}$	$\Delta\Psi^{(k)}$	$\Psi^{(k+1)}$	$i_L^{(k+1)}$ по $\Psi(i_L)$
–	с	Вб	А	Вб	Вб	А
0	0	$\Psi^{(0)}$	$i_L^{(0)}$	$\Delta\Psi^{(0)}$	$\Psi^{(1)}$	$i_L^{(1)}$
1	$\Delta t$	$\Psi^{(1)}$	$i_L^{(1)}$	$\Delta\Psi^{(1)}$	$\Psi^{(2)}$	$i_L^{(2)}$
2	$2 \cdot \Delta t$	$\Psi^{(2)}$	$i_L^{(2)}$	$\Delta\Psi^{(2)}$	$\Psi^{(3)}$	$i_L^{(3)}$

Ток  $i_L^{(k+1)}$  определяется графически.

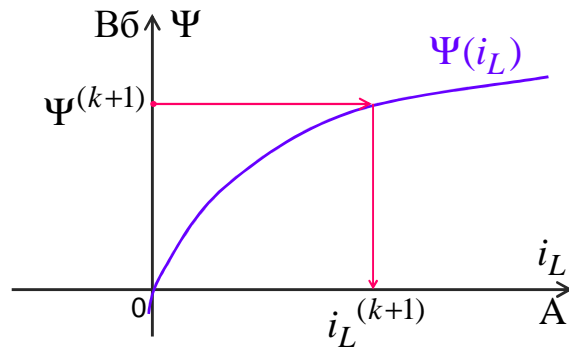


Рис. 151

По результатам расчета строим график  $i_L(t)$ :

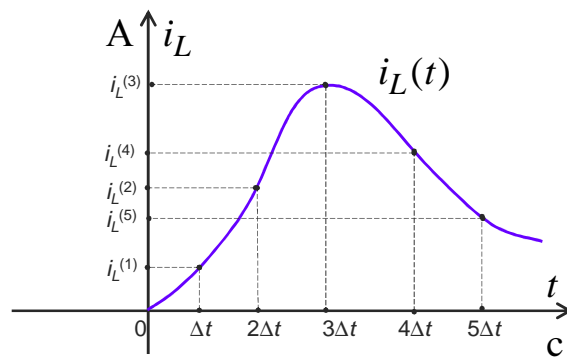


Рис. 152

Недостаток метода – постепенное накопление ошибки при переходе от одного интервала к другому интервалу времени  $\Delta t$ .

### 3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Электрические цепи с распределенными параметрами – это такие цепи, длина которых соизмерима с длиной электромагнитной волны и напряжения и токи изменяются вдоль этих цепей.

Примерами цепей с распределенными параметрами являются:

а) двухпроводная линия (связи);

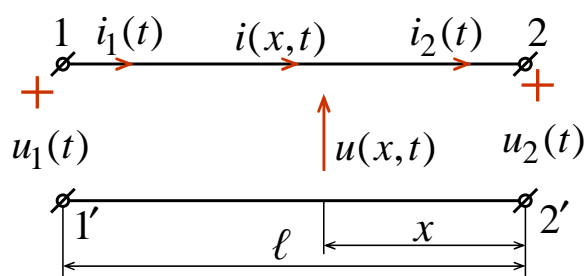


Рис. 153

б) трехфазная транспонированная линия (электропередачи).

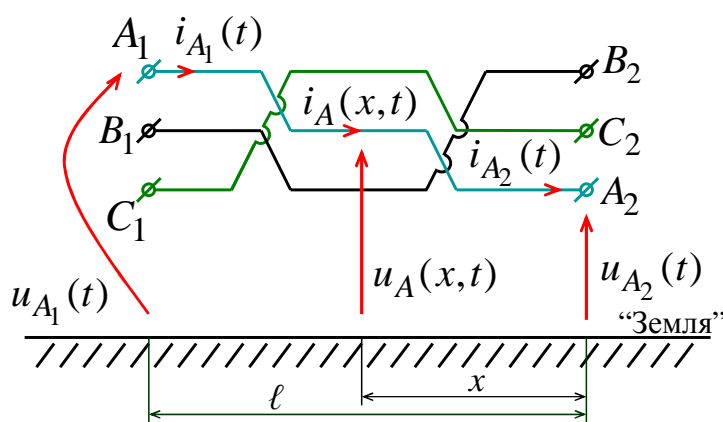


Рис. 154

Изменение напряжения и тока вдоль линии в функции  $x$  обусловлено наличием продольных сопротивлений и поперечных проводимостей. Линии, у которых напряжения и токи заметно изменяются вдоль их длины, называются длинными линиями.

Для линий электропередачи при  $\omega = 314$  рад/с такое изменение заметно при  $\ell > 300$  км.

Бесконечно малый участок  $dx$  двухпроводной линии или трехфазной линии на одну фазу (в симметричном режиме) может быть представлен так.

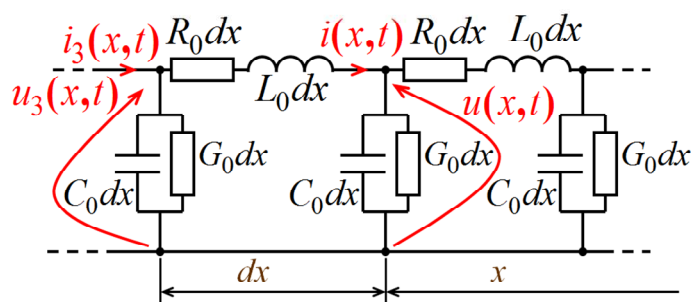


Рис. 155

здесь  $i_3(x,t) = i(x,t) + \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} dx$ ;  $u_3(x,t) = u(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx$ ;  $R_0$  (Ом/м),  $L_0$  (Гн/м);  $G_0$  (См/м);  $C_0$  (Ф/м) – первичные (удельные) параметры линий.

Ограничимся рассмотрением однородных линий, у которых первичные параметры постоянны. Для бесконечно малого участка линии длиной  $dx$ , по законам Кирхгофа, получаем основные уравнения в частных производных:

$$\begin{cases} \pm \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = R_0 \cdot i(x,t) + L_0 \cdot \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}; \\ \pm \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = G_0 \cdot u(x,t) + C_0 \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \end{cases} \quad (3.1)$$

знак «+» – при отсчете  $x$  от конца линии;

знак «-» – при отсчете  $x$  от начала линии.

Решение уравнений (3.1), при определенных начальных ( $t = 0$ ) и граничных условиях ( $x = 0, x = \ell$ ), позволяет определить  $u(x,t)$  и  $i(x,t)$ .

### 3.1. Установившийся гармонический режим однородной линии

При напряжении  $u_2(t) = \sqrt{2} \cdot U_2 \cdot \sin(\omega t + \psi_{U_2})$  имеем

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sqrt{2} \cdot U(x) \cdot \sin[\omega t + \psi_U(x)]; \\ i(x,t) &= \sqrt{2} \cdot I(x) \cdot \sin[\omega t + \psi_I(x)]. \end{aligned}$$

Тогда для комплексов действующих значений

$$\begin{aligned}\dot{U}(x) &= U(x) \cdot e^{j\Psi_U(x)}; \\ \dot{I}(x) &= I(x) \cdot e^{j\Psi_I(x)}.\end{aligned}$$

Из уравнений (3.1) получаем

$$\begin{cases} \frac{d\dot{U}(x)}{dx} = \underline{Z}_0 \cdot \dot{I}(x); \\ \frac{d\dot{I}(x)}{dx} = \underline{Y}_0 \cdot \dot{U}(x), \end{cases} \quad (3.2)$$

где  $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$  (Ом/м) – комплекс продольного сопротивления линии на единицу длины;

$\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$  (См/м) – комплекс продольного сопротивления линии на единицу длины.

Решением уравнений (3.2), при отсчете  $x$  от конца линии, будут следующие комплексы действующих значений:

а) напряжения

$$\dot{U}(x) = \dot{A}_1 \cdot e^{\underline{\gamma}x} + \dot{A}_2 \cdot e^{-\underline{\gamma}x} = \dot{U}_2 \cdot \operatorname{ch} \underline{\gamma}x + \underline{Z}_B \cdot \dot{I}_2 \cdot \operatorname{sh} \underline{\gamma}x; \quad (3.3)$$

б) тока

$$\dot{I}(x) = \frac{\dot{A}_1}{\underline{Z}_B} \cdot e^{\underline{\gamma}x} - \frac{\dot{A}_2}{\underline{Z}_B} \cdot e^{-\underline{\gamma}x} = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_B} \cdot \operatorname{sh} \underline{\gamma}x + \dot{I}_2 \cdot \operatorname{ch} \underline{\gamma}x, \quad (3.4)$$

где  $\dot{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\Psi_1} = \frac{\dot{U}_2 + \underline{Z}_B \cdot \dot{I}_2}{2}$  (В);

$\dot{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\Psi_2} = \frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_B \cdot \dot{I}_2}{2}$  (В) – постоянные интегрирования;

$\underline{Z}_B = Z_B \cdot e^{j\varphi_B} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}$  (Ом) – волновое сопротивление;

$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0}$  (1/м) – постоянная распространения (передачи);

$\alpha$  (Нп/м) – коэффициент затухания (ослабления);

$\beta$  (рад/м) – коэффициент фазы;

$\dot{U}_2 = U_2 \cdot e^{j\Psi_{U_2}}$ ,  $\dot{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\Psi_{I_2}}$  – комплексы действующих значений напряжения и тока в конце линии.



Напряжение и ток в линии можно рассматривать как сумму падающей (прямой) и отраженной (обратной) волн:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_{\text{п}}(x) + \dot{U}_{\text{отр}}(x); \\ \dot{I}(x) = \dot{I}_{\text{п}}(x) + \dot{I}_{\text{отр}}(x), \end{cases} \quad (3.5)$$

где  $\dot{U}_{\text{п}}(x) = \dot{A}_1 \cdot e^{-\gamma x}$ ,  $\dot{I}_{\text{п}}(x) = \frac{\dot{U}_{\text{п}}(x)}{Z_{\text{В}}}$  – комплексы действующих значений падающих волн напряжения и тока;

$$\dot{U}_{\text{отр}}(x) = \dot{A}_2 \cdot e^{-\gamma x}, \quad \dot{I}_{\text{отр}}(x) = -\frac{\dot{U}_{\text{отр}}(x)}{Z_{\text{В}}} \text{ – комплексы действующих}$$

значений отраженных волн напряжения и тока.

При изменении  $x$  от 0 до  $\ell$  по формулам (3.3) и (3.4) можно рассчитать

$$\dot{U}(x) = U(x) \cdot e^{j\psi_U(x)};$$

$$\dot{I}(x) = I(x) \cdot e^{j\psi_I(x)}$$

и определить активную мощность

$$P(x) = U(x) \cdot I(x) \cdot \cos[\psi_U(x) - \psi_I(x)], \text{ Вт,}$$

которая монотонно возрастает к началу линии.

Графики зависимостей  $U(x)$ ,  $I(x)$ ,  $P(x)$  и КПД  $\eta = \frac{P_2}{P_1} < 1$  используются для анализа установившегося режима линий.

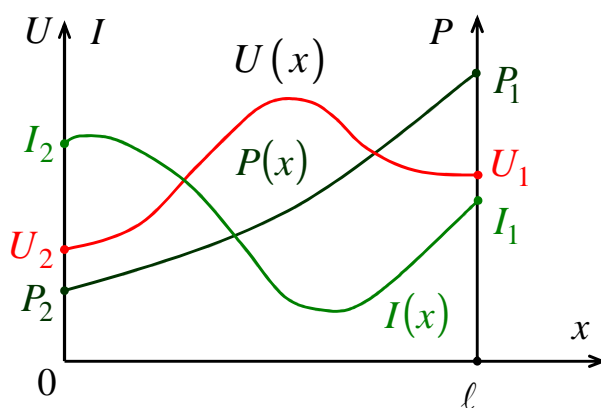


Рис. 156

Примечания:

$$\operatorname{sh} \underline{\gamma}x = \frac{e^{\underline{\gamma}x} - e^{-\underline{\gamma}x}}{2} = B_1 \cdot e^{j\lambda_1}; \quad \operatorname{ch} \underline{\gamma}x = \frac{e^{\underline{\gamma}x} + e^{-\underline{\gamma}x}}{2} = B_2 \cdot e^{j\lambda_2} \sqrt{2};$$

$$e^{\underline{\gamma}x} = e^{(\alpha + j\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{j\beta x} = B_3 e^{j\lambda_3}, \quad B_3 = e^{\alpha x}, \quad \lambda_3 = \frac{\beta x \cdot 180}{\pi}, \text{ град};$$

$$e^{-\underline{\gamma}x} = e^{-(\alpha + j\beta)x} = e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x} = B_4 e^{j\lambda_4}, \quad B_4 = 1/B_3, \quad \lambda_4 = -\lambda_3.$$

При постоянных напряжениях и токах ( $\omega = 0$ ) имеем

$$\underline{Z}_B = Z_B = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}; \quad \underline{\gamma} = \alpha = \sqrt{R_0 \cdot G_0};$$

$$\dot{U}(x) = U(x), \quad \dot{I}(x) = I(x), \quad P(x) = U(x) \cdot I(x).$$

### 3.2. Бегущие волны

При  $\dot{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\psi_1}$ ,  $\dot{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\psi_2}$ ,  $\underline{Z}_B = Z_B \cdot e^{j\phi_B}$ ,  $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$  получаем мгновенные значения:

а) напряжения –

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_{\text{п}}(x, t) + u_{\text{отр}}(x, t) = \\ &= \sqrt{2} \cdot A_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \psi_1 + \beta x) + \\ &+ \sqrt{2} \cdot A_2 \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \psi_2 - \beta x); \end{aligned}$$

б) тока –

$$\begin{aligned} i(x, t) &= i_{\text{п}}(x, t) + i_{\text{отр}}(x, t) = \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{A_1}{Z_B} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \psi_1 - \phi_B + \beta x) - \\ &- \sqrt{2} \cdot \frac{A_2}{Z_B} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \psi_2 - \phi_B - \beta x). \end{aligned}$$

Падающие и отраженные волны можно рассматривать как бегущие волны, затухающие в направлении своего движения.

1. Падающую волну напряжения

$$u_{\text{п}}(x, t) = \sqrt{2} \cdot A_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \psi_1 + \beta x)$$

рассчитываем для трех моментов времени:  $t_1 < t_2 < t_3$ .

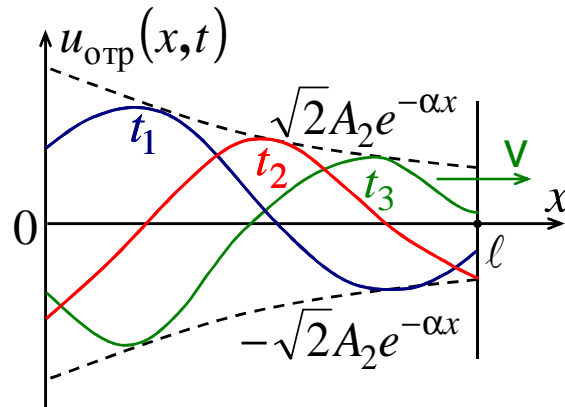


Рис. 157

Падающая волна  $u_{\text{п}}(x,t)$ , постепенно затухая, движется от начала линии к ее концу с некоторой скоростью  $v$ .

2. Отраженную волну напряжения

$$u_{\text{отр}}(x,t) = \sqrt{2} \cdot A_2 \cdot e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_2 - \beta x)$$

рассчитываем для трех моментов времени:  $t_1 < t_2 < t_3$ .

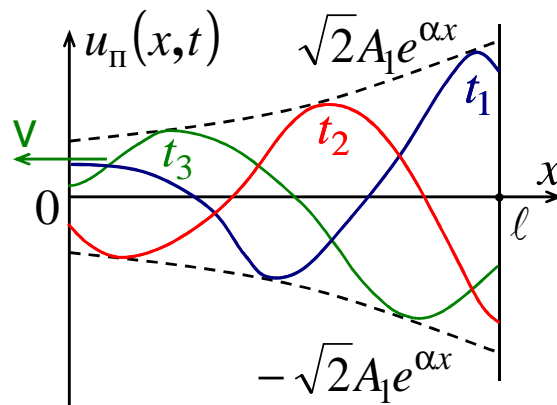


Рис. 158

Аналогично можно сказать о падающей и отраженной волнах тока. При этом скорость  $v$  является **фазовой скоростью** – это скорость перемещения значений волн, фаза которых остается неизменной. Так, если для падающей волны напряжения фаза постоянна, т.е.

$$\omega t + \psi_1 + \beta x = \text{const},$$

тогда  $\omega + \beta \frac{dx}{dt} = 0$  или  $v = -\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}$ , м/с.

Длина волны  $\lambda$  – это расстояние между ближайшими точками линии, в которых фазы напряжения или тока отличаются на  $2\pi$ . Так, для падающей волны напряжения

$$[\omega t + \psi_1 + \beta(x + \lambda)] - [\omega t + \psi_1 + \beta x] = 2\pi,$$

тогда  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ , причем  $v \leq 3 \cdot 10^5$  км/с и при  $\omega = 314$  1/с имеем  $\lambda = 6000$  км.

### 3.3. Режимы однородной линии при гармонических напряжениях и токах

Проанализируем режимы работы для комплексов действующих значений напряжений и токов.

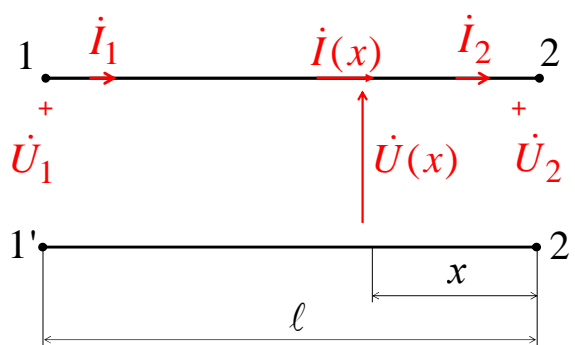


Рис. 159

#### 1. Напряжение

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_{\text{п}}(x) + \dot{U}_{\text{отр}}(x) = \dot{A}_1 \cdot e^{\underline{\gamma} \cdot x} + \dot{A}_2 \cdot e^{-\underline{\gamma} \cdot x} = \\ &= \dot{U}_2 \cdot \text{ch} \underline{\gamma} x + \underline{Z}_B \cdot \dot{I}_2 \cdot \text{sh} \underline{\gamma} x. \end{aligned}$$

#### 2. Ток

$$\begin{aligned} \dot{I}(x) &= \dot{I}_{\text{п}}(x) + \dot{I}_{\text{отр}}(x) = \frac{\dot{A}_1}{\underline{Z}_B} \cdot e^{\underline{\gamma} \cdot x} - \frac{\dot{A}_2}{\underline{Z}_B} \cdot e^{-\underline{\gamma} \cdot x} = \\ &= \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_B} \cdot \text{sh} \underline{\gamma} x + \dot{I}_2 \cdot \text{ch} \underline{\gamma} x. \end{aligned}$$

#### 3. Входное сопротивление

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \underline{Z}_B \cdot \frac{(\underline{Z}_H + \underline{Z}_B \cdot \text{th} \underline{\gamma} \ell)}{(\underline{Z}_B + \underline{Z}_H \cdot \text{th} \underline{\gamma} \ell)},$$

где  $\underline{Z}_H = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$  – сопротивление нагрузки;  $\text{th}\underline{\gamma}l = \frac{\text{sh}\underline{\gamma}l}{\text{ch}\underline{\gamma}l}$  – гиперболический тангенс.

4. Коэффициент отражения волн от нагрузки ( $x = 0$ ):

а) для напряжения  $\underline{K}_U = \frac{\dot{U}_{\text{отр}}(0)}{\dot{U}_{\text{п}}(0)} = \frac{\dot{A}_2}{\dot{A}_1}$ ;

б) для тока  $\underline{K}_I = \frac{\dot{I}_{\text{отр}}(0)}{\dot{I}_{\text{п}}(0)} = -\frac{\dot{A}_2}{\dot{A}_1}$ ,

где  $\dot{A}_1 = \frac{\dot{U}_2 + \underline{Z}_B \cdot \dot{I}_2}{2}$ ;  $\dot{A}_2 = \frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_B \cdot \dot{I}_2}{2}$ ;  $\underline{K}_U = -\underline{K}_I = \frac{\underline{Z}_H - \underline{Z}_B}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_B}$ .

• **Режим согласованной нагрузки**, когда  $\underline{Z}_H = \underline{Z}_B = Z_B \cdot e^{j\varphi_B}$ .

Входное сопротивление  $\underline{Z}_{\text{вх}}^{(c)} = \underline{Z}_B$ .

Коэффициенты отражения  $\underline{K}_U = -\underline{K}_I = 0$ ;

$$\dot{A}_1 = \dot{U}_2 = U_2 \cdot e^{j\Psi_{U_2}}, \quad \dot{A}_2 = 0;$$

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_2 \cdot e^{\underline{\gamma}x}; \\ \dot{I}(x) = \dot{I}_2 \cdot e^{\underline{\gamma}x}. \end{cases}$$

При  $\dot{I}_2 = \dot{U}_2 / \underline{Z}_B$  мгновенные значения:

а) напряжения  $u(x,t) = u_{\text{п}}(x,t) = \sqrt{2}U_2 e^{\alpha \cdot x} \sin(\omega t + \beta x + \Psi_{U_2})$ ;

б) тока  $i(x,t) = i_{\text{п}}(x,t) = \sqrt{2} \frac{U_2}{Z_B} e^{\alpha \cdot x} \sin(\omega t + \beta x + \Psi_{U_2} - \varphi_B)$ .

В любой точке линии  $\frac{\dot{U}(x)}{\dot{I}(x)} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \underline{Z}_B$ .

Активные мощности  $P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_B$ , Вт;

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_B;$$

КПД  $\eta = \frac{P_2}{P_1} = e^{-2\alpha \cdot l} < 1$ .

Так как  $\dot{U}(x) = U(x) \cdot e^{j\Psi_U(x)} = \dot{U}_2 \cdot e^{\underline{\gamma}x} = U_2 \cdot e^{j\Psi_{U_2}} \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot e^{j\beta x}$ , то коэффициент затухания  $\alpha = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{U(x)}{U_2}$  ( $\frac{\text{Нп}}{\text{км}}$ ) в режиме согласованной нагрузки характеризует изменение величины напряжения или тока на

единице длины линии, при этом коэффициент фазы  $\beta = \frac{\Psi_U(x) - \Psi_{U_2}}{x}$  (рад/км) в режиме согласованной нагрузки характеризует изменение фазы напряжения или тока на единице длины линии.

• **Режим холостого хода**, когда  $\underline{Z}_H = \infty$  и  $\dot{I}_2 = 0$ .

Входное сопротивление  $\underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{xx})} = \underline{Z}_B \cdot \text{cth} \gamma \ell$ .

Коэффициент отражения  $\underline{K}_U = -\underline{K}_I = 1$ .

Падающие и отраженные волны напряжения в конце линии равны между собой.

При  $\dot{A}_1 = \dot{A}_2 = \dot{U}_2 / 2$  получаем

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{\dot{U}_2}{2} \cdot e^{\gamma x} + \frac{\dot{U}_2}{2} \cdot e^{-\gamma x} = \dot{U}_2 \cdot \text{ch} \gamma x; \\ \dot{I}(x) = \frac{\dot{U}_2}{2\underline{Z}_B} \cdot e^{\gamma x} - \frac{\dot{U}_2}{2\underline{Z}_B} \cdot e^{-\gamma x} = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_B} \cdot \text{sh} \gamma x. \end{cases}$$

Мгновенные значения:

а) напряжения –

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_{\text{п}}(x,t) + u_{\text{отп}}(x,t) = \\ &= \frac{\sqrt{2}U_2}{2} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \beta x + \Psi_{U_2}) + \\ &+ \frac{\sqrt{2}U_2}{2} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \Psi_{U_2}). \end{aligned}$$

б) тока –

$$\begin{aligned} i(x,t) &= i_{\text{п}}(x,t) + i_{\text{отп}}(x,t) = \\ &= \frac{\sqrt{2}U_2}{2\underline{Z}_B} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \beta x + \Psi_{U_2} - \varphi_B) - \\ &- \frac{\sqrt{2}U_2}{2\underline{Z}_B} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \Psi_{U_2} - \varphi_B); \end{aligned}$$

• **Режим короткого замыкания**, когда  $\underline{Z}_H = 0$ ,  $\dot{U}_2 = 0$ .

Входное сопротивление  $\underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{кз})} = \underline{Z}_B \cdot \text{th} \underline{\gamma} \ell$ .

Коэффициент отражения  $\underline{K}_U = -\underline{K}_I = -1$ .

Падающие и отраженные волны тока в конце линии равны между собой.

При  $\dot{A}_1 = \dot{I}_2 \cdot \underline{Z}_B / 2 = -\dot{A}_2$  получаем

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \frac{\underline{Z}_B \dot{I}_2}{2} \cdot e^{\underline{\gamma} x} - \frac{\underline{Z}_B \dot{I}_2}{2} \cdot e^{-\underline{\gamma} x} = \underline{Z}_B \dot{I}_2 \cdot \text{sh} \underline{\gamma} x; \\ \dot{I}(x) = \frac{\dot{I}_2}{2} \cdot e^{\underline{\gamma} x} + \frac{\dot{I}_2}{2} \cdot e^{-\underline{\gamma} x} = \dot{I}_2 \cdot \text{ch} \underline{\gamma} x. \end{cases}$$

Мгновенные значения:

а) напряжения –

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_{\text{п}}(x, t) + u_{\text{отр}}(x, t) = \\ &= \frac{\sqrt{2} \underline{Z}_B \dot{I}_2}{2} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \beta x + \Psi_{I_2} + \varphi_B) - \\ &- \frac{\sqrt{2} \underline{Z}_B \dot{I}_2}{2} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \Psi_{I_2} + \varphi_B); \end{aligned}$$

б) тока –

$$\begin{aligned} i(x, t) &= i_{\text{п}}(x, t) + i_{\text{отр}}(x, t) = \\ &= \frac{\sqrt{2} \dot{I}_2}{2} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega t + \beta x + \Psi_{I_2}) + \\ &+ \frac{\sqrt{2} \dot{I}_2}{2} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \beta x + \Psi_{I_2}). \end{aligned}$$

Режимы холостого хода и короткого замыкания могут использоваться для экспериментального определения  $\underline{Z}_B$  и  $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ :

а) режим холостого хода (ключ разомкнут)

$$\underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{хх})} = \frac{U_{\text{V}}^{(\text{хх})}}{I_{\text{A}}^{(\text{хх})}} \cdot e^{j\varphi_{\text{хх}}}, \text{ Ом};$$

б) режим короткого замыкания (ключ замкнут)

$$\underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{КЗ})} = \frac{U_{\text{В}}^{(\text{КЗ})}}{I_{\text{А}}^{(\text{КЗ})}} \cdot e^{j\varphi_{\text{КЗ}}}, \text{ Ом};$$

в) расчет волнового сопротивления

$$\underline{Z}_{\text{В}} = Z_{\text{В}} \cdot e^{j\varphi_{\text{В}}} = \sqrt{\underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{XX})} \cdot \underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{КЗ})}};$$

г) расчет постоянной распространения

$$\underline{\gamma} = \frac{1}{2\ell} \cdot \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{\underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{КЗ})} / \underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{XX})}}}{1 - \sqrt{\underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{КЗ})} / \underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{XX})}}} \right] + j \frac{k\pi}{\ell} \left( \frac{1}{\text{км}} \right),$$

где  $k = 0$  при  $\ell < \lambda$ ;  $k = 1$  при  $\lambda < \ell < 2\lambda$  и т.д.

### 3.4. Однородная линия без искажений

Однородная линия без искажений – это линия связи, у которой формы кривых напряжения (тока) в начале и конце линии одинаковы.

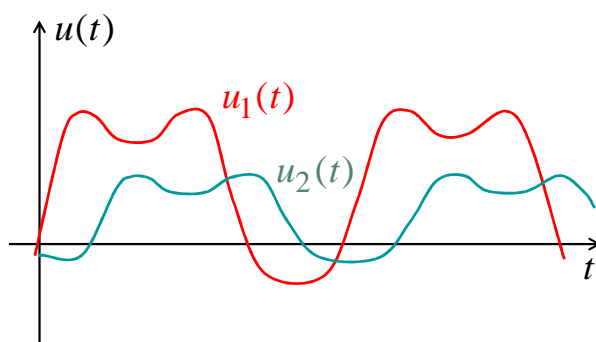


Рис. 160

Для этого необходимо, чтобы  $\alpha$  и  $\nu$  не зависели от  $\omega$ . Условие не искажения формы кривых напряжения (тока)

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0} = K_0; \quad (3.6)$$

$$\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0 = L_0(K_0 + j\omega), \text{ Ом/км};$$

$$\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0 = C_0(K_0 + j\omega), \text{ См/км};$$

тогда 
$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = \sqrt{L_0 C_0} (K_0 + j\omega), \frac{1}{\text{км}},$$



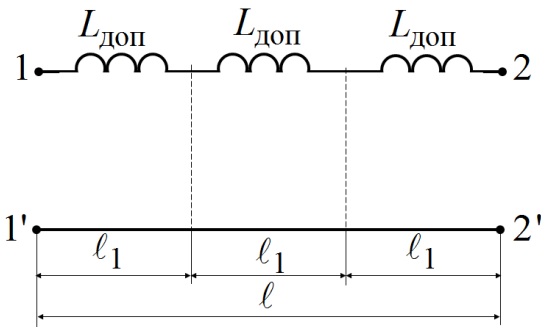
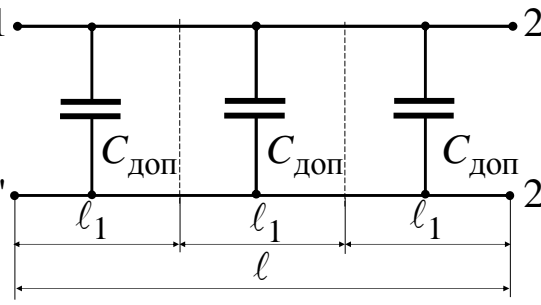
т. е

$$\alpha = K_0 \cdot \sqrt{L_0 C_0}, \quad \beta = \omega \cdot \sqrt{L_0 C_0}.$$

Фазовая скорость  $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}, \text{ км/с}.$

Волновое сопротивление  $\underline{Z}_B = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_B, \text{ Ом}.$

Если условие (3.6) не выполняется, то используют дополнительные катушки и конденсаторы

 <p style="text-align: center;">Рис. 161</p>	$L_{\text{доп}} = \left( \frac{R_0}{K_0} - L_0 \right) \cdot \ell_1, \text{ Гн};$ $K_0 = \frac{G_0}{C_0}$
 <p style="text-align: center;">Рис. 162</p>	$C_{\text{доп}} = \left( \frac{G_0}{K_0} - C_0 \right) \cdot \ell_1, \text{ Ф};$ $K_0 = \frac{R_0}{L_0}$

### 3.5. Однородная линия без потерь при гармонических напряжениях и токах

Линией без потерь считается линия, у которой  $R_0 \ll L_0$  и  $G_0 \ll C_0$ , поэтому  $R_0 \approx 0, G_0 \approx 0$ .

Тогда  $\underline{Z}_0 = j\omega L_0, \underline{Y}_0 = j\omega C_0,$

$$\underline{Z}_B = Z_B = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad \underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = j\omega \sqrt{L_0 C_0};$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{L_0 C_0}}.$$

Амплитуды падающей и отраженной волн напряжения и тока вдоль линии меняться не будут ( $\alpha = 0$ ).

Будет изменяться фаза напряжения и тока вдоль линии ( $\beta \neq 0$ ).

Поскольку  $\alpha$  и  $v$  не зависят от  $\omega$ , то линия без потерь является линией без искажений.

