

Лекция №1 Основные показатели и математические модели теории надежности.

Литература:

Основная:

1. В. В. Болотин. Ресурс машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1990.
2. В. В. Болотин. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984.
3. Харионовский В.В. Надежность и ресурс конструкций газопроводов. - М. ОАО "Издательство "Недра", 2000. -467с.
4. В.П. Когаев, Н.А. Махутов, А.П. Гусенков. Расчеты деталей машин на прочность в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1985.
5. Надежность технических систем: Справочник/Под редакцией И. А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1985.
6. В. Н. Фомин. Нормирование показателей надежности. – М.: Издательство стандартов, 1986.
7. ГОСТ 27.002-89 «Надежность в технике. Основные понятия. Термины и определения»

Дополнительная:

8. Курочкин В.В., Малюшин Н.А., Степанов О.А., Мороз А.А. Эксплуатационная долговечность нефтепроводов. - М. ООО "Недра-Бизнесцентр", 2001. - 231 с.
9. И. В. Крагельский, М. Н. Добычин, В. С. Камбалов. Основы расчетов на трение и износ. – М.: Машиностроение, 1977.
10. Оценка показателей надежности магистральных трубопроводов. - М.: ООО "Недра-Бизнесцентр", 2003. - 167 с.

Основные понятия и определения

Технический ресурс – величина, характеризующая запас возможной суммарной наработки объекта от начала его эксплуатации или ее возобновления после ремонта до перехода в предельное состояние.

Срок службы – календарная продолжительность эксплуатации объекта до его перехода в предельное состояние, измеряемая в единицах времени.

Различают нормативный ресурс и нормативный срок службы, определяемые на этапе разработки проектного задания с учетом современного технического состояния, мирового уровня и темпов научно-технического прогресса в данной отрасли.

На стадии эксплуатации оперируют понятиями остаточного ресурса или остаточного срока службы, которые являются индивидуальными характеристиками технических объектов.

Надежность машин и конструкций – способность технического объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, хранения и транспортирования.

В понятие надежности входит ряд свойств объекта: *безотказность, долговечность, ремонтпригодность, сохраняемость*.

Безотказность – свойство объекта непрерывно сохранять работоспособное состояние в течение некоторого времени или наработки.

Долговечность – свойство объекта, заключающееся в его способности не достигать предельного состояния в течение некоторого времени при установленной системе технического обслуживания и ремонта.

Сохраняемость – свойство объекта сохранять в заданных пределах значения параметров, характеризующих способности объектов выполнять требуемые функции в течение и после хранения или транспортирования.

Ремонтпригодность – свойство объекта в приспособленности к поддержанию и восстановлению работоспособного состояния путем технического обслуживания и ремонта.

Отказ – событие, которое заключается в нарушении работоспособного состояния объекта.

Повреждение – событие, заключающееся в нарушении исправного состояния объекта, при этом его работоспособное состояние может сохраняться.

Отказы классифицируют:

- а.) по характеру проявления – *внезапные и постепенные*;
- б.) по стадиям эксплуатации объекта – *прирабочные и деградационные*;
- в.) по причинам возникновения – *конструктивные, производственные и эксплуатационные*;
- г.) по последствиям – *критические и некритические (существенные и несущественные)*.

Предельное состояние – состояние объекта, при котором его дальнейшая эксплуатация недопустима или нецелесообразна либо восстановление его работоспособного состояния невозможно или нецелесообразно.

Показатели надежности

Показателями надежности называют определенные согласно правилам статистической теории надежности количественные характеристики одного или нескольких свойств, составляющих надежность объекта.

Различают показатели безотказности, долговечности, сохраняемости и ремонтпригодности, а также комплексные показатели.

Вероятность безотказной работы – вероятность $P(t)$ того, что на заданном участке наработки (времени) отказ не возникает.

Для массовых объектов статистическая оценка вероятности безотказной работы определяется из соотношения:

$$\check{P}(t) = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \eta(t - t_k), \quad (1)$$

где N – число объектов;

t_k – продолжительность времени до отказа каждого из объектов;

$\eta(\cdot)$ – единичная функция Хевисайда.

Для определения вероятности безотказной работы на определенном отрезке времени $[0, t]$ удобна оценка:

$$\check{P}(t) = [N - n(t)] \times \frac{1}{N} \quad (2)$$

где $n(t)$ – число объектов, отказавших к моменту времени t .

Лекция №2 Показатели надежности и математические модели теории надежности

Дополнение функции $P(t)$ до единицы:

$$Q(t) = 1 - P(t) \quad (3)$$

будет являться функцией равной вероятности того, что объект откажет хотя бы один раз на отрезке времени $[0, t]$, будучи работоспособным в начальный момент времени. В определенных случаях данную функцию можно называть функцией риска и обозначить как $H(t)$.

Функция распределения случайной величины – времени работы объекта до первого отказа T равна дополнению до единицы вероятности безотказной работы при $t = T$:

$$F(T) = 1 - P(T). \quad (4)$$

Принимая условие, что величина T распределена непрерывно, плотность вероятности этой величины с точностью до знака определим через производную от функции надежности:

$$p_t(T) = -P'(t) \mathbb{I}_{t=T} \quad (5)$$

Если объект невосстанавливаемый или характер отказа таков, что ремонт или восстановление объекта не целесообразны, то время до первого отказа имеет смысл срока службы объекта или его ресурса. Математическое ожидание времени T связано с плотностью вероятности соотношением

$$E[T] = \int_0^{\infty} p_T(T) \cdot T \cdot dT \quad (6)$$

где $E[\cdot]$ – оператор математического ожидания.

Подставляя (5) в (6) и проинтегрировав полученное выражение по частям с учетом (4), получим

$$E[T] = \int_0^{\infty} P(t) dt \quad (7)$$

Разброс величины T характеризуется дисперсией

$$D[T] = E[T^2] - (E[T])^2 \quad (8)$$

где $E[T^2]$ - второй начальный момент распределения:

$$E[T^2] = \int_0^{\infty} p_T(T) \cdot T^2 dT \quad (9)$$

Интенсивность отказов – совпадает с условной плотностью вероятности возникновения отказов, определенной при условии, что до рассматриваемого момента времени отказ не возник

$$\lambda(t) = -P'(t) / P(t) \quad (10)$$

Статистическую оценку для интенсивности отказов можно принять в виде

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{n(t + \Delta t / 2) - n(t - \Delta t / 2)}{[N - n(t)] \cdot \Delta t} \quad (11)$$

Параметр потока отказов показатель безотказности восстанавливаемых объектов

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[v(t + \Delta t) - v(t)]}{\Delta t} \quad (12)$$

где $v(t)$ - число отказов, наступивших от начального момента времени до достижения наработки t .

В практике часто используют усредненный параметр потока отказов

$$\bar{\mu}(t) = \frac{E[v(t_2) - v(t_1)]}{t_2 - t_1} \quad (13)$$

Статистическая оценка параметров производится на основании формулы

$$\hat{\mu}(t) = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (14)$$

Средняя наработка на отказ – величина, обратная параметру потока отказов. В частности, статистическая оценка средней наработки на отказ

$$\hat{T} = \frac{1}{\hat{\mu}(t)}$$

Соотношения между рассматриваемыми показателями надежности приведены в таблице 1.

Таблица 1

Показатель надежности	$Q(t)$	$P(t)$	$f(t)$	$\lambda(t)$
$Q(t)$	$Q(t)$	$\ell - P(t)$	$\int_0^t f(t) dt$	$1 - \exp\left(-\int_0^t f(t) dt\right)$
$P(t)$	$\ell - Q(t)$	$P(t)$	$\int_0^{\infty} f(t) dt$	$\exp\left(-\int_0^t f(t) dt\right)$

$f(t)$	$\frac{dQ(t)}{dt}$	$-\frac{dP(t)}{dt}$	$f(t)$	$\lambda(t) \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) dt\right)$
$\lambda(t)$	$\frac{dQ(t)/dt}{1-Q(t)}$	$-\frac{d \ln P(t)}{dt}$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(t) dt}$	$\lambda(t)$

Математические модели теории надежности

При постановке большинства задач показатели надежности элементов считают заданными. Статистическая обработка результатов испытаний позволяет выбрать подходящие аналитические зависимости для изменения показателей во времени и оценивать численные значения необходимых параметров. Для невозстанавливаемых элементов обычно ищут подходящие аналитические аппроксимации либо для вероятности безотказной работы, либо для интенсивности отказов.

Если интенсивность отказов задана, формулу (10) можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно функции $P(t)$. Решение этого уравнения при начальном условии $P(t)=1$ дает

$$P(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(t) \cdot d\tau\right]. \quad (15)$$

Если вероятность отказа в начальный момент времени $t=0$ отлична от нуля, то вместо (15) имеем

$$P(t) = P(0) \exp\left[-\int_0^t \lambda(t) \cdot d\tau\right] \quad (16)$$

1. Если интенсивность отказов $\lambda(t) = \text{const}$; тогда приходим к экспоненциальному закону надежности

$$P(t) = \exp(-\lambda \cdot t). \quad (17)$$

Математическое ожидание наработки до отказа равно $1/\lambda$, поэтому формулу (17) можно записать в виде

$$P(t) = \exp\left(-\frac{t}{t_c}\right) \quad (18)$$

где $t_c = E[T]$. Дисперсия $D[T]$ с учетом (8) и (9) составляет $1/\lambda^2$, так что коэффициент вариации наработки до отказа равен единице.

В виду крайней простоты экспоненциальный закон надежности получил широкое распространение в прикладных расчетах, в том числе за пределами его применимости.

Условия, при которых вероятность безотказной работы может быть введена согласно (17):

Вероятность того, что объект, проработавший безотказно до момента времени t , не откажет на отрезке $[t, t_1]$, составляет $P(t_1|t) = \frac{P(t_1)}{P(t)}$. Подстановка сюда выражения (17) дает $P(t) = \exp(-\lambda \cdot t_1)$. Таким образом, экспоненциальный закон описывает надежность нестареющих объектов.

Часто применяется модель, в основе которой лежит распределение Вейбула.

Лекция №3

Наиболее предпочтительней использование данного распределения в тех случаях, когда вероятность отказов меняется с течением времени.

Распределению Вейбула соответствует интенсивность отказов

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{t_c} \cdot \left(\frac{t}{t_c} \right)^{\beta-1} \quad (19)$$

где β – параметр формы; t_c – параметр масштаба.

