На правах рукописи

Кулешова Елена Олеговна

ЧИСЛЕННО – АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ, ПОЛЕЙ И ЕМКОСТЕЙ ПЛАСТИН НЕКАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ НА ОСНОВЕ ТОМОГРАФИЧЕСКОГО ПОДХОДА И БАЗИСНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Томск – 2007

Работа выполнена в Томском политехническом университете

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Исаев Ю.Н.

Официальные оппоненты: заведующий кафедрой прикладной математики Новосибирского Государственного архитектурно-строительного университета, доктор физико-математических наук, профессор Воскобойников Ю.Е.

ведущий научный сотрудник Института мониторинга экологических и климатических систем СО РАН, г. Томск, доктора физико-математических наук, профессор Нагорский П.М.

Ведущая организация: Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук.

Защита состоится 8 ноября 2007 года в 10 час 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.267.08 при Томском государственном университете по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Томского государственного университета.

Автореферат разослан « 6 » октября 2007 года.

Ученый секретарь диссертационного совета, доктор технических наук, профессор Скворцов А.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность

В отраслях современной техники широко используются электротехнические устройства, в которых необходимо формировать желаемое распределение электростатического поля. В частности в технологии обработки поверхностей материалов электронными и ионными пучками, в ускорительной технике, где необходимо создавать желаемый градиент потенциала электростатического поля для увеличения концентрации частиц в потоке и для фокусировки потока заряженных частиц. В реакторах, используемых в устройствах очистки воды, в которых для увеличения энерговклада необходимы электроды определенной конфигурации с определенной величиной емкости. Это далеко не полный перечень устройств, где необходим расчет распределения электростатических зарядов, полей и емкостей.

Многими авторами были решены частные случаи расчета емкостей плоских проводников (Шишигин С.Л. (2004), Шушкевич Г.Ч.(1999), Лебедев Н.Н., Скальская И.П. (1992), Наркун З.М. (1999, 2000), Шелюто В.А. (1991), Тарновский А.С. (2000)), а так же предложены приближенные и аналитические методы расчета электрической емкости для ограниченных классов проводников. Расчет электрической емкости и электрического поля пластин неканонической формы является задачей актуальной, о чем свидетельствует большое количество публикаций в России и за рубежом. К ним относятся работы Howe G.W.O. (1920), J.C. Cooke (1963), W.R. Smythe (1951), Allen D., Dennis S. (1953), Reitan D.K., Higgins T.I. (1957). Наиболее полно осветили вопрос расчета электрической емкости в своих работах Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г.(1981, 1999), Бинс К., Лауренсон П. (1970), Колечинский Е.С. (1983). Они достаточно подробно рассмотрели основные методы расчета емкости и полей для проводников канонической формы. Однако для проводников более сложной формы в тех же работах приводятся методы, дающие приближенные результаты.

Один из перспективных методов исследования связан с использованием принципа компьютерной томографии (КТ). Преимущество этого метода заключается в том, что его информативность о каждом элементарном объеме исследуемого объекта во много раз выше, чем в других известных методах вычислительной диагностики. Основные математические задачи компьютерной томографии сводятся к решению интегральных уравнений первого рода. Известно, что задачи решения таких уравнений являются некорректно поставленными. При нахождении их приближенных решений необходимо использовать методы регуляризации, позволяющие учитывать дополнительную информацию о решаемой задаче.

Цель работы

Целью диссертационной работы является разработка томографического метода определения распределения заряда на поверхности плоской системы электродов неканонической формы, претендующего на высокую

точность расчетов даже для проводников сколь угодно сложной конфигурации.

Для достижения указанной цели поставлены и решены следующие **основные задачи**:

1. Разработка эффективного способа расчета электрической емкости плоской системы электродов неканонической формы с использованием принципа компьютерной томографии.
2. Разработка способа и алгоритма, позволяющего определять распределение заряда по поверхности проводника при наличии внешнего поля в осесимметричном случае в виде полиномиального разложения.
3. Разработка эффективного алгоритма расчета распределения заряда по поверхности проводника неканонической формы, позволяющего представить решение в виде разложения по собственным функциям с учетом особенностей решения некорректных задач.

Научная новизна исследований заключается в следующем.

1. Впервые разработан способ расчета распределения зарядов и емкостей электродов в виде пластин неканонической формы на основе томографического подхода.
2. Впервые разработан способ конструирования взаимно сопряженных полиномов, позволяющих сводить интегральное уравнение обратного проецирования в алгебраическое уравнение. Полученные полиномы позволяют представлять прямое и обратное решение в аналитическом виде. При использовании сопряженных полиномов коэффициенты разложения искомой функции распределения зарядов интегрального уравнения и известной функций распределения потенциалов остаются неизменными.
3. Впервые получен алгоритм синтеза базис разложения, являющийся наилучшим для интегрального уравнения томографии обратного проецирования и учитывающий особенности решения некорректных обратных задач.

Теоретическая значимость работы заключается в том, что в ней предложены способы и алгоритмы, позволяющие описать и определить пространственное распределение электростатических потенциалов, полей и зарядов для проводников неканонической формы.

Практическая ценность работы заключается в том, что полученный на их основе пакет программ позволяет рассчитывать емкости электродов, имеющих форму сферических сегментов и пластин с произвольными краями, а также может быть использован для расчета полей реакторов водоочистительных систем, при расчете полей электродов устройств высоковольтной техники.