Так как  $\operatorname{ch} \underline{\gamma}x = \operatorname{ch} (j\beta x) = \cos \beta x$ ,  $\operatorname{sh} \underline{\gamma}x = \operatorname{sh} (j\beta x) = j \sin \beta x$ , тогда основные уравнения однородной линии без потерь при отсчете  $x$  от конца линии будут следующими:

$$\begin{cases} \underline{U}(x) = \underline{U}_2 \cdot \cos \beta x + jZ_B \cdot \underline{I}_2 \cdot \sin \beta x; \\ \underline{I}(x) = j \cdot \frac{\underline{U}_2}{Z_B} \cdot \sin \beta x + \underline{I}_2 \cdot \cos \beta x. \end{cases}$$

Если  $\dot{U}_2 = U_2 \cdot e^{j\psi_{U_2}}$  и  $\dot{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\psi_{I_2}}$ , то мгновенные значения будут следующими:

а) напряжения –

$$u(x,t) = \sqrt{2} \cdot U_2 \cdot \cos \beta x \cdot \sin(\omega t + \psi_{U_2}) + \sqrt{2} \cdot I_2 \cdot Z_B \cdot \sin \beta x \cdot \sin(\omega t + \psi_{I_2} + 90^\circ);$$

б) тока –

$$i(x,t) = \sqrt{2} \cdot \frac{U_2}{Z_B} \cdot \sin \beta x \cdot \sin(\omega t + \psi_{U_2} + 90^\circ) + \sqrt{2} \cdot I_2 \cdot \cos \beta x \cdot \sin(\omega t + \psi_{I_2}).$$

Для любого момента времени распределение напряжения и тока вдоль линии в функции  $x$  является гармоническим:

а)  $t = t_1$

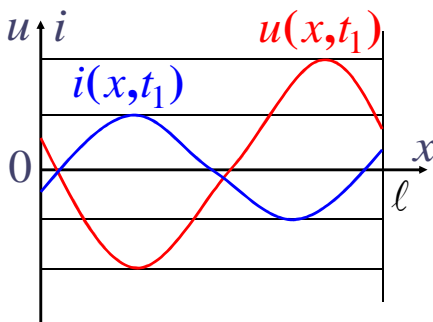


Рис. 163

б)  $t = t_2$

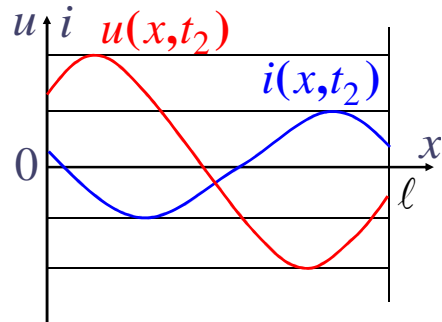


Рис. 164

Комплекс входного сопротивления линии

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_B \cdot \frac{\underline{Z}_H + j \cdot Z_B \cdot \operatorname{tg} \beta l}{Z_B + j \cdot \underline{Z}_H \cdot \operatorname{tg} \beta l},$$

где  $\underline{Z}_H = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$  – сопротивление нагрузки.

### 3.6. Режимы однородной линии без потерь

Проанализируем режимы однородной линии без потерь для комплексов действующих значений напряжений и токов с использованием основных уравнений.

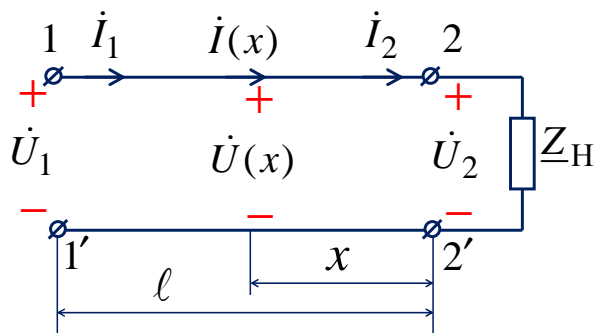


Рис. 165

- **Режим холостого хода**, когда  $Z_H = \infty$  и  $I_2 = 0$ :

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_2 \cdot \cos \beta x; \\ \dot{I}(x) = j \cdot \frac{\dot{U}_2}{Z_B} \cdot \sin \beta x. \end{cases}$$

Входное сопротивление  $Z_{\text{вх}}^{(\text{xx})} = -j \cdot Z_B \cdot \text{ctg} \beta \ell$ , в линии стоячие – волны напряжения и тока.

**Стоячие волны** – это результат наложения падающих и отраженных волн с одинаковой амплитудой. При стоячих волнах активная мощность в любой точке линии равна нулю. При стоячих волнах пучности и узлы неподвижны и сдвинуты друг относительно друга на  $\lambda/4$ .

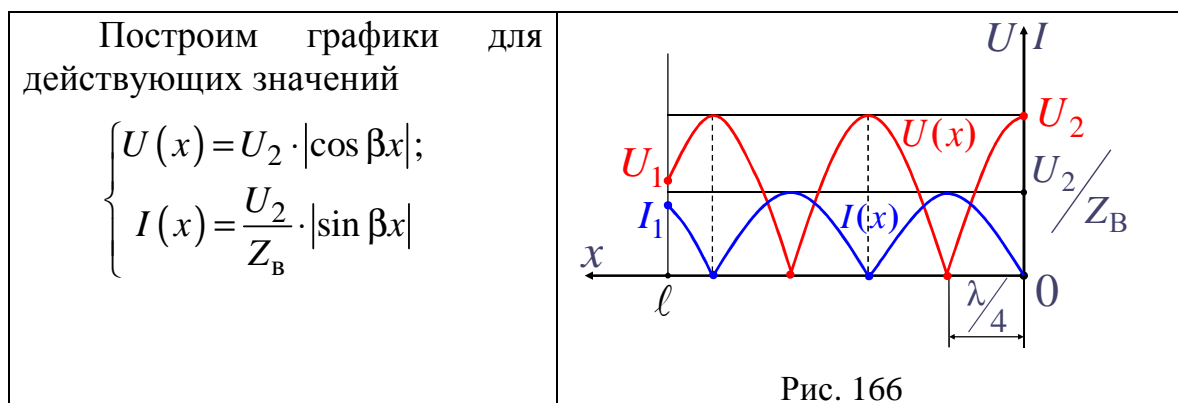
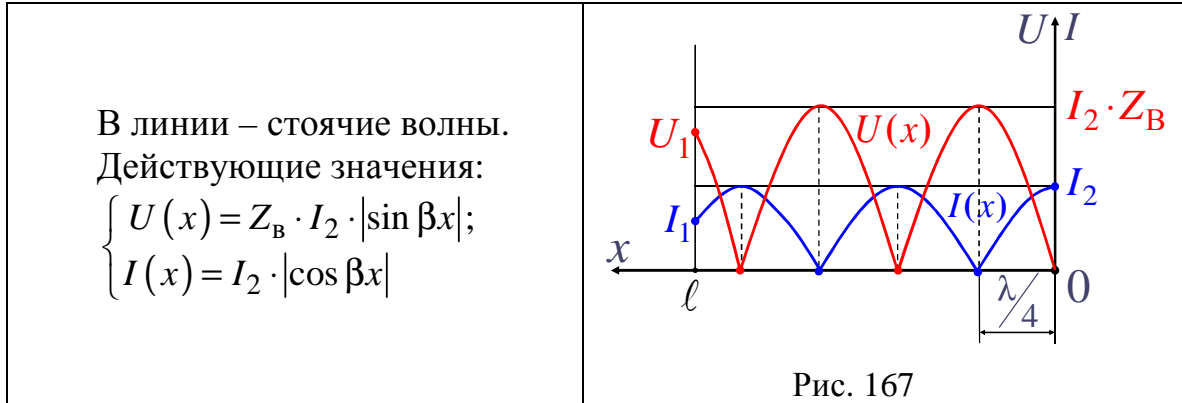


Рис. 166

- **Режим короткого замыкания**, когда  $\underline{Z}_H = 0$ ,  $\dot{U}_2 = 0$ :

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = j \cdot Z_B \cdot \dot{I}_2 \cdot \sin \beta x; \\ \dot{I}(x) = \dot{I}_2 \cdot \cos \beta x. \end{cases}$$

Входное сопротивление  $\underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{кз})} = j \cdot Z_B \cdot \text{tg} \beta l$ .

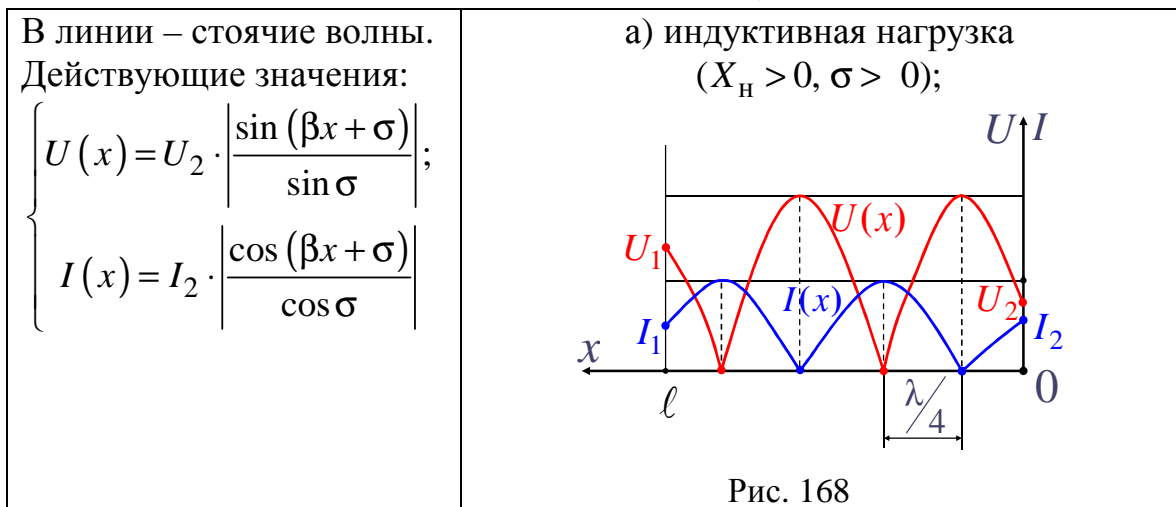


- **Режим реактивной нагрузки**, когда  $\underline{Z}_H = jX_H$ ,

$$\dot{U}_2 = jX_H \cdot \dot{I}_2, \text{tg} \sigma = \frac{X_H}{Z_B} :$$

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_2 \cdot \frac{\sin(\beta x + \sigma)}{\sin \sigma}; \\ \dot{I}(x) = \dot{I}_2 \cdot \frac{\cos(\beta x + \sigma)}{\cos \sigma}. \end{cases}$$

Входное сопротивление  $\underline{Z}_{\text{BX}}^{(\text{р})} = j \cdot X_H \cdot \frac{\text{tg}(\beta l + \sigma)}{\text{tg} \sigma}$ .



б) емкостная нагрузка ( $X_H < 0, \sigma < 0$ ).

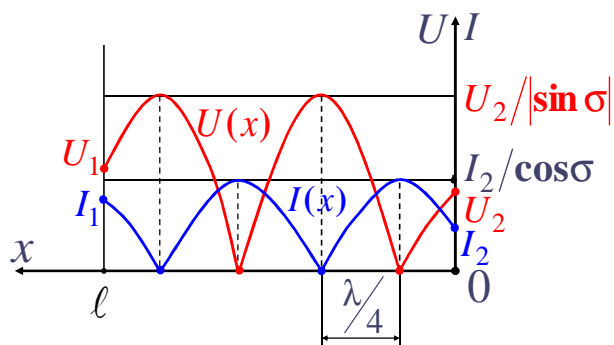


Рис. 169

- **Режим согласованной нагрузки**, когда  $\underline{Z}_H = Z_B = \sqrt{L_0/C_0}$ ,

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_2 \cdot e^{j\beta x}; \\ \dot{I}(x) = \dot{I}_2 \cdot e^{j\beta x}. \end{cases}$$

Входное сопротивление  $\underline{Z}_{BX}^{(c)} = Z_B$ .

В линии стоячих волн нет.  
Действующие значения:

$$\begin{cases} U(x) = U_2; \\ I(x) = I_2 \end{cases}$$

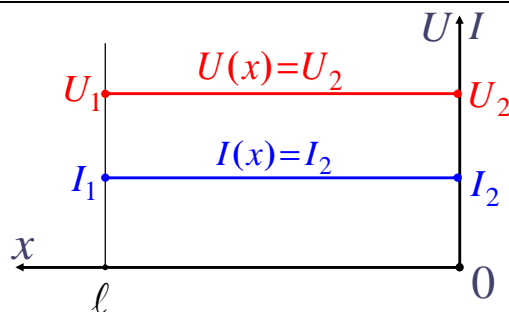


Рис. 170

- **Режим активной нагрузки**, когда  $\underline{Z}_H = R_H \neq Z_B$ .

$$\begin{cases} \underline{U}(x) = \underline{U}_2 \cdot \left( \cos \beta x + j \cdot \frac{Z_B}{R_H} \cdot \sin \beta x \right); \\ \underline{I}(x) = \underline{I}_2 \cdot \left( \cos \beta x + j \cdot \frac{R_H}{Z_B} \cdot \sin \beta x \right). \end{cases}$$

В линии стоячих волн нет.  
Действующие значения:

$$\begin{cases} U(x) = U_2 \cdot \sqrt{\cos^2 \beta x + \frac{Z_B^2}{R_H^2} \cdot \sin^2 \beta x}; \\ I(x) = I_2 \cdot \sqrt{\cos^2 \beta x + \frac{R_H^2}{Z_B^2} \cdot \sin^2 \beta x} \end{cases}$$

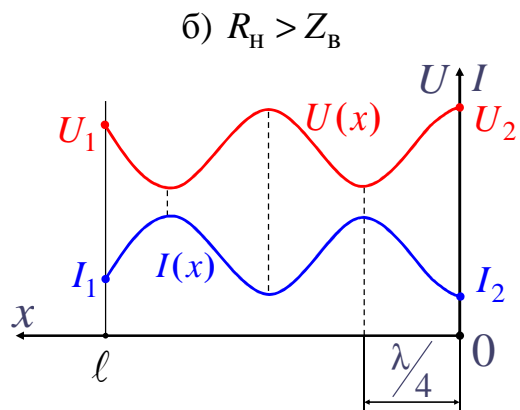
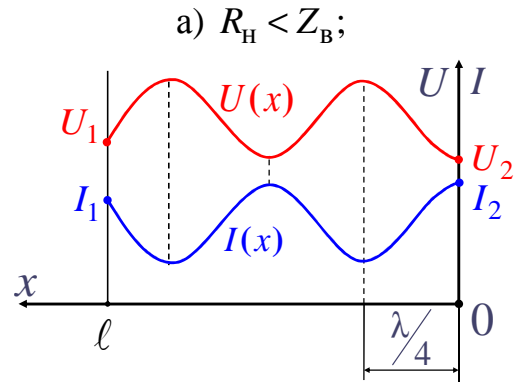


Рис. 171

Если  $\ell = \lambda/4$  и  $R_H = 10 \cdot Z_B$ , то  $\frac{U_1}{U_2} = \frac{Z_B}{R_H} = 0,1$ ,  $\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_H}{Z_B} = 10$  – четверть волновой трансформатор.

### 3.7. Переходные процессы в однородных линиях без потерь

Переходные процессы в линиях возникают:

- при включении и отключении источников и нагрузки;
- при обрывах проводов и коротких замыканиях;
- при грозовых разрядах;
- при прохождении импульсов в линиях связи.

У большинства линий  $R_0 \ll \omega L_0$ ,  $G_0 \ll \omega C_0$ ,

поэтому ограничимся рассмотрением линий без потерь, у которых  $R_0 \cong 0$ ,  $G_0 \cong 0$ .

Основные уравнения при отсчете  $x$  от начала линии:

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = L_0 \cdot \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}; \quad (3.7)$$

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = C_0 \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}. \quad (3.8)$$

Продифференцируем уравнения (3.7) и (3.8) по  $x$  и  $t$ , тогда, при скорости перемещения волн  $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ , км/с, после преобразований получаем следующие уравнения для напряжения  $u(x, t)$  и тока  $i(x, t)$  переходного процесса в линии:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}; \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}. \quad (3.11)$$

Решение уравнения (3.9):

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right) = \\ &= u_{\text{пад}}(x,t) + u_{\text{отр}}(x,t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Решение уравнения (3.10):

$$\begin{aligned} i(x,t) &= \Phi_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + \Phi_2\left(t + \frac{x}{v}\right) = \\ &= i_{\text{пад}}(x,t) + i_{\text{отр}}(x,t). \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

Подстановка (3.11) и (3.12) в уравнения (3.7) и (3.8) позволяет определить

$$i_{\text{пад}}(x,t) = \frac{u_{\text{пад}}(x,t)}{Z_{\text{в}}};$$

$$i_{\text{отр}}(x,t) = -\frac{u_{\text{отр}}(x,t)}{Z_{\text{в}}},$$

где  $Z_{\text{в}} = \sqrt{L_0/C_0}$ , Ом, – волновое сопротивление.

Вид функций  $f_1, f_2, \Phi_1, \Phi_2$  определяется граничными условиями, т.е. входным напряжением и нагрузкой, причем эти функции должны быть дважды дифференцируемыми по  $x$  и  $t$ .

Так, при включении линии к источнику напряжения  $u_1(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha)$  имеем, при замене  $t$  на  $(t - x/v)$ ,

$$u_{\text{пад}}(x, t) = f_1(t - x/v) = U_m \sin[\omega(t - x/v) + \alpha],$$

тогда

$$i_{\text{пад}}(x, t) = \Phi_1(t - x/v) = \frac{U_m}{Z_B} \sin[\omega(t - x/v) + \alpha].$$

Падающие волны  $u_{\text{пад}}(x, t)$  и  $i_{\text{пад}}(x, t)$  перемещаются со скоростью  $v$  от начала линии в сторону увеличения координаты  $x$ .

Отраженные волны  $u_{\text{отр}}(x, t)$  и  $i_{\text{отр}}(x, t)$  перемещаются со скоростью  $v$  от конца линии в сторону уменьшения координаты  $x$ .

Если  $u_{\text{пад}}(x_1, t_1) = f_1\left(t_1 - \frac{x_1}{v}\right)$ , то при  $t_2 = t_1 + \frac{x_2 - x_1}{v} > t_1$  и  $x_2 > x_1$  получаем падающую волну напряжения

$$u_{\text{пад}}(x_2, t_2) = f_1\left(t_2 - \frac{x_2}{v}\right) = f_1\left(t_1 - \frac{x_1}{v}\right).$$

При любом законе изменения во времени падающей волны напряжения и тока в начале линии по такому же закону, но с опозданием во времени изменится падающая волна напряжения и тока в любой точке линии.

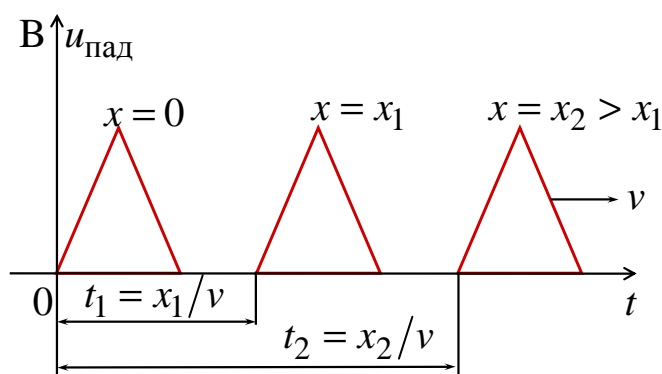


Рис. 172

Таким же образом изменяются отраженные волны напряжения и тока, но с опозданием во времени относительно конца линии.



### 3.8. Включение однородной линии без потерь на постоянное напряжение

После замыкания ключа по линии начнут перемещаться падающие волны напряжения и тока с прямоугольным фронтом и со скоростью

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

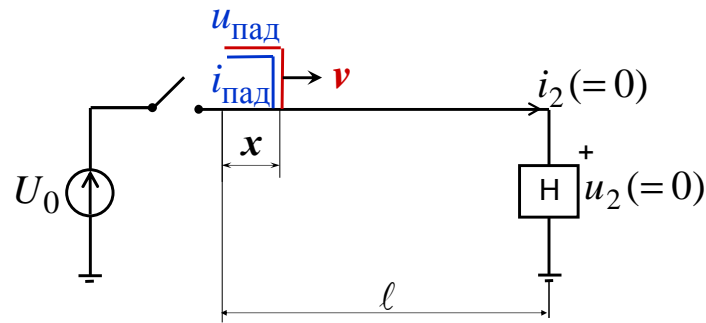


Рис. 173

Падающие волны:

а) напряжения  $u_{\text{пад}} = U_0$ ;

б) тока  $i_{\text{пад}} = \frac{u_{\text{пад}}}{Z_{\text{в}}} = \frac{U_0}{Z_{\text{в}}}$ , где  $Z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ , Ом, – волновое сопротивление.

ление.

Когда падающие волны достигнут конца линии, то появляются отраженные волны, которые определяются характером нагрузки. Так как для любой точки линии напряжение и ток равны сумме падающей и отраженной волн, тогда и для нагрузки (н) имеем ( $x = l$ ):

$$\begin{cases} u_2 = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}; \\ i_2 = i_{\text{пад}} + i_{\text{отр}}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Напряжение  $u_2$  и ток  $i_2$  появляются в нагрузке только после прихода падающих волн  $u_{\text{пад}}$  и  $i_{\text{пад}}$ .

Так как  $i_{\text{отр}} = -\frac{u_{\text{отр}}}{Z_{\text{в}}}$ , то из уравнений (3.13)

$$\begin{cases} u_2 = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}}; \\ i_2 Z_{\text{в}} = u_{\text{пад}} - u_{\text{отр}}. \end{cases} \quad (3.14)$$

После сложения уравнений (3.14) получаем

$$2u_{\text{пад}} = u_2 + Z_{\text{в}} \cdot i_2. \quad (3.15)$$

Уравнению (3.15) соответствует расчетная схема (рис. 168), которая используется для определения  $i_2(t)$  и  $u_2(t)$  после прихода в нагрузку падающих волн.

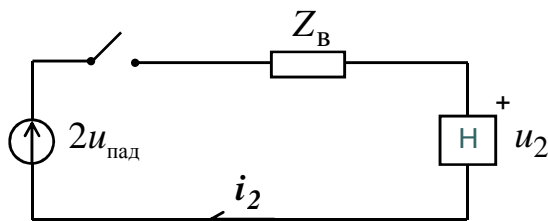


Рис. 174

За начало переходного процесса в нагрузке ( $t = 0$ ) принимается момент прихода туда падающих волн.

Переходный процесс в нагрузке может быть рассчитан классическим или операторным методом при нулевых начальных условиях.

Затем определяются отраженные волны

$$i_{\text{отр}}(t) = -\frac{u_{\text{отр}}(t)}{Z_{\text{в}}};$$

$$u_{\text{отр}}(t) = u_2(t) - u_{\text{пад}}(t).$$

Рассчитываем распределение напряжения и тока для момента времени  $t = t_0 = \frac{\ell + \ell_1}{v}$ , где  $\ell_1$  – расстояние от нагрузки, которое прошли отраженные волны. При этом используем, что в каждой точке линии напряжение и ток равны сумме падающих и отраженных волн, которые запаздывают во времени относительно соответственно начала и конца линии.

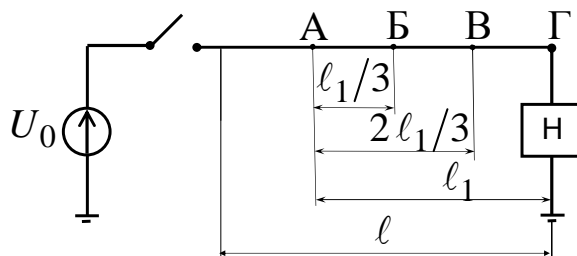


Рис. 175

	А	Б	В	Г
$t, \text{ с}$	$t_A = 0$	$t_B = \frac{\ell_1}{3v}$	$t_B = \frac{2\ell_1}{3v}$	$t_\Gamma = \frac{\ell_1}{v}$
$u_{\text{отр}}, \text{ В}$	$u_{\text{отр}}(t_A)$	$u_{\text{отр}}(t_B)$	$u_{\text{отр}}(t_B)$	$u_{\text{отр}}(t_\Gamma)$
$i_{\text{отр}}, \text{ А}$	$i_{\text{отр}}(t_A)$	$i_{\text{отр}}(t_B)$	$i_{\text{отр}}(t_B)$	$i_{\text{отр}}(t_\Gamma)$
$u(x, t_0), \text{ В}$	$u_2(t_A)$	$u_2(t_B)$	$u_2(t_B)$	$u_2(t_\Gamma)$
$i(x, t_0), \text{ А}$	$i_2(t_A)$	$i_2(t_B)$	$i_2(t_B)$	$i_2(t_\Gamma)$

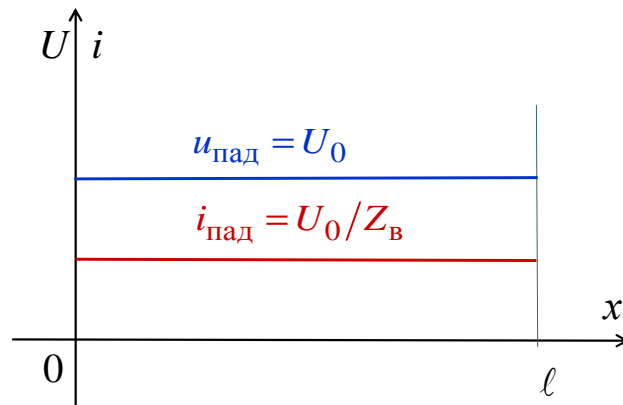


Рис. 176

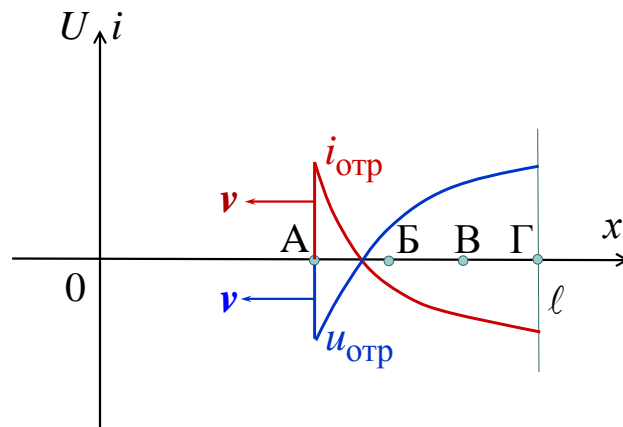


Рис. 177

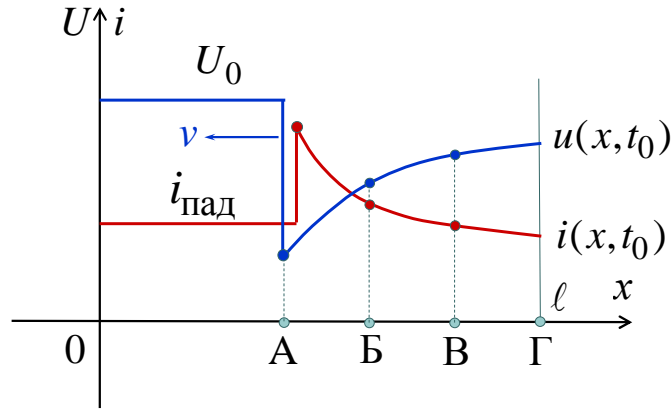


Рис. 178

### 3.9. Отражение и преломление волн в однородных линиях без потерь

Отражение и преломление волн происходит в местах неоднородностей, которыми являются нагрузка и другие линии с другими волновыми сопротивлениями. При этом используются коэффициенты отражения и преломления:

- а) коэффициенты отражения  $K_u = -K_i = \frac{u_{отр1}}{u_{пад1}}$ ;
- б) коэффициенты преломления  $n_u = \frac{u_{пад2}}{u_{пад1}}$  и  $n_i = \frac{i_{пад2}}{i_{пад1}}$ .

1. Переход волн с одной линии ( $Z_{B1}$ ) на другую линию ( $Z_{B2}$ ):

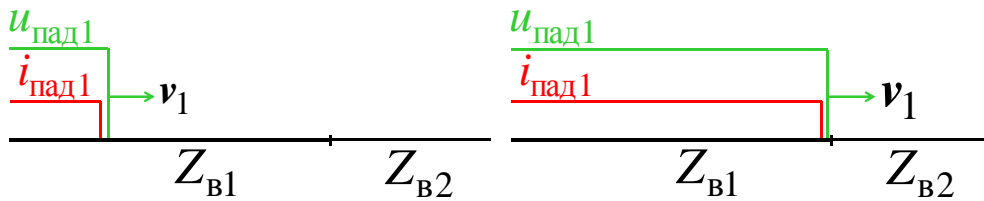


Рис. 179

$$i_{пад1} = \frac{u_{пад1}}{Z_{B1}}.$$

Расчетная схема

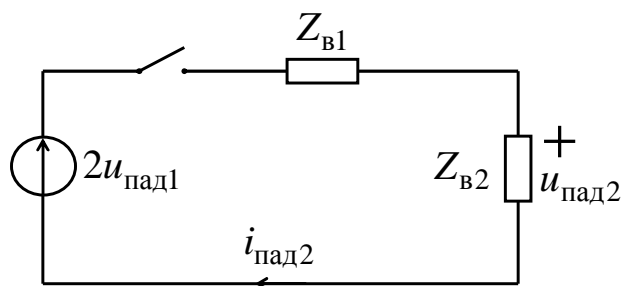


Рис. 180

Определяем:

$$i_{\text{пад}2} = \frac{2u_{\text{пад}1}}{Z_{\text{в}1} + Z_{\text{в}2}}; \quad u_{\text{пад}2} = Z_{\text{в}2} \cdot i_{\text{пад}2};$$

$$u_{\text{отр}1} = u_{\text{пад}2} - u_{\text{пад}1}; \quad i_{\text{отр}1} = -\frac{u_{\text{отр}1}}{Z_{\text{в}1}};$$

$$K_u = -K_i = \frac{Z_{\text{в}2} - Z_{\text{в}1}}{Z_{\text{в}1} + Z_{\text{в}2}}; \quad n_u = \frac{2Z_{\text{в}2}}{Z_{\text{в}1} + Z_{\text{в}2}}; \quad n_i = \frac{2Z_{\text{в}1}}{Z_{\text{в}1} + Z_{\text{в}2}}.$$

Если  $Z_{\text{в}1} = 2Z_{\text{в}2}$ , то  $K_u = -K_i = -\frac{1}{3}$ ;  $n_u = \frac{2}{3}$ ;  $n_i = \frac{4}{3}$ .