В этом случае вероятность безотказной работы определится как

$$P(t) = \exp \left[- \left(\frac{t}{t_c} \right)^\beta \right] \quad (20)$$

Данная модель носит более полный характер, что следует из приведенных зависимостей:

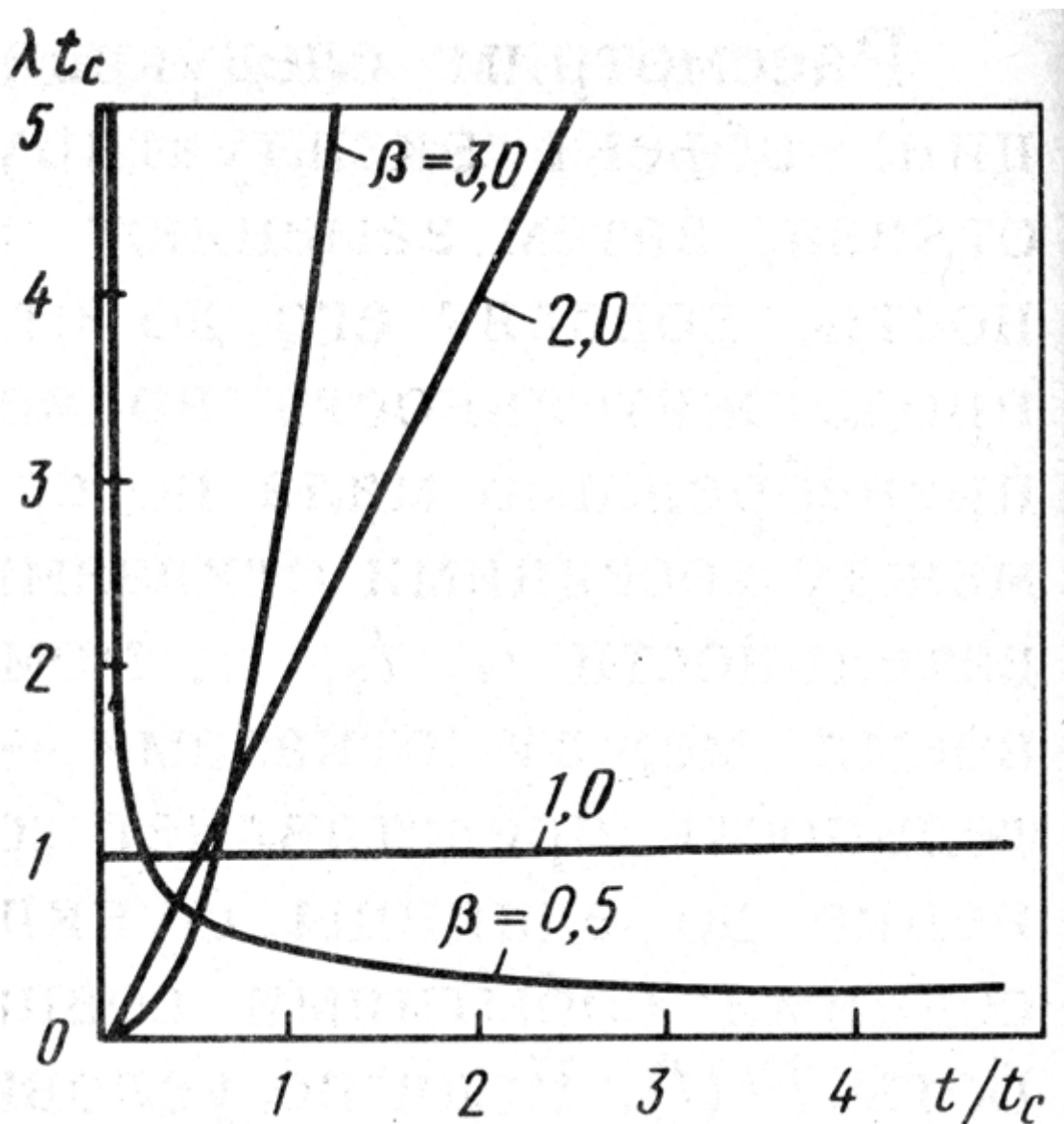


Рис. 1

Рассмотрим случай испытаний серии объектов, которые после выхода из строя взаимно заменяются в моменты времени $t_1, t_2, t_3, \dots$. Если $P(t)$ имеет вид (17), поток случайных событий – пуассоновский. Вероятность наступления k отказов на отрезке времени $[0, t]$ следует закону Пуассона:

$$Q_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot \exp(-\lambda t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (21)$$

при $k=0$ получаем $Q_0(t) = P(t)$

Простейшие задачи теории надежности

Различают последовательное, параллельное и смешанное соединение элементов системы или отдельного объекта.

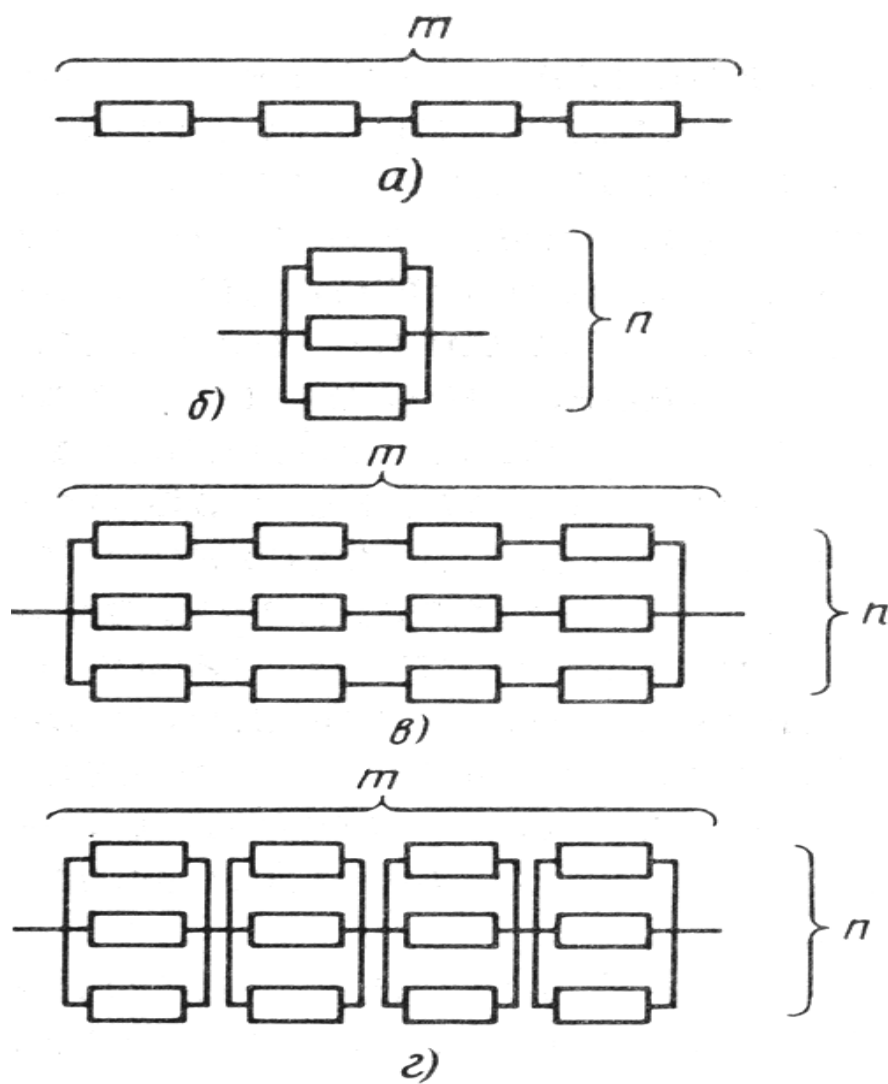


Рис. 2

При последовательном соединении

$$P = \prod_{k=1}^m P_k \quad (22)$$

если $P_1 = P_2 = P_m = P_0$

$$P = P_0^m \quad (23)$$

При экспоненциальном распределении

$$P(t) = \exp(-m\lambda t) \quad (24)$$

Математическое ожидание срока службы в этом случае можно определить в виде:

$$E[T] = \int_0^{\infty} P(t) \cdot dt = t_c / m \quad (25)$$

При параллельном соединении элементов

$$Q = \prod_{k=1}^m Q_k$$

Следовательно

$$P = 1 - \prod_{k=1}^m (1 - P_k) \quad (26)$$

если $P_1 = P_2 = P_m = P_0$

$$P = 1 - (1 - P_0)^m \quad (27)$$

При схеме общего резервирования

$$P = 1 - \left(1 - \prod_{k=1}^m P_k \right)^n \quad (28)$$

при дублировании (n-1) раз.

При схеме раздельного резервирования

$$P = \prod_{k=1}^m [1 - (1 - P_k)^n] \quad (29)$$

Постановка задач теории надежности машин конструкций

История развития теории надежности проиллюстрирована следующей диаграммой

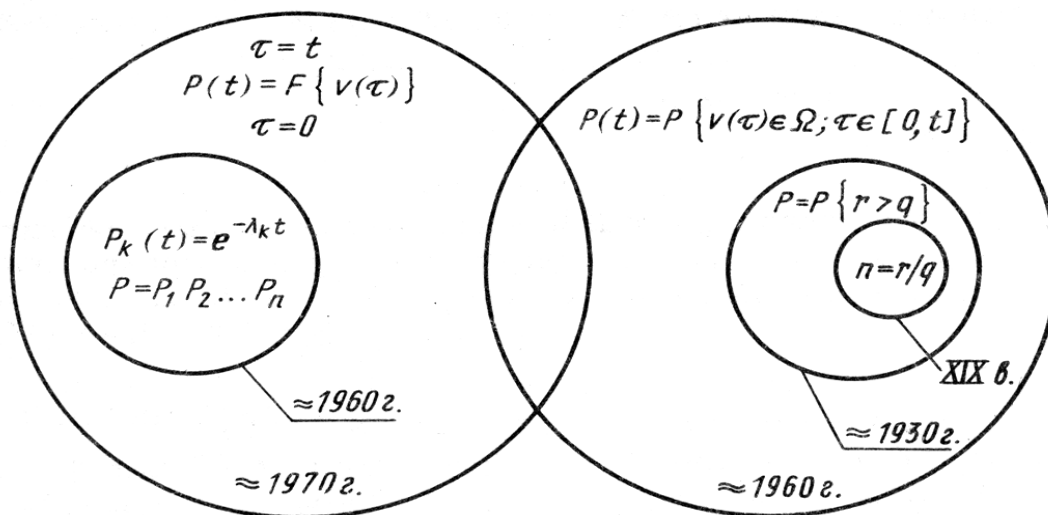
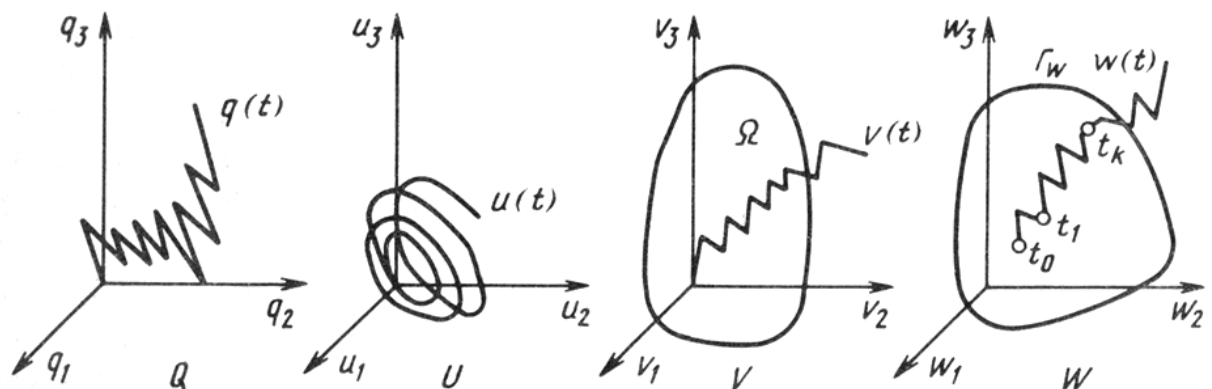


Рис. 3



$$P(t) = P\{V(\tau) \in \Omega; \tau \in [t_0, t]\} \quad (30)$$

$$P(t | T_k) = P\{V(\tau | T_k) \in \Omega(T_k); \tau \in [t_k, t]\} \quad (31)$$

где $V(t)$ – вектор качества; Ω – область допустимых значений; T_k – объем диагностической информации об объекте; t_k – время последнего наблюдения; τ – текущее значение времени; t_0 – начало временного отрезка наблюдения.