Автором получены полиномы, позволяющие представить расчет распределения зарядов и емкостей в аналитической форме, что является весьма полезным при инженерных вычислениях.

Достоверность результатов диссертации подтверждается строгим применением методов компьютерной томографии, численных методов, методов решения некорректно поставленных задач, теории дифференциальных и интегральных уравнений, а также совпадением в частных случаях с результатами расчетов, выполненных другими авторами с помощью других подходов, удовлетворительным согласием результатов расчетов по разработанным алгоритмам и программам с данными лабораторных экспериментов.

На защиту выносятся следующие положения.

1.Способ расчета распределения электростатических зарядов и емкостей электродов в виде сферических сегментов и плоских пластин неканонической формы на основе томографического подхода.

2. Способ конструирования сопряженных полиномов, позволяющих свести решение интегрального уравнения томографии – обратное проецирование к алгебраическому уравнению. При использовании сопряженных полиномов коэффициенты разложения искомой функции распределения зарядов интегрального уравнения и известной функций распределения потенциалов остаются неизменными.

3. Алгоритм синтеза базиса разложения, являющийся наилучшим для интегрального уравнения томографии обратного проецирования и учитывающий особенности решения некорректных обратных задач.

Апробация результатов

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на VIII, X, XII Всероссийской научно-технической конференции «Энергетика: экология, надежность, безопасность» (Томск, 2002, 2004, 2006), XI Международной научно-практической конференции студентов и молодых ученых «Современные техника и технологии» (Томск, 2003), IV Международной конференции по модификации материалов пучками частиц и плазменными потоками (Томск, 2002), Международной научно - технической конференции «Электротехника, электротехнические системы и комплексы» (Томск, 2003), IX - Международной научно-практической конференции, посвященной 45-летию Сибирского государственного аэрокосмического университета им. Академика М.Ф. Решетникова (Красноярск, 2005).

Публикации

По теме диссертации опубликовано 14 печатных работ, в том числе 5 – в журналах, рекомендованных ВАКом.

Личный вклад автора в работы, выполненные в соавторстве и включенные в диссертацию, состоит в непосредственном участии в разработке методики, проведении расчетов и анализе полученных результатов.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, и заключения, изложенных на 140 страницах машинописного текста, включая 4 таблицы и 85 рисунков, списка литературы, содержащего 85 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования и излагается состояние вопроса, ставятся цель и основные задачи исследования, раскрываются научная новизна, теоретическая и практическая ценность работы, формулируются основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе описываются способ моделирования и алгоритмы восстановления распределения зарядов при известном распределении потенциала на поверхности электродов, с последующим определением емкостей электродов неканонической формы. Задача восстановления распределения заряда сводится, в общем случае, к решению двумерной обратной задачи – решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода. В ряде случаев распределения зарядов оказываются функциями сингулярными, поэтому автором отдано предпочтение алгоритму, позволяющему учитывать особенности функций распределения зарядов. Одним из таких методов является томографический подход. Таким образом, данная глава посвящена описанию алгоритма определения распределения зарядов на поверхности проводника томографическим способом. Так же приведен регуляризирующий алгоритм, позволяющий учитывать особенности решения некорректных обратных задач, к которым относится задача восстановления распределения заряда.

В главе приводится вывод соотношений связывающих распределение зарядов с распределением потенциалов на ее поверхности. В частности для пластины оно имеет вид:

$$U(x_0, y_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iint_D \frac{\sigma(x, y)\, dx\, dy}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}, \quad \{x, y\} \in D . \qquad (1)$$

Здесь $U(x_0, y_0)$ – потенциал проводника, x_0, y_0 – координаты расположения заряда, $\sigma(x, y)$ – искомая плотность поверхностных зарядов.

Выражение (1) в компьютерной томографии известно как обратное проецирование (back projection), оно показывает, что распределение потенциала на поверхности проводника есть низкочастотная версия распределения зарядов на поверхности проводника. Целью главы является сведение выражения двумерного уравнения Абеля к уравнению томографии. Это позволяет использовать хорошо разработанные томографические пакеты для решения уравнения Абеля.

На примерах восстановления осесимметричного и несимметричного распределения зарядов плоских электродов, продемонстрирована работа алгоритма, учитывающего особенности решения обратных задач, и получено хорошее согласие при восстановлении параметров модельных задач.

Также приведены примеры расчета емкостей электродов канонической и неканонической формы.

Для произвольного распределения зарядов $\sigma(x, y)$ на плоской пластине, порождаемого суперпозицией полей внешнего и, создаваемым самой пластиной, были определены томографические проекции этого распределения. Это есть решение прямой задачи. Затем была решена обратная задача – по заданным проекциям восстановлено распределение зарядов на поверхности электрода. Для распределения зарядов на поверхности электродов:

$$\sigma(x,y)=\begin{cases} Ex(x-0{,}1\,;y-0{,}1\,;30)^6+Ex(x+0{,}1\,;y+0{,}1\,;30)^6-Ex(x-0{,}1\,;y+0{,}1\,430)^6, & \mathbf{r}(x,y)\le R \\ 0, \quad \mathbf{r}(x,y)\succ R \end{cases},$$

где $Ex(x,y,\alpha)=\exp\left(-\left(x^2+y^2\right)\alpha\right)$, пространственный вид приведён на рис. 1.