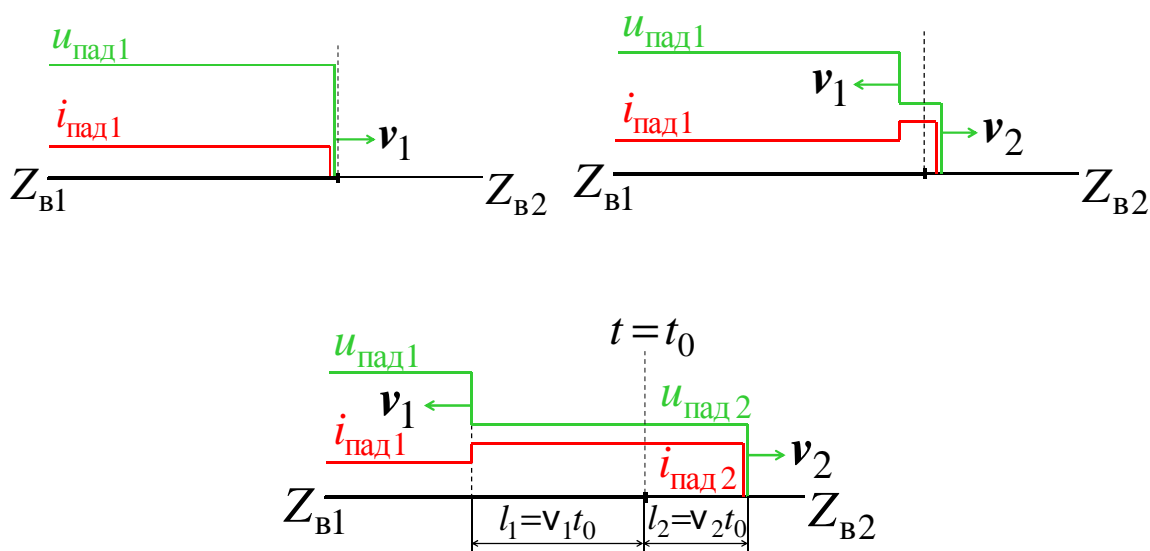


Рис. 181

2. Переход волн с одной линии ( $Z_{B1}$ ) на две другие линии ( $Z_{B2}$  и  $Z_{B3}$ ):

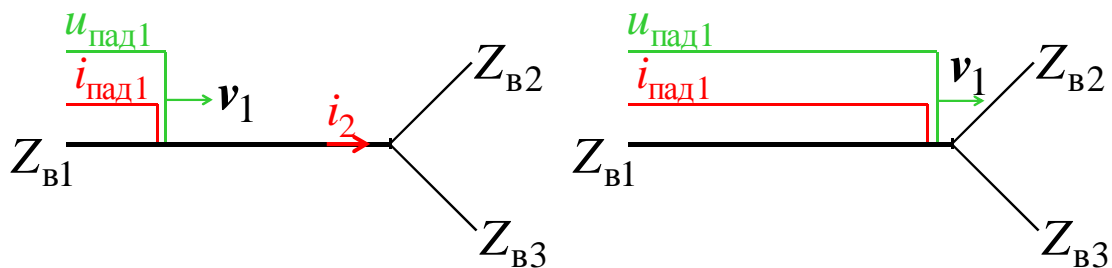


Рис. 182

$$i_{\text{пад1}} = \frac{u_{\text{пад1}}}{Z_{B1}}.$$

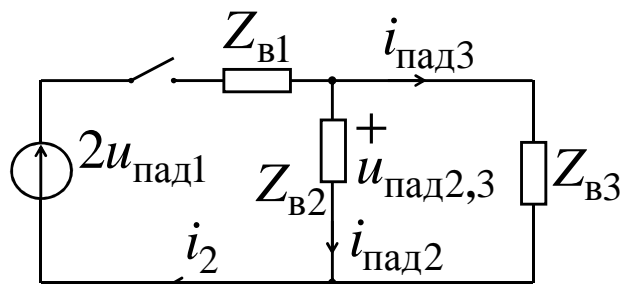


Рис. 183. Расчетная схема

Определяем:

$$i_2 = \frac{2u_{\text{пад1}}}{Z_{B1} + \frac{Z_{B2}Z_{B3}}{Z_{B2} + Z_{B3}}}; \quad i_{\text{пад2}} = i_2 \cdot \frac{Z_{B3}}{Z_{B2} + Z_{B3}};$$

$$i_{\text{пад3}} = i_2 \cdot \frac{Z_{B2}}{Z_{B2} + Z_{B3}}; \quad u_{\text{пад2,3}} = i_{\text{пад2}} \cdot Z_{B2}.$$

Если  $Z_{B1} > Z_{B3} > Z_{B2}$ ,  $v_1 > v_3 > v_2$ ,  $l_1 > l_3 > l_2$ , то при  $i_{\text{пад2}} > i_{\text{пад3}}$  получаем график:

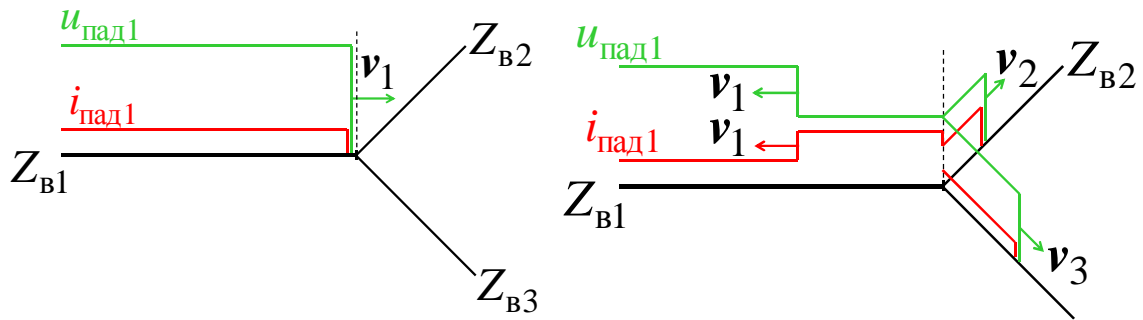


Рис. 184

$$t = t_0; \quad l_1 = v_1 \cdot t_0; \quad l_2 = v_2 \cdot t_0; \quad l_3 = v_3 \cdot t_0.$$

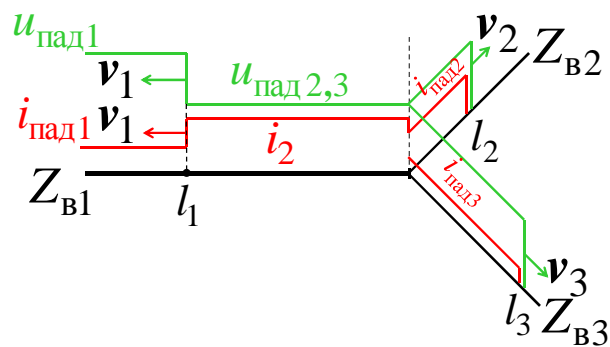


Рис. 185

3. Переход волн с одной линии ( $Z_{B1}$ ) на другую линию ( $Z_{B2}$ ), если в месте стыка линий параллельно включен конденсатор с емкостью  $C$ :

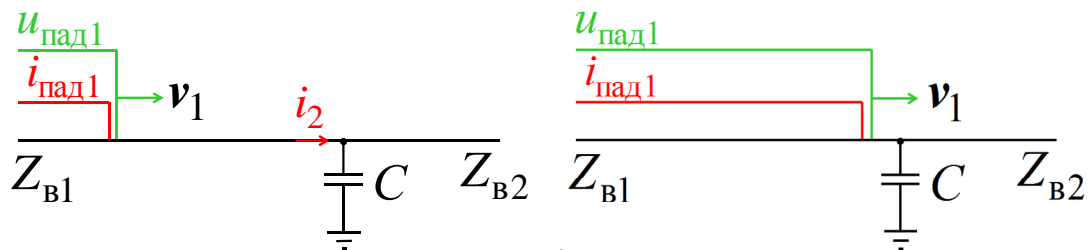


Рис. 186

$$i_{пад1} = \frac{u_{пад1}}{Z_{B1}}.$$

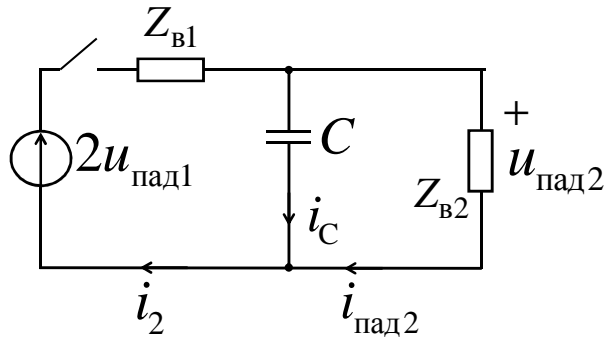


Рис. 187. Расчетная схема

Переходный процесс рассчитывается классическим или операторным методом при нулевых начальных условиях.

Расчетное время:

а) для линии с  $Z_{в1}$

$$t_A = X_A / v_1;$$

б) для линии с  $Z_{в2}$

$$t_B = X_B / v_2.$$

Изменяя  $X_A$  и  $X_B$ , рассчитываем распределения напряжения и тока в линиях:

а) в линии с  $Z_{в1}$

$$u_A = u_2(t_A) = u_{пад2}(t_A); i_A = i_2(t_A);$$

б) в линии с  $Z_{в2}$

$$u_B = u_{пад2}(t_B); i_B = i_{пад2}(t_B).$$

Строим графики для  $t = t_0$ , когда  $l_1 = v_1 \cdot t_0$  и  $l_2 = v_2 \cdot t_0$ .

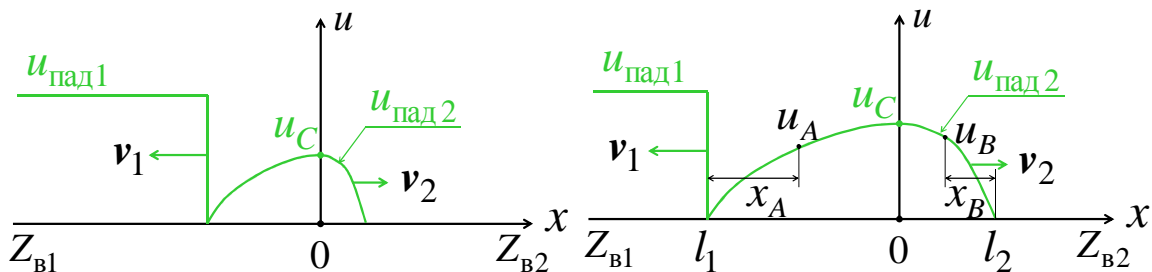


Рис. 188



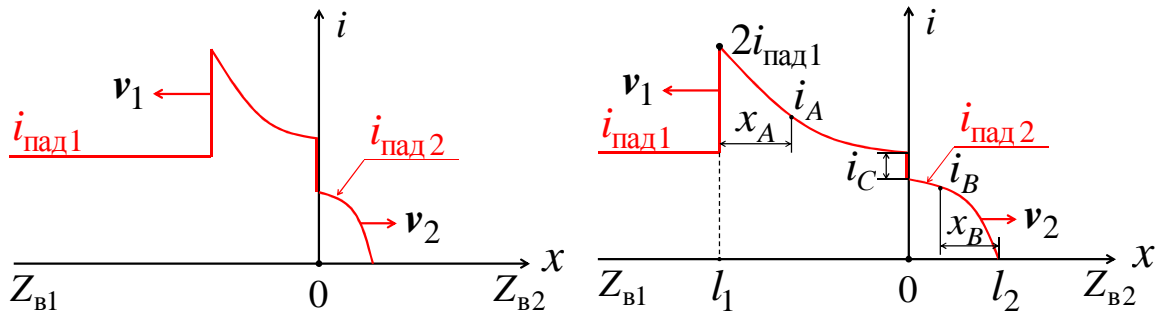


Рис. 189

Такое включение емкости используется для сглаживания фронтов  $u_{\text{пад}2}$  и  $i_{\text{пад}2}$  в линии с  $Z_{B2}$ .

4. Переход волн с одной линии ( $Z_{B1}$ ) на другую линию ( $Z_{B2}$ ), если в месте стыка линий последовательно включена катушка с индуктивностью  $L$ :

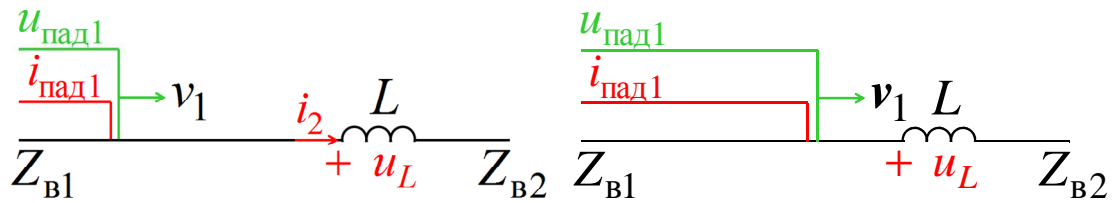


Рис. 190

$$i_{\text{пад}1} = \frac{u_{\text{пад}1}}{Z_{B1}}.$$

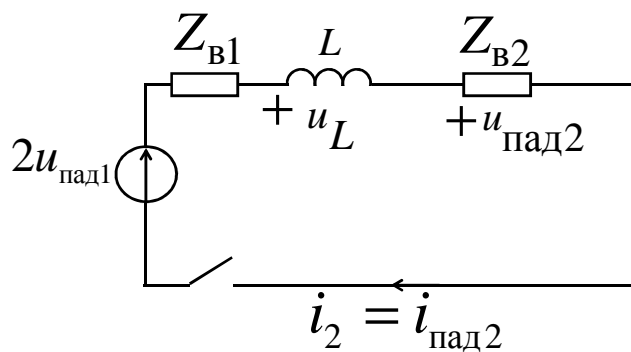


Рис. 191. Расчетная схема

Переходный процесс рассчитывается классическим или операторным методом при нулевых начальных условиях.

Расчетное время:

а) для линии с  $Z_{B1}$

$$t_A = X_A / v_1;$$

б) для линии с  $Z_{B2}$

$$t_B = X_B / v_2.$$

Изменяя  $X_A$  и  $X_B$ , рассчитываем распределения напряжения и тока в линиях:

а) в линии с  $Z_{B1}$

$$u_A = u_2(t_A); i_A = i_2(t_A);$$

б) в линии с  $Z_{B2}$

$$u_B = u_{\text{пад}2}(t_B); i_B = i_{\text{пад}2}(t_B).$$

Строим графики для момента времени  $t = t_0$ , когда  $l_1 = v_1 \cdot t_0$  и  $l_2 = v_2 \cdot t_0$ .

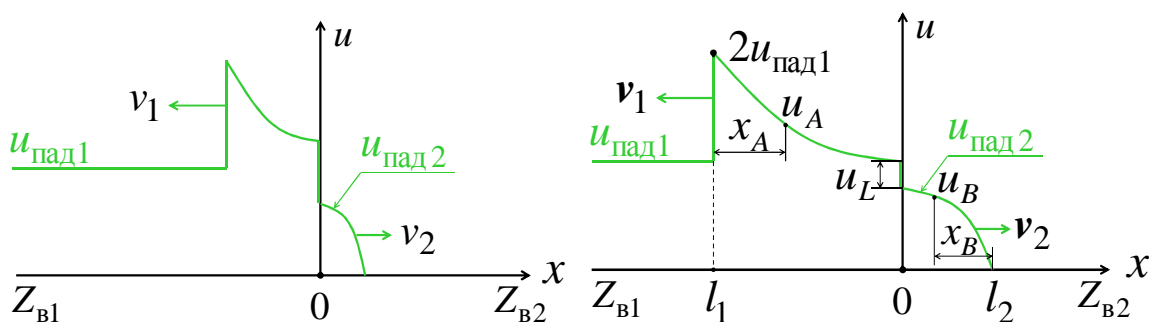


Рис. 192

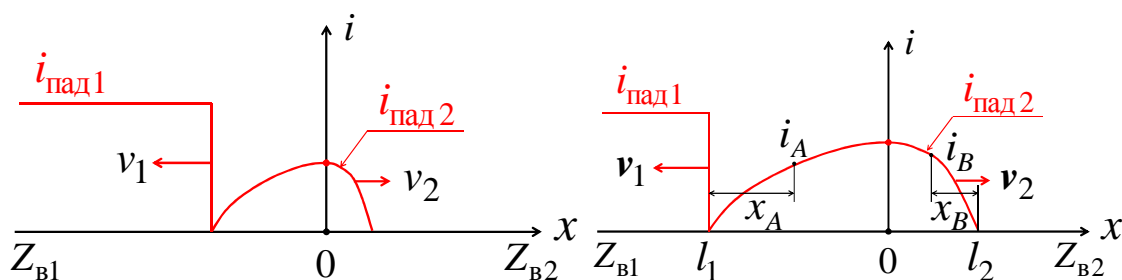


Рис. 193

Такое включение индуктивности используется для сглаживания фронтов  $u_{\text{пад}2}$  и  $i_{\text{пад}2}$  в линии с  $Z_{B2}$ .

## Задание № 4

### Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях

**I.** Для заданной схемы при коммутации ключа  $K_1$  в момент времени  $t = 0$ , когда ключ  $K_2$  еще не сработал, выполнить следующее:

1. При постоянном источнике ЭДС  $e(t) = E$  или тока  $J(t) = J$  определить ток  $i(t)$  или напряжение  $u_J(t)$ :

- а) классическим методом;
- б) операторным методом;

построить график зависимости тока  $i(t)$  или напряжения  $u_J(t)$ .

2. При гармоническом источнике ЭДС  $e(t) = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \alpha)$  или тока  $J(t) = \sqrt{2}J \sin(\omega t + \alpha)$  определить ток  $i(t)$  или напряжение  $u_J(t)$ :

- а) классическим методом;
- б) комбинированным (операторно-классическим) методом;

на интервале времени  $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$  построить график зависимости тока  $i(t)$  или напряжения  $u_J(t)$ .

3. При импульсном источнике ЭДС  $e(t) = Ee^{2pt}$  или тока  $J(t) = Je^{2pt}$  и нулевых начальных условиях определить интегралом Дюамеля ток  $i(t)$  или напряжение  $u_J(t)$ , построить их график зависимости ( $p$  – корень характеристического уравнения из п. 1, а).

**II.** Для заданной схемы с постоянным источником ЭДС  $e(t) = E$  или тока  $J(t) = J$  при коммутации ключа  $K_2$  в момент времени  $t=0$ , когда ключ  $K_1$  давно уже сработал, определить ток  $i(t)$  или напряжение  $u_J(t)$ :

- а) классическим методом;
- б) операторным методом;
- в) методом переменных состояния;

построить график зависимости тока  $i(t)$  или напряжения  $u_J(t)$ .

**III.** Проанализировать методы расчета, результаты вычислений, графики зависимостей и сформулировать выводы по работе.

*Примечание:* объем задания уточняет лектор;

1-я цифра номера задания – номер строки в табл. 1;

2-я цифра номера задания – номер строки в табл. 2;

3-я цифра номера задания – номер схемы.

Таблица 1

№	$E$	$J$	$\alpha$
–	В	А	град
1	300	5,5	90
2	280	5	60
3	260	4,5	45
4	240	4	30
5	220	3,5	0
6	200	3	–30
7	175	2,5	–45
8	150	2	–60
9	125	1,5	–90
0	100	1	–120

Таблица 2

№	$\omega$	$R$	$L$	$C$
–	1/с	Ом	Гн	мкФ
1	100	100	2	200
2	150	90	1,2	150
3	200	80	0,8	125
4	250	75	0,6	107
5	300	60	0,4	111
6	400	50	0,25	100
7	500	40	0,16	100
8	600	30	0,1	111
9	800	24	0,06	104
0	1000	10	0,02	200

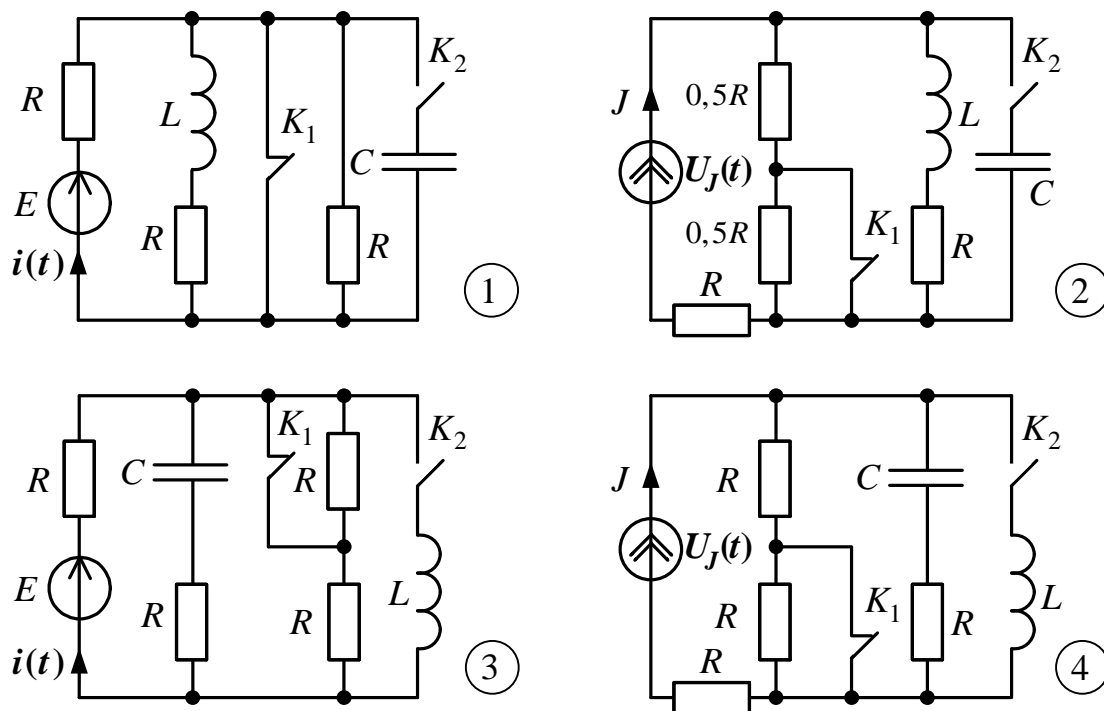
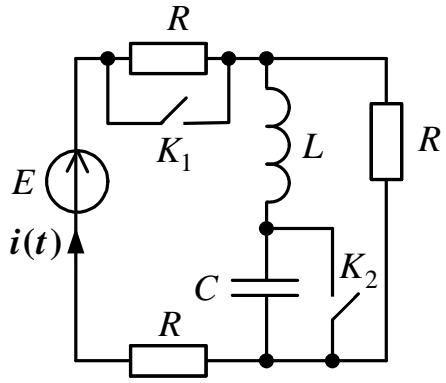
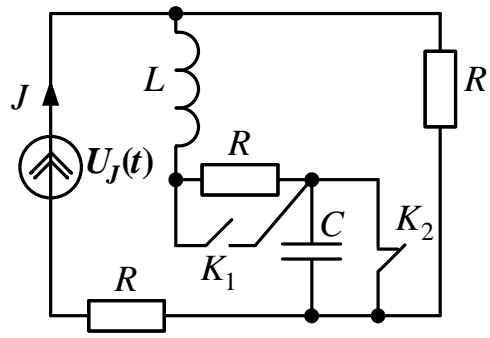


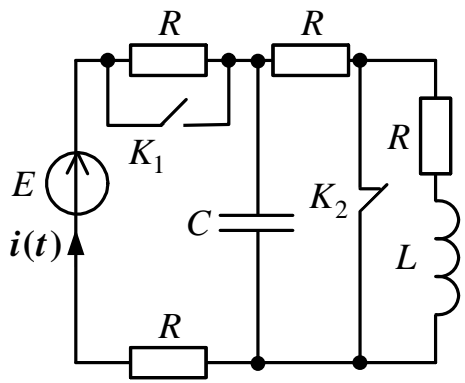
Рис. 194



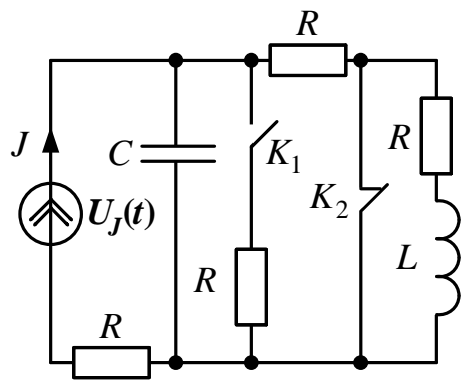
5



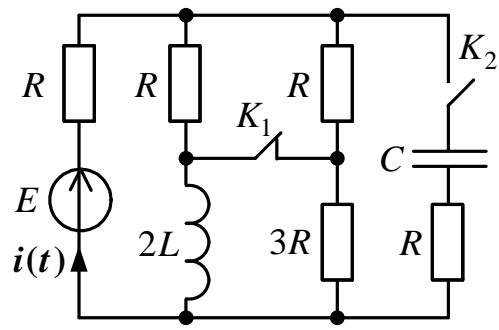
6



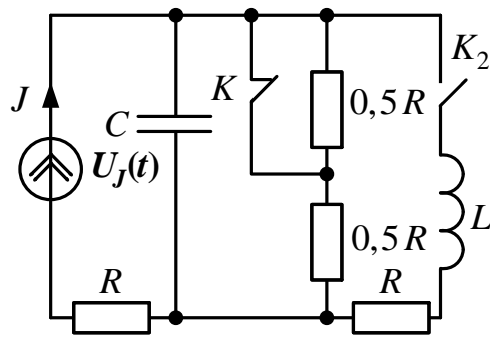
7



8



9



0

Рис. 195

## Задание № 5

### Расчет установившегося режима в нелинейных электрических цепях

Для заданной схемы с источником гармонической ЭДС  $e(t) = \sqrt{2}E \sin(314t + \alpha)$  или тока  $J(t) = \sqrt{2}J \sin(314t + \alpha)$  и нелинейным индуктивным элементом (НИЭ), изготовленным в виде последовательно соединенных катушек на общем ферромагнитном сердечнике, без учета рассеяния магнитных потоков и потерь энергии в сердечнике и катушках при заданной основной кривой намагничивания ферромагнитного материала сердечника

В, Тл	0	0,6	1	1,2	1,6	2	2,2	2,3	2,5
Н, А/м	0	250	500	1000	2000	6000	12000	30000	200000

выполнить следующее:

1. Относительно зажимов  $a$  и  $b$  НИЭ определить комплексное сопротивление эквивалентного генератора  $\underline{z}_Г = z_Г e^{j\Phi_Г}$ , а также комплексы действующих значений ЭДС  $\underline{U}_{\text{xx}} = \underline{E}_Г = E_Г e^{j\alpha_Г}$  и тока  $\underline{I}_{\text{кз}} = \underline{J}_Г = J_Г e^{j\beta_Г}$  этого генератора.

2. Для двух мгновенных значений тока  $i_L$  НИЭ, равных  $\sqrt{2}J_Г / 2$  и  $\sqrt{2}J_Г$ , из расчета магнитной цепи определить величины потокосцепления  $\Psi = w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3$ , Вб.

3. По результатам п. 2 построить веберамперную характеристику  $\Psi(i_L)$  НИЭ, которую заменить зависимостью  $i_L(\Psi) = k_1\Psi + k_3\Psi^3$ , и рассчитать коэффициенты  $k_1$  и  $k_3$ .

4. При приближенной гармонической зависимости для напряжения НИЭ  $u_L(t) = \sqrt{2}U_L \cos(314t + \beta)$ , для его четырех действующих значений  $U_L$  ( $0 < U_L < E_Г$ ) по зависимости  $i_L(\Psi)$  п. 3 рассчитать соответствующие действующие значения гармоник тока НИЭ  $I_1$  и  $I_3$ , его действующее значение  $I_L$  и коэффициент гармоник  $k_Г$ , причем брать такие  $U_L$ , чтобы  $0 < I_L < J_Г$ .

5. По результатам п. 4 построить вольтамперную характеристику для действующих значений НИЭ  $U_L(I_L)$ , на основании которой, при

$\varphi_L(I_L) = 90^\circ$ , для одноконтурной схемы с  $\dot{E}_r$ ,  $z_r$  и НИЭ найти комплексы действующих значений эквивалентных синусоид  $\dot{U}_L$  и  $\dot{I}_L$  напряжения и тока НИЭ, построить векторную диаграмму.

6. По току  $\dot{I}_L$  из п. 5 и  $\dot{E}_r$  определить потребляемую активную мощность  $P$ , а по напряжению  $\dot{U}_L$  из п. 5 и зависимости  $i_L(\Psi)$  из п. 3 для тока НИЭ

$$i_L(t) = \sqrt{2}I_1 \sin(314t + \beta) + \sqrt{2}I_3 \sin(942t + 3\beta)$$

определить  $I_1$ ,  $I_3$  и  $\beta$ , а также уточнить его действующее значение  $I_L$  и коэффициент гармоник  $k_r$ .

7. Проанализировать полученные результаты и сформулировать выводы по работе.

*Примечание:*

- 1-я цифра номера задания – номер строки в табл. 1;
- 2-я цифра номера задания – номер строки в табл. 2;
- 3-я цифра номера задания – номер схемы.

Таблица 1

№	$E$	$J$	$\alpha$	$R$	$C$
–	В	А	град	Ом	мкФ
<b>1</b>	100	1	–30	10	318,47
<b>2</b>	110	1,1	–45	11	289,52
<b>3</b>	120	1,2	–60	12	265,39
<b>4</b>	130	1,3	–90	13	244,98
<b>5</b>	140	1,4	120	14	227,48
<b>6</b>	150	1,5	90	15	212,31
<b>7</b>	160	1,6	45	16	199,04
<b>8</b>	170	1,7	60	17	187,34
<b>9</b>	180	1,8	30	18	176,93
<b>0</b>	190	1,9	0	19	167,62

Таблица 2

№	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$
–	ВИТ	ВИТ	ВИТ	см <sup>2</sup>	см <sup>2</sup>	см <sup>2</sup>	см	см	см	мм	мм	мм
1	1000	500	0	2	1	1	20	10	20	1	0	0
2	1000	0	1000	2	1	1	20	10	20	1	0	0
3	0	1000	500	2	1	1	20	10	20	1	0	0
4	500	1000	0	1	2	1	30	15	30	0	1	0
5	1000	0	1000	1	2	1	30	15	30	0	1	0
6	0	500	1000	1	2	1	30	15	30	0	1	0
7	1000	500	0	1	1	2	30	10	30	0	0	1
8	0	500	1000	1	1	2	30	10	30	0	0	1
9	1000	0	1000	1	1	2	30	10	30	0	0	1
0	500	0	500	1	2	1	45	15	45	0	1	0

### Нелинейный индуктивный элемент (НИЭ)

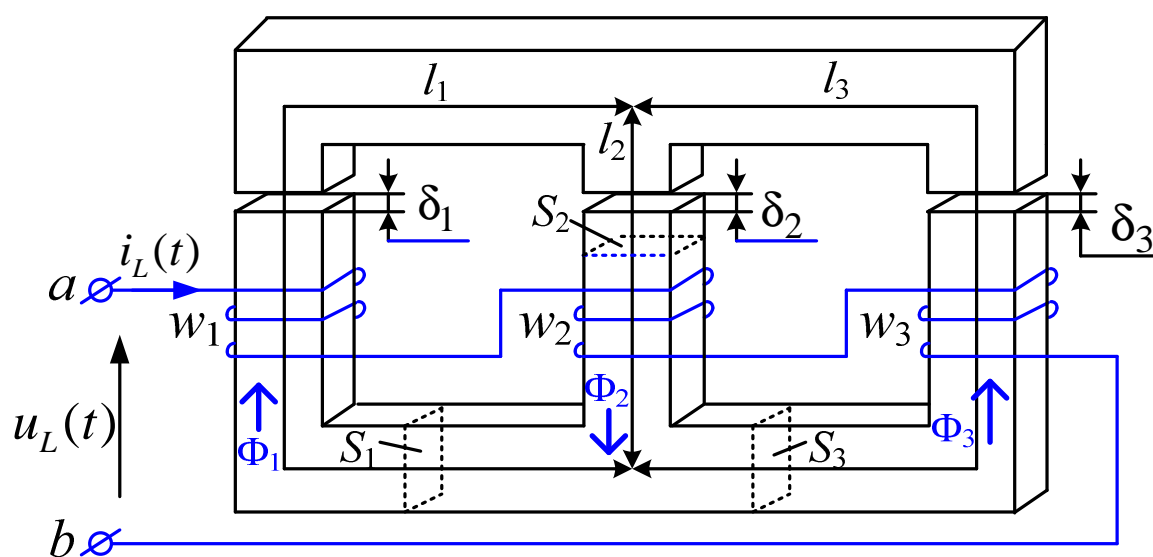


Рис. 196



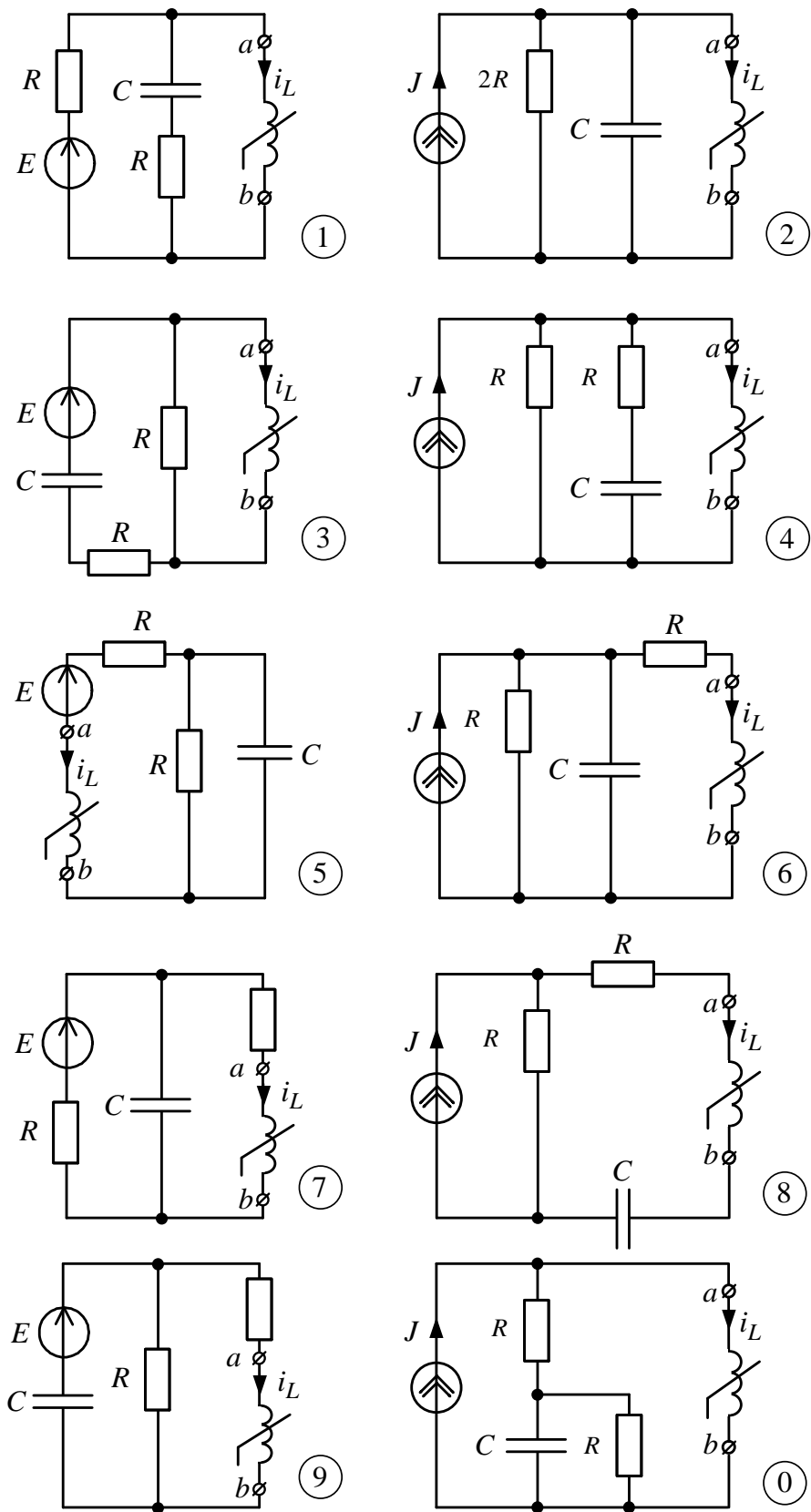


Рис. 197

## Задание № 6

### Расчет длинных линий в установившемся и переходном режимах

Для одной фазы линии электропередачи длиной  $l = 1500$  км и удельными параметрами из табл. 2 выполнить следующее:

1. В установившемся режиме при заданном фазном напряжении в конце линии

$$u_2(t) = \sqrt{2}U_2 \sin(314t + \Psi_{U_2})$$

а) определить волновое сопротивление  $Z_B$ , постоянную  $\gamma = \alpha + j\beta$ , фазовую скорость  $V$ , длину волны  $\lambda$ , комплексы действующих значений токов  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ , напряжения  $\dot{U}_1 = U_1 e^{j\Psi_{U_1}}$ , а также активные мощности в начале линии  $P_1$  и конце линии  $P_2$ , эффективность передачи энергии по линии (КПД)  $\eta = P_2/P_1$ ;

б) изменяя координату  $x$  от 0 до  $l$  рассчитать распределение вдоль линии действующих значений напряжения  $U(x)$  и тока  $I(x)$ , а также активной мощности  $P(x)$ ;

в) по результатам расчетов построить совмещенные графики зависимостей для действующих значений  $U(x)$  и  $I(x)$ , а также активной мощности  $P(x)$ .