Лекция 4

Решение задачи возможно различными способами. Один из них заключается в надлежащем выборе пространства качества V . Например, для ранее рассмотренного случая:

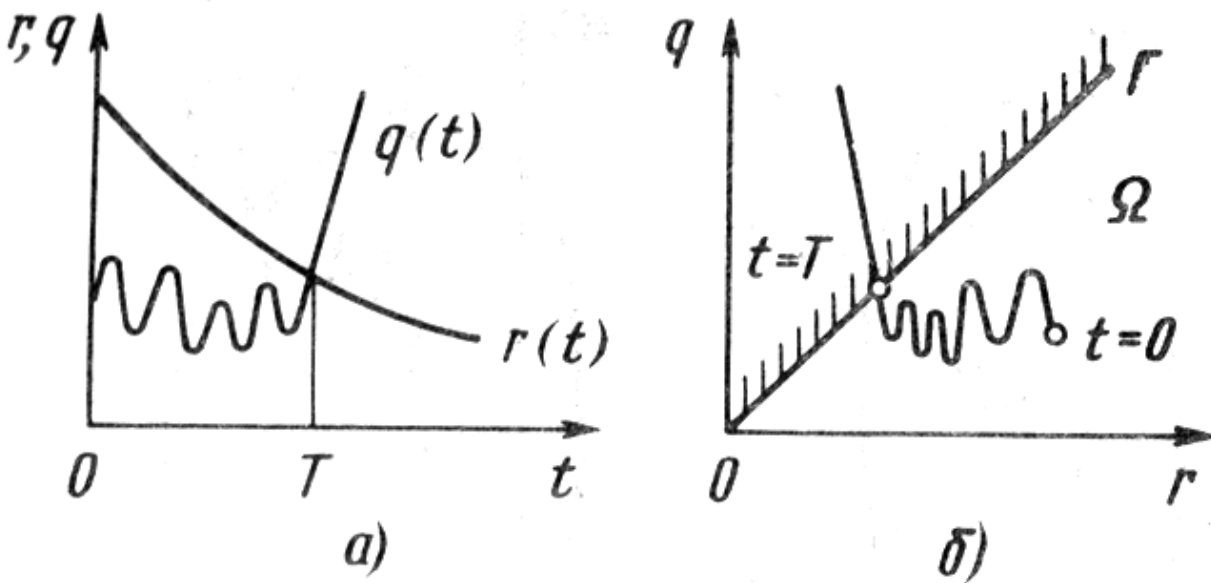


Рис. 4.

Можно выбрать за параметр качества $v = r/q$ или $v = r - q$ придем к задаче о выбросах случайного процесса за детерминистический уровень.

Другой подход основан на применении метода условных функций надежности. В этом случае вектор $q(t)$ задаем, используя вспомогательный числовой вектор s , так что

$$q = q(t|s)$$

$$P(t | r, s) = P\{v(\tau | r, s) \in \Omega(r, s); \tau \in [t_0, t]\} \quad (32)$$

$$P(t) = \iint_{D(r, s)} P(t | r, s) \cdot p(r, s) \cdot dr \cdot ds \quad (33)$$

$$P(t) = \int_{D(r)} P(t | r) \cdot p_r(r) \cdot dr \quad P(t) = \int_{D(s)} P(t | s) \cdot p_s(s) \cdot ds \quad (34)$$

$$P(t) = \sum_k P(t | s_k) \cdot P_k \quad (35)$$

$$H(t) = \iint_{D(r,s)} H(t | r,s) \cdot p_r(r) \cdot p_s(s,t) \cdot dr \cdot ds \quad (36)$$

Элементарные модели отказов

В зависимости от множества состояний объекта различают модели с дискретным временем и модели с непрерывным временем.

В зависимости от размерности пространства различают одномерные, двумерные и т.д. модели.

В зависимости от предистории нагружения различают марковские модели и кумулятивные модели.

Рассмотрим специальные модели, которые наиболее подходят для описания отказов в машинах и конструкциях. Если нагружение дискретное и однократное, а связь между векторами выражена конечными функциональными зависимостями, тогда формула (30) примет вид:

$$P(t) = \int_{\Omega} p(v) \cdot dv \quad (37)$$

$$P = \iint_{\Omega} p(r,q) \cdot dr \cdot dq \quad (38)$$

при $\Omega = \{r,q : v(r,q) \in \Omega\}$

В более общем случае имеем:

$$P(t_k) = \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} p(v_k; t_k | v_{k-1}; t_{k-1}) \dots p(v_0; t_0) \cdot dv_k \dots dv_0 \quad (39)$$

где $p(v_0; t_0)$ - плотность вероятности вектора v при $t=t_0$;

$p(v_k; t_k | v_{k-1}; t_{k-1})$ - переходные плотности вероятности.

Если нет зависимости от предистории нагружения то из (39) получим

$$P_k(t_k) = P_k(t_k) \cdot P_{k-1}(t_{k-1}) \cdot \dots \cdot P_0(t_0)$$

$$\text{здесь } P_k(t_k) = \int_{\Omega} p(v_k, t_k) \cdot dv_k \quad (k = 0, 1, \dots)$$

При заданной плотности вероятности $p(r, q)$ вероятность безотказной работы равна интегралу

$$P = \iint_{r-q \geq 0} p(r, q) \cdot dr \cdot dq$$

Классификация отказов

Различают некритические, критические и ресурсные отказы.

К некритическим отказам относят отказы, не приводящие к длительным или опасным перебоям в работе объекта. Это отказы второстепенных и относительно легко восстанавливаемых (заменяемых объектов). Надежность по отношению к данной группе отказов называется эксплуатационной.

Критические отказы – это отказы, приводящие к авариям и возникающие вследствие неблагоприятного сочетания нагрузок и воздействий, стихийных явлений.

Ресурсные отказы – это отказы, лимитирующие ресурс объекта в целом при нормальных условиях эксплуатации и нормальных условиях окружающей среды.

Лекция 5

Модели накопления повреждений

Выработка ресурса, как правило, связана главным образом с накоплением необратимых повреждений в деталях машин и конструкций. Происхождение по-

вреждений может носить различный характер. Различают повреждения механического происхождения, физико-химического происхождения и смешанного характера.

Различие повреждений в их происхождении позволяет описать их накопление только на основе полуэмпирических моделей, которые служат для решения инженерных задач, связанных с расчетом на долговечность и прогнозированием ресурса.

Самые простые модели основаны на введении скалярной меры накопления повреждений

$$\psi = \psi(t) \quad (40)$$

Данная функция может принимать значения на выбранном отрезке времени от 0 до 1. Значение $\psi = 0$ соответствует случаю, когда повреждения отсутствуют. Значение $\psi = 1$ соответствует уровню повреждений, при которых деталь или узел выработали свой ресурс.

К основным недостаткам следует отнести отсутствие физической зависимости между процессами повреждений и многозначность толкования начальных и конечных значений функции.

Несмотря на указанные недостатки, данные функции достаточно широко используются в инженерных расчетах. Полагая, что мера ψ полностью характеризует уровень повреждений и пренебрегая последствием, общая форма уравнения для меры повреждений при непрерывном времени может быть представлена в виде дифференциального уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = f(\psi, q) \quad (41)$$

В случае кумулятивного процесса функция, стоящая в правой части должна быть неотрицательной. Кроме того должна быть интегрируемой по времени и непрерывной от ψ .

Процесс $q(t)$ включает силовые, деформационные, температурные, химические и другие воздействия, влияющие на выработку ресурса. В простейшем случае это скалярный процесс изменения параметра, с точностью до которого заданы все внешние силы действующие квазистатически.

Если в начальный момент времени $t = 0$ мера повреждений имела значение $\psi = 0$, то время до исчерпания ресурса определится на основании решения обратной краевой задачи для уравнения (41) с граничными условиями

$$\Psi(0) = 0; \quad \Psi(t) = 1. \quad (42)$$

В качестве аргумента функции q может быть использовано дискретное время или последовательность блоков нагружения.

Уравнение (41) можно представить в виде конечно-разностного аналога

$$\psi_n - \psi_{n-1} = \omega(\psi_{n-1}, q_n) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (43)$$

с граничными условиями

$$\Psi(0) = 0; \quad \Psi(N) = 1 \quad (44)$$

если примем, что n – номер цикла или блока, N – номер цикла или блока, соответствующий исчерпанию ресурса.

Сглаженная аппроксимация уравнения (43) может быть представлена в виде:

$$\frac{d\psi}{dn} = f(\psi, q) \quad (45)$$

Линейное суммирование повреждений

Если правая часть уравнения (41) не зависит от меры повреждений, то при заданном процессе нагружения $q(t)$ его решение при начальном условии $\Psi(0) = 0$ имеет вид:

$$\psi(t) = \int_0^t f[q(\tau)] d\tau \quad (46)$$

Введя условие $\Psi(T) = 1$, и обозначение $T_b(q) = 1/f(q)$, получим уравнение для определения T :

$$\int_0^T \frac{d\tau}{T_b[q(\tau)]} = 1 \quad (47)$$

где $T_b(q)$ – ресурс при заданном режиме нагружения.

При дискретном нагружении из уравнения (43) можно получить:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{N_b(q_n)} = 1 \quad (48)$$

где $N_b(q_n) = 1/\omega(q)$ – число циклов или блоков, соответствующих исчерпанию ресурсов при заданном режиме нагружения.

Уравнения (47) и (48) отражают правило линейного суммирования повреждений соответственно для непрерывного и дискретного процесса нагружения.

Простейший способ экспериментальной проверки правила линейного суммирования заключается в анализе соотношений:

$$\frac{\Delta t_1}{T_b(q_1)} + \frac{\Delta t_2}{T_b(q_2)} = 1 \quad (49)$$

$$\frac{n_1}{N_b(q_1)} + \frac{n_2}{N_b(q_2)} = 1 \quad (50)$$

при соответственно непрерывном и дискретном процессе нагружения.

Автомодельный процесс накопления повреждений

В случае, когда мера повреждений при базовых испытаниях зависит нелинейно от времени, то при $q = \text{const}$ введением безразмерной переменной $t/T_b(q)$ зависимости мер повреждений при произвольном q можно привести к единому виду

$$\psi_b = g\left[t/T_b(q)\right] \quad (51)$$

После дифференцирования уравнения (51) получим

$$\frac{d\psi_b}{dt} = \frac{f_1(\psi)}{T_b(q)}, \quad (52)$$

где $f_1(\psi)$ - производная обратной функции $g^{-1}(\psi_b)$.

Интегрирование (52) при начальном условии $\Psi(0) = 0$ с условием разделения переменных дает

$$\int_0^\psi \frac{d\psi}{f_1(\psi)} = \int_0^t \frac{d\tau}{T_b[q(\tau)]}. \quad (53)$$

Предполагая существование интегралов функций, окончательно получим

$$\psi(t) = g\left[\hat{\psi}(t)\right] \quad (54)$$

$$\text{где } \hat{\psi}(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{T[q(\tau)]} \quad (55)$$

Аналогично можно получить и для дискретного процесса нагружения

$$\psi_n = g\left[\hat{\psi}_n\right] \quad (56)$$

$$\text{где } \hat{\psi}_n = \int_0^t \frac{1}{N_b(q_k)} \cdot \quad (57)$$

Лекция 6

Модель накопления повреждений В.В. Болотина

Обобщение теорий суммирования повреждений и разработка теории учитывающей историю нагружения, были выполнены В.В. Болотиным. Основным моментом в предложенной им модели был отказ от автомодельности меры повреждений и учет зависимости предельного числа циклов нагружения от вида функции напряжений, т.е. истории нагружения.

В этом случае выражение для скорости накопления повреждений (41) принимает вид

$$\omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = k \frac{\rho(\sigma)}{N_n(\sigma)} \cdot \left[\frac{kt}{N(\sigma)} \right]^{-\rho(\sigma)-1}, \quad (58)$$

где $\rho(\sigma)$ - некоторая функция напряжения σ ;

k – коэффициент пропорциональности;

$\psi(t)$ - функция накопления повреждений;

$N_n(\sigma)$ - число циклов, соответствующее разрушению при заданном режиме нагружения.