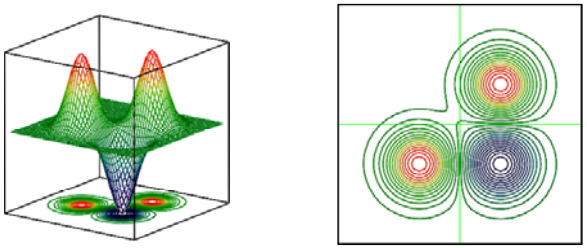


Рис. 1. Пространственное распределение зарядов пластины $\sigma(x, y)$

Было получено распределение проекций изображения, представленных на рис. 2.

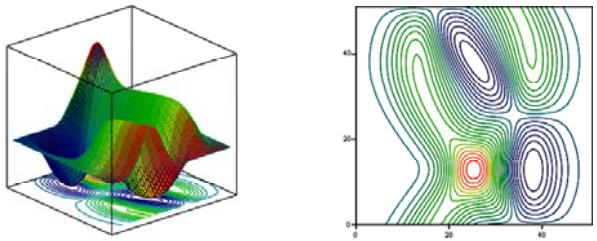
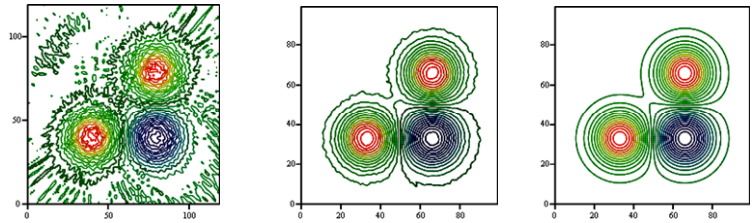


Рис. 2. Пространственное распределение проекций $P(p,\theta)$

Далее выполнено решение обратной задачи и определен заряд в дискретном множестве точек.



а б в

Рис. 3. Восстановленное распределение заряда без учета (а) и с учетом (б) регуляризации решения, модельное распределение (в)

Плотность распределения зарядов $\sigma(\mathbf{r})$ является функцией сингулярной и для выяснения действительного её содержания необходимо вычисление функционала от функции плотности $\sigma(\mathbf{r})$. В нашем случае этот функционал имеет смысл полного заряда проводника Q, который используется в дальнейшем для определения распределения электростатического поля и расчета электрических емкостей проводников. Приведем примеры расчета емкостей плоских электродов различных конфигурации на основе выше описанного томографического алгоритма. На рис. 4-7 приведены верхние и нижние границы значений емкостей, представленных в справочной литературе, а по центру проходят кривые, рассчитанные томографическим методом.

Результаты расчетов ёмкостей некоторых пластин неканонической формы на основе томографического подхода приведены на рис. 8-10.

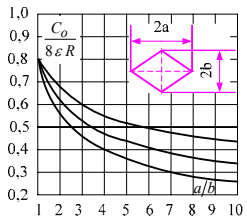


Рис. 4. Емкость пластины в форме ромба

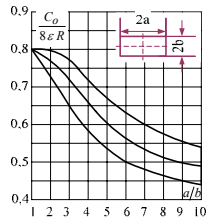


Рис. 5. Емкость прямоугольной пластины

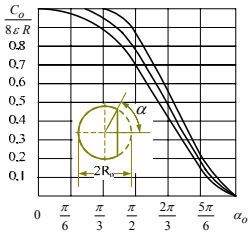


Рис. 6. Емкость пластины в форме кругового сегмента

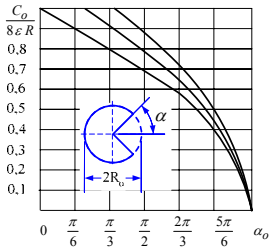


Рис. 7. Емкость пластины в форме кругового сектора

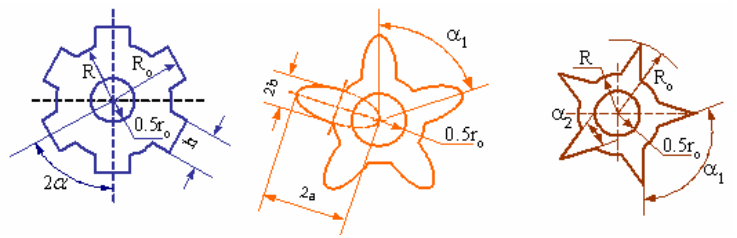


Рис. 8. Геометрические размеры проводников неканонической формы.

Рис. 9. Распределение потенциалов на поверхностях проводников в форме «шайба», «цветок», «звезда»

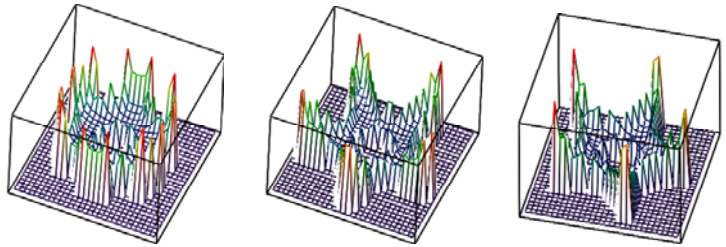


Рис. 10. Распределение зарядов по поверхностям проводников

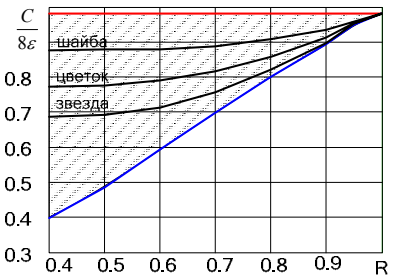


Рис. 11. Емкость пластины в форме «звезда», «цветок», «шайба»