2. В переходном режиме при подключении линии без потерь ( $R_0 \approx 0$ ;  $G_0 \approx 0$ ) к источнику постоянного напряжения  $U_0 = \sqrt{2}U_1 |\sin \Psi_{U_1}|$  рассчитать и построить совмещенные графики зависимостей распределения вдоль линии волн тока  $i(x, t_0)$  и напряжения  $u(x, t_0)$ , соответствующих моменту времени  $t_0 = \frac{3l}{2V}$  после подключения источника, когда отраженные от конца линии волны напряжения и тока достигли середины линии.

3. Проанализировать полученные результаты, графики зависимостей и сформулировать выводы по работе.

*Примечание:*

- 1-я цифра номера задания – номер строки в табл. 1;
- 2-я цифра номера задания – номер строки в табл. 2;
- 3-я цифра номера задания – номер схемы нагрузки линии.

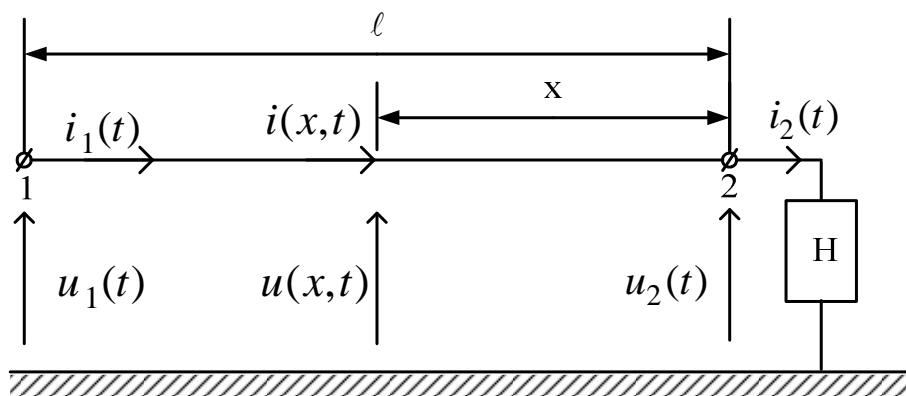


Рис. 198

Таблица 1

№	$U_2$	$\Psi_{U_2}$	$R$	$L$	$C$
–	кВ	град	Ом	Гн	мкФ
1	500	90	1000	3,18	3,18
2	450	60	900	2,86	3,53
3	400	45	800	2,54	3,98
4	350	30	700	2,22	4,54
5	300	0	600	1,91	5,30
6	250	–30	500	1,59	6,36
7	200	–45	400	1,27	7,96
8	150	–60	300	0,95	10,61
9	100	–90	200	0,63	15,92
0	50	–120	100	0,32	31,84

Таблица 2

№	$R_0$	$L_0$	$G_0$	$C_0$
–	Ом/км	Гн/км	См/км	Ф/км
1	0,01	$1 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-6}$	$1,11 \cdot 10^{-8}$
2	0,02	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$1,01 \cdot 10^{-8}$
3	0,04	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$0,93 \cdot 10^{-8}$
4	0,05	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$0,86 \cdot 10^{-8}$
5	0,06	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$0,8 \cdot 10^{-6}$	$0,8 \cdot 10^{-8}$
6	0,07	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$0,6 \cdot 10^{-6}$	$0,74 \cdot 10^{-8}$
7	0,08	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-6}$	$0,7 \cdot 10^{-8}$
8	0,09	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$0,3 \cdot 10^{-6}$	$0,66 \cdot 10^{-8}$
9	0,1	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$0,1 \cdot 10^{-6}$	$0,62 \cdot 10^{-8}$
0	0,11	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$0,05 \cdot 10^{-6}$	$0,59 \cdot 10^{-8}$

Схема нагрузки линии к заданию 6

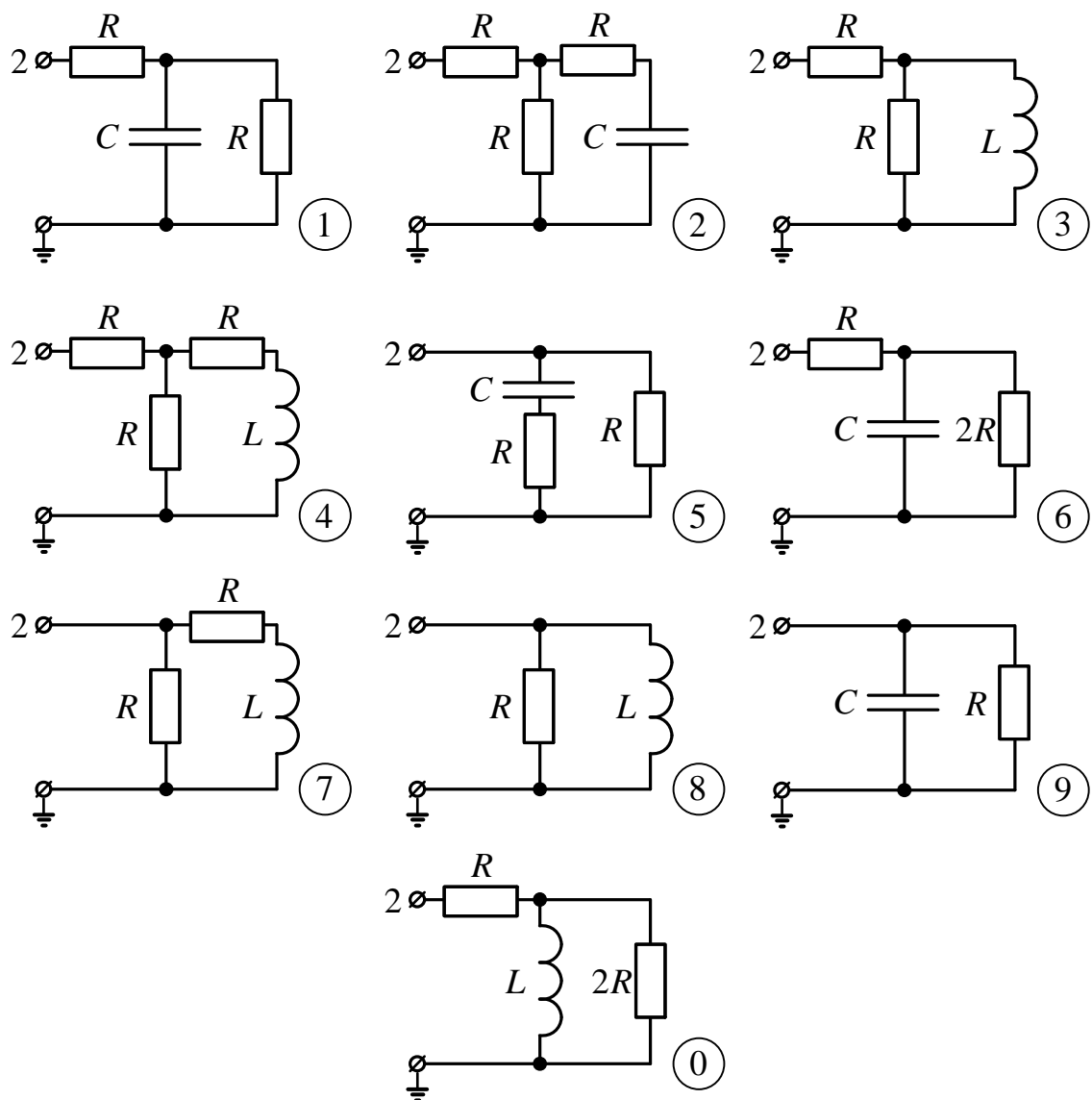


Рис. 199

## Пример 1

### Методические указания к заданию № 4

#### «Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях»

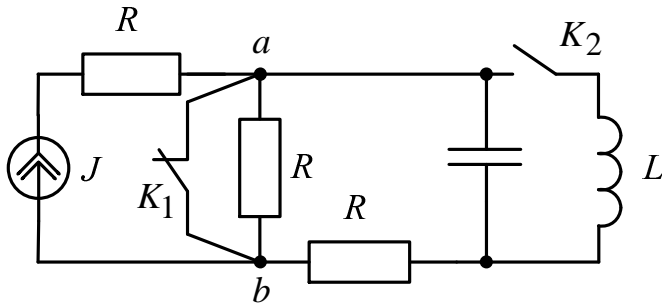


Рис. 200

Дано:

$$J = 2 \text{ А};$$

$$R = 100 \text{ Ом};$$

$$C = 100 \text{ мкФ};$$

$$L = 1 \text{ Гн}.$$

$$\alpha = 90^\circ; \omega = 100 \frac{1}{\text{с}}.$$

Определить:  $u_J(t)$

При постоянном источнике тока  $J(t) = J$  после срабатывания ключа  $K_1$ , когда ключ  $K_2$  ещё не сработал, определяем напряжение  $u_J(t)$ .

**1.1.** Используем упрощённый классический метод, когда дифференциальное уравнение для искомой функции не составляется.

1.1.1. Определяем независимые начальные условия (ННУ) при  $t = 0_-$ :  $u_C(0_-)$ . (схема до коммутации: установившийся режим, постоянный источник,  $C$  – разрыв,  $L$  – коротка).

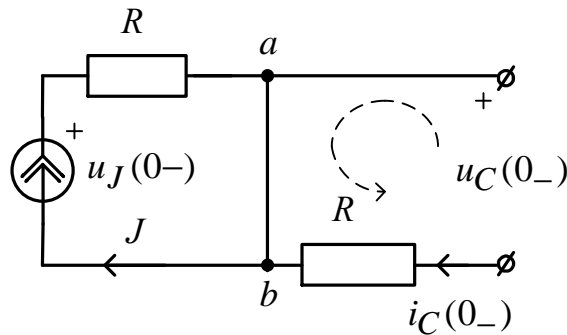


Рис. 201

Так как  $i_C(0_-) = 0$ , то по второму закону Кирхгофа

$$-u_C(0_-) - R \cdot i_C(0_-) = 0, \Rightarrow u_C(0_-) = 0.$$

Для построения графика  $u_J(t)$  определим  $u_J(0_-) = RJ = 200$ , В.

1.1.2. Определяем ЗНУ при  $t = 0_+$ :  $u_J(0_+)$ . (Схема после коммутации ключа  $K_1$ ). Используем метод узловых потенциалов.

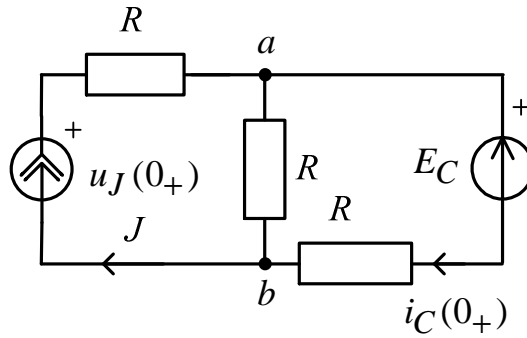


Рис. 202

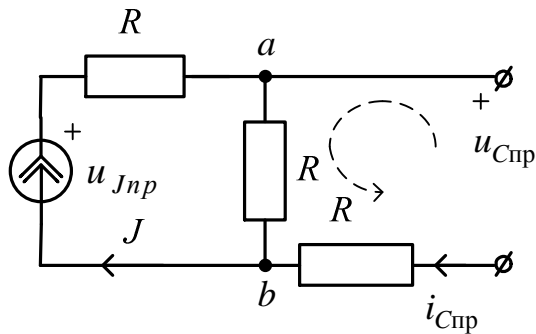
Имеем  $E_C = u_C(0_-) = u_C(0_+)$  – второй закон коммутации.

Используя метод узловых потенциалов,

$$\varphi_b = 0, \quad \varphi_a \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = J + \frac{E_C}{R};$$

тогда  $\varphi_a = 100$  В и  $u_J(0_+) = J \cdot R + \varphi_a = 300$  В.

1.1.3. Определяем принуждённую составляющую  $u_{Jnp}(t)$  при  $t = \infty$ : (схема после коммутации ключа  $K_1$ , установившейся режим, постоянный источник,  $C$  – разрыв,  $L$  – коротка);



$$u_{Jnp} = J \cdot 2R = 400 \text{ В},$$

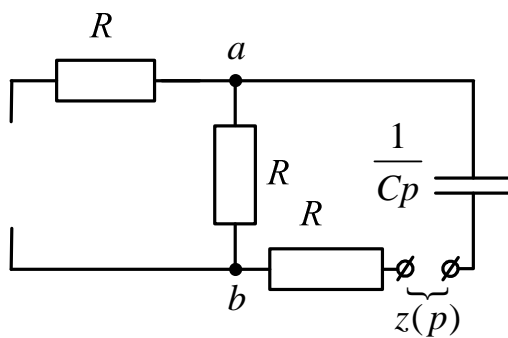
причём

$$u_{Cnp} = JR = 200 \text{ В}.$$

Рис. 203

1.1.4. Определяем корень характеристического уравнения  $p$ . Используем метод сопротивления цепи после коммута-

ции  $\left( C \rightarrow \frac{1}{Cp}; L \rightarrow Lp \right)$ , причём  $R_J = \infty$ , а  $R_E = 0$ ;



$$z(p) = R + R + \frac{1}{Cp} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = -\frac{1}{2RC} = -50 \text{ 1/c.}$$

Рис. 204

1.1.5. Определяем постоянную интегрирования  $B$ :

$$B = u_J(0+) - u_{Jпр} = 300 - 400 = -100 \text{ В.}$$

1.1.6. Окончательный результат –

$$u_J(t) = u_{Jпр} + Be^{pt} = 400 - 100e^{-50t}, \text{ В,}$$

где  $\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{1}{|-50|} = 0,02 \text{ с}$  – постоянная времени.

Рассчитываем третью строку таблицы для построения графика:

$t$	0	$\tau$	$2\tau$	$3\tau$	$4\tau$	$5\tau$
$e^{-\frac{t}{\tau}}$	1	0,368	0,135	0,05	0,018	0,007
$u_J(t), \text{ В}$	300	363	386	395	398	399

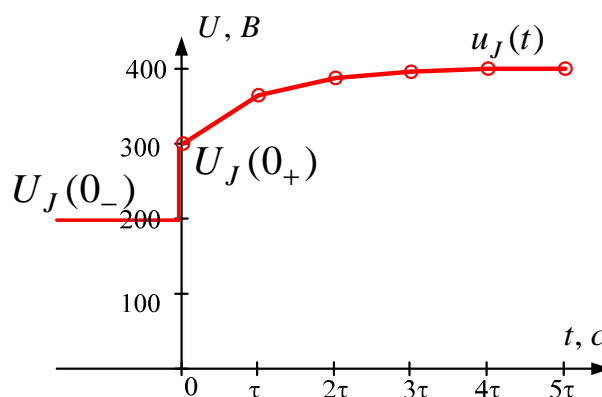


Рис. 205

Ниже приводится расчет рассматриваемого примера в среде *MathCAD*.

## Документ Mathcad

Исходные данные:

$$\underline{J} := 2 \quad \underline{R} := 100 \quad \underline{c} := 100 \cdot 10^{-6}$$

### 1.1. Классический метод, постоянный источник

1.1.1. Определяем независимые начальные условия:

$$U_{co} := 0$$

1.1.2. Определяем зависимые начальные условия:

$$fb := fb \cdot \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) - J + \frac{U_{co}}{R} \text{ solve, } fb \rightarrow 100$$

$$U_{Jo} := J \cdot (R) + fb \quad U_{Jo} = 300$$

1.1.3. Определяем принуждённую составляющую:

$$U_{Jpr} := J \cdot (2R) \quad U_{Jpr} = 400$$

1.1.4. Определяем корень характеристического уравнения:

$$p := \frac{1}{c \cdot p} + 2 \cdot R \text{ solve, } p \rightarrow -50 \quad p = -50$$

1.1.5. Определяем постоянную интегрирования:

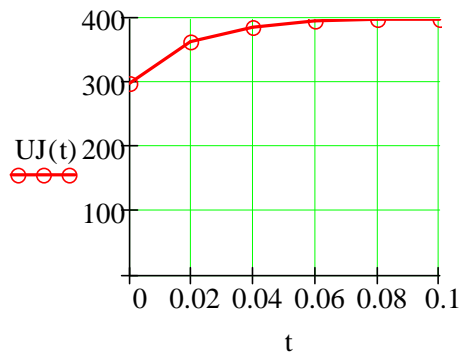
$$B := U_{Jo} - U_{Jpr} \quad B = -100$$

1.1.6. Окончательный результат:

$$UJ(t) := U_{Jpr} + B \cdot e^{p \cdot t} \quad UJ(t) \rightarrow 400 - 100 \cdot e^{(-50) \cdot t}$$

1.1.7. График искомой функции:

$$\tau := \frac{1}{|p|} \quad \tau = 0.02 \quad t := 0, \tau .. 5 \cdot \tau$$





## 1.2. Используем операторный метод.

1.2.1. Находим независимые начальные условия (п. 1.1.1)

$$u_C(0_-) = u_C(0) = 0.$$

1.2.2. В операторной схеме после коммутации используем метод контурных токов:

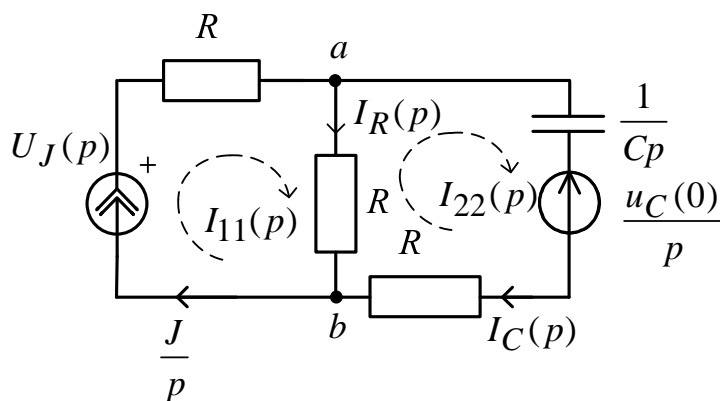


Рис. 206

$$I_{11}(p) = \frac{J}{p};$$

$$I_{22}(p) \left( 2R + \frac{1}{Cp} \right) - I_{11}(p)R = -\frac{u_C(0)}{p};$$

$$I_{22}(p) = \frac{I_{11}(p)R - \frac{u_C(0)}{p}}{2R + \frac{1}{Cp}} = \frac{JRC - u_C(0)C}{1 + 2RCp};$$

$$I_R(p) = I_{11}(p) - I_{22}(p) = \frac{J}{p} - \frac{JRC - u_C(0)C}{1 + 2RCp} =$$

$$= \frac{J + J2RCp - JRCp + u_C(0)Cp}{p(1 + 2RCp)} = \frac{J + JRCp + u_C(0)Cp}{p(1 + 2RCp)}.$$

По второму закону Кирхгофа в операторной форме определяем операторное изображение искомого напряжения:

$$\begin{aligned}
U_J(p) &= \frac{J}{p}R + I_R(p)R = \frac{JR}{p} + \frac{JR + JR^2Cp + u_C(0)RCp}{p(1 + 2RCp)} = \\
&= \frac{JR + 2JR^2Cp + JR + JR^2Cp + u_C(0)RCp}{p(1 + 2RCp)} = \\
&= \frac{2JR + 3JR^2Cp + u_C(0)RCp}{p(1 + 2RCp)} = \frac{400 + 6p}{p(1 + 0,02p)} = \frac{D(p)}{B(p)}.
\end{aligned}$$

1.2.3. По теореме разложения находим  $u_J(t)$ :

$$B(p) = p(1 + 0,02p) = 0; \Rightarrow p_1 = 0; \quad p_2 = -50 \frac{1}{с};$$

$$B'(p) = 1 + 0,04p;$$

$$\begin{aligned}
u_J(t) &= \sum_{k=1}^2 \frac{D_k(p_k)}{B'_k(p_k)} e^{p_k t} = \frac{400 + 6 \cdot 0}{1 + 0,04 \cdot 0} e^{0 \cdot t} + \frac{400 + 6 \cdot (-50)}{1 + 0,04 \cdot (-50)} e^{-50t} = \\
&= 400 - 100e^{-50t}, \text{ В.}
\end{aligned}$$

Результат совпал с классическим методом.

Ниже приводится расчет рассматриваемого примера в среде *MathCAD*.

## Документ Mathcad

Исходные данные:

$$\underline{J} := 2 \quad \underline{R} := 100 \quad \underline{c} := 100 \cdot 10^{-6}$$

### 1.2. Операторный метод, постоянный источник, цепь первого порядка

1.2.1. Определяем независимые начальные условия:

$$U_{co} := 0$$

1.2.2. Определяем изображение искомой функции:

$$I22(p) := I22(p) \cdot \left( 2 \cdot R + \frac{1}{c \cdot p} \right) - \frac{J}{p} \cdot R + \frac{U_{co}}{p} \text{ solve, } I22(p) \rightarrow \frac{1}{50 + p}$$

$$UJ(p) := \frac{J}{p} R + \left( \frac{J}{p} - I22(p) \right) \cdot R \text{ simplify} \rightarrow 100 \cdot \frac{200 + 3 \cdot p}{p \cdot (50 + p)}$$

1.2.3. Определяем оригинал искомой функции:

$$Uj(t) := UJ(p) \text{ invlaplace, } p \rightarrow 400 - 100 \cdot e^{(-50) \cdot t}$$

$$Uj(t) \rightarrow 400 - 100 \cdot e^{(-50) \cdot t}$$

$$Uj(0) = 300$$

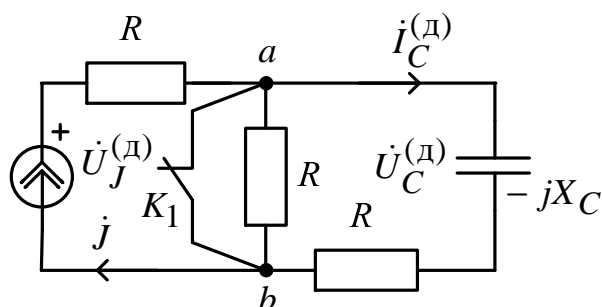
## 2. При гармоническом источнике тока

$$J(t) = \sqrt{2}J \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}2 \sin(100t + 90^\circ), \text{ А,}$$

после срабатывания ключа  $K_1$  определим напряжение  $u_J(t)$ .

2.1. Используем упрощённый классический метод, когда дифференциальное уравнение для искомой функции  $u_J(t)$  не составляется.

2.1.1. ННУ. Определяем независимые начальные условия при  $t = 0_-$ :  $u_C(0_-)$  (схема до коммутации установившийся режим, гармонический источник, символический метод).



$$j = J e^{j\alpha} = 2e^{j90^\circ}, \text{ А;}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 100, \text{ Ом;}$$

Рис. 207

$$i_C^{(д)} = j \frac{0}{0 + R - jX_C} = 0;$$

$$\dot{U}_C^{(д)} = (-jX_C) i_C^{(д)} = U_C^{(д)} e^{j\beta} = 0;$$

$$u_C^{(д)}(t) = \sqrt{2} U_C^{(д)} \sin(\omega t + \beta) = 0.$$

Для построения графика  $u_J(t)$  определим  $u_J(0_-)$ :

$$\dot{U}_J^{(д)} = j \underline{Z}_9^{(д)} = jR = 200e^{j90^\circ}, \text{ В;}$$

$$u_J^{(д)}(t) = \sqrt{2} \cdot 200 \sin(\omega t + 90^\circ), \text{ В;}$$

$$u_J(0_-) = \sqrt{2} \cdot 200 \sin(\omega \cdot 0 + 90^\circ) = 282 \text{ В.}$$

2.1.2. Определяем ЗНУ при  $t = 0_+$ :  $u_J(0_+)$  (схема после коммутации ключа  $K_1$ ):

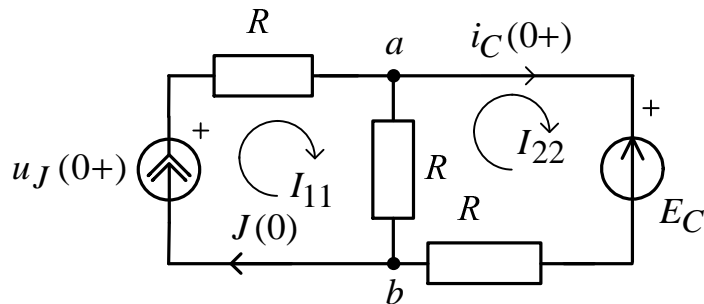


Рис. 208

$$E_C = u_C(0-) = u_C(0+) = 0;$$

$$J(0) = \sqrt{2}J \sin(\omega \cdot 0 + \alpha) = \sqrt{2}2 \sin(90^\circ) = 2,82 \text{ A.}$$

Используем метод контурных токов:

$$I_{11} = J(0) = 2,82 \text{ A;}$$

$$I_{22}2R - I_{11}R = -E_C;$$

$$I_{22} = \frac{I_{11}R - E_C}{2R} = \frac{282 - 0}{200} = 1,41 \text{ A;}$$

$$i_C(0+) = I_{22} = 1,41 \text{ A.}$$

По второму закону Кирхгофа для внешнего контура

$$u_J(0+) - E_C = J(0)R + i_C(0+)R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_J(0+) = E_C + J(0)R + i_C(0+)R = 0 + 282 + 141 = 424,64 \text{ В.}$$

2.1.3. Определяем принуждённую составляющую  $u_{Jпр}(t)$  при  $t = \infty$ : (схема после коммутации ключа  $K_1$ : установившейся режим, гармонический источник, символический метод):

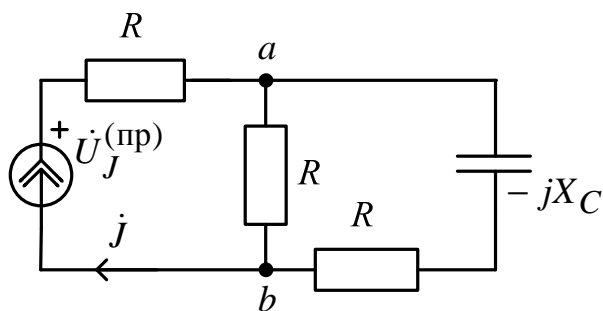


Рис. 209

$$\dot{J} = J e^{j\alpha} = 2e^{j90^\circ}, \text{ A,}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 100, \text{ Ом.}$$

По закону Ома

$$\begin{aligned} \dot{U}_J^{(\text{пр})} &= j \cdot \underline{Z}_3^{(\text{п})} = j \left[ R + \frac{R(R - jX_C)}{2R - jX_C} \right] = \\ &= 2e^{j90^\circ} \left[ 100 + \frac{100(100 - j100)}{200 - j100} \right] = \\ &= 2e^{j90^\circ} \cdot 161,245e^{-j7^\circ} = 322,5e^{j83^\circ}, \text{ В.} \end{aligned}$$

Тогда

$$u_{J\text{пр}}(t) = \sqrt{2} \cdot 322,45 \sin(100t + 83^\circ), \text{ В;}$$

$$u_{J\text{пр}}(0) = \sqrt{2} \cdot 322,45 \sin(100 \cdot 0 + 83^\circ) = 452,54 \text{ В.}$$

2.1.4. Определяем корень характеристического уравнения  $p$ : Используем метод сопротивления цепи после коммутации. Аналогично п. 1.1.4 получаем  $p = -50 \frac{1}{\text{с}}$ .

2.1.5. Определяем постоянную интегрирования  $B$ :

$$B = u_J(0+) - u_{J\text{пр}}(0) = 424,26 - 452,54 = -28,28 \text{ В.}$$

2.1.6. Окончательный результат

$$u_J(t) = u_{J\text{пр}}(t) + Be^{pt} = \sqrt{2} \cdot 322,5 \sin(100t + 83^\circ) - 28,28e^{-50t}, \text{ В,}$$

причем  $\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{1}{|-50|} = 0,02 \text{ с}$  – постоянная времени;

$t_{\text{п}} = 5\tau = 5 \cdot 0,02 = 0,1 \text{ с}$  – время окончания переходного процесса;

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 6,28 \cdot 10^{-2} \text{ с}$  – период принужденной составляющей.