Многостадийная модель накопления повреждений

Данные модели отражают тот факт, что многие процессы накопления повреждений состоят из двух или более стадий, каждая из которых протекает по своим законам. Наиболее полно данная модель может применяться, например, для определения остаточного ресурса элементов машин и оборудования при наличии различных стадий приработки деталей в процессе всего жизненного цикла.

В этом случае допуская, что, введя безразмерное время, отнесенное к продолжительности каждой стадии, зависимость $\psi_b(t)$ можно привести к виду

$$\psi_b(t) = \psi_{k-1} + (\psi_k - \psi_{k-1}) \cdot g_k \cdot \left[\frac{t - T_{b,k-1}(q)}{T_{bk}(q) - T_{b,k-1}(q)} \right];$$

$$T_{b,k-1}(q) < t \leq T_{b,k}(q); \quad (k = 1, \dots, m) \quad (59)$$

2. Процессы накопления повреждений в материале элементов, приводящих в конечном итоге к разрушению;
3. Пластические или недопустимые и необратимые изменения в деталях, препятствующие функционированию аппаратуры;
4. Интенсивный рост технологических дефектов в конструкциях и оборудовании, подвергшимся сложным процессам обработки, в частности увеличение трещиноватости материала и т.д.
5. Воздействие вибраций на параметры и сигналы электрических трактов, вызывающие сбои, отказы и ошибки функционирования аппаратуры.

Нагрузки, действующие на машины и оборудование в общем случае можно классифицировать следующим образом:



Рис. 5.

В случае постоянных статических нагрузок или временных динамических и детерминистических нагрузок, которые могут иметь вероятностный характер изменения в заданном диапазоне, в качестве показателей надежности могут использоваться коэффициент безопасности или запас прочности, которые могут служить в качестве аналогов вероятности безотказной работы или риска выхода оборудования из рабочего состояния.

При условии, что прочность и напряжение подчиняются нормальному закону распределения, то коэффициент безопасности определяется в виде

$$S_f = \frac{\mu_s}{\mu_{ss}} \geq 1,$$

а запас прочности из соотношения

$$S_m = S_f - 1, \text{ или } S_m = \frac{\mu_s - \mu_{\max}}{\sigma_s}$$

где μ_s и μ_{ss} - средняя прочность и среднее напряжение;

σ_s и σ_{ss} - среднеквадратическое отклонение прочности и напряжения;

$\mu_{\max} = \mu_{ss} + k\sigma_{ss}$; $k=3 \div 6$.

Лекция № 7

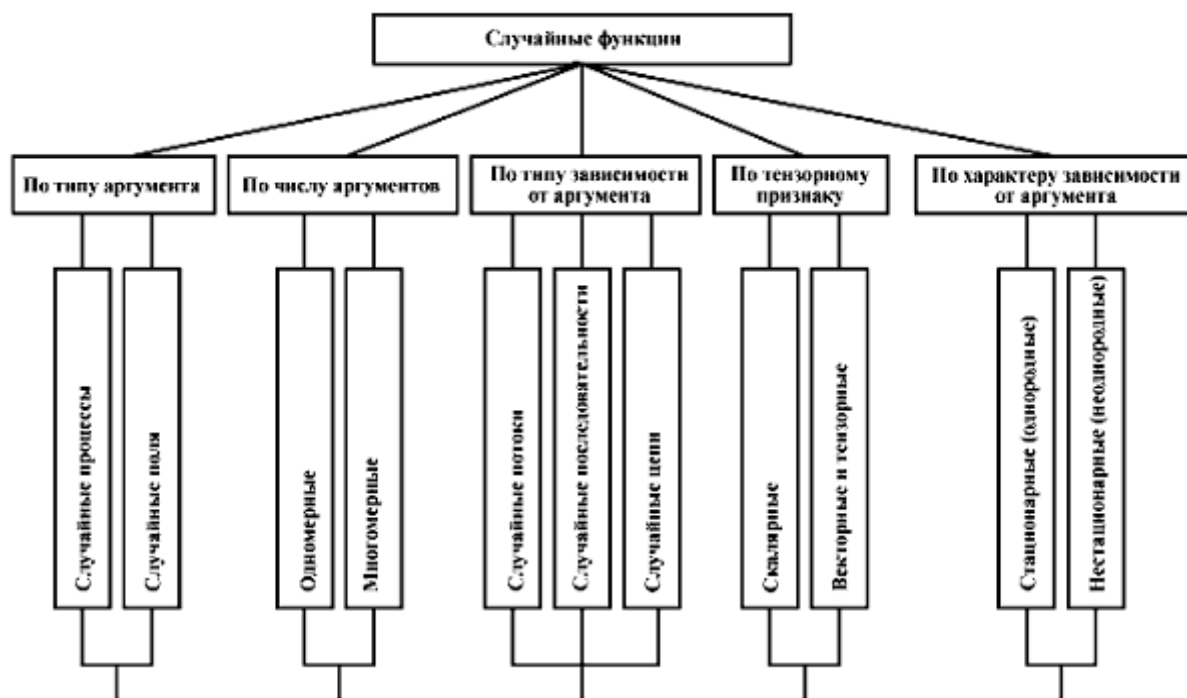


Рис. 6.

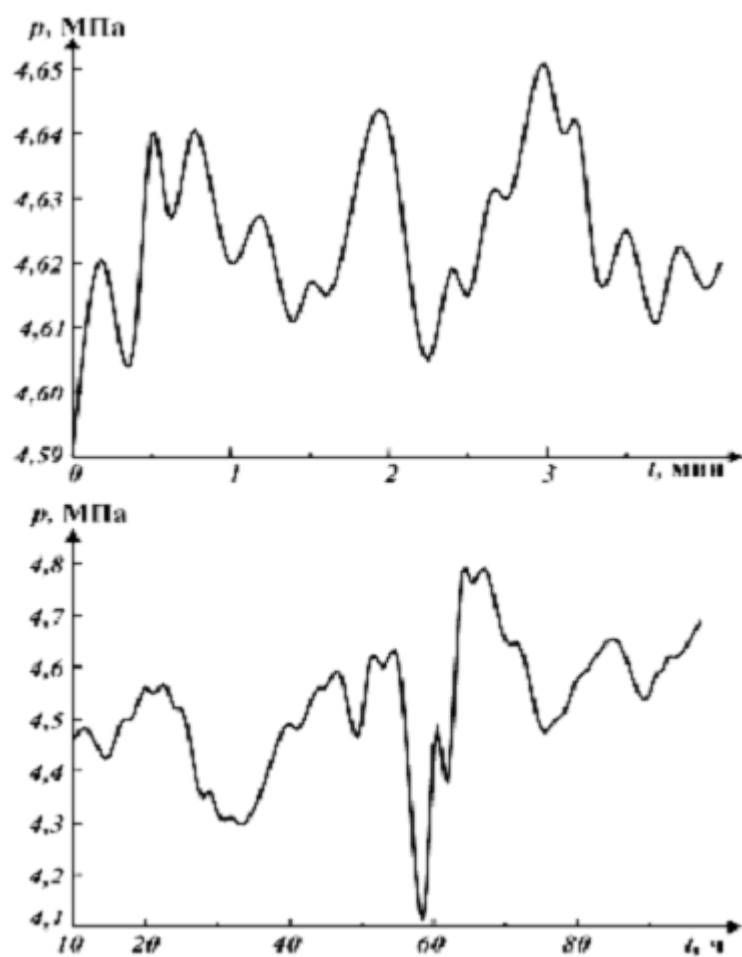


Рис. 7.

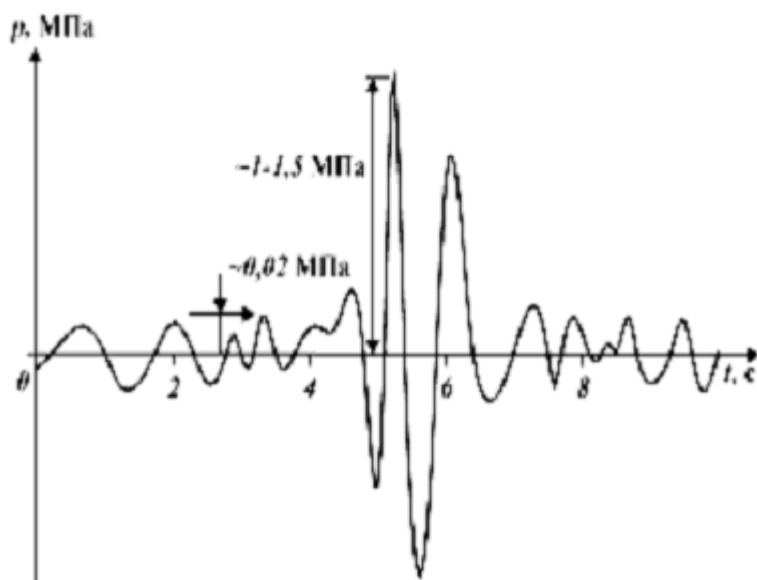


Рис. 8.

Характеристики нагруженности магистральных газопроводов

Характеристика	Трубопро- воды КС	Линейная часть
Амплитуды напряжений σ_a , МПа, по выш- шей частоте	1–2 (10–20 – переменной режим)	2–4
Среднее статическое напряжение σ_m , МПа	~250	~200
Амплитуда деформации цикла в концен- траторах $\Delta\epsilon$, %	0,1	0,05–0,1
Число циклов нагружения в год	$10^4 – 10^5$ (по высшей час- тоте ~ 10^4)	10^4

Влияние разброса механических свойств на процесс накопления поврежде- ний

Рассмотрим влияние статистического разброса свойств материалов, деталей и узлов на оценку ресурса с применением полуэмпирических моделей накопления повреждений.

Для характеристики свойств введем некоторый вектор прочности $\mathbf{r}$, компоненты которого - случайные величины. Свойства генеральной совокупности образцов, элементов или деталей опишем с помощью совместной плотности вероятности $p_r(\mathbf{r})$ компонентов данного вектора.

Обозначив ресурс при базовых испытаниях в непрерывном режиме в виде

$T_b(q | r)$, а при дискретном $N_b(q | r)$ получим простейшие соотношения, которые могут принять следующий вид:

$$T_b(q | r) = t_c \left(\frac{r}{q} \right)^m \quad (62)$$

$$N_b(q | r) = N_c \left(\frac{r}{q} \right)^m \quad (63)$$

где t_c – постоянная, имеющая размерность времени или наработки; m – положительный показатель.