Вторая глава посвящена описанию способа расчета распределения заряда по поверхности проводника при наличии внешнего поля в осесимметричном случае. В этом случае решение интегрального уравнения Абеля предлагается искать в виде полиномиального разложения. Такой подход к

решению поставленной задачи позволяет заменить сложное интегральное уравнение, связывающее распределение зарядов на пластине, потенциал пластины и потенциал внешнего поля, алгебраическим. При этом, распределение потенциалов на поверхности пластины и распределение зарядов на поверхности электродов представляются через две группы взаимно сопряженных полиномов. Коэффициенты разложений распределения потенциалов и распределения зарядов одинаковы. Полученные полиномы позволяют представлять прямое и обратное решение в аналитическом виде. Приведены примеры решения модельных задач с учетом и без учета регуляризации решения.

В данной главе была рассмотрена проводящая пластина, помещенная во внешнее электростатическое поле. На поверхности проводника происходит перераспределение зарядов. Возникшее распределение зарядов компенсирует (гасит) влияние внешнего поля. Для тонкой пластины соотношение между распределением зарядов на пластине, потенциалом пластины и потенциалом внешнего электростатического поля записываются следующим образом:

$$-U^0(\mathbf{r}_0)+U_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_D\frac{\sigma(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}d\mathbf{r},\ \ \mathbf{r}=\{x,y,z\},\ \mathbf{r}_0=\{x_0,y_0,z_0\},\ \mathbf{r},\mathbf{r}_0\in D,\quad (2)$$

где $U^0(\mathbf{r}_0)$ – потенциал внешнего поля, U_0 – потенциал проводника, $\sigma(\mathbf{r})$ – распределение зарядов на проводнике.

Цель работы заключалась в том, чтобы заменить сложное интегральное уравнение (2) алгебраическим, то есть получить аналитические соотношения, связывающие потенциал результирующего поля и распределения зарядов на проводнике.

Во второй главе было доказано, что решение уравнения (2) в осесимметричном случает иметь вид:

$$\sigma(\rho)=-\frac{4\varepsilon_0}{\pi\rho}\frac{d}{d\rho}\int_\rho^R\frac{sds}{\sqrt{s^2-\rho^2}}\frac{d}{ds}\int_0^s\frac{U(t)tdt}{\sqrt{s^2-t^2}}.\quad (3)$$

Представленная зависимость позволила получить пару сопряженных полиномов. Первая часть полиномов предназначена для представления потенциала в виде степенной зависимости $U(\rho)=\rho^m$, тогда как другая часть предназначена для представления распределения зарядов. Аналитические соотношения между парой сопряженных полиномов для четного и нечетного случаев приведены ниже.

$$
\sigma(\rho)=\begin{cases}
\dfrac{M(1,1)}{2}\dfrac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}} & \text{при } m=1,\\[2ex]
-N(m,1)\displaystyle\sum_{k=0}^{m/2}c\left(\frac{m}{2},k\right)\frac{\left(R^2-\rho^2\right)^{k-\frac{1}{2}}\left(\rho^{-2}mR^2-m-2\rho^{-2}kR^2-1\right)\rho^{-2k+m}}{2k+1} & \text{при } m-\text{четном},\\[2ex]
-\dfrac{M(m,1)}{m+1}\left(\dfrac{-R^m}{\sqrt{R^2-\rho^2}}+\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{F2\left(\frac{m+1}{2},k\right)}{2^kF1\left(\frac{m+1}{2},k\right)}\cdot\left(2k\rho^{2k-2}\sqrt{R^2-\rho^2}-\frac{\rho^{2k}}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\right)R^{m-2k}\right)\right)- & \\[2ex]
-\dfrac{F(m)M(m,1)}{2^{\frac{m+1}{2}}\left(\frac{m+1}{2}\right)!}\left[\ln\left(\dfrac{R+\sqrt{R^2-\rho^2}}{\rho}\right)\rho^{m-1}(m+1)-\left(\dfrac{1}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\cdot\dfrac{\rho^{(m+1)}}{R+\sqrt{R^2-\rho^2}}+\rho^{(m+1)}\right)\right] & \\[2ex]
 & \text{при } m-\text{нечетном}.
\end{cases}
$$

Здесь

$$
F(m)=\prod_{k=0}^{\frac{m-1}{2}}2k+1,\ F1(m,k)=\prod_{s=1}^{k}m-s,\ F2(m,k)=\prod_{s=1}^{k}2m-2s+1,\ c(m,k)=\frac{m}{(k-m)!k!},
$$

$$
M(m,s)=\frac{F(m)s^m\pi(m+1)}{2^{\frac{m+3}{2}}\left(\frac{m+1}{2}\right)!},\ N(m,s)=(m+1)s^m\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}}\frac{(-1)^k}{2k+1}c\left(\frac{m}{2},k\right).
$$

Сведем в таблицу выражения для $U(\rho)=\rho^m$ и $\sigma(\rho)=\psi_m(\rho)$ различных значений m с точностью до мультипликативной постоянной равной $4\varepsilon_0/\pi$.