Заполняем таблицу для построения графика:

$t$	0	$\tau$	$2\tau$	$3\tau$	$4\tau$	$5\tau$
$e^{-t/\tau}$	1	0,368	0,135	0,05	0,018	0,007
$-29,67 e^{-\frac{t}{\tau}}$	-29,67	-10,915	-4,015	-1,477	-0,543	-0,2
$u_{J\text{пр}}(t), \text{ В}$	452,67	-131,838	-337,949	419,11	-10,874	-410,06
$u_J(t), \text{ В}$	423	-148,753	-341,964	417,63	-11,417	-410,26

Строим график, для построения можно использовать MathCAD.

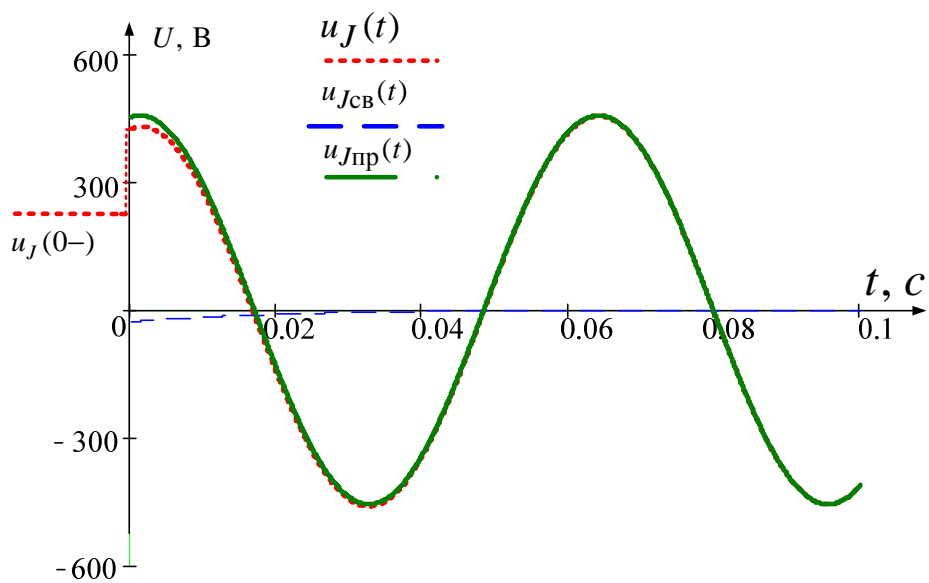


Рис. 210

Ниже приводится расчет рассматриваемого примера в среде *MathCAD*.

## Документ Mathcad

Исходные данные:

$$\begin{aligned} J_1 &:= 2 & J &:= J_1 \cdot e^{90i \cdot \text{deg}} & \text{ORIGIN} &:= 1 \\ \omega &:= 100 & R &:= 100 & c &:= 100 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

$$g(x) := \sqrt{2} \cdot |x| \cdot \sin(\arg(x))$$

$$h(z) := \begin{cases} x_{1,1} \leftarrow \text{Re}(z) \\ x_{1,2} \leftarrow \text{Im}(z) \\ x_{2,1} \leftarrow |z| \\ x_{2,2} \leftarrow \frac{\arg(z)}{\text{deg}} \\ x \end{cases}$$

### 2.1. Классический метод, гармонический источник

$$x_c := \frac{1}{\omega \cdot c} \quad x_c = 100$$

2.1.1. Определяем независимые начальные условия:

$$U_{c0} := 0$$

$$U_{J_d} := J \cdot R \quad h(U_{J_d}) = \begin{pmatrix} 0 & 200 \\ 200 & 90 \end{pmatrix}$$

$$g(U_{J_d}) = 282.843$$

2.1.2. Определяем зависимые начальные условия:

$$J_0 := g(J) \quad J_0 = 2.828$$

$$I_{22} := I_{22} \cdot 2 \cdot R - J_0 \cdot R + U_{c0} \text{ solve, } I_{22} \rightarrow 2^{\frac{1}{2}} \quad I_{22} = 1.414$$

$$U_{J_0} := U_{c0} + J_0 \cdot R + I_{22} \cdot R \quad U_{J_0} = 424.264$$

2.1.3. Определяем принуждённую составляющую:

$$U_{J_{пр}} := J \cdot \left[ R + \frac{R \cdot (R - i \cdot x_c)}{2 \cdot R - i \cdot x_c} \right] \quad U_{J_{пр}} = 40 + 320i$$

$$h(U_{J_{пр}}) = \begin{pmatrix} 40 & 320 \\ 322.49 & 82.875 \end{pmatrix}$$

$$U_{J_{пр0}} := g(U_{J_{пр}}) \quad U_{J_{пр0}} = 452.548$$

$$I_{c_{пр}} := J \cdot \frac{R}{2 \cdot R - i \cdot x_c} \quad h(I_{c_{пр}}) = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.8 \\ 0.894 & 116.565 \end{pmatrix}$$

$$U_{c_{пр}} := I_{c_{пр}} \cdot -i \cdot x_c$$

$$g(U_{c_{пр}}) = 56.569 \quad h(U_{c_{пр}}) = \begin{pmatrix} 80 & 40 \\ 89.443 & 26.565 \end{pmatrix}$$



2.1.4. Определяем корень характеристического уравнения:

$$p := \frac{1}{c \cdot p} + 2 \cdot R \text{ solve } , p \rightarrow -50 \quad p = -50$$

2.1.5. Определяем постоянную интегрирования:

$$B := U_{J0} - U_{Jпр0} \quad B = -28.284$$

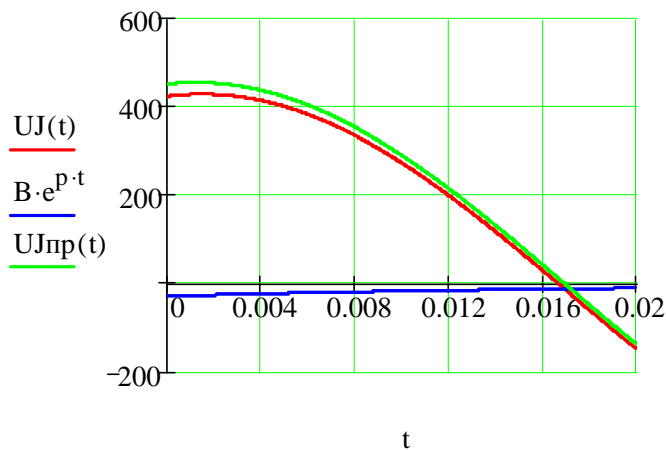
2.1.6. Окончательный результат:

$$U_{Jпр}(t) := |U_{Jпр}| \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \arg(U_{Jпр}))$$

$$U_J(t) := U_{Jпр}(t) + B \cdot e^{p \cdot t}$$

2.1.7. Строим график искомой функции:

$$\tau := \frac{1}{|p|} \quad \tau = 0.02 \quad t := 0, .001 \cdot \tau .. \tau$$

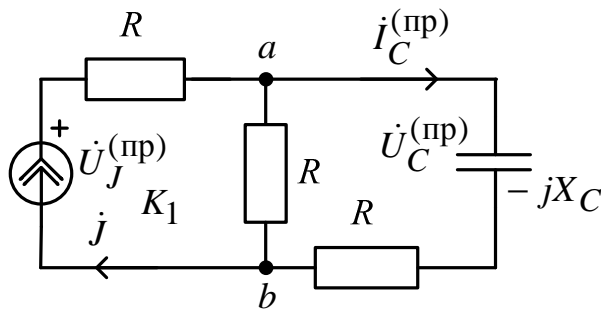


**2.2. Используем комбинированный операторно-классический метод для определения  $u_J(t)$ .**

2.2.1. Находим независимые начальные условия (п. 2.1.1):

$$u_C(0-) = u_C(0) = 0.$$

2.2.2. Определяем принуждённые составляющие  $u_{Jпр}(t)$ ,  $u_{Cпр}(t)$  при  $t = \infty$ : (схема после коммутации ключа  $K_1$ : установившийся режим, гармонический источник, символический метод.)



$$j = J e^{j\alpha} = 2e^{j90^\circ}, \text{ A};$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 100, \text{ Ом},$$

Рис. 211

$$\begin{aligned} \dot{U}_J^{(np)} &= j \cdot \underline{Z}_3^{(n)} = j \left[ R + \frac{R(R - jX_C)}{2R - jX_C} \right] = \\ &= 2e^{j90^\circ} \left[ 100 + \frac{100(100 - j100)}{200 - j100} \right] = \\ &= 2e^{j90^\circ} \cdot 161,245e^{-j7^\circ} = 322,5e^{j83^\circ}, \text{ В}; \\ \dot{I}_C^{(np)} &= j \frac{R}{2R - jX_C} = 2e^{j90^\circ} \left[ \frac{100}{200 - j100} \right] = \\ &= 2e^{j90^\circ} 1,41e^{j38^\circ} = 0,894e^{j116,6^\circ}, \text{ А}; \\ \dot{U}_C^{(np)} &= \dot{I}_C^{(np)} (-jX_C) = \\ &= 0,894e^{j116,6^\circ} (-j100) = 89,4e^{j26,6^\circ}, \text{ В}. \end{aligned}$$

В результате

$$u_{Jпр}(t) = \sqrt{2} \cdot 322,45 \sin(100t + 83^\circ), \text{ В};$$

$$u_{Cпр}(t) = \sqrt{2} \cdot 89,4 \sin(100t + 26,6^\circ), \text{ В};$$

$$u_{Cпр}(0) = \sqrt{2} \cdot 89,4 \sin(26,6^\circ) = 56,61 \text{ В}.$$

2.2.3. Определяем начальное значение свободной составляющей напряжения на ёмкости:

$$u_{C_{св}}(0) = u_C(0) - u_{C_{пр}}(0) = 0 - 56,61 = -56,61 \text{ В.}$$

2.2.4. Рассчитываем операторную схему замещения для свободных составляющих.

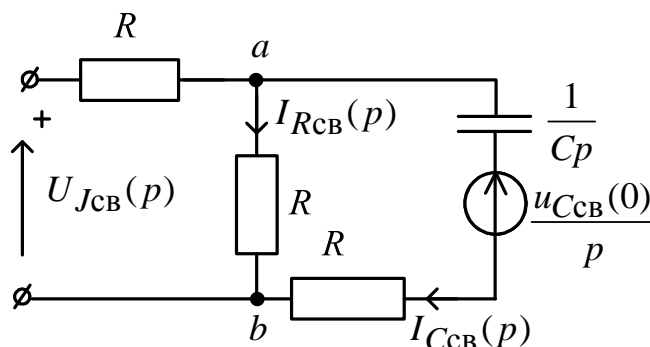


Рис. 212

$$I_{R_{св}}(p) = \frac{u_{C_{св}}(0)}{p \left( 2R + \frac{1}{Cp} \right)} = \frac{u_{C_{св}}(0)C}{1 + 2RCp};$$

$$U_{J_{св}}(p) = RI_{R_{св}}(p) = \frac{u_{C_{св}}(0)RC}{1 + 2RCp} = -\frac{0,566}{1 + 0,02p} = \frac{D(p)}{B(p)}.$$

2.2.5. По теореме разложения и принципу наложения получаем окончательный результат

$$\begin{aligned} u_J(t) &= u_{J_{пр}}(t) + u_{J_{св}}(t) = \\ &= \sqrt{2} \cdot 322,45 \sin(100t + 83^\circ) + \sum_{k=1}^2 \frac{D_k(p_k)}{B'_k(p_k)} e^{p_k t} = \\ &= \sqrt{2} \cdot 322,45 \sin(100t + 83^\circ) - 28,28 e^{-50t}, \text{ В} \end{aligned}$$

– результат практически совпал с классическим методом.

**3. При импульсном источнике тока  $J(t) = Je^{2pt} = 2e^{-100t}$ , А ( $p$  – корень характеристического уравнения) и нулевых начальных условиях (ключ  $K_1$  сработал) определяем интегралом Дюамеля напряжение  $u_J(t)$ .**

3.1. Находим переходную характеристику  $h(t)$  для  $u_J(t)$  операторным методом при  $u_C(0) = u_C(0_-) = 0$ .

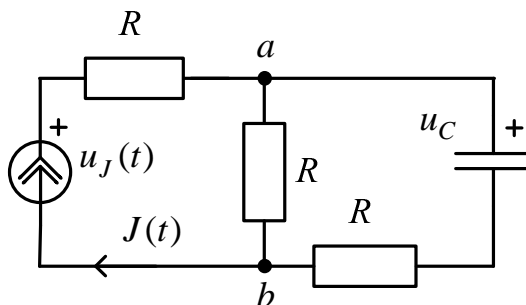


Рис. 213

По закону Ома в операторной форме

$$h(p) = \frac{1}{p} \left[ R + \frac{R \left( R + \frac{1}{Cp} \right)}{2R + \frac{1}{Cp}} \right] = \frac{1}{p} \left[ R + \frac{R(1 + RCp)}{1 + 2RCp} \right] =$$

$$= \frac{R}{p} + \frac{R + R^2 Cp}{p(1 + 2RCp)} = \frac{R}{p} + \frac{D(p)}{B(p)}.$$

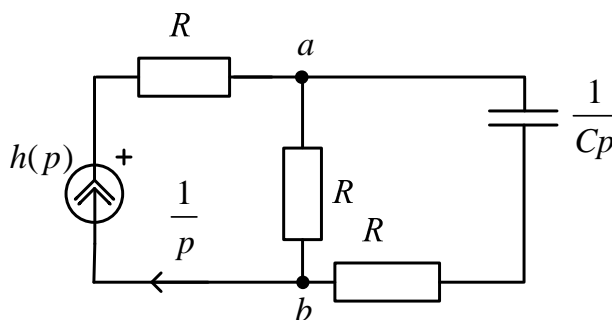


Рис. 214

По теореме разложения находим  $h(t)$ :

$$B(p) = p(1 + 2RCp) = 0, \Rightarrow p_1 = 0; \quad p_2 = -\frac{1}{2RC} = -50 \frac{1}{c};$$

$$B'(p) = 1 + 4RCp;$$

$$h(t) = R + \sum_{k=1}^2 \frac{D_k(p_k)}{B'_k(p_k)} e^{p_k t} = R + R + \frac{R + R^2 C \cdot \left(-\frac{1}{2RC}\right)}{1 + 4RC \cdot \left(-\frac{1}{2RC}\right)} e^{-\frac{t}{2RC}} =$$

$$= 2R + \frac{0,5R}{-1} e^{-\frac{t}{2RC}} = 2R - 0,5R e^{-\frac{t}{2RC}} = 200 - 50e^{-50t}, \text{ Ом}$$

– переходное сопротивление.

Проверка:

а)  $t = 0, \quad h(0) = 2R - 0,5R = \frac{3R}{2} = R_3(0)$  – верно, т.к.  $u_C(0_-) = 0$  и

$C$  – замкнута;

б)  $t = \infty, \quad h(\infty) = 2R = R_3(\infty)$  – верно, т.к.  $C$  – разрыв.

3.2. Рассчитаем интегралом Дюамеля  $u_J(t)$ :

$$u_J(t) = J(0)h(t) + \int_0^t J'(\tau)h(t-\tau)d\tau,$$

где  $J(0) = 2 \text{ А}; J'(\tau) = -200e^{-100\tau}, \text{ А/с},$

$$h(t-\tau) = 200 - 50e^{-(50t-\tau)} = 200 - 50e^{-50t} e^{50\tau}, \text{ Ом.}$$

Тогда

$$u_J(t) = 400 - 100e^{-50t} + \int_0^t \left[-200e^{-100\tau}\right] \left[200 - 50e^{-50t} e^{50\tau}\right] d\tau =$$

$$= 400 - 100e^{-50t} - 40000 \int_0^t e^{-100\tau} d\tau + 10000e^{-50t} \int_0^t e^{-50\tau} d\tau =$$

$$= 400 - 100e^{-50t} + 400e^{-100\tau} \Big|_0^t - 200e^{-50t} e^{-50\tau} \Big|_0^t =$$

$$= 400 - 100e^{-50t} + 400e^{-100t} - 400 - 200e^{-50t} (e^{-50t} - 1) =$$

$$= 400e^{-100t} - 100e^{-50t} - 200e^{-100t} + 200e^{-50t} = 200e^{-100t} + 100e^{-50t}, \text{ В.}$$

Проверка:

а)  $t = 0, \quad u_J(0) = 300 \text{ В}$  – верно, т.к.

$$u_J(0) = J(0) \cdot R_3(0) = 2 \cdot \frac{3R}{2} = 300 \text{ В};$$

б)  $t = \infty$ ,  $u_J(\infty) = 0$  – верно, т.к.

$$u_J(\infty) = J(\infty)R_3(\infty) = 0 \cdot 2R = 0.$$

3.3. Строим график  $u_J(t) = 200e^{-100t} + 100e^{-50t}$ , В.

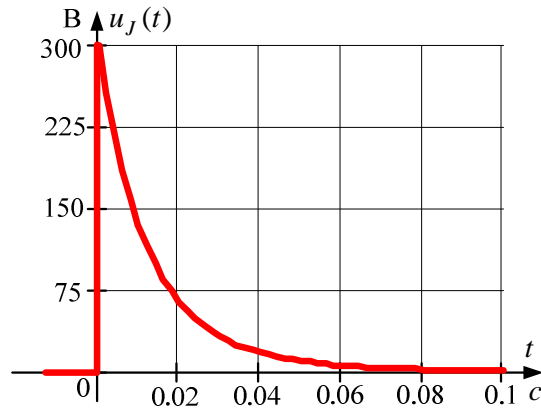


Рис. 215

Ниже приводится расчет рассматриваемого примера в среде *MathCAD*.

*Документ Mathcad*

### 3. Интеграл Дюамеля, экспоненциальный источник

$$J(t) := 2e^{-100t}$$

3.1. Переходная характеристика:

$$h(t) := 2 \cdot R - 0.5 \cdot R \cdot e^{-50t}$$

3.2. Искомая функция напряжения на источнике тока:

$$UJ(t) := J(0) \cdot h(t) + \int_0^t \left( \frac{d}{dx} J(x) \right) \cdot h(t-x) dx$$

$$UJ(t) \text{ simplify } \rightarrow 100 \cdot e^{(-50.) \cdot t} + 200 \cdot e^{(-100.) \cdot t}$$

**4. Цепь второго порядка.** При постоянном источнике тока  $J(t) = J$  после срабатывания ключа  $K_2$  определяем напряжение  $u_J(t)$ . (Ключ  $K_1$  давно уже сработал).

4.1. Используем упрощённый **классический метод**, когда дифференциальное уравнение для искомой функции  $u_J(t)$  не составляется.

4.1.1. Определяем независимые начальные условия (ННУ):  $u_C(0_-)$  при  $t = 0_-$  (Схема до коммутации: установившийся режим, постоянный источник,  $C$  – разрыв,  $L$  – коротка).

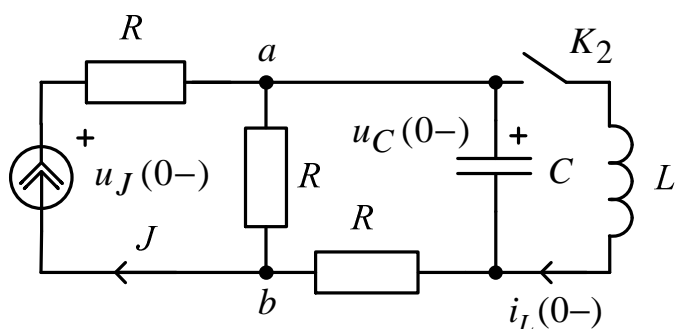


Рис. 216

Находим:  $i_L(0_-) = 0$ ;  $u_C(0_-) = J \cdot R = 200 \text{ В}$ .

Для построения графика  $u_J(t)$  определим  $u_J(0_-) = J \cdot 2R = 400 \text{ В}$ .

4.1.2. Определяем ЗНУ  $U_J(0_+)$  при  $t = 0_+$  (Схема после коммутации ключа  $K_2$ ):

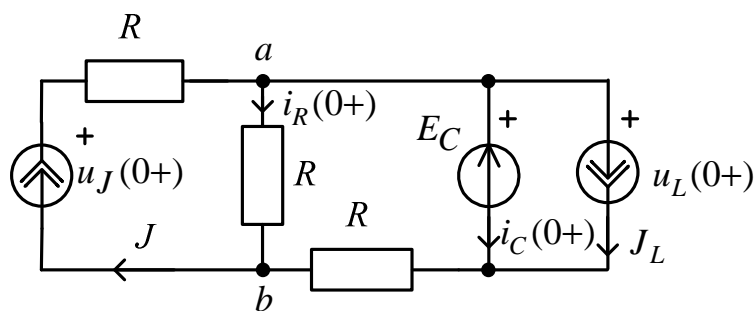


Рис. 217

$$J_L = i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0;$$

$$E_C = u_C(0_-) = u_C(0_+) = 200 \text{ В} \text{ – законы коммутации.}$$

По законам Кирхгофа

$$u_L(0_+) = E_C = 200 \text{ В};$$

$$\begin{cases} u_J(0+) = JR + E_C + R \cdot (i_C(0+) + J_L); \\ u_J(0+) = JR + R \cdot i_R(0+); \\ J = i_R(0+) + i_C(0+) + J_L; \end{cases}$$

$$i_R(0+) = J - i_C(0+);$$

$$u_J(0+) = JR + JR - R \cdot i_C(0+) = 2JR - R \cdot i_C(0+);$$

$$2JR - R i_C(0+) = JR + E_C + R \cdot i_C(0+);$$

$$i_C(0+) = \frac{JR - E_C}{2R} = \frac{200 - 200}{200} = 0;$$

$$u_J(0+) = 2JR - R \cdot i_C(0+) = 400 \text{ В};$$

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{u_L(0+)}{L} = 200 \frac{\text{А}}{\text{с}};$$

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{i_C(0+)}{C} = 0 \frac{\text{В}}{\text{с}}.$$

Находим  $\left. \frac{du_J}{dt} \right|_{t=0+}$ .

Записываем уравнения по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} u_J = JR + u_C + R \cdot (i_C + i_L); \\ u_J = JR + R \cdot i_R \Rightarrow i_R = \frac{u_J}{R} - J; \\ J = i_R + i_C + i_L; \Rightarrow i_C = J - i_R - i_L = 2J - \frac{u_J}{R} - i_L; \end{cases}$$

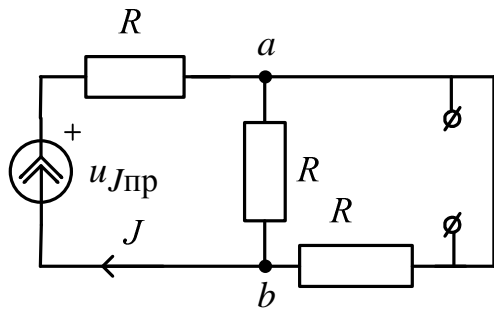
$$u_J = JR + R \left[ i_L + 2J - \frac{u_J}{R} - i_L \right] + u_C;$$

$$\Rightarrow u_J = 3JR - u_J + u_C; \Rightarrow u_J = \frac{3}{2}JR + \frac{u_C}{2};$$

$$\left. \frac{du_J}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{3R}{2} \frac{dJ}{dt} + \frac{1}{2} \frac{du_C}{dt}; \left. \frac{du_J}{dt} \right|_{t=0+} = \frac{1}{2} \frac{du_C}{dt} \Big|_{t=0+} = 0.$$

4.1.3. Определяем принуждённую составляющую  $u_{J\text{пр}}$  при  $t = \infty$ : (Схема после коммутации ключа  $K_2$ : установившийся режим, постоянный источник,  $C$  – разрыв,  $L$  – коротка);

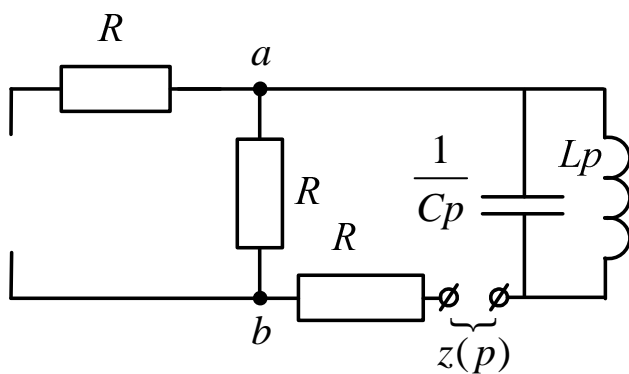




$$u_{J_{\text{пр}}} = J \left[ R + \frac{R \cdot R}{2R} \right] = 2 \cdot 150 = 300 \text{ В.}$$

Рис. 218

4.1.4. Определяем корень характеристического уравнения  $p$ . Используем метод сопротивления цепи после коммутации:  $C \rightarrow \frac{1}{Cp}$ ;  $L \rightarrow Lp$ , причём  $R_J = \infty$ , а  $R_E = 0$ .



$$z(p) = R + R + \frac{\frac{1}{Cp} Lp}{\frac{1}{Cp} + Lp} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 + \frac{1}{2RC} p + \frac{1}{Lp} = 0;$$

Рис. 219

$$p_{1,2} = -\frac{1}{4RC} \pm \sqrt{\frac{1}{16R^2C^2} - \frac{1}{LC}} = -25 \pm j96,8 = -\delta \pm j\omega_{\text{св}}, \frac{1}{c}.$$

4.1.5. Определяем постоянные интегрирования  $B$  и  $\beta$ :

$$\delta = 25 \frac{1}{c}; \quad \omega_{\text{св}} = 98,6 \frac{1}{c};$$

$$\begin{cases} u_J(t) = u_{J_{\text{пр}}} + B e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{св}} t + \beta); \\ \frac{du_J(t)}{dt} = -\delta B e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{св}} t + \beta) - \omega_{\text{св}} e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \beta) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} u_J(0+) = u_{J\text{пр}} + B \cos(\beta); \\ \left. \frac{du_J(t)}{dt} \right|_{t=0+} = -\delta B \cos(\beta) - \omega_{\text{св}} e^{-\delta t} \sin(\beta). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 400 = 300 + B \cos \beta; \\ 0 = -25B \cos \beta - 96,8B \sin \beta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100 = B \cos \beta; \\ \text{tg} \beta = -0,258. \end{cases}$$

$$\beta = -0,252 \text{ рад} = -14,467^\circ; B = \frac{100}{\cos \beta} = 103,275 \text{ В.}$$

4.1.6. Окончательный результат –

$$\begin{aligned} u_J(t) &= u_{J\text{пр}} + B e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{св}} t + \beta) = \\ &= 300 + 103,275 e^{-25t} \cos(96,8t - 14,467^\circ), \text{ В,} \end{aligned}$$

где  $\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{25} = 0,04 \text{ с}$  – постоянная времени;

$t_{\text{п}} = 5\tau = 5 \cdot 0,04 = 0,2 \text{ с}$  – длительность переходного процесса;

$T = \frac{2\pi}{\omega_{\text{св}}} = 0,065 \text{ с}$  – период свободных колебаний.

4.1.7. На интервале времени  $0 \leq t \leq t_{\text{п}} = 0,2 \text{ с}$  при помощи MathCAD строим  $u_J(t)$ .

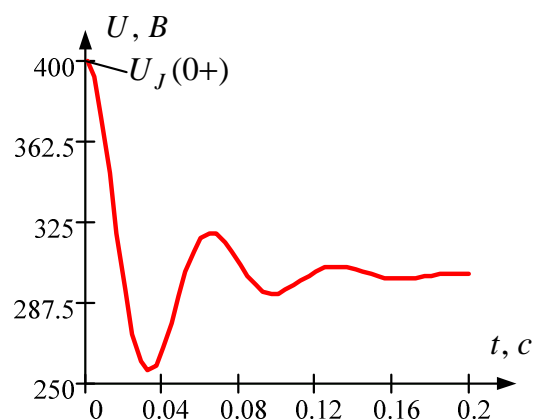


Рис. 220

Ниже приводится расчет рассматриваемого примера в среде *MathCAD*.

ORIGIN:= 1

Документ Mathcad

J:= 2      L:= 1      R:= 100      c:= 100·10<sup>-6</sup>

#### 4.1. Классический метод, постоянный источник, цепь второго порядка

4.1.1. Определяем независимые начальные условия:

$$\begin{aligned} i_{L0} &:= 0 & i_{L0} &= 0 \\ U_{C0} &:= J \cdot R & U_{C0} &= 200 \end{aligned}$$

4.1.2. Определяем зависимые начальные условия:

$$i_{C0} := i_{C0} \cdot (2 \cdot R) - J \cdot R + U_{C0} \text{ solve, } i_{C0} \rightarrow 0$$

4.1.3. Определяем принуждённую составляющую:

$$\begin{aligned} U_{спр} &:= 0 \\ U_{Jпр} &:= J \cdot \left( \frac{3}{2} R \right) & U_{Jпр} &= 300 \end{aligned}$$

4.1.4. Определяем корень характеристического уравнения:

$$p := \frac{1}{c \cdot p} + \frac{2 \cdot R \cdot L \cdot p}{2R + L \cdot p} \left| \begin{array}{l} \text{solve, } p \\ \text{float, } 3 \end{array} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} (-25.) + 96.8 \cdot i \\ (-25.) - 96.8 \cdot i \end{bmatrix}$$

4.1.5. Определяем постоянные интегрирования:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} U_{C0} - U_{спр} \\ \frac{i_{C0}}{c} \end{pmatrix} \quad B := a^{-1} \cdot b \quad B = \begin{pmatrix} 100 - 25.826i \\ 100 + 25.826i \end{pmatrix}$$

4.1.6. Окончательный результат:

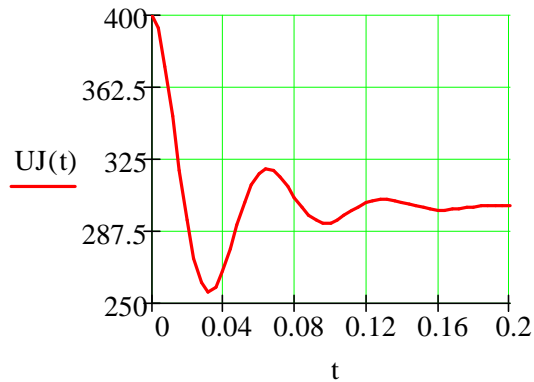
$$U_C(t) := U_{спр} + B_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + B_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}$$

$$U_J(t) := \frac{3}{2} \cdot R \cdot J + \frac{1}{2} \cdot U_C(t)$$

$$U_J(t) \left| \begin{array}{l} \text{complex} \\ \text{float, } 3 \end{array} \right. \rightarrow 300. + 100. \cdot e^{(-25.) \cdot t} \cdot \cos(96.8 \cdot t) + 25.8 \cdot e^{(-25.) \cdot t} \cdot \sin(96.8 \cdot t)$$

#### 4.1.7. График искомой функции

$$\tau := \frac{1}{|\operatorname{Re}(p_1)|} \quad \tau = 0.04 \quad t := 0, \tau \cdot 0.1 \dots 5 \cdot \tau$$



В результате преобразований

$$\begin{aligned} & 300 + 100e^{-25t} \cos(96,8t) + 25,82e^{-25t} \sin(96,8t) = \\ & = 300 + e^{-25t} (100e^{j90^\circ} + 25,82e^{j0^\circ}) = \\ & = 300 + e^{-25t} (103,28e^{j75,522^\circ}) = \\ & = 300 + e^{-25t} 103,28 \sin(96,8t + 75,522^\circ) = \\ & = 300 + 103,28e^{-25t} \cos(96,8t - 14,478^\circ). \end{aligned}$$

Т.е. результат совпадает с расчётом «вручную».

4.2. Используем операторный метод для определения  $u_J(t)$ .