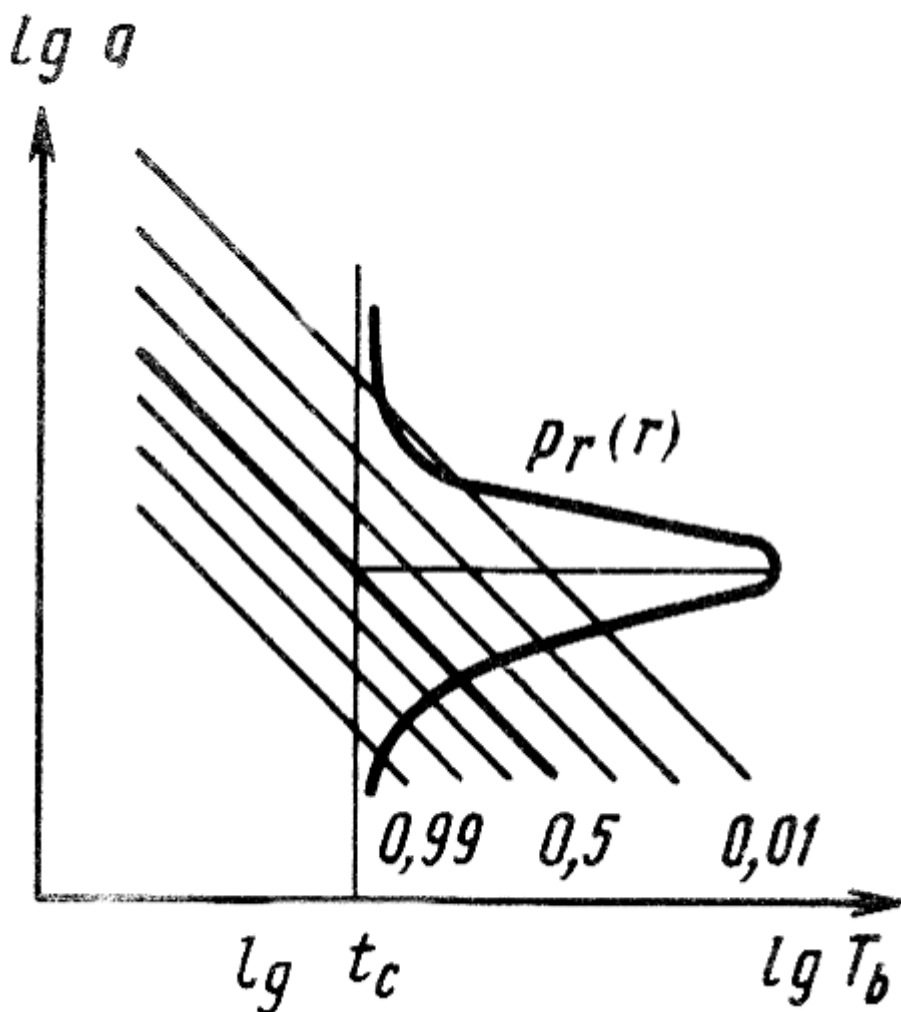


Рис. 9.

Лекция №8

Построение полуэмпирических моделей по данным ресурсных испытаний

Исходным материалом для построения полуэмпирических моделей служат результаты ресурсных испытаний при однородных режимах нагружения. Эти результаты, как правило, обнаруживают значительный статистический разброс, связанный со случайной природой явления. Традиционная форма представления результатов в виде кривых, например усталости и длительной прочности, по существу не отражает этого разброса. Дополнением к кривым регрессии служат эмпирические оценки для законов распределения ресурса (при заданном уровне нагружения) или для характеристик нагружения (при заданном ресурсе).

Общий метод построения моделей, учитывающий статистический разброс, состоит в следующем:

- на основании кривых регрессии подбирается аналитическая зависимость между характеристиками нагружения и характеристиками ресурса;

- на основе результатов статистической обработки базовых ресурсных испытаний проводится выбор подходящих аналитических выражений для функций распределения случайных параметров.

На первом этапе все параметры разбиваем на две группы, одна из которых относится ко всей генеральной совокупности параметров, другая трактуется как индивидуальные параметры образцов и, в сущности, представляют собой случайные величины.

Учитывая недостаточность объема выборок при ресурсных испытаниях, выбор функций распределения, характеризующих разброс при базовых ресурсных испытаниях, в значительной мере носит характер принятия статистических гипотез. В этом случае возникает необходимость использовать дополнительные теоретические соображения, например асимптотические свойства некоторых распределений.

Одним из критериев, которым должна удовлетворять функция распределения случайных параметров, - согласованность с аналитическими выражениями для зависимостей между характеристиками нагружения и ресурсом. Целесообразность критерия обусловлена:

- подтверждением признака внутренней непротиворечивости модели;
- обеспечением относительной простоты аналитических вычислений и простой вид конечных формул;
- необходимостью рассмотрения физико-механических явлений повреждения и разрушения на уровне структуры материала.

Простейшим примером согласованной полуэмпирической модели служат базовая зависимость (62) или (63) и выражение для функции распределения параметра r , который характеризует прочность наугад взятого образца

$$F_r(r) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{r}{r_c} \right)^\alpha \right]. \quad (64)$$

Здесь r_c – характерный параметр прочности (детерминистическая величина), α – показатель ($\alpha \geq 1$).

Выбранная модель приводит к простым и естественным конечным формулам. Формулы будут более громоздки, если принять другие формы распределения для параметра r , например, логарифмически нормальное распределение.

Каждая модель накопления повреждений, кроме аналитических выражений типа (62) и (64), должна включать формулировку закона суммирования повреждений. Если принять скалярную меру повреждений и правило линейного суммирования, то вид функции $T_b(q|r)$ и плотности вероятности параметра r полностью задает основное уравнение

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{T_b(q | r)} \quad (65)$$

Если есть основания различать физическую меру повреждений и меру псевдоповреждений, то вместо (65) следует взять уравнение типа (52):

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{f_1(\psi)}{T_b(q | r)} \quad (66)$$

Функция $f_1(\psi)$ в правой части (66) должна обеспечивать требуемую связь (55) между мерами повреждений и псевдоповреждений.

Классическая (многоцикловая) усталость

Усталость – наиболее частая причина отказов и предельных состояний напряженных деталей машин. К многоцикловой усталости относится разрушение наступающее при числе циклов нагружения превышающем значение $5 \cdot 10^4$.

Причиной многоцикловой усталости служит накопление рассеянных повреждений в наиболее слабых или наиболее напряженных зернах, совокупность которых образует зародыш усталостной трещины.

Если существует амплитуда напряжений, при которой разрушение выбранного материала от усталости не может произойти даже при сколь угодно большом числе нагружений, то используют понятие предела выносливости.

Результаты испытаний на усталость весьма чувствительны к концентраторам напряжений, в том числе и к микроконцентраторам (микропоры, микровключения и т.д.) и обнаруживают значительный статистический разброс и масштабный эффект.

Результаты базовых испытаний на усталость представляют в виде регрессионных зависимостей между характерным напряжением цикла s и числом циклов $N_b(s | r)$ до видимого повреждения образца или его полного разрушения. Если в двойных логарифмических координатах регрессионная зависимость достаточно близка к линейной (рис.9.), то естественно принять зависимость в виде (63), т.е.

$$N_b(s | r) = N_c \left(\frac{r}{s} \right)^m. \quad (67)$$

Здесь N_c - база испытаний.

В виду приблизительной параллельности линий равной вероятности на плоскости двойных логарифмических координат $\lg N$, $\lg s$ показатель степени m можно считать характеристикой генеральной совокупности. Тогда предельное напряжение s при базе испытаний N_c остается единственной случайной величиной, характеризующей разброс пределов выносливости и долговечности.

Двухпараметрическое распределение Вейбулла (64) служит наиболее удобной вероятностной моделью для однопараметрического семейства кривых усталости (67). Степенная зависимость в (67) согласована с формой, в которой параметр прочности входит в распределение (64), которое соответствует общепринятым представлениям о механизме зарождения усталостных трещин.

При наличии четко выраженного предела выносливости вместо (67) можно принять

$$N_b(s | r) = \begin{cases} N_c \left(\frac{r}{s} \right)^m & \text{при } s \geq r, \\ \infty & \text{при } s < r. \end{cases} \quad (68)$$

Здесь предел выносливости - случайная величина, совпадающая с параметром r .

Если есть необходимость включить в модель явление малоциклового усталости, то прибегают к билинейной аппроксимации

$$N_b(s | r) = \begin{cases} N_c \left(\frac{r}{s} \right)^m & \text{при } s \geq r, \\ N_c \left(\frac{r}{s} \right)^{m_1} & \text{при } s < r. \end{cases} \quad (69)$$

При этом параметр r имеет смысл условного предела выносливости на базе N_c .

В качестве примера аппроксимации кривых усталости с выраженным пределом выносливости кривыми, гладкими всюду на плоскости N, s , приведем выражение

$$N_s(s | r) = N_0 + (N_c - N_0) \cdot \frac{(r - r_0)^m}{(s - r_0)^m}. \quad (70)$$

Здесь r_0 и N_0 пороговое значение предела выносливости и числа циклов, начиная с которых в материале начинают накапливаться повреждения. При расчетах в области больших N можно принять $N_0 = 0$. Если единственный случайный параметр в формуле (70) – характерная прочность r , то согласованное с этой формулой распределение параметра r – трехпараметрическое распределение Вейбулла

$$F_r(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r < r_0 \\ 1 - \exp \left[- \frac{(r - r_0)^\alpha}{(r_c - r_0)^\alpha} \right] & \text{при } r \geq r_0 \end{cases} \quad (71)$$

Довольно часто применяют полулогарифмические координаты $\lg N, s$ и в случае близости регрессионной зависимости к линейному виду, принимают $s = r + r_c (\lg N_c - \lg N)$. Здесь r_c – некоторая постоянная. Полагая r случайной величиной, получаем семейство кривых усталости, соответствующих генеральной совокупности образцов. Обратная зависимость имеет вид

$$N_b(s | r) = N_c \cdot 10^{(r-s)/r_c} \quad (72)$$

Лекция № 9 Малоцикловая усталость

Механизм малоцикловой усталости определяется в основном повторными пластическими деформациями, поэтому для его описания используют деформационные критерии.

Простейший деформационный критерий малоцикловой усталости - критерий Коффина

$$N^\mu \cdot \Delta \varepsilon_p = C \quad (73)$$

где: N - циклическая долговечность; $\Delta \varepsilon_p$ - размах пластической деформации цикла; μ и C - эмпирические постоянные (для углеродистых сталей $\mu=0,5$);

Если считать, что (73) справедливо при монотонном нагружении и разрушение происходит в конце первой четверти цикла нагружения, при $\mu=0,5$ получаем $C=0,5\varepsilon_*$. Предельная деформация в свою очередь связана с относительным поперечным сужением ψ_* в шейке разорванного образца соотношением

$$\varepsilon_* = \ln(1 - \psi_*)^{-1}.$$

Формулу (73) можно привести к ранее рассмотренному виду (67) представив ее следующим образом

$$N = N_c \left(\frac{\varepsilon_*}{\Delta \varepsilon_p} \right)^m,$$

где $N_c = 2^{-1/\mu}$, показатель кривой усталости $m=1/\mu$.

Приняв за меру повреждений отношение $\psi = \varepsilon_p / \varepsilon_*$ согласно правила линейного суммирования получим

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{N_b(\Delta \varepsilon_p)} = 1 \quad (74)$$

Формулу (74) следует рассматривать как частный случай формулы (48), где в качестве параметра нагрузки q принят размах пластической деформации цикла $\Delta \varepsilon_p$. Она находит хорошее подтверждение при испытаниях образцов по схеме жесткого нагружения (при заданных размахах $\Delta \varepsilon_p$).

Трудности возникают, когда нагружение не является жестким. Чтобы по заданным нагрузкам найти размахи деформаций, нужно использовать кривые циклического упрочнения, а также учитывать явление концентрации деформаций.

В прикладных расчетах, когда условия жесткого нагружения не выполнены, вместо вычисления относительных повреждений целесообразно проводить непосредственное суммирование пластических деформаций и сравнивать вычисленные деформации с предельным значением ε^* .

Деформационные критерии имеют существенное преимущество – возможность описания в рамках одной математической модели как малоцикло-вой, так и классической усталости. В качестве примера объединенного деформационного критерия служит уравнение Мэнсона

$$\Delta \varepsilon = C N^{-\mu} + 3,5 N^{-\nu} \sigma_b / E, \quad (75)$$

где $\Delta \varepsilon$ - размах полной деформации цикла; σ_b - предел прочности при растяжении; E - модуль упругости. Показатель степени ν для углеродистых и большинства легированных сталей принимают равным 0,12, что приблизительно соответствует показателю кривой усталости (67) $m=8$.

Уравнение (75) нельзя разрешить в явном виде относительно числа циклов нагружения. В этом случае с точки зрения прогнозирования ресурса удобнее кусочно-гладкие аппроксимации типа формул (69) с выделением участка малоцикло-вой усталости, участка многоцикло-вой усталости и, возможно, переходной области. В сочетании с правилом суммирования данная аппроксимация приводит к критериям типа

$$\sum_{k=1}^{N_p} \frac{1}{N_{bp}(\Delta \varepsilon_p)} + \sum_{k=1}^{N_e} \frac{1}{N_{be}(\Delta \varepsilon_e)} = 1 \quad (76)$$

Первая сумма в левой части уравнения учитывает повреждения от малоцикло-вой усталости с общим числом циклов N_p , вторая – повреждения от многоцикло-вой усталости с общим числом циклов N_e . При этом циклическая долговечность $N = N_e + N_p$.