Для четных степеней

$U(\rho)$	$\sigma(\rho)$
1	$\psi_0(\rho)=\dfrac{1}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$
ρ^2	$\psi_2(\rho)=-2\dfrac{R^2-2\rho^2}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$
ρ^4	$\psi_4(\rho)=-\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{4\rho^2R^2-8\rho^4+R^4}{\sqrt{R^2-\rho^2}}$

Для нечетных степеней

$U(\rho)$	$\sigma(\rho)$
ρ	$\psi_1(\rho)=\dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}-\ln\left(\dfrac{R+\sqrt{R^2-\rho^2}}{\rho}\right)\right)$
ρ^3	$\psi_3(\rho)=-\dfrac{3}{8}\pi\left(\dfrac{\left(R^2-3\rho^2\right)R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}+3\rho^2\ln\left(\dfrac{R+\sqrt{R^2-\rho^2}}{\rho}\right)\right)$
ρ^5	$\psi_5(\rho)=-\dfrac{15}{128}\pi\left(\dfrac{\left(2R^4+5R^2\rho^2-15\rho^4\right)R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}+15\rho^4\ln\left(\dfrac{R+\sqrt{R^2-\rho^2}}{\rho}\right)\right)$

Используя табличные соотношения можно определить любое интересующее нас распределение зарядов при известном распределении потенциала – это решение обратной задачи. Для этого необходимо представить распределение потенциала поля в виде разложения по многочленам

$$
U(\rho)=\sum_{m=0}^{N}A_m\rho^m\ . \qquad (4)
$$

Коэффициенты разложения ряда (4) легко определить, используя метод наименьших квадратов. Распределение зарядов при этом определяется соотношением:

$$
\sigma(\rho)=\frac{4\varepsilon_0}{\pi}\sum_{m=0}^{N}A_m\psi_m(\rho)\ . \qquad (5)
$$

Вид полиномов ряда (5) определяется выражениями из таблицы.

В главе 2, соотношения (4) и (5) были использованы для определения распределения зарядов пластин с отверстием и без него, а также пластин в виде сферического сегмента. В качестве иллюстрации приведем описание алгоритма расчета пластины в виде сферического сегмента.

Решением интегрального уравнения (2), при известном потенциале сегмента $U(s)$, будет выражение:

$$
\sigma(\alpha,\theta)=-\frac{2}{\pi R\sin(\theta)}\frac{d}{d\theta}\int_{\theta}^{\alpha}dt\,\frac{tg\left(\frac{t}{2}\right)\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{U(s)tg\left(\frac{s}{2}\right)ds}{\sqrt{tg\left(\frac{t}{2}\right)^2-tg\left(\frac{s}{2}\right)^2}\cos\left(\frac{s}{2}\right)}}{\sqrt{tg\left(\frac{t}{2}\right)^2-tg\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}}\ . \qquad (6)
$$

После замены переменных в (6) $x = tg(\alpha/2)$, $\rho = tg(\theta/2)$, и необходимых сокращений получаем окончательное выражение для определения распределения зарядов на поверхности пластины при наличии внешнего поля

$$\tilde{\sigma}(R,\rho) = -\frac{(1+\rho^2)}{2R_0\pi}\frac{d}{\rho d\rho}\int_{\rho}^{R} dt \frac{\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\tilde{U}(x)xdx}{\sqrt{t^2-x^2}}}{\sqrt{t^2-\rho^2}}, \qquad (7)$$

где $\tilde{U}(x) = \frac{2U(2\arctan(x))}{\sqrt{1^2+x^2}}$, $\tilde{\sigma}(R,\rho) = \sigma\left(tg\left(\frac{\alpha}{2}\right), tg\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$.

Таким образом, задача сведена к известному интегральному соотношению (3), которое решается с помощью полиномиального разложения полученного автором.

Определим распределение заряда и емкость пластины в виде сферического сегмента с находящегося в пределах телесного угла $\alpha = \pi/3, \theta = \{0,\pi\}$, Потенциал пластины $U(x) = U_0 = 1B$, радиус сферы $R = 1мм$.

Для решения задачи разложим потенциал сферического сегмента по степеням $\tilde{U}(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_k^N A_k \rho^k$. Коэффициенты разложения ряда $\mathbf{A} = \{A_1\ A_2\ A_3 .....A_N\}^T$ определим, используя метод наименьших квадратов. Число коэффициентов разложения определяется точностью разложения раскладываемой функции.

После определения коэффициентов разложения находим распределения зарядов. Геометрические параметры сферического сегмента и результат восстановления приведен на рис. 12.

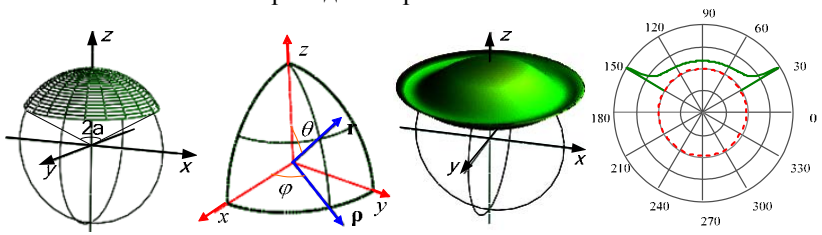


Рис. 12. Геометрические параметры сферического сегмента и пространственное распределение зарядов и профиль функции $\sigma(a,\theta)$

Емкость заряда определяется выражением $C = \frac{R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sigma(\theta,\alpha)\sin(\theta)d\theta}{U_0}$.

Для описанных выше геометрических параметров сферического сегмента и заданного потенциала пластины U_0 емкость равна $C/\varepsilon = 8.375\cdot 10^{-3}$.