4.2.1. Из расчёта установившегося режима до коммутации находим независимые начальные условия (п. 4.1.1):

$$i_L(0-) = 0; u_C(0-) = J \cdot R = 200 \text{ В.}$$

4.2.2. В операторной схеме после коммутации используем метод наложения:

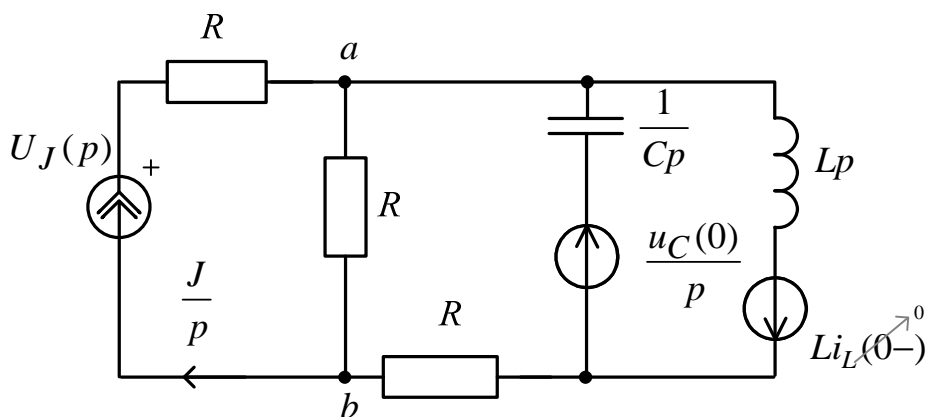


Рис. 221

а) подсхема с источником тока  $\frac{J}{p}$ :

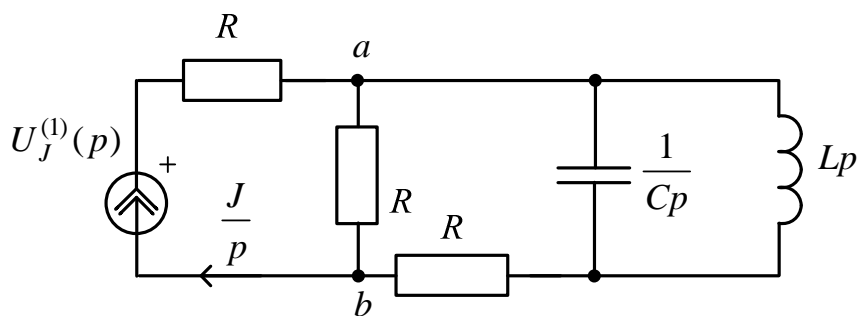


Рис. 222

$$\begin{aligned}
U_J^{(1)}(p) &= \frac{J}{p} Z_3^{(1)}(p) = \frac{J}{p} \left[ R + \frac{R \left( R + \frac{\frac{1}{Cp} Lp}{\frac{1}{Cp} + Lp} \right)}{2R + \frac{\frac{1}{Cp} Lp}{\frac{1}{Cp} + Lp}} \right] = \\
&= \frac{J}{p} \left[ R + \frac{R^2 + \frac{RLp}{1 + L Cp^2}}{2R + \frac{Lp}{1 + L Cp^2}} \right] = \frac{J}{p} \left[ R + \frac{R^2 + R^2 L Cp^2 + RLp}{2R + 2RL Cp^2 + Lp} \right] = \\
&= \frac{J}{p} \frac{2R^2 + 2R^2 L Cp^2 + RLp + R^2 + R^2 L Cp^2 + LRp}{2R + 2RL Cp^2 + Lp} = \\
&= \frac{J}{p} \frac{(3R^2 L Cp^2 + 2RLp + 3R^2)}{(2RL Cp^2 + Lp + 2R)} = \frac{6p^2 + 400p + 60000}{p(0,02p^2 + p + 200)} = \frac{D_1(p)}{B_1(p)}.
\end{aligned}$$

б) подсьема с источником  $\frac{u_C(0)}{p}$ :

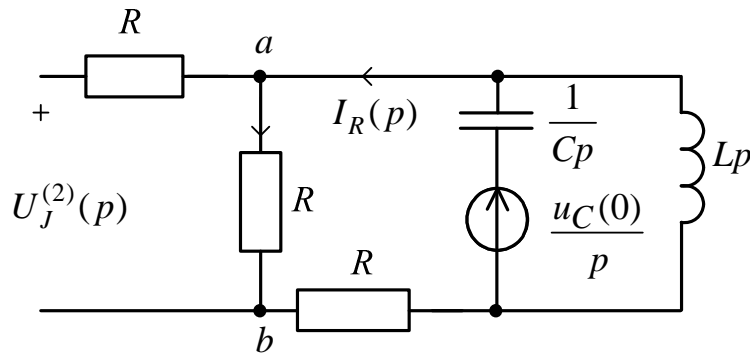


Рис. 223

$$U_J^{(2)}(p) = RI_R(p) = R \frac{\frac{u_C(0)}{p}}{\frac{1}{Cp} + \frac{2RLp}{2R + Lp}} \cdot \frac{Lp}{2R + Lp} =$$

$$= \frac{u_C(0)RLp}{p \left[ \frac{2R + Lp}{Cp} + 2RLp \right]} = \frac{u_C(0)RCLp}{2RLCp^2 + Lp + 2R} =$$

$$= \frac{2p}{0,02p^2 + p + 200} = \frac{D_2(p)}{B_2(p)}.$$

Операторное изображение искомого напряжения

$$U_J(p) = U_J^{(1)}(p) + U_J^{(2)}(p) = \frac{8p^2 + 400p + 60000}{p(0,02p^2 + p + 200)} = \frac{D(p)}{B(p)}.$$

4.2.3. По теореме разложения находим искомое напряжение

$u_J(t)$ :

$$B(p) = p(0,02p^2 + p + 200) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1 = 0; \quad p_{2,3} = -25 \pm j96,8 = -\delta \pm j\omega_{CB} \frac{1}{c};$$

$$B'(p) = 0,06p^2 + 2p + 200;$$

$$u_J(t) = \sum_{k=1}^3 \frac{D_k(p_k)}{B'_k(p_k)} e^{p_k t} = \frac{60000}{200} + 2 \operatorname{Re} \left( \sum_{k=2}^3 \frac{D(p_2)}{B'(p_2)} e^{p_2 t} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= 300 + 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{8(-25 + j96,8)^2 + 400(-25 + j96,8) + 60000}{0,06(-25 + j96,8)^2 + 2(-25 + j96,8) + 200} e^{(-25 + j96,8)t} \right] = \\
&= 300 + 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{2000}{-375 + j96,8} e^{-25t} e^{j96,8t} \right] = \\
&= 300 + 2 \operatorname{Re} \left[ 51,64 e^{-j14,478^\circ} e^{-25t} e^{j96,8t} \right] = \\
&= 300 + 2 \cdot 51,64 \cdot e^{-25t} \cos(96,8t - 14,478^\circ) = \\
&= 300 + 103,28 e^{-25t} \cos(96,8t - 14,478^\circ), \text{ В.}
\end{aligned}$$

Проверка:

$$u_J(0) = 300 + 103,28 \cdot \cos(-14,478^\circ) = 400 \text{ В.}$$

$$\left. \frac{du_J}{dt} \right|_{t=0} = 103,28(-25) \cos(-14,478^\circ) -$$

$$-103,28 \cdot 96,8 \sin(-14,478^\circ) = -0,547 \frac{\text{В}}{\text{с}} \approx 0.$$

Ниже приводится расчет рассматриваемого примера программой MathCAD.



*Документ Mathcad*

ORIGIN := 1

J := 2      L := 1      R := 100      c := 100 · 10<sup>-6</sup>

## 4.2. Операторный метод, постоянный источник, цепь второго порядка

4.2.1. Определяем независимые начальные условия:

iLo := 0                  iLo = 0

Uco := J · R              Uco = 200

4.2.2. Определяем изображение искомой функции:

$$UJ(p) := \frac{J}{p} \cdot \left[ R + \frac{R \cdot \left( R + \frac{\frac{1}{c \cdot p} \cdot L \cdot p}{\frac{1}{c \cdot p} + L \cdot p} \right)}{2 \cdot R + \frac{\frac{1}{c \cdot p} \cdot L \cdot p}{\frac{1}{c \cdot p} + L \cdot p}} \right] + R \cdot \frac{\frac{Uco}{p}}{\frac{1}{c \cdot p} + \frac{2 \cdot R \cdot L \cdot p}{2 \cdot R + L \cdot p}} \cdot \frac{L \cdot p}{L \cdot p + 2 \cdot R}$$

$$UJ(p) \text{ simplify} \rightarrow 400 \cdot \frac{7500 + 50 \cdot p + p^2}{(10000 + 50 \cdot p + p^2) \cdot p}$$

4.2.3. Определяем оригинал искомой функции:

$$Uj(t) := UJ(p) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, p} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow 300. + 100. \cdot e^{(-25.) \cdot t} \cdot \cos(96.8 \cdot t) + 25.8 \cdot e^{(-25.) \cdot t} \cdot \sin(96.8 \cdot t)$$

$$Uj(t) \rightarrow 300. + 100. \cdot e^{(-25.) \cdot t} \cdot \cos(96.8 \cdot t) + 25.8 \cdot e^{(-25.) \cdot t} \cdot \sin(96.8 \cdot t)$$

**4.3. Методом переменных состояния** находим  $u_J(t)$ .

4.3.1. Начальные условия:

$$i_L(0-) = 0; u_C(0-) = J \cdot R = 200 \text{ В}; u_J(0) = 400 \text{ В}.$$

4.3.2. По законам Кирхгофа составляем уравнения состояния:

$$\begin{cases} u_L = u_C; \\ R \cdot i_R = u_C + i_L R + i_C R \Rightarrow i_R = \frac{u_C}{R} + i_C + i_L; \\ J = i_R + i_C + i_L; \Rightarrow J = \frac{u_C}{R} + 2i_C + 2i_L; \end{cases}$$

$$J = \frac{u_C}{R} + 2C \frac{du_C}{dt} + 2i_L; \Rightarrow \frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L - \frac{1}{2CR} u_C + \frac{J}{2C};$$

$$u_L = u_C \Rightarrow L \frac{di_L}{dt} = 0 \cdot i_L + u_C + 0 \cdot J;$$

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = 0 \cdot i_L + \frac{u_C}{L} + 0 \cdot J; \\ \frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L - \frac{1}{2CR} u_C + \frac{J}{2C}; \end{cases}$$

$$u_J = 0 \cdot i_L + \frac{1}{2} u_C + \frac{3R}{2} \cdot J.$$

4.3.3. Решаем с использованием MathCAD методом Эйлера. Пункт 4.3.3 можно решить методом Рунге – Кутта (смотри пример п. 1.11).

*Документ Mathcad*

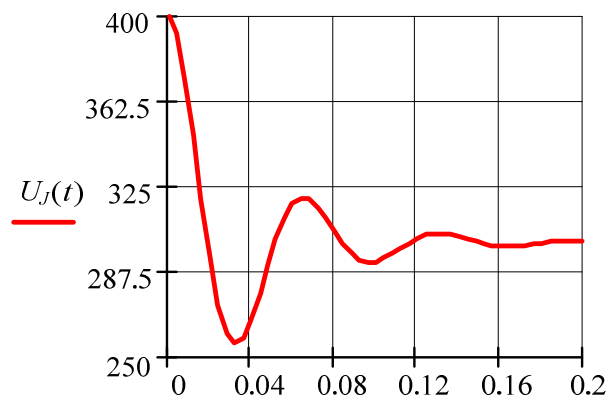
$$J := 2 \quad L := 1 \quad R := 100 \quad c := 100 \cdot 10^{-6}$$

$$p := \frac{1}{c \cdot p} + \frac{2 \cdot R \cdot L \cdot p}{2R + L \cdot p} \text{ solve, } p \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{15^2} \\ -25 + 25 \cdot i \cdot 15^2 \\ \frac{1}{15^2} \\ -25 - 25 \cdot i \cdot 15^2 \end{pmatrix} \quad \tau := \frac{1}{|\operatorname{Re}(p)|}$$

$$U_{c_0} := 200 \quad iL_0 := 0 \quad t_0 := 0$$

$$N := 1000 \quad k := 0..N \quad h := \frac{5 \cdot \tau}{N}$$

$$\begin{pmatrix} t_{k+1} \\ iL_{k+1} \\ U_{c_{k+1}} \\ U_{k+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} t_k + h \\ iL_k + \left( 0 \cdot iL_k + \frac{1}{L} \cdot U_{c_k} + 0 \cdot J \right) \cdot h \\ U_{c_k} + \left( \frac{-1}{c} \cdot iL_k + \frac{-1}{2R \cdot c} \cdot U_{c_k} + \frac{1}{2c} \cdot J \right) \cdot h \\ 0 \cdot iL_k + \frac{1}{2} \cdot U_{c_k} + \frac{3 \cdot R}{2} \cdot J \end{bmatrix}$$



Полученный график полностью совпадает с уже построенной зависимостью с использованием классического и операторного методов.

**Пример 2**  
**Методические указания к заданию № 5 «Расчет установившегося режима в нелинейных электрических цепях»**

Для заданной схемы дано:

$$e(t) = \sqrt{2} \cdot E \cdot \sin(314t + \alpha), \text{ В};$$

$$J(t) = \sqrt{2} \cdot J \cdot \sin(314t + \alpha), \text{ А}.$$

$E$	$J$	$\alpha$	$R$	$C$
В	А	°	Ом	мкФ
100	2	90	100	31,847

Нелинейный индуктивный элемент (НИЭ)

$w_1$	$w_2$	$w_3$	$S_1$	$S_2$	$S_3$
Вит.	Вит.	Вит.	см <sup>2</sup>	см <sup>2</sup>	см <sup>2</sup>
2000	0	1000	1	2	1

$l_1$	$l_2$	$l_3$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$
см	см	см	мм	мм	мм
30	15	30	1	0	0

Схема:

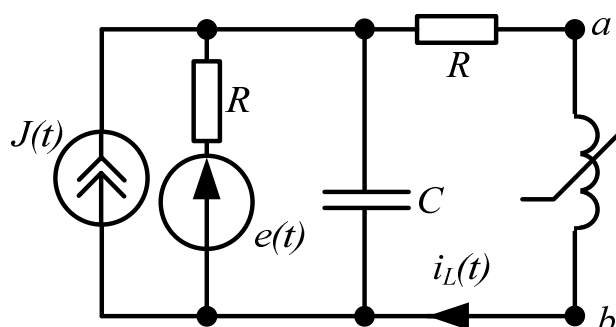


Рис. 224

1. Относительно зажимов  $a$  и  $b$  НИЭ определяем комплексное сопротивление эквивалентного генератора  $\underline{Z}_\Gamma = Z_\Gamma e^{j\alpha}$ , а также комплексы действующих значений ЭДС  $\dot{U}_{xx} = \dot{E}_\Gamma = E_\Gamma e^{j\alpha_\Gamma}$  и тока  $\dot{I}_{кз} = \dot{J}_\Gamma = J_\Gamma e^{j\beta_\Gamma}$  этого генератора, если:

$$\begin{aligned}\dot{E} &= E e^{j\alpha} = 100 e^{j90^\circ}, \text{ В}; \\ \dot{J} &= J e^{j\alpha} = 2 e^{j90^\circ}, \text{ А}. \\ X_C &= \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 31,847 \cdot 10^{-6}} = 100 \text{ Ом}.\end{aligned}$$

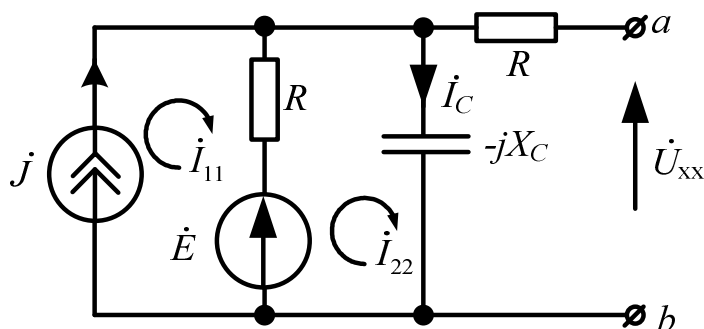


Рис. 225

$$\underline{Z}_\Gamma = R + \frac{R \cdot (-jX_C)}{R - jX_C} = 100 + \frac{100 \cdot (-j100)}{100 - j100} =$$

$$100 + 50 - j50 = 150 - j50 = 158,1 e^{-j18,4^\circ}, \text{ Ом},$$

т.е.  $Z_\Gamma = 158,1 \text{ Ом}$ ,  $\varphi_\Gamma = -18,4^\circ$ ;

$$\begin{cases} \dot{I}_{11} = \dot{J}; \\ \dot{I}_{22} \cdot (R - jX_C) - \dot{I}_{11} \cdot R = \dot{E}; \end{cases}$$

$$\dot{I}_{22} = \dot{I}_C = \frac{\dot{E} + \dot{J} \cdot R}{R - jX_C} = \frac{100 e^{j90^\circ} + 2 e^{j90^\circ} \cdot 100}{100 - j100} = 2,12 e^{j135^\circ}, \text{ А};$$

$$\dot{U}_{xx} = \dot{E}_\Gamma = \dot{I}_C (-jX_C) = 2,12 e^{j135^\circ} (-j100) = 212 e^{j45^\circ}, \text{ В};$$

$$\dot{I}_{кз} = \dot{J}_\Gamma = \frac{\dot{E}_\Gamma}{\underline{Z}_\Gamma} = \frac{212 e^{j45^\circ}}{158,1 e^{-j18,4^\circ}} = 1,34 e^{j63,4^\circ}, \text{ А}.$$

Таким образом,

$$E_\Gamma = 212 \text{ В}; \quad \alpha_\Gamma = 45^\circ; \quad J_\Gamma = 1,34 \text{ А}; \quad \beta_\Gamma = 63,4^\circ.$$

2. Для двух мгновенных значений тока  $i_L$  НИЭ, равных  $i_{L1} = \sqrt{2}J_r/2 = 0,945$  А и  $i_{L2} = \sqrt{2}J_r = 1,89$  А, из расчета магнитной цепи определяем величины потокосцепления:

$$\Psi = w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3, \text{ Вб.}$$

Для этого заданную магнитную цепь заменяем схемой замещения, для которой воспользуемся методом двух узлов ( $c$  и  $d$ ) и составим уравнения по законам Кирхгофа для магнитной цепи:

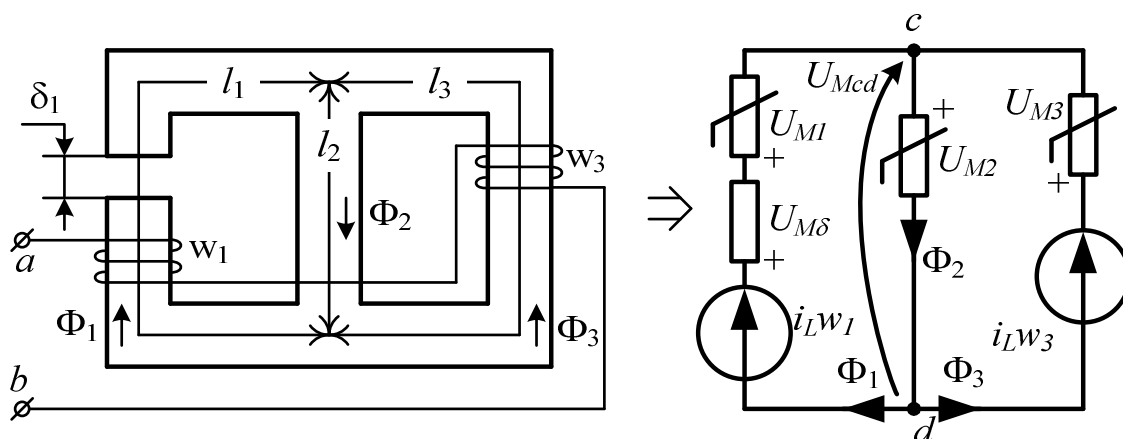


Рис. 226

$$\begin{cases} \Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3; \\ U_{mcd}(\Phi_1) = i_L w_1 - U_{M1}(\Phi_1) - U_{M\delta}(\Phi_1); \\ U_{mcd}(\Phi_2) = U_{M2}(\Phi_2); \\ U_{mcd}(\Phi_3) = i_L w_3 - U_{M3}(\Phi_3), \end{cases} \quad (1)$$

где магнитные напряжения

$$\begin{aligned} U_{M1}(\Phi_1) &= H_1 l_1; & U_{M2}(\Phi_2) &= H_2 l_2; \\ U_{M3}(\Phi_3) &= H_3 l_3; & U_{M\delta}(\Phi_1) &= \frac{B_1 \delta_1}{\mu_0}. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя заданную кривую намагничивания ферромагнитного материала магнитной цепи  $B(H) = B_{1,2,3}(H_{1,2,3})$ , рассчитываем уравнения (2) и заполняем табл. 1.

Таблица 1

$B_{1,2,3}$	Тл	0	0,6	1	1,2	1,6	2	2,2	2,3	2,5
$H_{1,2,3}$	А/м	0	250	500	$10^3$	$2 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^3$	$12 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^5$
$\Phi_1 = B_1 S_1$	мВб	0	0,06	0,1	0,12	0,16	0,2	0,22	0,23	0,25
$\Phi_2 = B_2 S_2$	мВб	0	0,12	0,2	0,24	0,32	0,4	0,44	0,46	0,5
$\Phi_3 = B_3 S_3$	мВб	0	0,06	0,1	0,12	0,16	0,2	0,22	0,23	0,25
$U_{M1}(\Phi_1)$	А	0	75	150	300	600	1800	3600	9000	$6 \cdot 10^4$
$U_{M\delta}(\Phi_1)$	А	0	477,6	796	955,2	1273,6	1592	1751,2	1830,8	1990
$U_{M2}(\Phi_2)$	А	0	37,5	75	150	300	900	1800	4500	$3 \cdot 10^4$
$U_{M3}(\Phi_3)$	А	0	75	150	300	600	1800	3600	9000	$6 \cdot 10^4$

2.1. При токе  $i_{L1} = \frac{\sqrt{2}J_r}{2} = 0,945$  А по данным табл. 1 рассчитываем уравнения (1) и заполняем табл. 2.

Таблица 2

$B_{1,2,3}$	Тл	0	0,6	1	1,2	1,6	2	2,2	2,3	2,5
$U_{Mcd}(\Phi_1)$	А	1890	1337,4	944	634,8	16,4	-1502	-3461,2	-8940,8	-60100
$U_{Mcd}(\Phi_2)$	А	0	37,5	75	150	300	900	1800	4500	30000
$U_{Mcd}(\Phi_3)$	А	945	870	795	645	345	-855	-2655	-8055	-59055

Строим графики  $U_{Mcd}(\Phi_1)$ ,  $U_{Mcd}(\Phi_2)$ ,  $U_{Mcd}(\Phi_3)$ . Так как  $\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3$ , то графики  $U_{Mcd}(\Phi_1)$ ,  $U_{Mcd}(\Phi_2)$  складываем вдоль

оси  $\Phi$  и получаем  $U_{mcd}(\Phi_1 + \Phi_3)$ . По точке пересечения  $U_{mcd}(\Phi_1 + \Phi_3)$  и  $U_{mcd}(\Phi_2)$  определяем магнитные потоки  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$ .

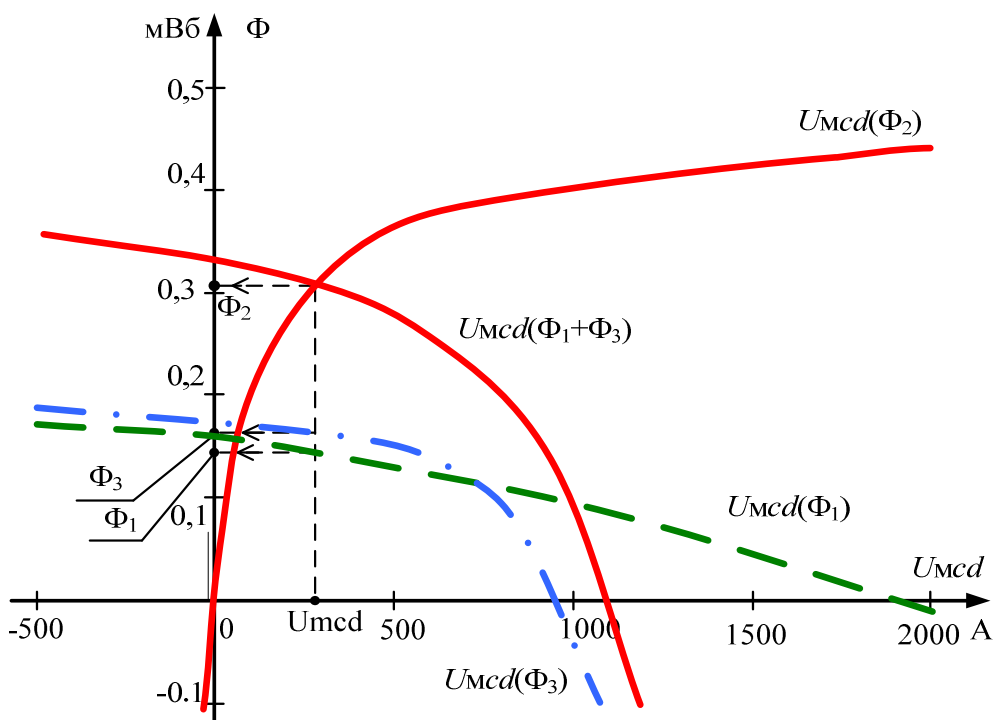


Рис. 227

Таким образом,  $\Phi_1 = 0,14$  мВб,  $\Phi_2 = 0,32$  мВб и  $\Phi_3 = 0,18$  мВб.

Далее рассчитываем суммарное потокосцепление обмоток:

$$\Psi_1 = w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3 = 2000 \cdot 0,14 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 0,32 \cdot 10^{-3} + 1000 \cdot 0,18 \cdot 10^{-3} = 0,46 \text{ Вб.}$$

2.2. При токе  $i_{L2} = \sqrt{2}J_{\Gamma} = 1,89$  А по данным табл. 1 рассчитываем уравнения (1) и заполняем табл. 3.

Таблица 3

$B_{1,2,3}$	Тл	0	0,6	1	1,2	1,6	2	2,2	2,3	2,5
$U_{mcd}(\Phi_1)$	А	3780	3227,4	2834	2524,8	1906,4	388	-1571,2	-7050,7	-58210
$U_{mcd}(\Phi_2)$	А	0	37,5	75	150	300	900	1800	4500	30000
$U_{mcd}(\Phi_3)$	А	1890	1815	1740	1590	1290	90	-1710	-7110	-58110



Вновь строим графики  $U_{mcd}(\Phi_1)$ ,  $U_{mcd}(\Phi_2)$ ,  $U_{mcd}(\Phi_3)$ .  
 Аналогично находим графически магнитные потоки  $\Phi_1 = 0,19$  мВб,  
 $\Phi_2 = 0,37$  мВб и  $\Phi_3 = 0,18$  мВб.

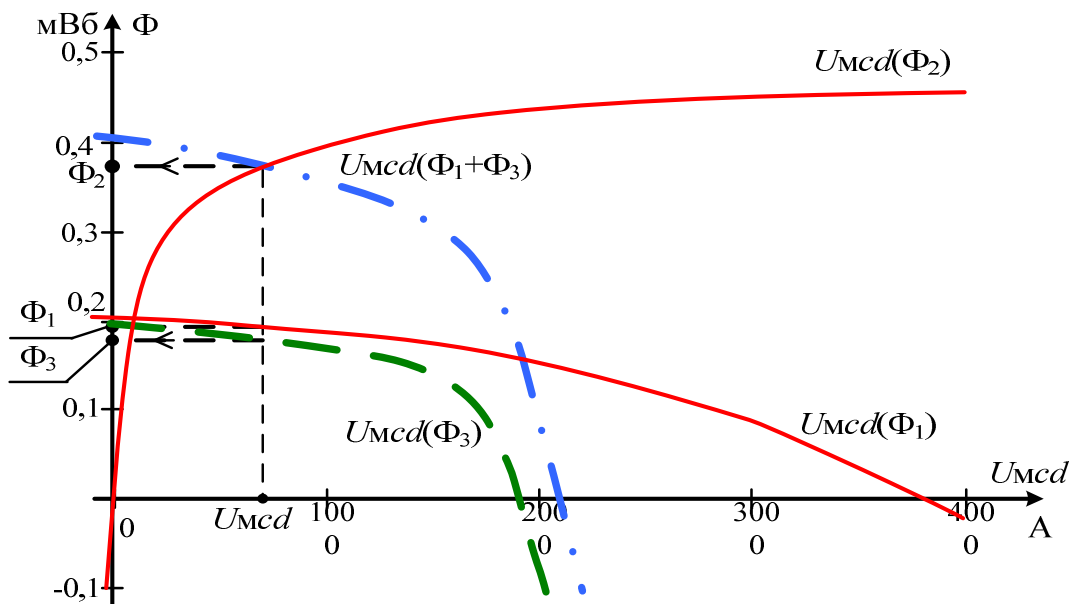


Рис. 228

Рассчитываем суммарное потокоцепление обмоток:

$$\Psi_2 = w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3 = 2000 \cdot 0,19 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 0,37 \cdot 10^{-3} + 1000 \cdot 0,18 \cdot 10^{-3} = 0,56 \text{ Вб.}$$

3. Строим веберамперную характеристику НИЭ  $\Psi(i_L)$ , которую заменяем зависимостью  $i_L(\Psi) = k_1\Psi + k_3\Psi^3$ .

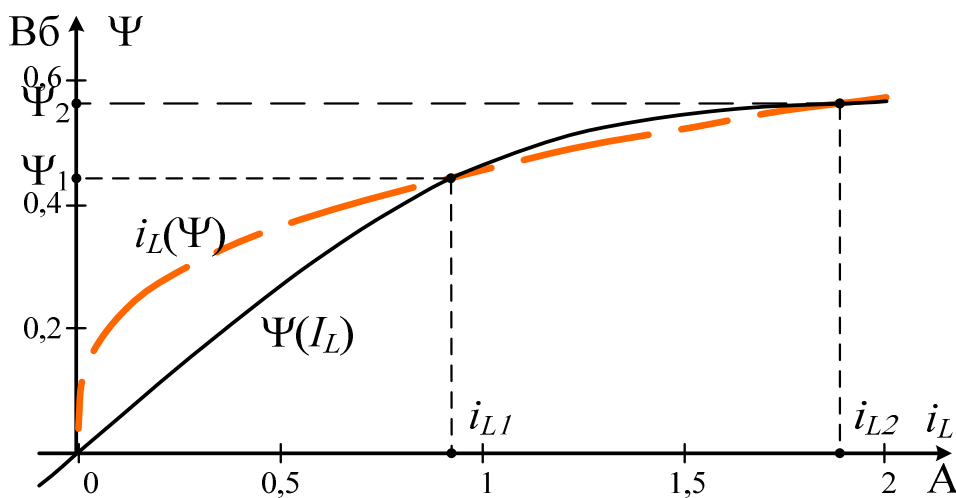


Рис. 229

Для этого находим коэффициенты  $k_1$  и  $k_3$  из решения уравнений:

$$\begin{cases} i_{L_1} = k_1 \Psi_1 + k_3 \Psi_1^3; \\ i_{L_2} = k_1 \Psi_2 + k_3 \Psi_2^3. \end{cases}$$

т.е.  $k_1 = \frac{i_{L_1} - k_3 \Psi_1^3}{\Psi_1}$ ;  $i_{L_2} = (i_{L_1} - k_3 \Psi_1^3) \frac{\Psi_2}{\Psi_1} + k_3 \Psi_2^3$ , тогда

$$k_3 = \frac{i_{L_2} - i_{L_1} \frac{\Psi_2}{\Psi_1}}{\Psi_2^3 - \Psi_1^2 \cdot \Psi_2} = \frac{1,89 - 0,945 \cdot \frac{0,56}{0,46}}{0,56^3 - 0,46^2 \cdot 0,56} = 12,96 \text{ А/В}^3;$$

$$k_1 = \frac{i_{L_1} - k_3 \Psi_1^3}{\Psi_1} = \frac{0,945 - 12,96 \cdot 0,46^3}{0,46} = -0,687 \text{ А/В}^3.$$

Для проверки строим зависимость  $i_L(\Psi)$  в тех же осях, что и  $\Psi(i_L)$ . Зависимость  $i_L(\Psi) = k_1 \Psi + k_3 \Psi^3$  удовлетворительно совпадает с веберамперной характеристикой  $\Psi(i_L)$  на интервале  $\Psi_1 \leq \Psi \leq \Psi_2$ .