Механическое изнашивание

Изнашивание деталей, узлов и сопряжений – одна из основных причин исчерпания ресурса.

Практические методы оценки долговечности трущихся деталей и сопряжений основаны на эмпирических формулах. Примером может служить соотношение для расчета подшипника на долговечность

$$L = \left(C / P \right)^m, \quad (77)$$

где L - ресурс подшипника; P - расчетная нагрузка на подшипник; C - динамическая грузоподъемность подшипника.

Если нагрузка изменяется во времени, в расчет вводят эквивалентную нагрузку, определяемую по формулам типа

$$P = \left(P_1^m \cdot l_1 + P_2^m \cdot l_2 + \dots \right)^{1/m} \quad (78)$$

где $l_1, l_2, \dots$ - относительная наработка (число оборотов) при значениях нагрузки, равных соответственно $P_1, P_2, \dots$. Для шарикоподшипников принимают $m=3$; для подшипников с линейным контактом $m=10/3$. За динамическую грузоподъемность подшипника принимают нагрузку, которую партия подшипников данного типоразмера выдерживает с показателем надежности 90% без заметных повреждений при испытаниях на базе 1 млн. оборотов. Значения динамической грузоподъемности приведены в каталогах.

Формула (77) в сущности представляет разновидность формулы (62) для степенной зависимости ресурса от уровня нагрузки, а способ вычисления эквивалентной нагрузки (78) выражает правило линейного суммирования повреждений на основе формулы (48).

В связи с многофакторностью процесса износа ресурсные расчеты обычно проводят на основе эмпирических зависимостей, полученных путем изучения установившихся процессов изнашивания. Эти зависимости связывают интенсивность изнашивания I , равную объему материала, уносимого с единицы площади трущихся поверхностей за единицу относительного пути, с нагрузкой на сопряжение, относительной скоростью, механическими характеристиками материалов, параметрами шероховатости и т. д. Типичная зависимость имеет вид

$$I = Kq^m, \quad (79)$$

где K и m – эмпирические постоянные; q – номинальное давление.

Интенсивность изнашивания может меняться в широких пределах: $I = 10^{-12} \div 10^{-3}$. Для скорости изнашивания можно получить формулу

$$j = \frac{dI}{dt} = K_1 \cdot q^m \cdot V^n \quad (80)$$

где K_1 и n – эмпирические константы; V - относительная скорость трущихся пар. Если скорость изнашивания пропорциональна длине относительного пути, то в (80) $n=1$, причем $K_1=K$. В случае, когда скорость изнашивания пропорциональна мощности сил трения, которые в свою очередь пропорциональны номинальному давлению, то $m=n=1$.

При контактной усталости показатель m в формуле (80) можно выразить через соответствующий показатель кривой усталости, пределы которого могут изменяться в диапазоне $m = 1 \div 3$. При высокой шероховатости, например в процессе приработки, показатель степени n у скорости может быть больше единицы.

В литературе [3] можно также найти соотношения типа (79), (80), в правые части которых входят параметры шероховатости, пределы текучести и модули упругости материала, коэффициенты трения в сопряжениях и т.д.

Нетрудно привести основные соотношения для расчета износа к общему виду уравнения накопления повреждений. Эти соотношения могут принять вид:

$$\psi = \frac{(h - h_o)}{h_o}, \quad (81)$$

где ψ - мера повреждений; h - характерный линейный износ; h_o - начальное значение износа.

Так как $j = \frac{dh}{dt}$ - скорость изнашивания, то $\frac{d\psi}{dt} = \frac{j}{h_o}$. При этом

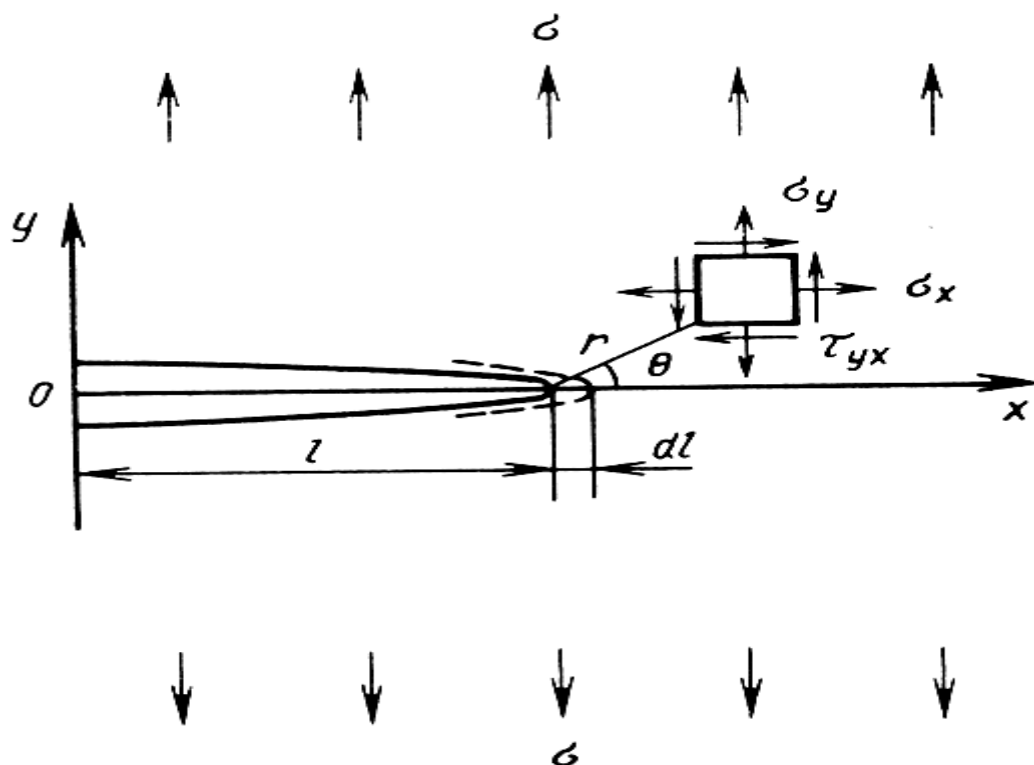
$$\psi(o) = 0; \quad \psi_* = \frac{(h_* - h_o)}{h_o},$$

где h_* - предельно допустимая глубина износа.

Лекция №10 Элементы механики разрушения

Механикой разрушения обычно называют механику тел содержащих трещины. Особое внимание уделяют установлению условий устойчивости трещин в упругих, упругопластических и вязкоупругих материалах.

Линейная механика разрушения (механика хрупкого разрушения) предполагает два допущения: трещина может быть представлена в виде математического разреза в однородной сплошной среде; среда считается линейно упругой вплоть до разрушения.



В нелинейной механике разрушения (механике квазихрупкого разрушения) учитывается нелинейное поведение материала, в частности появление возникновения пластических деформаций у фронта трещин.

Согласно энергетической концепции Гриффитса, трещина не растет если, если значение потенциальной энергии, высвобождаемой при росте трещины меньше работы разрушения, т. е.

$$-d\Pi < \gamma dl \quad (82)$$

Если учесть, что при динамическом росте трещин

$$\frac{d\Pi}{dl} = -\frac{\pi\sigma^2 l(1-\nu^2)}{E} \quad (83)$$

и рассмотреть граничное условие (82), то получим формулу Гриффитса для критического напряжения:

$$\sigma_c = \left[\frac{\gamma E}{\pi l(1-\nu^2)} \right]^{1/2} \quad (84)$$

Здесь E - модуль упругости материала; ν - коэффициент Пуассона;
 γ - удельная работа разрушения.

Размерность удельной работы разрушения - работы, отнесенной к единице площади вновь образованной трещины, в системе СИ является Дж/м² = Н/м.

Альтернативный подход к механике разрушения предложен Ирвиным. В этом случае, если процесс разрушения носит локальный характер, он должен в первую очередь зависеть от распределения напряжения в окрестности фронта трещины. Напряжения в этом случае могут быть представлены в виде:

$$\sigma_{jk}(r, \theta) = \frac{K}{(2\pi r)^{1/2}} f_{jk}(r, \theta). \quad (85)$$

Здесь индексы j, k принимают значения x, y, z ; r – полярный радиус; θ – полярный угол; K – коэффициент интенсивности напряжений, имеющий размерность $\text{Н} \cdot \text{м}^{-3/2} = \text{Па} \cdot \text{м}^{-1/2}$. В задаче Гриффитса

$$K_I = \sigma(\pi l)^{1/2}, \quad (86)$$

где I указывает на то, что коэффициент K относится к трещине отрыва.

Согласно Ирвину граничное соотношение имеет вид

$$K_I = K_{Ic} \quad (87)$$

где K_{Ic} – критическое значение коэффициента интенсивности напряжений.

Если критическое значение больше коэффициента интенсивности напряжений, то трещина не растет, в противном случае распространяется динамически.

Условия (84) и (87) эквивалентны, если принять

$$K_{Ic} = \left(\frac{\gamma E}{1 - \nu^2} \right)^{1/2}. \quad (88)$$

Данное соотношение устанавливает соответствие между энергетическим подходом Гриффитса и силовым подходом Ирвина.

Правая часть формулы (83) с точностью до знака равна энергии системы, высвобождаемой при продвижении трещины на единицу длины, – интенсивности высвобождения энергии G , которая имеет размерность силы. В этом случае ее иначе называют силой продвигающей трещину.

Поскольку с учетом (83)

$$G = \frac{\pi \sigma^2 l (1 - \nu^2)}{E}, \quad (89)$$

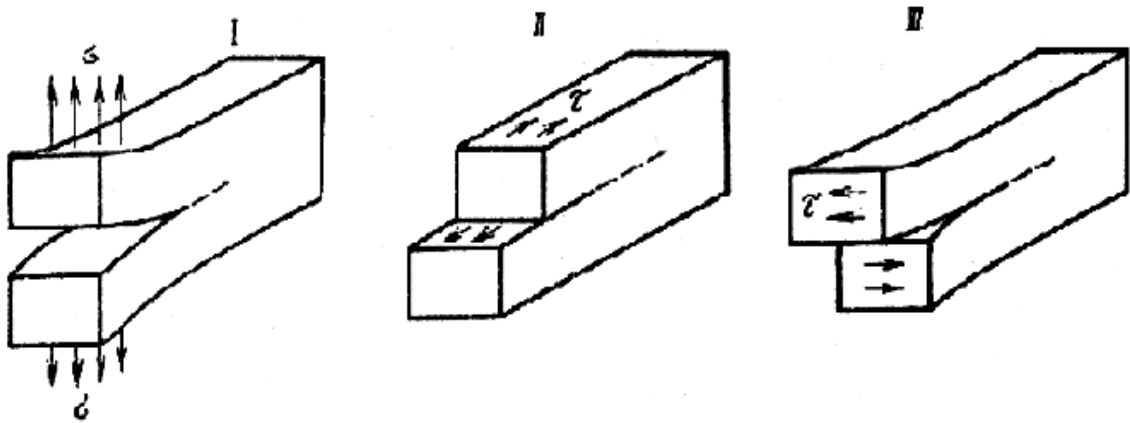
условие энергетического баланса принимает вид

$$G = G_{Ic}. \quad (90)$$

В данном случае $G = \frac{K^2(1-\nu^2)}{E}$, $G_{Ic} = \gamma$, так что в качестве характеристики трещиностойкости материала может быть принята одна из трех связанных между собой величин K_{Ic} , G_{Ic} и γ .