Используя полученные соотношения, так же можно решить прямую задачу – задачу определения распределения потенциала $U(\rho)$ на поверхности электрода при известном распределении зарядов $\sigma(\rho)$.

В третьей главе автором предлагается алгоритм расчета распределения зарядов по поверхности проводника неканонической формы при наличии произвольного внешнего поля. Предлагаемый алгоритм позволяет находить решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода в виде разложения по собственным функциям интегрального оператора Фредгольма, что существенно упрощает решение сложной некорректной задачи. Такой подход позволяет свести решение интегрального уравнения, представленного в виде СЛАУ, к решению группы скалярных уравнений. Разложение состояний системы по собственным функциям имеет оптимальный вид, это значит, что число членов разложения в собственный базис всегда меньше числа членов любого другого разложения. В этом случае «разлагаемая» и «разлагающая» функции имеют близкую форму (есть некая степень похожести), то есть имеют высокий коэффициент корреляции.

Алгоритм позволяет учитывать особенности решения некорректной обратной задачи в виде оптимального гашения высокочастотных компонент разложения. Работа алгоритма продемонстрирована на примерах решения модельных задач восстановления распределения зарядов в случае осесимметричного и несимметричного распределений потенциалов.

При воздействии внешнего поля возникает перераспределение зарядов, результирующее поле является суперпозицией полей создаваемого зарядами на поверхности электродов и внешним источником. Этот факт выражается в виде интегрального уравнения Фредгольма первого рода:

$$U(\boldsymbol{\rho}_0) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\sigma(\boldsymbol{\rho})}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0|}d\boldsymbol{\rho},\ \boldsymbol{\rho} = \{x,y\},\ \boldsymbol{\rho}_0 = \{x_0,y_0\}, \qquad (8)$$

где $U(\boldsymbol{\rho}_0)$ - потенциал результирующего поля, $\sigma(\boldsymbol{\rho})$ - искомое распределение зарядов на поверхности электродов. Известно, что уравнение (8) является некорректным по Тихонову, то есть решение этого уравнения $\sigma(\boldsymbol{\rho})$ чувствительно к неточным исходным данным $U(\boldsymbol{\rho}_0)$, в которых неизбежно присутствуют шумы.

Первый этап алгоритма заключается в поиске собственных функций и собственных чисел двумерного интегрального уравнения (8).

$$\int \frac{\Psi(\boldsymbol{\rho}')d^2\boldsymbol{\rho}'}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|} = \lambda\Psi(\boldsymbol{\rho}), \qquad (9)$$

где $\Psi(\boldsymbol{\rho})$ - собственные функции, λ - собственные числа.

Второй этап алгоритма заключается в представлении искомого решения $\sigma(\boldsymbol{\rho})$ и потенциала результирующего поля $U(\boldsymbol{\rho})$ в виде разложения в ряд по собственным функциям:

$$\sigma(\boldsymbol{\rho}) = \sum_n C_n \Psi_n(\boldsymbol{\rho}),\ U(\boldsymbol{\rho}) = \sum_n a_n \Psi_n(\boldsymbol{\rho}). \qquad (10)$$

Затем определяются коэффициенты разложения a_n обобщенного ряда Фурье известной функции $U(\boldsymbol{\rho})$. Представления функций $\sigma(\boldsymbol{\rho})$ и $U(\boldsymbol{\rho})$ в виде рядов (10) подставляются в интегральное уравнение (8), которое редуцируется в алгебраическое, в силу свойств собственных функций (9):

$$\sum_n a_n \Psi_n(\boldsymbol{\rho}) = \sum_n \lambda_n C_n \Psi_n(\boldsymbol{\rho}).$$

В силу линейной независимости собственных функций получаем: $C_n = \dfrac{a_n}{\lambda_n}$.

Таким образом, было получено искомое решение в виде разложения по собственным функциям $\sigma(\boldsymbol{\rho}) = \sum_n \dfrac{a_n}{\lambda_n} \Psi(\boldsymbol{\rho})$.

Задача нахождения таких собственных функций $\Psi_n(\boldsymbol{\rho})$ сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$\Psi_k(\boldsymbol{\rho})\lambda_k = \int W(\boldsymbol{\rho}) K(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \Psi_k(\boldsymbol{\rho}') d^2\boldsymbol{\rho}', \qquad (11)$$

здесь $K(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$ - ядро интегрального уравнения , $\Psi_k(\boldsymbol{\rho})$, λ_k - собственные функции и собственные значения интегрального уравнения (11), соответственно,

$$W(\boldsymbol{\rho}) = \begin{cases} 1, & |\boldsymbol{\rho}| \le R, \\ 0, & |\boldsymbol{\rho}| > R \end{cases} \text{ - функция зрачка.}$$

Решение интегрального уравнения (11) находилось в факторизованном виде: $\Psi(\boldsymbol{\rho}) = R(\rho)\Theta(\theta)$.