4. При приближенной гармонической зависимости напряжения НИЭ  $u_L(t) = \sqrt{2} U_L \cos(314t + \beta)$  для четырех значений  $U_L$  ( $0 < U_L < E_r$ ) рассчитываем действующие значения гармоник тока  $I_1$  и  $I_3$ , его действующее значение  $I_L$ , коэффициент гармоник  $k_r$ , причем берем такие  $U_L$ , чтобы  $0 < I_L < J_r$ .

При этом заполняем табл. 4.

Таблица 4

$U_L, \text{ В}$	30	70	100	135
$I_1 = \frac{k_1 U_L}{\omega} + \frac{3k_3 U_L^3}{2\omega^3}, \text{ А}$	-0,049	0,062	0,409	1,25
$I_3 = -\frac{k_3 U_L^3}{2\omega^3}, \text{ А}$	-0,0056	-0,072	-0,209	-0,515
$I_L = \sqrt{I_1^2 + I_3^2}, \text{ А}$	0,049	0,095	0,46	1,352
$k_r = \left  \frac{I_3}{I_1} \right $	0,116	1,154	0,512	0,412

5. По результатам п. 4 строим ВАХ  $U_L(I_L)$  НИЭ. Задаваясь несколькими значениями тока  $\dot{I}_L = I_L e^{j0^\circ}$  для одноконтурной схемы, определяем эквивалентное напряжение

$$\dot{U}_\Sigma = U_\Sigma e^{j\varphi_\Sigma} = \underline{Z}_\Gamma \dot{I}_L + \dot{U}_L = 158,1 e^{-j18,4^\circ} \cdot \dot{I}_L + U_L(I_L) e^{j90^\circ}.$$

При этом  $I_L$  находим  $U_L$  по ВАХ  $U_L(I_L)$  и заполняем табл. 5.

Таблица 5

$\dot{I}_L = I_L, \text{ A}$	0,3	0,6	1	1,35
$U_L, \text{ В}$	90	105	123	135
$U_\Sigma, \text{ В}$	87,5	117,2	166,9	213,517
$\varphi_\Sigma, \text{ град}$	59	39,8	26	18,46

Строим эквивалентную ВАХ  $U_\Sigma(I_L)$  и ФАХ  $\varphi_\Sigma(I_L)$ . По известной ЭДС  $E_\Gamma = U_\Sigma = 212 \text{ В}$  и построенным характеристикам графически находим  $I_L = 1,3 \text{ A}$ ,  $U_L \approx 135 \text{ В}$ ,  $\varphi_\Sigma = 19^\circ$  (рис. 225).

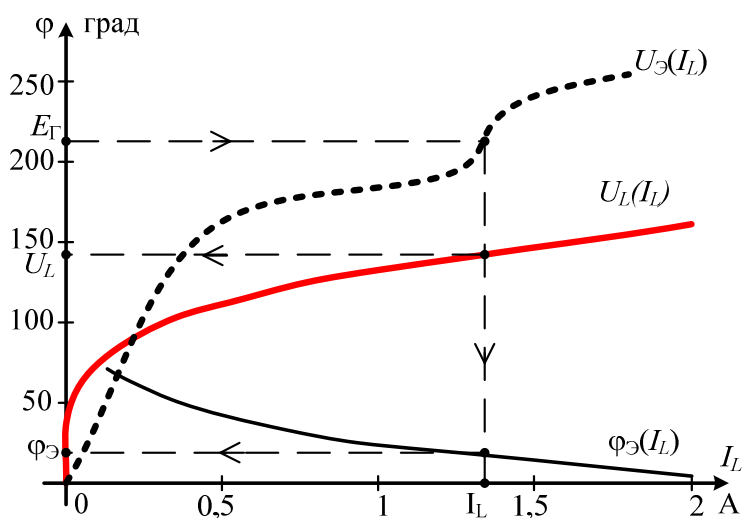


Рис. 230

В результате

$$\beta = \alpha_\Gamma - \varphi_\Sigma = 45 - 19 = 26^\circ;$$

$$\dot{I}_L = I_L e^{j\beta} = 1,3 e^{j26^\circ}, \text{ A};$$

$$\dot{U}_L = U_L e^{j(\beta+90^\circ)} = 135 e^{j116^\circ}, \text{ В}.$$

Построим в принятых масштабах  $m_U$  и  $m_I$  векторную диаграмму:

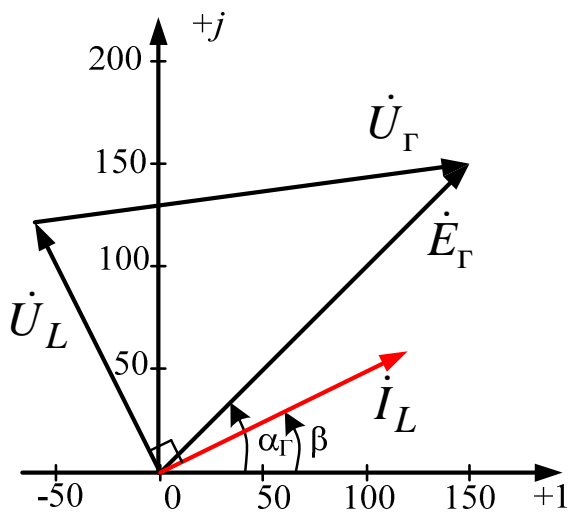


Рис. 231

$$\begin{aligned} \dot{E}_\Gamma &= E_\Gamma e^{j\alpha_\Gamma} = 212e^{j45^\circ} \text{ В}; \\ \dot{I}_L &= I_L e^{j\beta} = 1,3e^{j26^\circ} \text{ А}; \\ \dot{U}_L &= U_L e^{j(\beta+90^\circ)} = 135e^{j116^\circ} \text{ В}; \\ \dot{U}_\Gamma &= \underline{Z}_\Gamma \cdot \dot{I}_L = \\ &= 158,1e^{-j18,4^\circ} \cdot 1,3e^{j26^\circ} = \\ &= 205,53e^{j7,6^\circ} \text{ В}; \\ m_U &= 5 \text{ В/мм}; \quad m_I = 0,05 \text{ А/мм}. \end{aligned}$$

6. Определяем потребляемую активную мощность:

$$P = E_\Gamma I_L \cos \varphi_3 = 212 \cdot 1,3 \cdot \cos 19^\circ = 260,6 \text{ Вт.}$$

По известной величине напряжение  $U_L = 135 \text{ В}$ ; уточняем значения:

$$I_1 = \frac{k_1 \cdot U_L}{\omega} + \frac{3k_3 \cdot U_L^3}{2\omega^3} = 1,25 \text{ А};$$

$$I_3 = -\frac{k_3 \cdot U_L^3}{2\omega^3} = -0,515 \text{ А};$$

$$I_L = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = 1,352 \approx 1,3 \text{ А} - \text{ верно};$$

$$k_\Gamma = \left| \frac{I_3}{I_1} \right| = 0,412;$$

$$\beta = \alpha_\Gamma - \varphi_3 = 26^\circ;$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot 1,25 \sin(314t + 26^\circ) - \sqrt{2} \cdot 0,515 \sin(942t + 78^\circ), \text{ А.}$$

7. Анализируем полученные результаты и формируем выводы по работе.

Ниже приводится расчет рассматриваемого примера при помощи программы MathCAD.

**Исходные данные:**

$$\begin{aligned}
 E &:= 100 & R &:= 100 \\
 J &:= 2 & C &:= 31.847 \cdot 10^{-6} & \mu_0 &:= 4\pi \cdot 10^{-7} \\
 \alpha &:= 90 \cdot \text{deg} & \omega &:= 314 \\
 w_1 &:= 2000 & S_1 &:= 1 \cdot 10^{-4} & I_1 &:= 0.30 & \delta_1 &:= 1 \cdot 10^{-3} \\
 w_2 &:= 0 & S_2 &:= 2 \cdot 10^{-4} & I_2 &:= 0.15 & \delta_2 &:= 0 \\
 w_3 &:= 1000 & S_3 &:= 1 \cdot 10^{-4} & I_3 &:= 0.30 & \delta_3 &:= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &:= (-2.5 \ -2.3 \ -2.2 \ -2 \ -1.6 \ -1.2 \ -1 \ -0.6 \ 0 \ 0.6 \ 1 \ 1.2 \ 1.6 \ 2 \ 2.2 \ 2.3 \ 2.5) \\
 H &:= (-200000 \ -30000 \ -12000 \ -6000 \ -2000 \ -1000 \ -500 \ -250 \ 0 \ 250 \ 500 \ 1000 \ 2000 \ 6000)
 \end{aligned}$$

Определяем комплексное сопротивление емкости:

$$Z_c := -i \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}$$

Определение E, Z, I генератора:

$$E_g := E \cdot e^{i\alpha} \quad E = 100i$$

$$J_g := J \cdot e^{i\alpha} \quad J = 2i$$

$$Z_g := R + \frac{R \cdot Z_c}{R + Z_c}$$

$$|Z_g| = 158.11 \quad \arg(Z_g) = -18.43 \text{ deg}$$

$$E_g := (E + J \cdot R) \cdot \frac{Z_c}{R + Z_c}$$

$$|E_g| = 212.13 \quad \arg(E_g) = 45 \text{ deg}$$

$$I_g := \frac{E_g}{Z_g}$$

$$|I_g| = 1.342 \quad \arg(I_g) = 63.44 \text{ deg}$$

**2.** Находим два значения тока:

$$\Pi_1 := \sqrt{2} \cdot \frac{|I_g|}{2} \qquad \Pi_2 := \sqrt{2} \cdot |I_g|$$

$$\Pi_1 = 0.949$$

$$\Pi_2 = 1.897$$

Для каждого значения индукции и напряженности рассчитываем:

$$k := 0, 1..8$$

**2.1.** потоки;

$$\Phi_1 := B \cdot S_1$$

$$\Phi_2 := B \cdot S_2$$

$$\Phi_3 := B \cdot S_3$$

**2.2.** напряжения в зазорах;

$$U_{\delta 1} := \frac{B \cdot \delta_1}{\mu_0} \qquad U_{\delta 2} := \frac{B \cdot \delta_2}{\mu_0} \qquad U_{\delta 3} := \frac{B \cdot \delta_3}{\mu_0}$$

**2.3.** напряжения магнитопроводов;

$$U_{m1} := H \cdot l_1$$

$$U_{m2} := H \cdot l_2$$

$$U_{m3} := H \cdot l_3$$

**2.4.** между узлами cd при первом значении тока;

$$U_{11} := \Pi_1 \cdot w_1 - U_{\delta 1} - U_{m1}$$

$$U_{12} := -\Pi_1 \cdot w_2 + U_{\delta 2} + U_{m2}$$

$$U_{13} := \Pi_1 \cdot w_3 - U_{\delta 3} - U_{m3}$$

**2.5.** напряжения между узлами cd при втором значении тока

$$U_{21} := \Pi_2 \cdot w_1 - U_{\delta 1} - U_{m1}$$

$$U_{22} := -\Pi_2 \cdot w_2 + U_{\delta 2} + U_{m2}$$

$$U_{23} := \Pi_2 \cdot w_3 - U_{\delta 3} - U_{m3}$$

### Сводная таблица данных 1

St1 := stack(B, H, Φ1, Φ2, Φ3, Uδ1, Uδ2, Uδ3, Um1, Um2, Um3)

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	-3	-2	-2	-2	-2	-1	-1	-1
1	-200000	-30000	-12000	-6000	-2000	-1000	-500	-250
2	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0
3	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0
4	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0
5	-1989	-1830	-1751	-1592	-1273	-955	-796	-477
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
8	-60000	-9000	-3600	-1800	-600	-300	-150	-75
9	-30000	-4500	-1800	-900	-300	-150	-75	-38
10	-60000	-9000	-3600	-1800	-600	-300	-150	-75

### Сводная таблица данных 2

St2 := stack(B, U11, U12, U13)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	-3	-2	-2	-2	-2	-1	-1	-1	0
1	63887	12728	7248	5289	3771	3152	2843	2450	1897
2	-30000	-4500	-1800	-900	-300	-150	-75	-38	0
3	60949	9949	4549	2749	1549	1249	1099	1024	949

### Сводная таблица данных 3

St3 := stack(B, U21, U22, U23)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	-3	-2	-2	-2	-2	-1	-1	-1	0
1	65784	14625	9145	7186	5668	5050	4741	4347	3795
2	-30000	-4500	-1800	-900	-300	-150	-75	-38	0
3	61897	10897	5497	3697	2497	2197	2047	1972	1897

Для построения графиков, необходимо выполнить следующее:

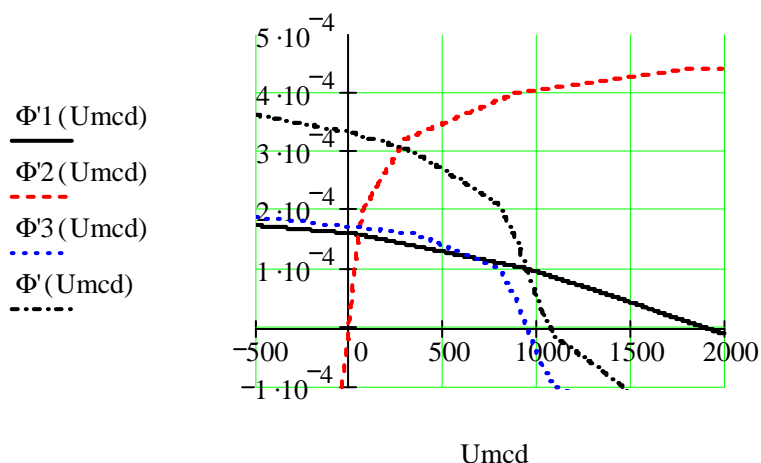
$$\underline{U11} := \text{reverse}(U11^T) \quad \underline{U12} := U12^T \quad \underline{U13} := \text{reverse}(U13^T)$$

$$\underline{\Phi1} := \text{reverse}(\Phi1^T) \quad \underline{\Phi2} := \Phi2^T \quad \underline{\Phi3} := \text{reverse}(\Phi3^T)$$

$$\Phi'1(\text{Umcd}) := \text{linterp}(U11, \Phi1, \text{Umcd})$$

$$\Phi'2(\text{Umcd}) := \text{linterp}(U12, \Phi2, \text{Umcd})$$

$$\Phi'3(\text{Umcd}) := \text{linterp}(U13, \Phi3, \text{Umcd}) \quad \Phi'(\text{Umcd}) := \Phi'1(\text{Umcd}) + \Phi'3(\text{Umcd})$$



Определение точки пересечения:

$$Umcd := 1$$

Given

$$\Phi'(Umcd) - \Phi'2(Umcd) = 0$$

$$Umcd1 := \text{Find}(Umcd)$$

$$Umcd1 = 274.3$$

$$\Phi'1 := \Phi'1(Umcd1) \quad \Phi'2 := \Phi'2(Umcd1) \quad \Phi'3 := \Phi'3(Umcd1)$$

$$\Phi'1 = 1.44 \times 10^{-4} \quad \Phi'2 = 3.06 \times 10^{-4} \quad \Phi'3 = 1.62 \times 10^{-4}$$

Проверка:

$$\Phi'1 + \Phi'3 = 3.06 \times 10^{-4}$$

Определяем величину потокосцепления:

$$\Psi1 := w1 \cdot \Phi'1 + w2 \cdot \Phi'2 + w3 \cdot \Phi'3 \quad \Psi1 = 0.45$$

Сводная таблица данных 3:

$$St3 := \text{stack}(B, U21, U22, U23)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
St3 =	0	-3	-2	-2	-2	-2	-1	-1	-1	0
	1	65784	14625	9145	7186	5668	5050	4741	4347	3795
	2	-30000	-4500	-1800	-900	-300	-150	-75	-38	0
	3	61897	10897	5497	3697	2497	2197	2047	1972	1897



Для построения графиков, необходимо выполнить следующее:

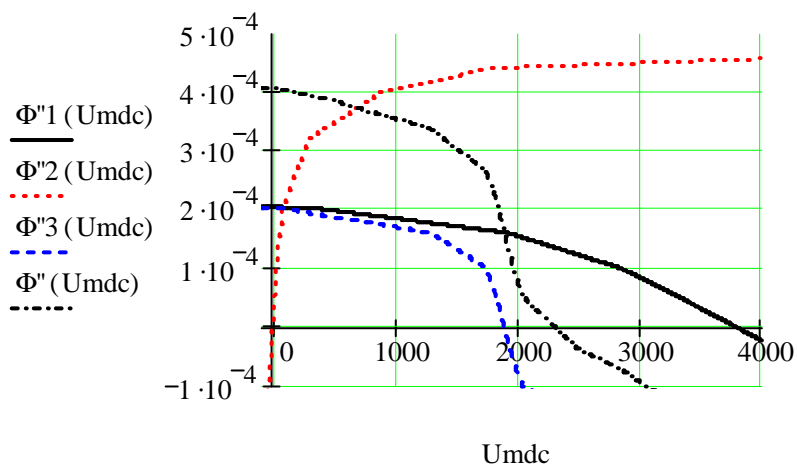
$$\underline{U21} := \text{reverse}(U21^T) \quad \underline{U22} := U22^T \quad \underline{U23} := \text{reverse}(U23^T)$$

$$\Phi''1(U\text{mdc}) := \text{linterp}(U21, \Phi1, U\text{mdc})$$

$$\Phi''2(U\text{mdc}) := \text{linterp}(U22, \Phi2, U\text{mdc})$$

$$\Phi''3(U\text{mdc}) := \text{linterp}(U23, \Phi3, U\text{mdc})$$

$$\Phi''(U\text{mdc}) := \Phi''1(U\text{mdc}) + \Phi''3(U\text{mdc})$$



Определение точки пересечения:

$$U\text{mdc} := 1$$

Giver

$$\Phi''(U\text{mdc}) - \Phi''2(U\text{mdc}) = 0$$

$$U\text{mdc1} := \text{Find}(U\text{mdc})$$

$$U\text{mdc1} = 693.57$$

$$\underline{\Phi''1} := \Phi''1(U\text{mdc1})$$

$$\underline{\Phi''2} := \Phi''2(U\text{mdc1})$$

$$\underline{\Phi''3} := \Phi''3(U\text{mdc1})$$

$$\Phi''1 = 1.92 \times 10^{-4}$$

$$\Phi''2 = 3.72 \times 10^{-4}$$

$$\Phi''3 = 1.8 \times 10^{-4}$$

Проверка:

$$\Phi''1 + \Phi''3 = 3.72 \times 10^{-4}$$

Определяем величину потокосцепления:

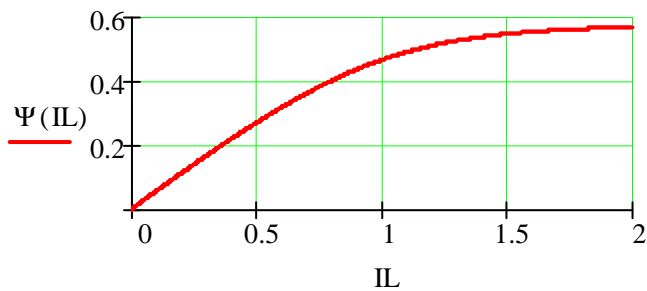
$$\Psi2 := w1 \cdot \Phi''1 + w2 \cdot \Phi''2 + w3 \cdot \Phi''3$$

$$\Psi2 = 0.56$$

3. Строим веберамперную характеристику  $\Psi(iL)$ :

$$\Psi := \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad iL := \begin{pmatrix} 0 \\ \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{pmatrix}$$

$$s := \text{lspline}(iL, \Psi) \quad \Psi(\Pi) := \text{interp}(s, iL, \Psi, \Pi)$$



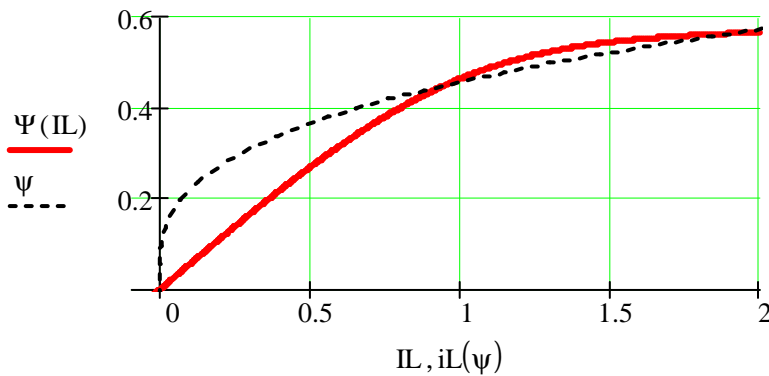
Заменяем зависимостью  $iL(\Psi)$ .

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_1^3 \\ \Psi_2 & \Psi_2^3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{pmatrix}$$

Определяем коэффициенты:

$$k_1 = -0.07 \quad k_3 = 10.75$$

$$iL(\psi) := k_1 \cdot \psi + k_3 \cdot \psi^3$$



4. Определяем четыре действующих значения напряжения (для точности расчетов можно брать большее число точек K):

$$K := 7 \quad j := 1..K$$

$$h := \frac{|E_g|}{K + 4} \quad \text{- шаг} \quad U_{dj} := \text{round}(j \cdot h)$$

Находим гармоники тока:

$$I_{gr1j} := k_1 \cdot \frac{U_{dj}}{\omega} + 3 \cdot k_3 \cdot \frac{(U_{dj})^3}{2 \cdot \omega^3} \quad I_{gr3j} := -k_3 \cdot \frac{(U_{dj})^3}{2 \cdot \omega^3}$$

Вычисляем действующие значения тока:

$$I_{dj} := \sqrt{(I_{gr1j})^2 + (I_{gr3j})^2}$$

Вычисляем коэффициент гармоник:

$$k_{grj} := \left| \frac{I_{gr3j}}{I_{gr1j}} \right|$$

Сводная таблица данных 4

$$St4 := \text{stack}(U_d^T, I_{gr1}^T, I_{gr3}^T, I_d^T, k_{gr}^T)$$

$$St4 = \begin{pmatrix} 0 & 19 & 39 & 58 & 77 & 96 & 116 & 135 \\ 0 & -0 & 0.02 & 0.09 & 0.22 & 0.44 & 0.79 & 1.25 \\ 0 & -0 & -0.01 & -0.03 & -0.08 & -0.15 & -0.27 & -0.43 \\ 0 & 0 & 0.02 & 0.09 & 0.23 & 0.47 & 0.83 & 1.32 \\ 0 & 1.77 & 0.46 & 0.38 & 0.36 & 0.35 & 0.34 & 0.34 \end{pmatrix}$$

**5.** Строим ВАХ  $U_L(IL)$ , ВАХ  $U_{\Sigma}(IL)$  и ФАХ  $\varphi_{\Sigma}(IL)$ :

**5.1.**  $U_L(IL) := \text{linterp}(I_d, U_d, IL)$

**5.2.** Заполняем таблицу 5

$$U_j := Z_g \cdot I_{dj} + U_{dj} \cdot e^{i \cdot 90 \cdot \text{deg}}$$

$$U_{ej} := |U_j| \quad \varphi_{ej-1} := \frac{\arg(U_j)}{\text{deg}}$$

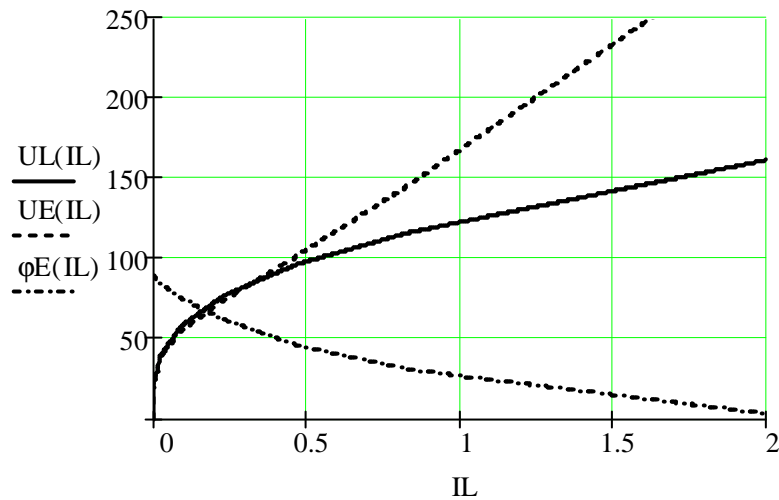
$$iL_{j-1} := I_{dj} \quad uL_{j-1} := U_{dj} \quad uE_{j-1} := U_{ej}$$

$$St5 := \text{stack}(iL^T, uL^T, uE^T, \varphi_e^T)$$

$$St5 = \begin{pmatrix} 0 & 0.02 & 0.09 & 0.23 & 0.47 & 0.83 & 1.32 \\ 19 & 39 & 58 & 77 & 96 & 116 & 135 \\ 18.93 & 37.95 & 55.12 & 74.15 & 100.81 & 145.33 & 209.95 \\ 89.38 & 84.45 & 75.03 & 61.7 & 46.17 & 30.78 & 19.16 \end{pmatrix}$$

$$UE(IL) := \text{linterp}(Id, Ue, IL)$$

$$\varphi E(IL) := \text{linterp}(iL, \varphi e, IL)$$



По известной  $E_g$  находим:

**а) ток  $I_L$ :**

$$IL := 0.1$$

Giver

$$UE(IL) - |E_g| = 0$$

$$IL1 := \text{Find}(IL) \quad IL1 = 1.34$$

**б) напряжение  $U_L$ :**

$$UL(IL1) = 135.64$$

**в) фазу напряжения  $U_L$ :**

$$\varphi E(IL1) = 18.76$$

**г) фазу тока  $I_L$ :**

$$\beta := \frac{\arg(E_g)}{\text{deg}} - \varphi E(IL1)$$

$$\underline{I_L} := IL1 \cdot e^{i\beta \cdot \text{deg}} \quad IL = 1.2 + 0.59i$$

$$\arg(IL) = 26.24 \text{deg}$$

$$|IL| = 1.34$$

$$\underline{U_L} := UL(IL1) \cdot e^{i(\beta+90) \cdot \text{deg}}$$

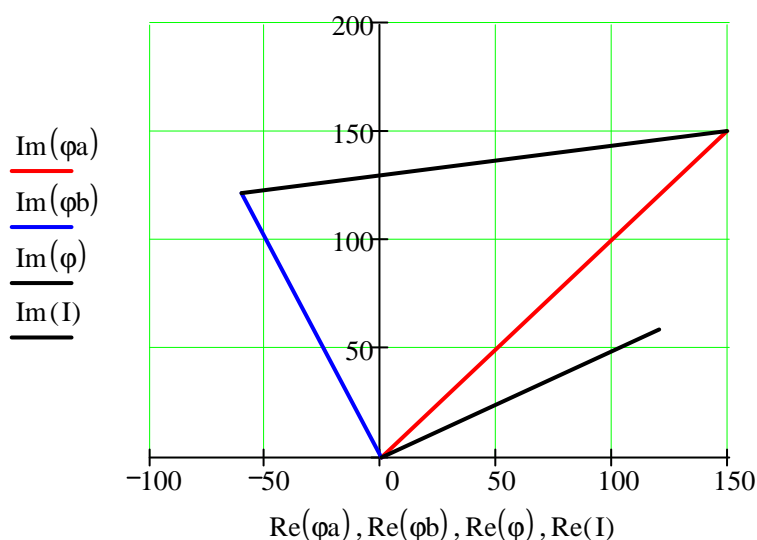
$$UL = -59.97 + 121.67i$$

$$|UL| = 135.64 \quad \arg(UL) = 116.24 \text{deg}$$

Строим векторную диаграмму:

$$U_g := \Pi_L \cdot Z_g$$

$$\varphi_a := \begin{pmatrix} 0 \\ E_g \end{pmatrix} \quad \varphi_b := \begin{pmatrix} 0 \\ UL \end{pmatrix} \quad \varphi := \begin{pmatrix} E_g \\ UL \end{pmatrix} \quad I := \begin{pmatrix} 0 \\ \Pi_L \end{pmatrix} \cdot 100$$



Определяем потребляемую цепью активную мощность:

$$P := |E_g| \cdot |\Pi_L| \cdot \cos(\arg(E_g) - \arg(\Pi_L)) \quad P = 268.89$$

По известной величине напряжения уточняем значения гармоник тока:

$$|UL| = 135.64$$

$$I_{gr1} := k_1 \cdot \frac{|UL|}{\omega} + 3 \cdot k_3 \cdot \frac{(|UL|)^3}{2 \cdot \omega^3} \quad I_{gr3} := -k_3 \cdot \frac{(|UL|)^3}{2 \cdot \omega^3}$$

$$I_{gr1} = 1.27$$

$$I_{gr3} = -0.43$$

Вычисляем действующие значения тока:

$$\Pi_L := \sqrt{I_{gr1}^2 + I_{gr3}^2} \quad \Pi_L = 1.34$$

Вычисляем коэффициент гармоник:

$$k_{gr} := \left| \frac{I_{gr3}}{I_{gr1}} \right| \quad k_{gr} = 0.34$$

**Пример 3**  
**Методические указания к заданию № 6**  
**«Расчет длинных линий в установившемся и переходном режимах»**

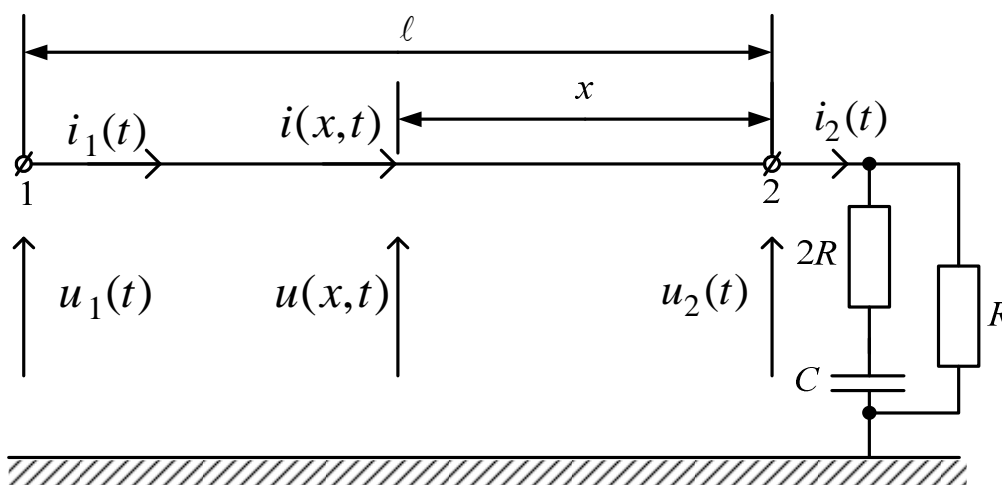


Рис. 232

Дано:

$$R_0 = 0,12 \frac{\text{Ом}}{\text{км}}; \quad L_0 = 10^{-3} \frac{\text{Гн}}{\text{км}};$$

$$G_0 = 10^{-6} \frac{\text{См}}{\text{км}}; \quad C_0 = 1,11 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Ф}}{\text{км}};$$

$$U_2 = 330 \text{ кВ}; \quad \psi_{U_2} = 45^\circ; \quad \ell = 1500 \text{ км};$$

$$R = 600 \text{ Ом}; \quad C = 2,654 \text{ мкФ}; \quad \omega = 314 \frac{1}{\text{с}}.$$

**1.** В установившемся режиме при заданном фазном напряжении  $u_2(t) = \sqrt{2} \cdot U_2 \sin(\omega t + \psi_2) = \sqrt{2} \cdot 330 \cdot 10^3 \sin(314t + 45^\circ)$ , В, в конце линии определяем следующие величины:

1.1. Волновое сопротивление:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_B &= \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{0,12 + j314 \cdot 10^{-3}}{10^{-6} + j314 \cdot 1,11 \cdot 10^{-8}}} = \\ &= 304,195 - j13,032 = 304,474 e^{-j2,45^\circ}, \text{ Ом.} \end{aligned}$$

1.2. Постоянная распространения:

$$\begin{aligned}\underline{\gamma} &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \\ &= \sqrt{(0,12 + j314 \cdot 10^{-3})(10^{-6} + j314 \cdot 1,11 \cdot 10^{-8})} = \\ &= 3,496 \cdot 10^{-4} + j1,047 \cdot 10^{-3} = \alpha + j\beta, \quad \frac{1}{\text{км}},\end{aligned}$$

где  $\alpha = 3,496 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{км}}$  – коэффициент затухания;

$\beta = 1,047 \cdot 10^{-3} \frac{\text{рад}}{\text{км}} \approx 1,047 \cdot 10^{-3} \frac{180}{\pi} = 0,06 \frac{\text{град}}{\text{км}}$  – коэффициент фазы.