Подход основанный на понятии коэффициентов интенсивности напряжений, оказался наиболее удобным для приложений.

Обычно различают три моды разрушений: отрыва, поперечного и продольного сдвига.



Коэффициенты эффективности для данных мод определяют по формулам

$$K_I = \sigma(\pi l)^{1/2}; K_{II} = K_{III} = \tau(\pi l)^{1/2}, \quad (91)$$

где σ и τ – номинальные нормальные и касательные напряжения.

В общем случае наложения трех мод разрушения для интенсивности высвобождаемой энергии имеем формулу Ирвина:

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2. \quad (92)$$

Если предположить, что удельная работа разрушения не зависит от моды, критическое сочетание номинальных напряжений должно удовлетворять условию (90) с левой частью, определяемой согласно (92). Этот критерий применим также в более общем случае - при условии, что поле номинальных напряжений изменяется достаточно медленно. Формулы для коэффициентов интенсивности напряжений имеют вид

$$K = Ys(\pi l)^{1/2}, \quad (93)$$

где Y – безразмерный коэффициент, зависящий от типа нагружения, формы об-

разца (элемента конструкции), формы и размещения трещины; S – номинальное напряжение; l – характерный размер трещины.

Справочные данные о коэффициентах интенсивности напряжений можно найти в литературе. Например, для растягиваемой полосы конечной ширины $2b$, где $b > 0,8l$, обычно применяют приближенную формулу

$$K_I \approx \sigma(\pi l)^{1/2} \left[\sec\left(\frac{\pi l}{2b}\right) \right]^{1/2}. \quad (94)$$

В экспериментальной механике разрушений критический коэффициент интенсивности напряжений K_{Ic} называют трещиностойкостью материала и определяют по результатам испытаний на растяжение в условиях плоской деформации. Типичные значения трещиностойкости для большинства углеродистых и легированных сталей составляют при нормальных условиях $60 \div 150 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$.

В связи с возможностью наличия пластических деформаций в зоне образования и роста трещин, необходимо учитывать, что условие (86) имеет смысл, если размер трещины l достаточно велик по сравнению с характерным размером λ_p зоны пластических деформаций. Этот размер нетрудно определить из соотношения (85). Из условия $\sigma_{xy}(r, 0) \approx \sigma_Y$ получим

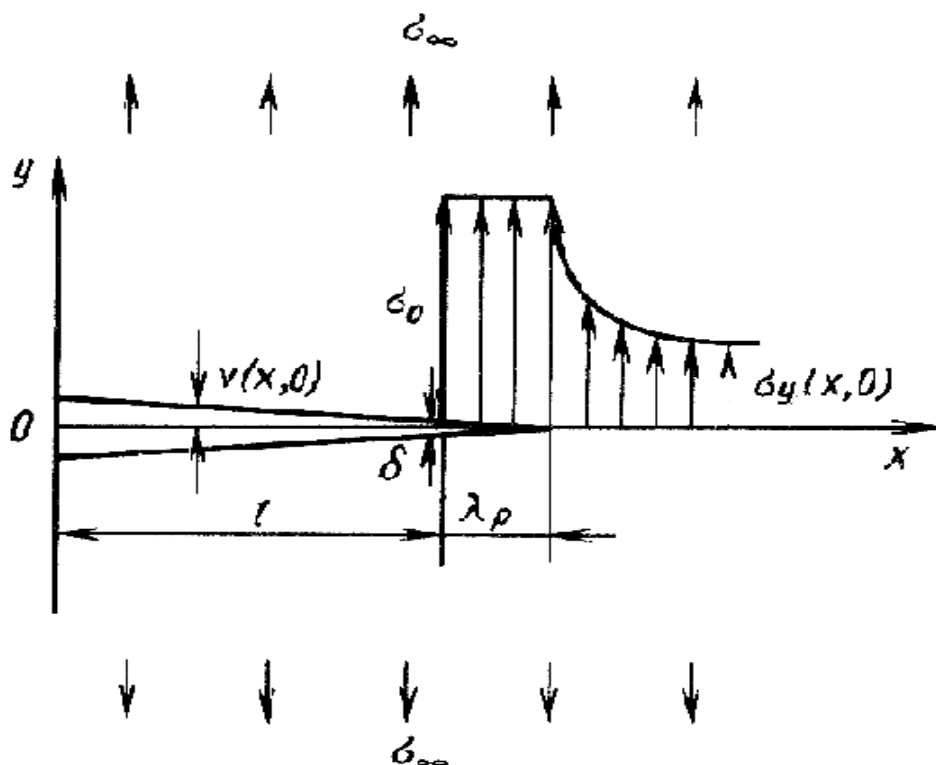
$$\lambda_p \approx K^2 / (2\pi\sigma_Y^2) \quad (95)$$

Здесь σ_Y - предел текучести материала при растяжении.

С учетом этого линейная механика разрушения применима при следующих условиях:

$$l \gg \lambda_p \quad l \gg \rho \quad (96)$$

где ρ - размер элементов структуры.



Учет пластического деформирования может быть основан на введении тонкой концевой зоны у фронта трещины, где сосредоточены все неупругие эффекты. В пределах данной зоны напряжения считаются постоянными и равными σ_0 . Эта величина аналогична пределу текучести материала. Вне концевой зоны материал считают линейно-упругим. Трещина начинает расти, как только раскрытие δ на ее фронте достигает критического значения δ_c . Таким образом, вместо условий (84), (87) и (90) вводят соотношение $\delta = \delta_c$.

Для длины концевой зоны и раскрытий на фронте трещины имеем формулы

$$\lambda_p = l \left[\sec \left(\frac{\pi \sigma}{2 \sigma_0} \right) - 1 \right]; \quad \delta = \frac{8 \sigma_0 l}{\pi E} \ln \sec \left(\frac{\pi \sigma}{2 \sigma_0} \right) \quad (97)$$

При $\sigma \ll \sigma_0$ приходим к формуле Гриффитса (84) при $\gamma = \sigma_0 \delta_c$ или к условию Ирвина (87) при $K_c = (E \sigma_0 \delta_c)^{1/2}$.

Чтобы описать зависимость $\sigma(l)$ при небольших значениях l , необходимо детально рассмотреть концевые зоны, в которых происходит развитие пластических деформаций. Стремление сохранить в качестве основной характеристики материала трещиностойкость K_{Ic} приводит к различным полуэмпирическим соотношениям. Примером служит зависимость

$$\left(\frac{K_I}{K_{Ic}} \right)^{\mu_1} + \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{\mu_2} = 1, \quad (98)$$

где σ – номинальное напряжение; σ_0 – предельное напряжение при отсутствии макроскопических трещин; μ_1 и μ_2 – эмпирические показатели, например $\mu_1 = \mu_2 = 2$. Вместе с тем размеры устойчивых трещин обычно составляют десятки и даже сотни миллиметров, а эксплуатационные номинальные напряжения, как правило, невелики по сравнению с пределом текучести, поэтому область применения линейной механики разрушения в практических расчетах довольно широка.

Лекция 11

Рост усталостных трещин

Закономерности роста усталостных трещин также возможно представить в терминах механики хрупкого разрушения. Для простых циклов нагружения, при малом приращении Δl и весьма большом числе циклов нагружения уравнение относительно скорости роста усталостной трещины может принять вид:

$$\frac{dl}{dn} = f(K_{\max}, K_{\min}) \quad (99)$$

где l – длина трещины, n – число циклов нагружения, $K_{\max} \approx s_{\max} l^{1/2}$, $K_{\min} \approx s_{\min} l^{1/2}$ значения коэффициентов интенсивности напряжения.

Вид правой части устанавливают на основании эмпирических соотношений и некоторых качественных соображений. Одним из возможных вариантов может являться представление ее в виде

$$\frac{dl}{dn} = c(\Delta K)^m \quad (100)$$

где $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ размах коэффициента интенсивности напряжений, m – показатель степени, который принимают в пределах от 2 до 6. Для углеродистых сталей обычно $m=4$. В этом случае постоянная $c=10^{-16} \div 10^{-12} \text{ мм}^7 \cdot \text{Н}^{-4}$.

В ряде случаев, исходя из модельных соображений связывают постоянную c с механическими характеристиками материала. Так при $m=4$ принимают

$c \approx (\sigma_B K_{Ic})^{-2}$ или $c \approx (E \varepsilon_* K_{Ic})^{-2}$. Здесь $\sigma_B, E, \varepsilon_*$ – соответственно, предел прочности при растяжении, модуль упругости материала и деформация, соответствующая разрушению.

В более общей форме уравнение (99) можно представить в виде

$$\frac{dl}{dn} = c_1 (\Delta K - \Delta K_o)^{m_1} (K_{\max} - K_o)^{m_2} (K_c - K_{\max})^{-m_3} \quad (101)$$

Здесь c_1, m_1, m_2, m_3 - эмпирические постоянные; $\Delta K_o, K_o$ - соответственно, пороговое значение размаха и пороговое значение максимума коэффициента интенсивности напряжений.

Приняв в соотношении (101) $m_1 = m - 1, m_2 = m_3 = 1, \Delta K_o = K_o = 0$ и введя коэффициент асимметрии $R = s_{\min} / s_{\max} = K_{\min} / K_{\max}$, получим уравнение Формана

$$\frac{dl}{dn} = \frac{(c_1 \Delta K)^m}{(1 - R)K_c - \Delta K}, \quad (102)$$

которое получило широкое распространение в прикладных расчетах.

В общем случае в уравнениях (100), (101) и (102) необходимо учитывать зависимость параметров $K_c, \Delta K_o, K_o, c$ и c_1 от температуры и свойств среды.

Модель зарождения макроскопических трещин

Рассмотрим процесс накопления повреждений и развития макроскопических трещин в объеме V_o . На первой инкубационной стадии в слабейших и более напряженных группах элементов структуры возникают зародыши макроскопических трещин с характерным размером l_* . На второй стадии зародившиеся трещины растут со скоростью зависящей от усредненных по объему механических характеристик материала.

На инкубационной стадии скалярная мера накопления повреждений может быть представлена в виде функционала

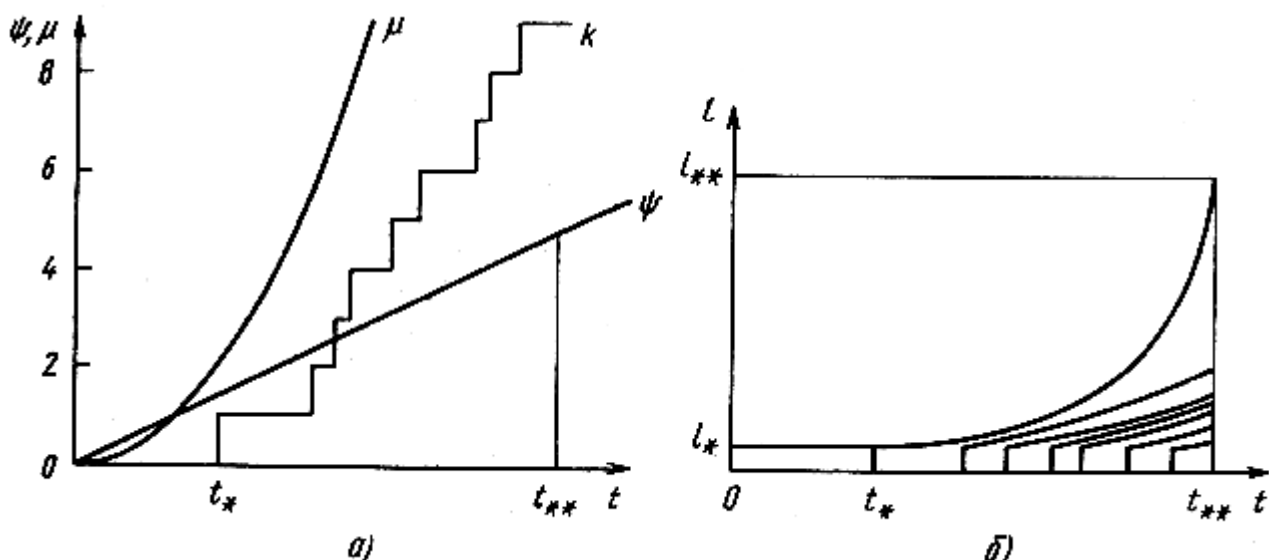
$$\psi(t) = \Psi \left[s(\tau) \right]_{\tau=0}^{\tau=t}. \quad (103)$$

Выразив меру повреждения через математическое ожидание числа макроскопических трещин в объеме V_o

$$\mu = E[k] = f(\psi); \quad \psi \in [0; \infty) \quad (104)$$

При этом $f(\psi)$ - непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $f'(\psi) > 0; f(0) = 0; f(1) = 1$.

Предлагаемые соотношения хорошо иллюстрируются графическими зависимостями приведенными на рисунке, где группа кривых (а) отображает зависимость меры повреждений, математического ожидания числа макроскопических трещин и реализации целочисленного случайного процесса $k(t)$. При этом принято, что $\mu = \psi^2$. Кривые группы (б) показывают изменение размеров макроскопической трещины от начального значения до критического.



$$Q_k(t) = \frac{f^k[\Psi(t)]}{k!} \exp\{-f[\Psi(t)]\} \quad (105)$$

Вероятность события, состоящего в том, что к моменту времени t в объеме V_0 найдется хотя бы одна макроскопическая трещина или ее зародыш, определится по формуле

$$Q(t) = 1 - \exp\{-f[\Psi(t)]\}. \quad (106)$$

При истолковании и статистической обработке результатов испытаний на усталость при постоянном уровне напряжений часто используют распределения, порождаемые функцией

$$F(s, t) = 1 - \exp\left[-\frac{V}{V_0} \left(\frac{s - r_0}{r_c - r_0}\right)^\alpha \left(\frac{t - t_0}{t_c - t_0}\right)^\beta\right] \quad (107)$$

Показатели α и β связаны между собой соотношением $\beta = \alpha / m$.

СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ

Полуэмпирические модели накопления повреждений не включают явного описания физических явлений, которые происходят в материале в процессе его повреждения.

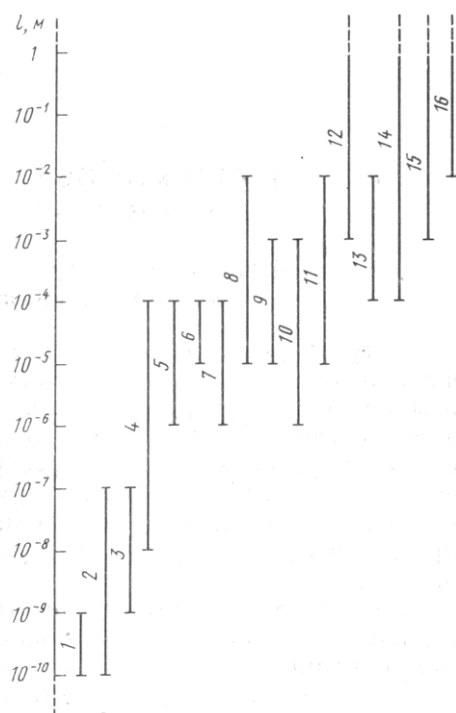


Рис. 4.1

Модели хрупкого разрушения

В механике деформируемого твердого тела предложено много структурных моделей. Трудно осуществить даже условную их классификацию, можно указать лишь два крайних класса. Модели каждого класса имеют много общего между собой как с физической, так и с математической точек зрения. В то же время эти классы образуют вилку, включающую в себя как промежуточные большинство остальных структурных моделей.

Первый класс образуют модели слабейшего звена. Характерным примером служит модель хрупкого разрушения Вейбулла (1939г.). Рассмотрим её подробнее. Возьмем вначале образец, в котором действуют равномерно распределенные по объему V напряжения, заданные с точностью до параметра s (для рассматриваемой модели не имеет значения вид напряженного состояния - растяжение, сдвиг или какое-либо другое). Все остальные параметры, характеризующие прочность и долговечность образца, отнесем к этому типу напряженного состояния. Пусть образец состоит из структурных элементов, число которых в единице объема равно n . Все структурные элементы принадлежат одной генеральной совокупности, так что их сопротивление при рассматриваемом виде напряженного состояния можно охарактеризовать одной случайной величиной r . Функцию распределения $F_r(r)$ этой величины считаем известной. Принимаем концепцию слабейшего звена, т. е. считаем, что разрушение образца произойдет, когда параметр s достигнет значения, равного наименьшему параметру прочности r , в объеме V . С точки зрения теории надежности такая модель соответствует последовательному соединению однотипных элементов (см. рис. 2, а).

Учитывая, что образец содержит $N = n V$ структурных элементов, получим

для соответствующего разрушению значения s_* параметра s функцию распределения

$$F_*(s_*) = 1 - [1 - F_r(s_*)]^{nV} \quad (108)$$

Таким образом, напряжение s_* распределено по тому же закону, что и минимальные значения в выборке, состоящей из N случайных величин, с распределением $F_r(s_r)$. Число N весьма велико по сравнению с единицей. Например, стандартный образец из углеродистой стали содержит $10^6 \dots 10^7$ зерен, поэтому вместо точной функции распределения (108) допустимо взять ее асимптотическое представление, что естественным путем приводит к распределению Вейбулла.

Пусть r_0 - минимальное значение параметра прочности структурного элемента, а в окрестности этого значения $r \geq r_0$ функция распределения $F_r(s_r)$ имеет вид $F_r(r) \approx c(r - r_0)^\alpha$. Здесь $c > 0$, $\alpha > 0$ (как правило, $\alpha \geq 1$). При больших nV вместо (108) получаем асимптотическое распределение

$$F_*(s_*) = \begin{cases} 0 & \text{при } s_* < r_0 \\ 1 - \exp[-cnV(s_* - r_0)^\alpha] & \text{при } s_* > r_0 \end{cases} \quad (109)$$

Объем одного структурного элемента обозначим V_0 . Выполнив замену $cn = [V_0(r_c - r_0)^\alpha]^{-1}$, представим функцию распределения напряжения разрушения в виде

$$F_*(s_*) = \begin{cases} 0 & \text{при } s_* < r_0 \\ 1 - \exp\left[-\frac{V}{V_0} \left(\frac{s_* - r_0}{r_c - r_0}\right)^\alpha\right] & \text{при } s_* > r_0 \end{cases} \quad (110)$$

Вновь введенная постоянная величина $r_c - r_0$ имеет смысл характерной прочности структурного элемента. В приложениях удобнее вместо V_0 вводить в распределение (110) объем рабочей части стандартного образца V_s . Формула (110), а также дальнейшие соотношения сохраняют тот же вид, но постоянная r_c приобретает смысл характерной прочности стандартного образца (и новое численное значение).

Распределение (110) допускает различные обобщения. При выводе этого распределения считали, что на прочность образца влияют все структурные элементы независимо от того, где они расположены. Некоторые испытания обнаруживают сильную зависимость прочности образцов от площади их рабочей поверхности. В этих случаях естественнее считать, что разрушение образца происходит, когда разрушается слабейший структурный элемент у его поверхности. Чтобы описать

это явление, достаточно в формуле (110) заменить объем V на площадь соответствующей поверхности S . Результаты испытаний тонких волокон на разрыв показывают, что их прочность зависит не столько от объема и площади их поверхности, сколько от длины l испытываемого отрезка волокна. Тогда естественно заменить в формуле (110) объем V на длину волокна l . В каждом случае объем V_0 следует заменить на соответствующее значение S_0 или l_0 . Объединив все три случая, получим

$$F_*(s_*) = \begin{cases} 0 & \text{при } s_* < r_0 \\ 1 - \exp \left[- \frac{M}{M_0} \left(\frac{s_* - r_0}{r_c - r_0} \right)^\alpha \right] & \text{при } s_* > r_0 \end{cases} \quad (111)$$

Здесь M - некоторая мера образца (длина, площадь или объем);

M_0 - соответствующая мера структурного элемента.

Можно предположить, что на прочность образца влияют (в различной степени) как элементы, расположенные на поверхности, так и элементы, распределенные по объему.

Рассмотрим случай, когда напряженное состояние и (или) механические свойства изменяются в пределах образца, детали или элемента конструкции. Пусть характерные масштабы этого изменения малы по сравнению с характерным размером структурного элемента. Разобьем область на подобласти так, чтобы в пределах каждой из них напряженное состояние и механические свойства были близки к постоянным, а при переходе от одной подобласти к другой изменялись незначительно. Используем один из критериев прочности при сложном напряженном состоянии, который позволяет выразить условие неразрушения через единый скалярный параметр s . Тогда условие прочности для каждой подобласти запишем в виде $sf(\mathbf{x}) < s_*$. Здесь $f(\mathbf{x})$ - функция координат $\mathbf{x}$ одной из точек, принадлежащих данной подобласти; s_* - соответствующее напряжение разрушения. Применим концепцию слабого звена к совокупности подобластей и выполним предельный переход, заменив суммирование интегрированием по подмножеству:

$$M(s^*) = \{x : x \in M; sf(\mathbf{x}) \geq r_0(x)\}. \quad (112)$$

В результате вместо (111) получим

$$F_*(s_*) = 1 - \exp \left\{ - \int_{M(s_*)} \left[\frac{s_* f(x) - r_0(x)}{r_c(x) - r_0(x)} \right]^{\alpha(x)} \frac{dM}{M_0(x)} \right\}. \quad (113)$$

Формулы (110), (112) и (113) описывают все характерные особенности моделей хрупкого разрушения. Эти формулы содержат либо объем V , либо в более общем случае меру M , поэтому распределение напряжения разрушения зависит от абсолютного размера образца. Такое явление называют масштабным эффектом прочности, подразумевая под этим отступление от классических законов подобия, согласно которым напряжение разрушения не должно зависеть от абсолютных

размеров образца или детали.

Модели пластического типа

Рассмотрим класс моделей, противоположных в некотором смысле моделям хрупкого разрушения. Условно назовем их моделями пластического типа, хотя эти модели не обязательно включают процессы пластического деформирования. Типичный пример - модель разрушения, аналогичная схеме параллельного соединения однотипных элементов в теории надежности (см. рис. 2, б).

В системной теории надежности взаимодействие элементов описывают в рамках логической схемы. **В механике разрушения этого недостаточно.** Чтобы найти распределение предельного напряжения, необходимо задать законы деформирования и разрушения отдельных элементов, а также ввести в рассмотрение способ взаимодействия между элементами. Конечные результаты существенно зависят не только от вероятностей отказов элементов, но и от их механических свойств.

Допустим, что N структурных элементов расположено в одном поперечном сечении образца, подвергаемого растяжению. Пусть все элементы обладают упругопластическими свойствами. Точнее, примем, что они деформируются упруго вплоть до достижения локального предела текучести r . Дальнейшее деформирование происходит при постоянном напряжении в данном структурном элементе. Относительно локального предела текучести предположим, что он является случайной величиной с функцией распределения $F_r(r)$. Текучесть образца в целом наступит, когда напряжения во всех структурных элементах достигнут местного предела текучести.

Усредненный по сечению предел текучести

$$s_* = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N r_k \quad (112)$$

Предположив, что число N весьма велико по сравнению с единицей, применим к случайной величине S_* центральную предельную теорему, согласно которой величина S_* распределена асимптотически нормально с математическим ожиданием $E[r]$ и дисперсией $D[r]/N$. Таким образом, приходим к асимптотическому распределению