Прежде всего, определим вид азимутальной функции $\Theta(\theta)$. Отметим, что функция $\Theta(\theta)$ должна быть непрерывной и периодической функцией угла θ с периодом 2π. Подставляя решение (9) в уравнение (8) и выполнив замену переменных: $\zeta = \theta' - \theta$, $d\zeta = d\theta$, $\theta' = \zeta + \theta$, получим:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R W(\rho) K(\rho, \rho', \zeta) R(\rho') \Theta(\zeta + \theta) \rho d\rho d\zeta = \lambda R(\rho) \Theta(\theta). \qquad (12)$$

Из уравнения (12), в силу непрерывности, периодичности и единственности решения, следует, что $\Theta(\zeta + \theta) = \Theta(\zeta)\Theta(\theta)$. Общее решение этого

уравнения, имеющее период 2π, хорошо известно и имеет вид $\exp(im\theta)$. Следовательно, функция $\Theta(\theta)$ записывается следующим образом:

$$\Theta(\theta) = \exp(im\theta), \text{ где } m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (13)$$

Для определения радиальной матрицы перехода, подставим выражение (13) в (12) и после некоторых преобразований получаем однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\int_0^R \rho\, d\rho\, W(\rho) R(\rho) \int_0^{2\pi} d\zeta \exp(im\zeta) K(\rho, \rho', \zeta) = \lambda R(\boldsymbol{\rho}).$$

Введем обозначение: $K_m(\rho, \rho') = \int_0^{2\pi} d\zeta \exp(im\zeta) K(\rho, \rho', \zeta)$. $\qquad (14)$

Перепишем интеграл (14) в виде:

$$K_m(\rho, \rho') = 2 \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \int_0^{\pi} \frac{\exp(im\zeta)\, d\zeta}{\sqrt{1 - \dfrac{2\rho\rho'}{\rho^2 + \rho'^2} \cos(\zeta)}}.$$

Введем обозначение: $N_m(\rho, \rho', \zeta) = 2 \dfrac{\exp(im\zeta)}{\sqrt{1 - \dfrac{2\rho\rho'}{\rho^2 + \rho'^2} \cos(\zeta)}}$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$

Выполнив суммирование $N_m(\rho, \rho', \zeta)$ по углу ζ от 0 до 2π было рассчитано ядро при различных m.

Далее определяем собственные функции для различных азимутальных составляющих $\Psi^0(\rho), \Psi^1(\rho), \Psi^2(\rho), \ldots$ и вектора собственных чисел $\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \ldots$ Пространственное изображение полученных собственных функций приведено на рис.13-14.

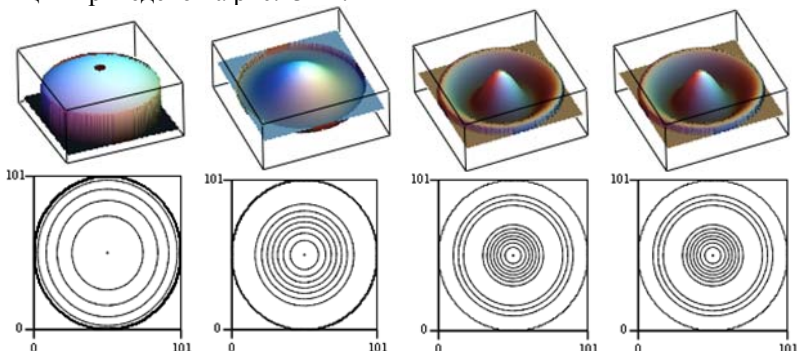


Рис. 13. Контурные линии и изометрическое изображение первых четырех собственных функций при $m = 0$

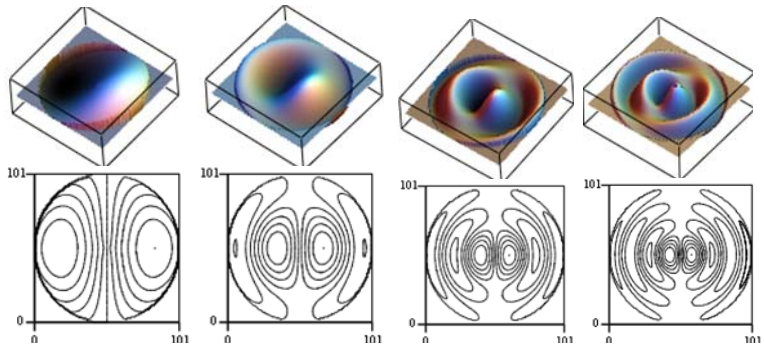


Рис. 14. Контурные линии и изометрическое изображение первых четырех собственных функций при $m = 1$

Третий этап алгоритма заключается в фильтрации полученного решения в силу неизбежного наличия шумов в найденных коэффициентах разложения. На этом этапе производится гашение высокочастотных составляющих на основе использования сглаживающего функционала Тихонова, в котором учитывается согласование параметра регуляризации с уровнем шума измеряемой функции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведём основные результаты проведённых исследований.

1. Разработан способ определения пространственного распределения электростатических потенциалов, полей и зарядов для электродной системы в виде сферических сегментов и плоских пластин. На основе предложенного математического описания получен пакет программ, позволяющие рассчитывать емкости электродов, имеющих форму сферических сегментов и пластин с произвольными краями.

2. Предложен способ синтеза сопряженных полиномов, позволяющих сводить задачу двумерного интегрального уравнения Абеля к алгебраическому уравнению. При использовании сопряженных полиномов, коэффициенты разложения искомой (распределение зарядов) и известной (распределение потенциалов) функций интегрального уравнения остаются неизменными. Полученные полиномы позволяют получить полезные аналитические соотношения для представления распределения зарядов и емкостей.

3. Разработан алгоритм и пакет программ для синтеза собственных функций двумерного интегрального уравнения Абеля для произвольной формы краев границ. Любое состояние системы можно описать в виде линейной комбинации собственных функции в наиболее простом виде. Полученные собственные функции обладают свойствами оптимальности, и являются наилучшим, по сравнению с любым другим, разложением в смысле размерности пространства разложения. Причем с помощью полученной системы собственных функций и соответствующих собственных чисел легко решается как прямая, так и обратная задачи для любого состояния системы.

4. Разработаны алгоритмы регуляризации для двумерного интегрального уравнения Абеля на основе использования сглаживающего функционала Тихонова, позволяющего снизить паразитное влияние высокочастотных составляющих измеряемой функции на результат решения. Разработанный алгоритм апробирован при решение интегрального уравнения в виде спектрального разложения и при замене интегрального уравнения на систему линейных алгебраических уравнений.

5. Проведены моделирования восстановления распределения электростатических зарядов на поверхности электродов по известному распределению потенциалов при наличии шума и без него. Разработанные алгоритмы и пакет программ могут быть использованы для расчета полей реакторов водоочистительных систем, при расчете полей электродов устройств высоковольтной техники, для расчета емкостей электротехнических и радио устройств, для моделирования фокусирующих полей заряженных пучков, предназначенных для технологической обработки поверхностей образцов.

<u>Основные материалы диссертации опубликованы в следующих работах</u>

1. Воскобойников Ю.Е., Исаев Ю.Н., Литасов В.А., Колчанова В.А., Кулешова Е.О. Регуляризирующий алгоритм идентификации параметров схемы замещения электрического разряда ч.I. // Известия Томского политехнического университета. – 2007. – № 1, – Т.310. – с. 79-82.
2. Воскобойников Ю.Е., Исаев Ю.Н., Литасов В.А., Колчанова В.А., Кулешова Е.О. Регуляризирующий алгоритм идентификации параметров схемы замещения электрического разряда ч.II. // Известия Томского политехнического университета. – 2007. – № 2, – Т.310. – с. 73-77.
3. Исаев Ю.Н., Колчанова В.А., Кулешова Е.О., Шпильная О.П. Определение электротехнических параметров эквивалентной схемы замещения разрядного промежутка озонатора. // Известия Томского политехнического университета. – 2006. – № 1, – Т.309. – с. 59-65.
4. Исаев Ю.Н., Кулешова Е.О., Шпильная О.П. Томографический метод расчета распределения заряда и емкостей плоских электродов неканонической формы. // Известия Томского политехнического университета. – 2005. – № 7, – Т.308. – с. 91-95.
5. Исаев Ю.Н., Колчанова В.А., Кулешова Е.О., Шпильная О.П. Определение оптимальной формы воздействующего импульса озонатора // Известия Томского политехнического университета. – 2005. – № 7, – Т.308. – с. 87-91.
6. Исаев Ю.Н., Кулешова Е.О. Расчет распределения зарядов электрического поля на поверхности плоской системы электродов, помещенной

во внешнее электростатическое поле. // XII Всероссийская научно-техническая конференция "Энергетика: экология, надежность, безопасность", – Томск: Изд-во ТПУ, 2006. – с. 69 – 72.
7. Исаев Ю.Н., Кулешова Е.О., Шпильная О.П. Вейвлет пакет для оптимальной обработки сигналов. // IX Международная научная конференция, посвященная 45-летию Сибирского государственного аэрокосмического университета им. М.Ф. Решетникова, – Красноярск, 2005. – с. 276 – 278.
8. Исаев Ю.Н., Кулешова Е.О., Шпильная О.П. Адаптивное восстановление замутненных аэрокосмических изображений с использованием вейвлет преобразований. // IX Международная научная конференция, посвященная 45-летию Сибирского государственного аэрокосмического университета им. М.Ф. Решетникова, – Красноярск, 2005. – с. 248 – 250.
9. Носов Г.В., Колчанова В.А., Кулешова Е.О. К расчету эффективности передачи энергии импульсным трансформатором. // VIII Всероссийская научно-техническая конференция "Энергетика: экология, надежность, безопасность", – Томск: Изд-во ТПУ, 2002. – С. 64 – 67.
10. Носов Г.В., Усов Ю.П., Кулешова Е.О. Электромашинные генераторы с периодически изменяющейся индуктивностью – мощные источники питания ускорителей. // VI Международная конференция по модификации материалов пучками частиц и плазменными потоками.– Томск: Изд-во ТПУ, 2002. – с. 165 – 167.
11. Носов Г.В., Кулешова Е.О. К расчету напряжений и токов импульсного трансформатора // VIII Всероссийская научно-техническая конференция "Энергетика: экология, надежность, безопасность", – Томск: Изд-во ТПУ, 2002. – с. 70 – 73.
12. Носов Г.В., Кулешова Е.О. Сжатие во времени импульсов напряжений и токов. // IX Международная научно-практическая конференция "Современные техника и технологии", – Томск: Изд-во ТПУ, 2003. – с. 256– 258.
13. Носов Г.В., Кулешова Е.О. Численное моделирование на ЭВМ петель гистерезиса ленточных ферромагнитных сплавов. // Международная научно-техническая конференция "Электроэнергетика, электротехнические системы и комплексы", – Томск: Изд-во ТПУ, 2003. – с. 256 – 259.
14. Носов Г.В., Кулешова Е.О. К расчету петель гистерезиса ферромагнитных сплавов. // X Всероссийская научно-техническая конференция "Энергетика: экология, надежность, безопасность", – Томск: Изд-во ТПУ, 2004. – с. 83 – 86.