1.3. Фазовая скорость:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{314}{1,047 \cdot 10^{-3}} = 2,999 \cdot 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

1.4. Длина волны:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{6,28}{1,047 \cdot 10^{-3}} = 5998 \text{ км}.$$

1.5. Комплексное сопротивление нагрузки при

$$\begin{aligned}X_C &= \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 2,654 \cdot 10^{-6}} = 1200, \text{ Ом}; \\ Z_H &= \frac{R(2R - jX_C)}{R + (2R - jX_C)} = \frac{600(1200 - j1200)}{1800 - j1200} = \\ &= 461,538 - j92,308 = 470e^{-j11,31^\circ} \text{ Ом}.\end{aligned}$$

1.6. Комплекс действующего значения тока в нагрузке:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_H} = \frac{U_2 e^{j\psi_{u_2}}}{Z_H} = \frac{330 \cdot 10^3 e^{j45^\circ}}{470,679 e^{-j11,31^\circ}} = 701,11 e^{j56,31^\circ}, \text{ А}.$$

1.7. Постоянные интегрирования:

$$\dot{A}_1 = \frac{\dot{U}_2 + \underline{Z}_B \dot{I}_2}{2} = \frac{330 \cdot 10^3 e^{j45^\circ} + 304,474 e^{-j2,45^\circ} \cdot 701,11 e^{j56,31^\circ}}{2} =$$

$$= 179,6 \cdot 10^3 + j202,9 \cdot 10^3 = 271 \cdot 10^3 e^{j48,48^\circ}, \text{ В};$$

$$\dot{A}_2 = \frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_B \dot{I}_2}{2} = 53,72 \cdot 10^3 + j30,48 \cdot 10^3 = 61,76 \cdot 10^3 e^{j29,6^\circ}, \text{ В}.$$

1.8. Комплексы действующих значений напряжения и тока в начале линии при  $x = \ell = 1500 \text{ км}$ :

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{A}_1 e^{\gamma \ell} + \dot{A}_2 e^{-\gamma \ell} = 271 \cdot 10^3 e^{j48,48^\circ} e^{(3,496 \cdot 10^{-4} + j1,047 \cdot 10^{-3})1500} + \\ &+ 61,76 \cdot 10^3 e^{j29,6^\circ} e^{-(3,496 \cdot 10^{-4} + j1,047 \cdot 10^{-3})1500} = \\ &= 271 \cdot 10^3 e^{j48,48^\circ} e^{0,5244} e^{j90^\circ} + 61,76 \cdot 10^3 e^{j29,6^\circ} e^{-0,5244} e^{-j90^\circ} = \\ &= -324,7 \cdot 10^3 + j271,7 \cdot 10^3 = 423,4 \cdot 10^3 e^{j140^\circ}, \text{ В.} \end{aligned}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{A}_1}{\underline{Z}_B} e^{\gamma \ell} - \frac{\dot{A}_2}{\underline{Z}_B} e^{-\gamma \ell} = -1231 + j1049 = 1618 e^{j139,5^\circ}, \text{ А.}$$

### 1.9. Активные мощности:

- в конце линии

$$\begin{aligned} P_2 &= U_2 I_2 \cos(j\psi_{u_2} - j\psi_{I_2}) = \\ &= 330 \cdot 10^3 \cdot 701,11 \cos(45^\circ - 56,31^\circ) = 2,269 \cdot 10^8 \text{ Вт} = 226,9 \text{ МВт}; \end{aligned}$$

- в начале линии

$$\begin{aligned} P_1 &= U_1 I_1 \cos(j\psi_{u_1} - j\psi_{I_1}) = \\ &= 423,4 \cdot 10^3 \cdot 1618 \cos(140^\circ - 139,5^\circ) = 684,8 \text{ МВт}, \end{aligned}$$

### 1.10. Эффективность передачи энергии по линии

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{226,9}{684,8} = 0,33.$$

### 1.11. Изменяя координату $x$ от 0 до $\ell = 1500$ км по уравнениям

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{A}_1 e^{\gamma x} + \dot{A}_2 e^{-\gamma x}; \\ \dot{I}(x) = \frac{\dot{A}_1}{\underline{Z}_B} e^{\gamma x} - \frac{\dot{A}_2}{\underline{Z}_B} e^{-\gamma x} \end{cases}$$

рассчитываем с использованием программы MathCAD действующие значения напряжения  $\dot{U}(x)$  и тока  $\dot{I}(x)$ , а также активную мощность  $P(x) = U(x)I(x)\cos(\psi_U - \psi_I)$ . Результаты расчётов заносим в таблицу.

Таблица 1

$x$ , км	0	300	600	900	1200	1500
$U(x)$ , кВ	330	336	337,1	346	373,6	423,4
$I(x)$ , А	701,11	895,9	1112	1313	1482	1618
$P(x)$ , МВт	226,9	283,1	353,6	441,6	550,7	684,8



По данным таблицы строим совмещённые графики  $U(x)$ ,  $I(x)$  и  $P(x)$ .

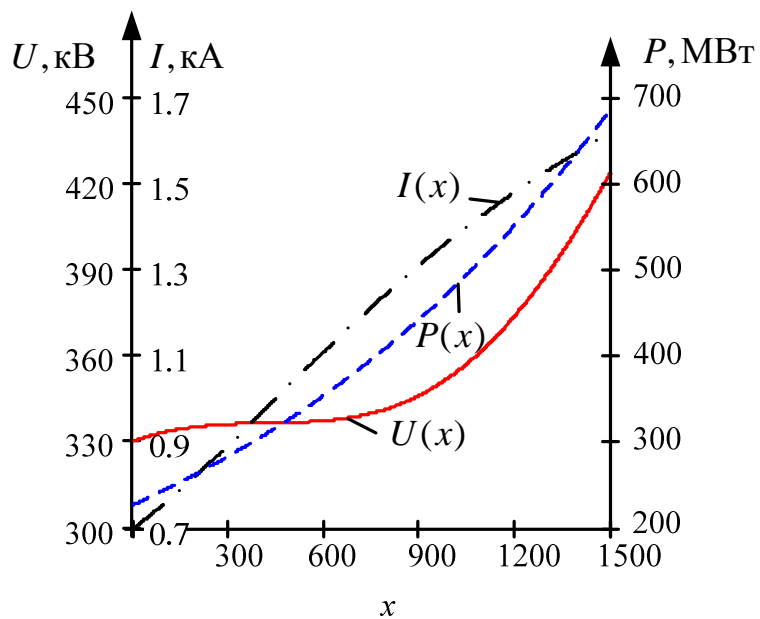


Рис. 233

Ниже приводится расчет программой MathCAD.

**Исходные данные:**

ORIGIN := 1

$R_0 := 0.06$	$\frac{\text{Ом}}{\text{км}}$	$U_2 := 330 \cdot 10^3 \cdot e^{60j \cdot \text{deg}}$	В
$L_0 := 1.4 \cdot 10^{-3}$	$\frac{\text{Гн}}{\text{км}}$	$\omega := 314$	$g(x) := \sqrt{2} \cdot  x  \cdot \sin(\arg(x))$
$G_0 := 0.8 \cdot 10^{-6}$	$\frac{\text{См}}{\text{км}}$	$R := 900$	Ом
$C_0 := 0.8 \cdot 10^{-8}$	$\frac{\text{Ф}}{\text{км}}$	$L := 1500$	Гн
		$C := 3.53 \cdot 10^{-6}$	Ф
			$h(z) := \begin{cases} x_{1,1} \leftarrow \text{Re}(z) \\ x_{1,2} \leftarrow \text{Im}(z) \\ x_{2,1} \leftarrow  z  \\ x_{2,2} \leftarrow \frac{\arg(z)}{\text{deg}} \\ x \end{cases}$

**1. Установившийся режим в линии**

1.1. Волновое сопротивление z (Ом):

$$Z_B := \sqrt{\frac{R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0}{G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0}} \quad h(Z_B) = \begin{pmatrix} 408.709 & 35.373 \\ 410.237 & 4.947 \end{pmatrix} \quad \text{Ом}$$

1.2. Постоянная распространения  $\gamma$  (1/км):

$$\gamma := \sqrt{(R_0 + j \cdot \omega \cdot L_0) \cdot (G_0 + j \cdot \omega \cdot C_0)}$$

$$\gamma = 2.381 \times 10^{-4} + 1.055i \times 10^{-3} \quad \frac{1}{\text{км}}$$

Коэффициент затухания  $\alpha$  (Нп/км) и коэффициент фазы  $\beta$  (рад/км):

$$\alpha := \text{Re}(\gamma) \quad \beta := \text{Im}(\gamma)$$

$$\alpha = 2.381 \times 10^{-4} \quad \frac{\text{Нп}}{\text{км}} \quad \beta = 1.055 \times 10^{-3} \quad \frac{\text{рад}}{\text{км}}$$

1.3. Фазовая скорость  $v$  (км/с):

$$v := \frac{\omega}{\beta} \quad v = 2.976 \times 10^5$$

1.4. Длина волны  $\lambda$  (км):

$$\lambda := \frac{2 \cdot \pi}{\beta} \quad \lambda = 5.956 \times 10^3$$

1.5. Комплексное сопротивление нагрузки (Ом):

$$Z_H := \frac{R \cdot (2 \cdot R - i \cdot x_c)}{R + 2 \cdot R - i \cdot x_c} \quad h(Z_H) = \begin{pmatrix} 630.131 & -90.175 \\ 636.551 & -8.144 \end{pmatrix} \quad \text{Ом}$$

1.6. Комплекс действующего значения тока в нагрузке (А):

$$I_2 := \frac{U_2}{Z_H} \quad h(I_2) = \begin{pmatrix} 192.995 & 481.156 \\ 518.419 & 68.144 \end{pmatrix} \quad \text{А} \quad x_c := \frac{1}{\omega \cdot c}$$

1.7. Постоянные интегрирования (В):

$$A_1 := \frac{U_2 + Z_B \cdot I_2}{2} \quad h(A_1) = \begin{pmatrix} 1.134 \times 10^5 & 2.446 \times 10^5 \\ 2.697 \times 10^5 & 65.124 \end{pmatrix}$$

$$A_2 := \frac{U_2 - Z_B \cdot I_2}{2} \quad h(A_2) = \begin{pmatrix} 5.157 \times 10^4 & 4.115 \times 10^4 \\ 6.598 \times 10^4 & 38.591 \end{pmatrix}$$

1.8. Комплексы действующих значений напряжения и тока в начале линии:

$$I(x) := \frac{A_1}{Z_B} \cdot e^{\gamma \cdot x} - \frac{A_2}{Z_B} \cdot e^{-\gamma \cdot x}$$

$$U(L) = -3.231 \times 10^5 + 1.216i \times 10^5 \quad |U(L)| = 3.453 \times 10^5 \quad \text{В}$$

$$U(x) := A_1 \cdot e^{\gamma \cdot x} + A_2 \cdot e^{-\gamma \cdot x}$$

$$I(L) = -881.7 + 552.068i \quad |I(L)| = 1.04 \times 10^3 \quad \text{А}$$

в конце линии:

$$U(0) = 1.65 \times 10^5 + 2.858i \times 10^5 \quad |U(0)| = 3.3 \times 10^5 \quad \text{В}$$

$$I(0) = 192.995 + 481.156i \quad |I(0)| = 518.419 \quad \text{А}$$

1.9. Активные мощности (Вт)

в начале линии:

$$P(x) := \text{Re}(U(x) \cdot \overline{I(x)}) \quad P(L) = 3.521 \times 10^8 \quad \text{Вт}$$

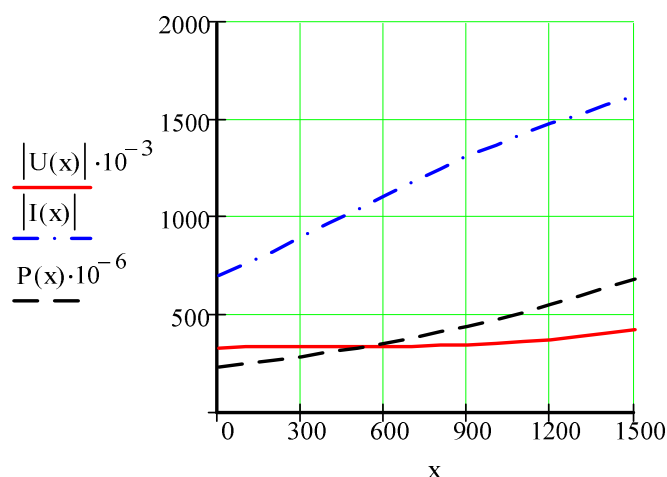
в конце линии

$$P(0) = 1.694 \times 10^8 \quad \text{Вт}$$

### 1.10. Эффективность передачи энергии по линии:

$$\eta := \frac{P(0)}{P(L)} \quad \eta = 0.481$$

$$x := 0..L$$



2. В переходном режиме для линии без потерь ( $R_0 \approx 0$ ;  $G_0 \approx 0$ ), при подключении к источнику постоянного напряжения  $U_0 = \sqrt{2} \cdot U_1 \sin(\psi_1) = \sqrt{2} \cdot 423,4 \cdot 10^3 \sin(140^\circ) = 384,9$  кВ, определяем следующие величины:

2.1. Волновое сопротивление:

$$Z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{10^{-3}}{1,11 \cdot 10^{-8}}} = 300 \text{ Ом.}$$

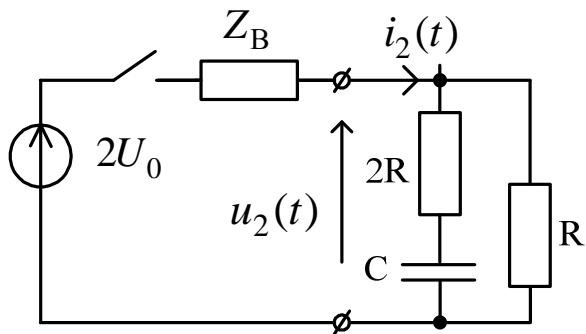
2.2. Фазовая скорость:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \cdot 1,11 \cdot 10^{-8}}} = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

2.3. Падающие волны напряжения и тока:

$$U_{\text{пад}} = U_0 = 384,9 \text{ кВ}; \quad I_{\text{пад}} = \frac{U_0}{Z_B} = 1,283 \text{ кА.}$$

2.4. Напряжение  $u(t)$  и ток  $i_2(t)$  в нагрузке, воспользовавшись, например, классическим методом (цепь первого порядка):

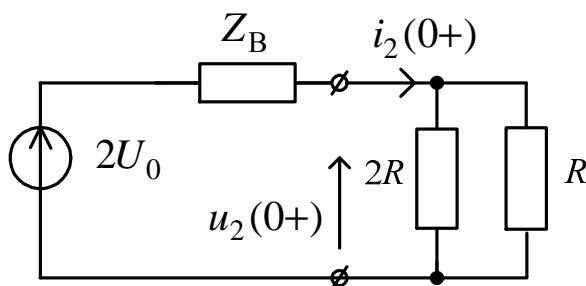


$$\begin{cases} i_2(t) = i_{2\text{пр}} + Ae^{pt}; \\ u_2(t) = u_{2\text{пр}} + Be^{pt}. \end{cases}$$

Рис. 234

2.4.1. Определяем независимые начальные условия (ННУ) при  $t = 0 - u_C(0-) = 0$ .

2.4.2. Зависимые начальные условия (ЗНУ) при  $t = 0+$  (схема после коммутации ключа), когда  $u_C(0-) = u_C(0+) = 0$ :

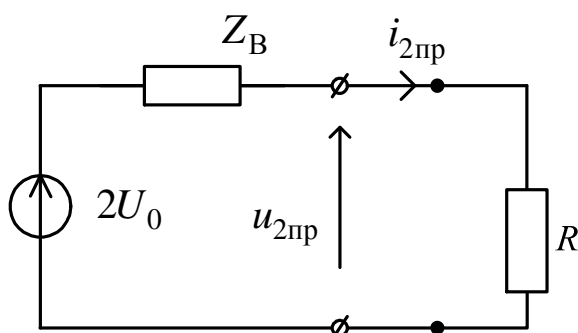


$$i_2(0+) = \frac{2U_0}{Z_B + \frac{2R \cdot R}{2R + R}} = 1,1 \text{ кА};$$

$$u_2(0+) = i_2(0+) \frac{2R \cdot R}{2R + R} = 440 \text{ кВ}.$$

Рис. 225

2.4.3. Определяем принуждённую составляющую при  $t = \infty$ : схема после коммутации, установившийся режим, постоянный источник,  $C$  – разрыв,  $L$  – коротка;



$$i_{2\text{пр}} = \frac{2U_0}{Z_B + R} = 0,855 \text{ кА},$$

причём

$$u_{2\text{пр}} = i_{2\text{пр}} R = 513,2 \text{ кВ}.$$

Рис. 226

2.4.4. Определяем корень характеристического уравнения  $p$ .

Используем метод сопротивления цепи после коммута-

ции:  $\left( C \rightarrow \frac{1}{Cp}; L \rightarrow Lp \right)$ , причём  $R_E = 0$ ;

$$z(p) = \frac{1}{pC} + 2R + \frac{RZ_B}{R + Z_B} = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{\left( 2R + \frac{RZ_B}{R + Z_B} \right) C} = -269 \frac{1}{c}.$$

2.4.5. Постоянные интегрирования:

$$A = i_2(0+) - i_{2пр} = 0,245 \text{ кА};$$

$$B = u_2(0+) - u_{2пр} = -73,2 \text{ кВ}.$$

2.4.6. Окончательный результат:

$$i_2(t) = i_{2пр} + Ae^{pt} = 0,855 + 0,245e^{-269t}, \text{ кА};$$

$$u_2(t) = u_{2пр} + Be^{pt} = 513,2 - 73,2e^{-269t}, \text{ кВ}.$$

2.5. Отраженные от конца линии волны напряжения:

$$u_{отр}(t) = u_2(t) - U_{пад} = 128,3 - 73,2e^{-269t}, \text{ кВ};$$

$$i_{отр} = -\frac{u_{отр}(t)}{Z_B} = -0,428 + 0,244e^{-269t}, \text{ кА}.$$

2.6. Рассчитываем распределение напряжения и тока вдоль линии для момента времени  $t_0 = \frac{3l}{2v} = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ , после подключения источника, когда отражённые от конца линии волны напряжения и тока достигли середины линии.

Для этого заполняем таблицу 2.

Таблица 2

Точка	А Середина линии	Б	В	Г нагрузка
$t, \text{ с}$	$t_A = 0$	$t_B = \frac{(l/2)}{3v} =$ $= 0,833 \cdot 10^{-3}$	$t_B = \frac{2(l/2)}{3v} =$ $= 1,66 \cdot 10^{-3}$	$t_B = \frac{(l/2)}{v} =$ $= 2,5 \cdot 10^{-3}$
$u_{отр}, \text{ кВ}$	$u_{отр}(t_A) = 55,1$	$u_{отр}(t_B) = 69,795$	$u_{отр}(t_B) = 81,464$	$u_{отр}(t_\Gamma) = 90,936$
$i_{отр}, \text{ кА}$	$i_{отр}(t_A) = -0,184$	$i_{отр}(t_B) = -0,233$	$i_{отр}(t_B) = -0,272$	$i_{отр}(t_\Gamma) = -0,303$
$u(x, t), \text{ кВ}$	$u(t_A) = 440$	$u(t_B) = 454,7$	$u(t_B) = 466,36$	$u(t_\Gamma) = 475,84$
$i(x, t), \text{ кА}$	$i(t_A) = 1,1$	$i(t_B) = 1,051$	$i(t_B) = 1,012$	$i(t_\Gamma) = 0,98$

Расчёт ведётся следующим образом:

$$u_2(t_B) = 513,2 - 73,2e^{-269 \cdot 0,833 \cdot 10^{-3}} = 454,7 \text{ кВ.}$$

Далее строим графики для  $t = t_0$ .

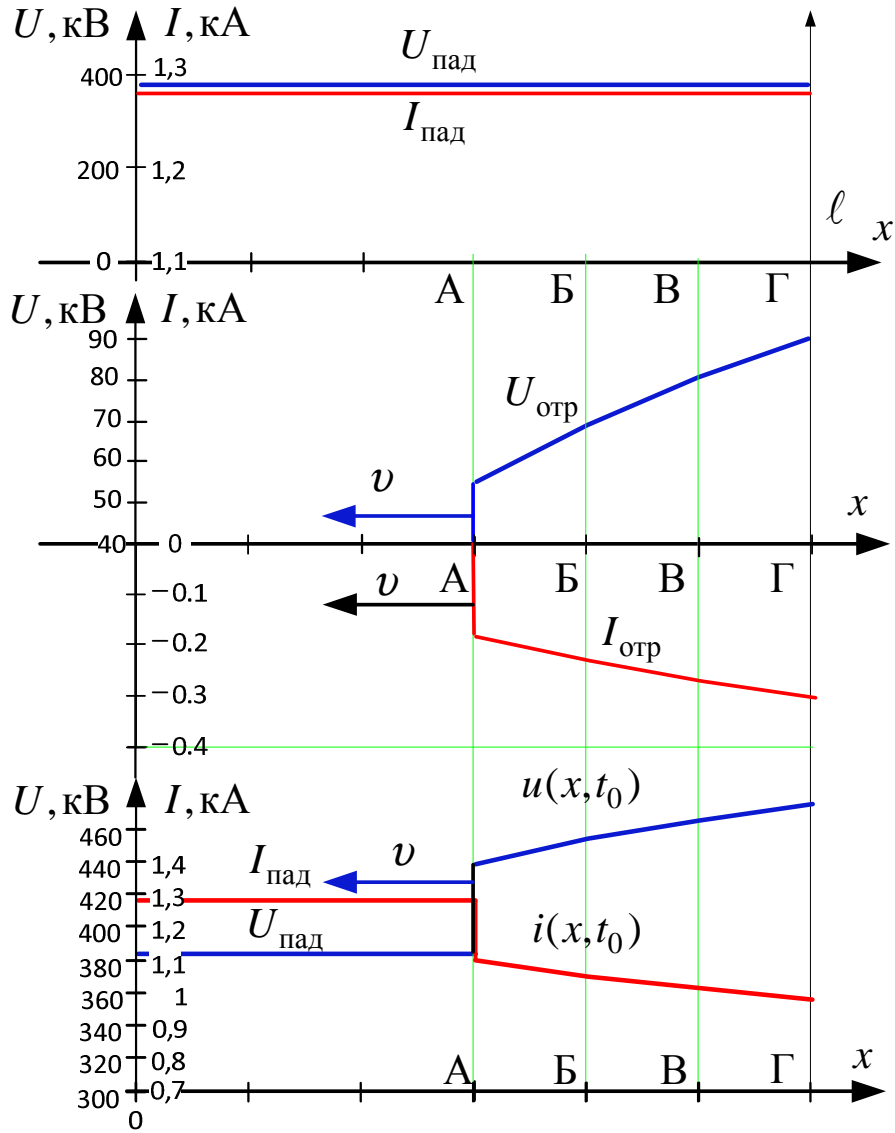


Рис. 227

Ниже приводится расчет программой MathCAD.

## 2. Переходный режим в линии без потерь

$$U_0 := \left| |U(L)| \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\arg(U(L))) \right| \quad U_0 = 1.72 \times 10^5$$

2.1. Волновое сопротивление  $z$  (Ом):

Документ Mathcad ;  
$$z = \sqrt{L_0 / C_0}$$

2.2. Фазовая скорость  $v$  (км/с):

$$v := \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}} \quad v = 2.988 \times 10^5$$

$$t_0 := \frac{3 \cdot L}{2 \cdot v} \quad t_0 = 7.53 \times 10^{-3}$$

2.3. Падающие волны напряжения и тока:

$$U_{\text{пад}} := U_0 \quad I_{\text{пад}} := \frac{U_{\text{пад}}}{Z_B} \quad I_{\text{пад}} = 411.138$$

2.4. Определим  $U_2$  и  $I_2$  классическим методом:

2.4.1. Начальные условия:

$$I_0 := \frac{2 \cdot U_0}{Z_B + \frac{2}{3} \cdot R} \quad U_{20} := I_0 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot R \right)$$

$$I_0 = 337.791 \quad U_{20} = 2.027 \times 10^5$$

2.4.2. Определяем принуждённые составляющие

$$I_{\text{пр}} := \frac{2 \cdot U_0}{Z_B + R} \quad I_{\text{пр}} = 260.923$$

$$U_{2\text{пр}} := I_{\text{пр}} \cdot R \quad U_{2\text{пр}} = 2.348 \times 10^5$$

2.4.3. Определяем корень характеристического уравнения:

$$p := \frac{1}{s \cdot p} + 2 \cdot R + \frac{R \cdot Z_B}{R + Z_B} \quad \text{solve, } p \rightarrow -135.83044575447326522$$

$$p = -135.83$$

2.4.4. Постоянные интегрирования

$$A := I_0 - I_{\text{пр}} \quad B := U_{20} - U_{2\text{пр}}$$

2.4.5. Ток и напряжение в нагрузке:

$$I_2(t) := I_{\text{пр}} + A \cdot e^{p \cdot t}$$

$$U_2(t) := U_{2\text{пр}} + B \cdot e^{p \cdot t}$$



## 2.5. Определяем отраженные волны:

$$U_{отр}(t) := U2(t) - U_{пад} \quad I_{отр}(t) := \frac{-U_{отр}(t)}{Z_B}$$

2.6. Совмещенные графики зависимостей распределения вдоль линии волн тока  $i(x, t_0)$  и напряжения  $u(x, t_0)$ , соответствующих моменту времени  $t_0$  после подключения источника, когда отраженные от конца линии волны напряжения и тока достигли середины линии.

$$\text{ORIGIN} := 0$$

$$x_0 := V \cdot t_0$$

$$N := 3$$

$$n := 0..N$$

$$\delta L := (x_0 - L) \cdot \frac{1}{N}$$

$$L1_n := L + \delta L \cdot n$$

$$t_n := \frac{3 \cdot L}{2 \cdot V} - \frac{L1_n}{V}$$

$$l_k :=$$

$$k := 0..1$$

$$L1_n =$$

1.5·10 <sup>3</sup>
1.75·10 <sup>3</sup>
2·10 <sup>3</sup>
2.25·10 <sup>3</sup>

$$t_n =$$

2.51·10 <sup>-3</sup>
1.673·10 <sup>-3</sup>
8.367·10 <sup>-4</sup>
0

0
2L - x <sub>0</sub>

$$U_{отр}(t_n) =$$

3.997·10 <sup>4</sup>
3.722·10 <sup>4</sup>
3.414·10 <sup>4</sup>
3.068·10 <sup>4</sup>

$$I_{отр}(t_n) =$$

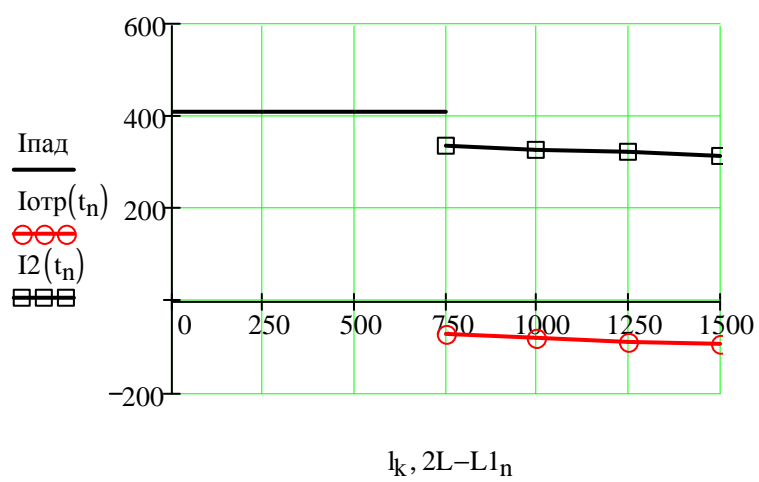
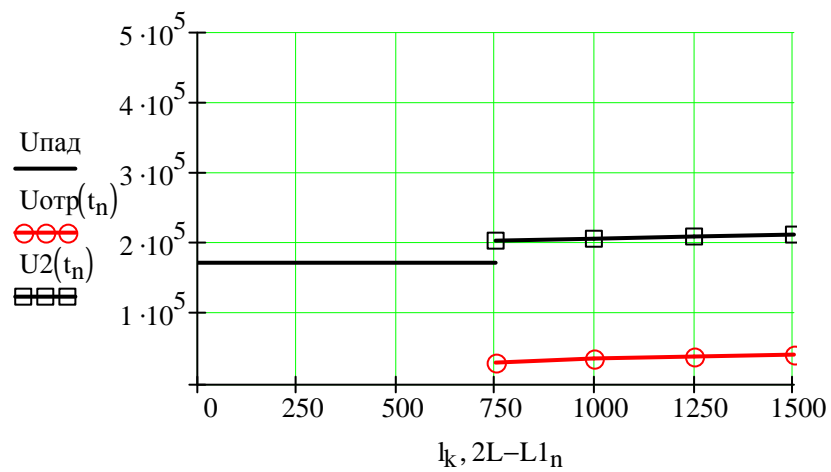
-95.554
-88.975
-81.604
-73.347

$$U2(t_n) =$$

2.12·10 <sup>5</sup>
2.092·10 <sup>5</sup>
2.061·10 <sup>5</sup>
2.027·10 <sup>5</sup>

$$I2(t_n) =$$

315.584
322.163
329.533
337.791



## ЛИТЕРАТУРА

### Обязательная

1. Теоретические основы электротехники. Т. 1: учебник для вузов / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин. – 5-е изд. – СПб.: Питер, 2009. – 512 с.
2. Теоретические основы электротехники. Т. 2: учебник для вузов / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин. – 5-е изд. – СПб.: Питер, 2009. – 432 с.
3. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник для бакалавров / Л.А. Бессонов. – 11-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2012. – 701 с.
4. Основы теории цепей / Г.В. Зевеке [и др.]. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.

### Дополнительная

5. Теоретические основы электротехники: учеб. пособие / Р.Н. Сметанина, Г.В. Носов, Ю.Н. Исаев; Томский политехнический университет (ТПУ), Институт дистанционного образования (ИДО). – 3-е изд., испр. – Томск: Изд-во ТПУ, 2009. – 88 с.
6. Теоретические основы электротехники: учеб. пособие для вузов: в 2 ч. / В.Д. Эськов, А.В. Каталевская; Национальный исследовательский Томский политехнический университет (ТПУ). – Томск: Изд-во ТПУ, 2011. Ч. 1. – 2011. – 165 с.

Учебное издание

НОСОВ Геннадий Васильевич  
КОЛЧАНОВА Вероника Андреевна  
КУЛЕШОВА Елена Олеговна

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ ЧАСТЬ 2

Учебное пособие

Научный редактор  
*доктор технических наук, профессор*  
Ю.П. Усов

**Редактор Н. Т. Синельникова**

Верстка Л.А. Егорова

Подписано к печати                      Формат 60×84/16.

Бумага «Снегурочка». Печать Хероx.


Усл. печ.л. 11,97. Уч.-изд.л.10,84.

Заказ                      . Тираж                      экз.



Национальный исследовательский  
Томский политехнический университет  
Система менеджмента качества  
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована  
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  тпу. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30  
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru