Сопротивление материалов

Основные понятия и определения

Сопротивление материалов

это наука о надежности и

экономичности элементов

конструкций, деталей машин,

приборов и механизмов.

Задачи раздела:

а) экспериментальное изучение
поведения материалов
при различных силовых
воздействиях
и обоснование теоретических
положений механики
деформирования;

б) изучение методов расчета, гарантирующих с заданным коэффициентом запаса, прочность и жесткость элементов конструкций при максимально возможной экономии материала.

Прочность - способность тела сопротивляться внешним нагрузкам.

Жесткость –
способность тела сопротивляться изменению своих размеров и формы под воздействием внешних нагрузок.

(В отличие от теоретической механики в сопротивлении материалов рассматриваются деформируемые тела, то есть тела, которые изменяют свои размеры и форму под нагрузкой).

Устойчивость –
способность тела под нагрузкой сохранять первоначальную форму устойчивого равновесия.

- *Выносливость* - способность материала сопротивляться переменным силовым воздействиям длительное время

- Показателем надежности является коэффициент запаса :
-

$$n = \frac{p_{\kappa\,\mathrm{p}}}{P_{\max}}$$

- где
- $P_{кр}$ - критическое (предельное) значение параметра (нагрузка, напряжение...).
- P_{max} - наибольшее значение данного параметра в рабочих условиях.

Условие надежности имеет вид

$$n \geq \left[n \right]$$

Здесь

$$[n]$$

- допускаемое или нормируемое значение коэффициента запаса, которое назначают, исходя из практического опыта создания аналогичных конструкций, уровня техники.

Для каждой области техники

коэффициент запаса имеет свои

границы значений.

Так, например, при проектировании стационарных долговременных сооружений n = 2......5

в авиационной технике n = 1,5.....2

Моделирование объекта исследования

Модель материала

Однородность

означает, что тело состоит из материала одной природы, при этом результаты исследования элемента объема можно распространить на все тело, и свойства поверхности можно считать тождественными свойствам внутренних объемов тела.

Изотропия

- независимость свойств

материала от направления.

Упругость

- способность тела восстанавливать первоначальную форму и размеры после снятия нагрузки.

Пластичность

- способность тела сохранять значительные деформации (остаточные) после разгрузки.

Хрупкость

- способность тела разрушаться без образования заметных остаточных деформаций.

Ползучесть

- изменение во времени деформаций и

напряжений при действии на тело

постоянной внешней нагрузки.

Отмеченные физические свойства

зависят от условий окружающей среды

(температуры, химического свойства, уровня радиации и др).

Модель формы

Стержень

- тело, имеющее поперечные размеры несоизмеримо малые с его длиной.

Стержень может иметь прямолинейную или криволинейную ось, постоянные или переменные по длине размеры и форму сечения.

Пластина (оболочка)

- тело, имеющее размеры в двух направлениях несоизмеримо большие, чем в третьем, и ограничивается двумя плоскими (криволинейными) поверхностями.

Массив

- тело, имеющее размеры, соизмеримые

в трех направлениях.

Модели нагружения

Сила - это мера механического взаимодействия между телами.

Силы подразделяются на внешние и внутренние.

Внешние силы

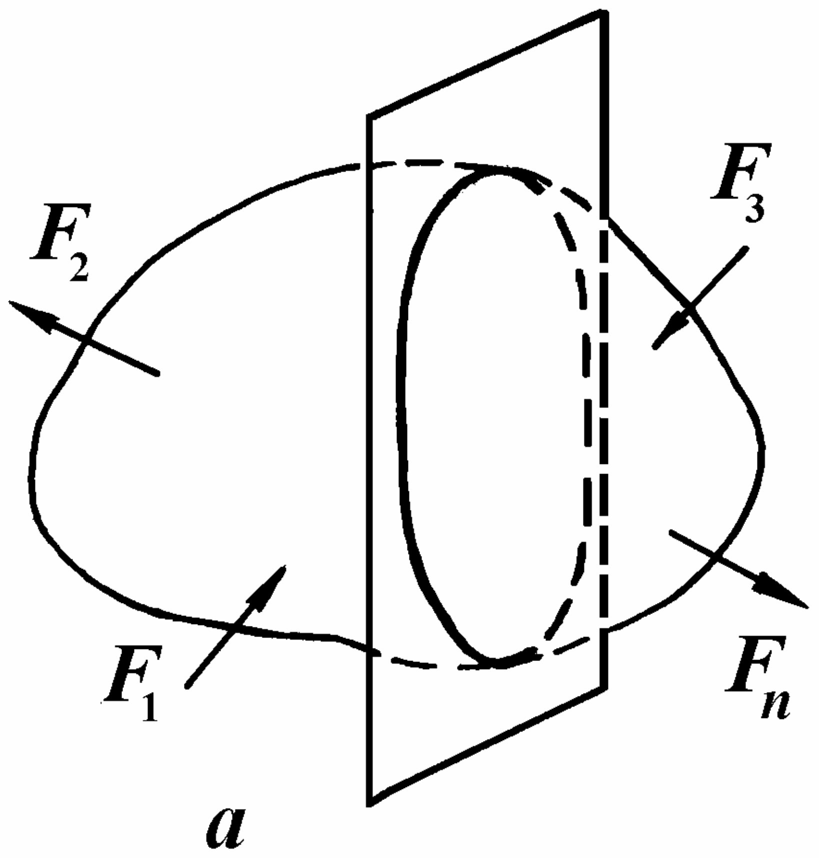
- нагрузки, действующие на тело при его взаимодействии с другими телами.

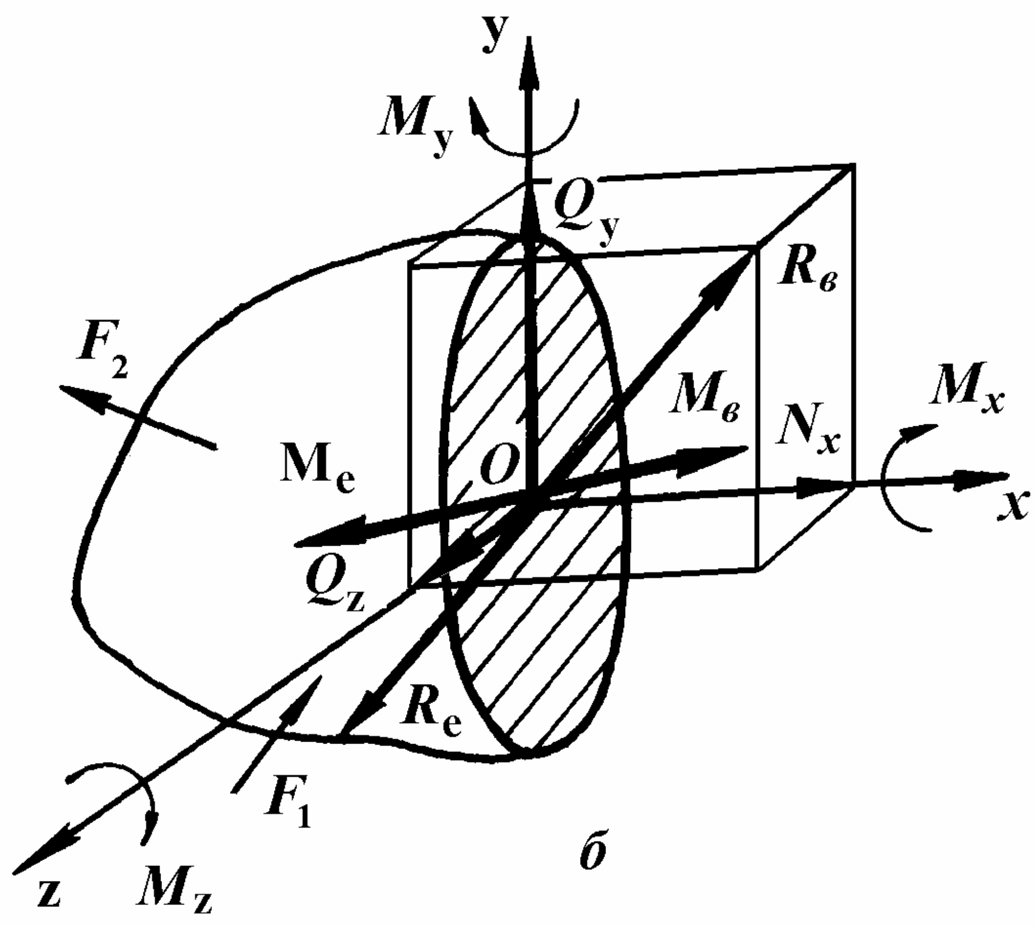
Внутренние силы

- силы взаимодействия между частями отдельного тела, оказывающие противодействие внешним силам, так как под влиянием внешних сил тело деформируется.

- Внутренние силы распределены в одних случаях по всей площади поперечного сечения тела равномерно, а в других - неравномерно. Если тело внешними силами не нагружено, то принимается, что внутренние силы отсутствуют.

Внутренние силовые факторы. Метод сечений





б

- $\boldsymbol{N_x}$ называют нормальной или продольной силой,
- $\boldsymbol{Q_y, Q_z}$ - поперечными силами,
- $\boldsymbol{M_x}$ - крутящим моментом,
- $\boldsymbol{M_y, M_z}$ - изгибающими моментами.
- Внутренние силовые факторы находят из условий равновесия

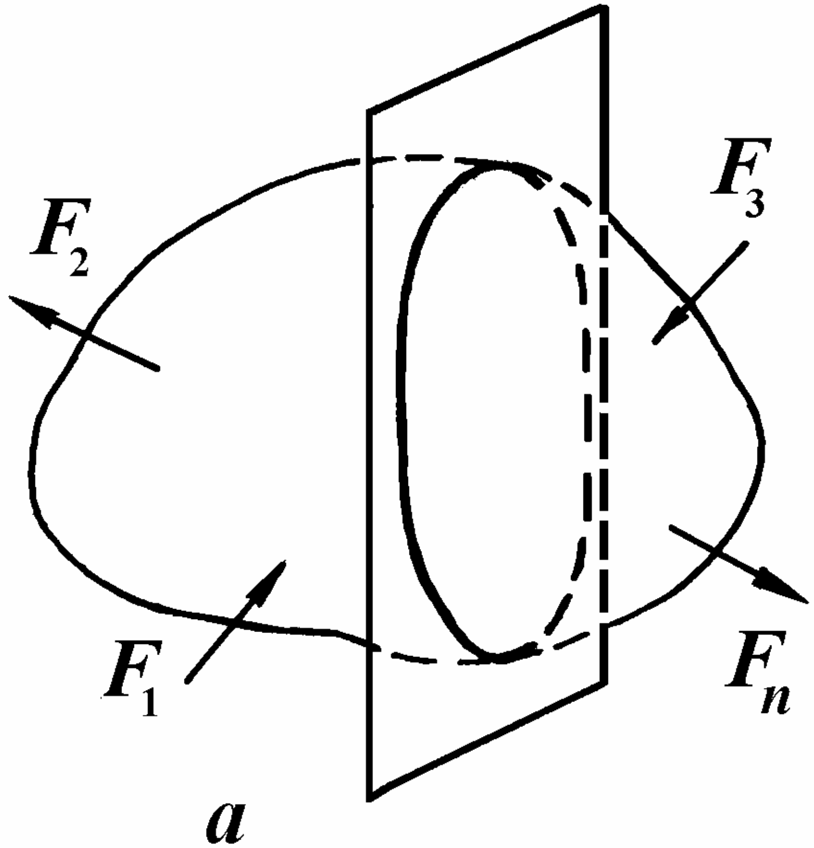
Напряжение

- это количественная мера интенсивности распределения внутренних сил по сечению, определяющая взаимодействие материальных частиц тела. Однако для определения напряжений необходимо знать внутренние

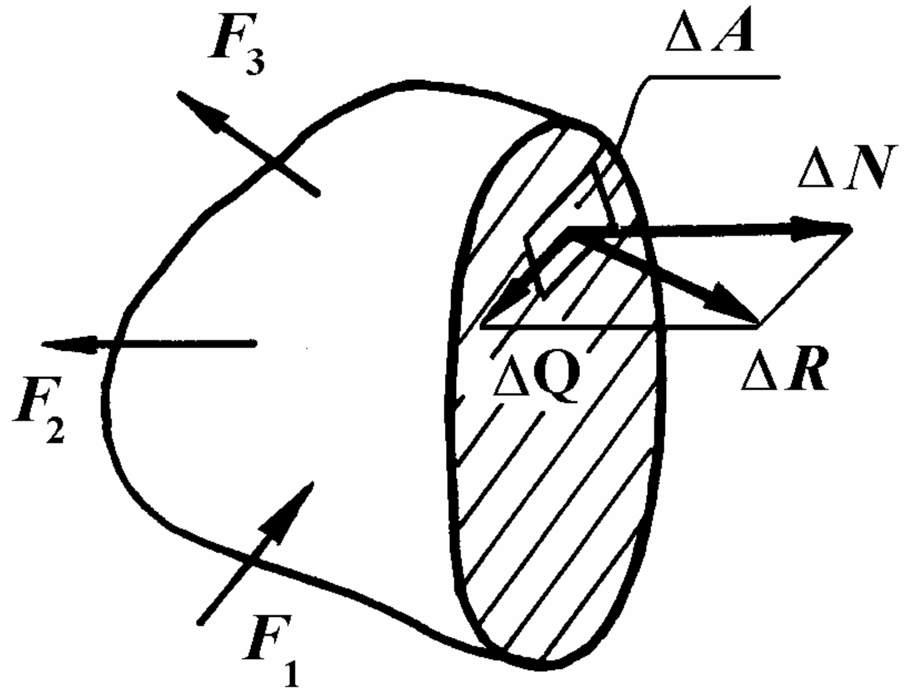
- Поэтому степень нагруженности детали определяют не внутренние силы, а напряжения.
- При достижении ими определенного уровня внутренние связи материальных частиц тела разрушаются

Однако для определения напряжений необходимо знать внутренние силовые факторы

Пусть тело нагружено произвольным образом



ΔA- площадь элементарной площадки в окрестности произвольной точки сечения



б

- Полное напряжение в выбранной точке сечения

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta A},$$

Нормальная и касательная составляющие напряжения

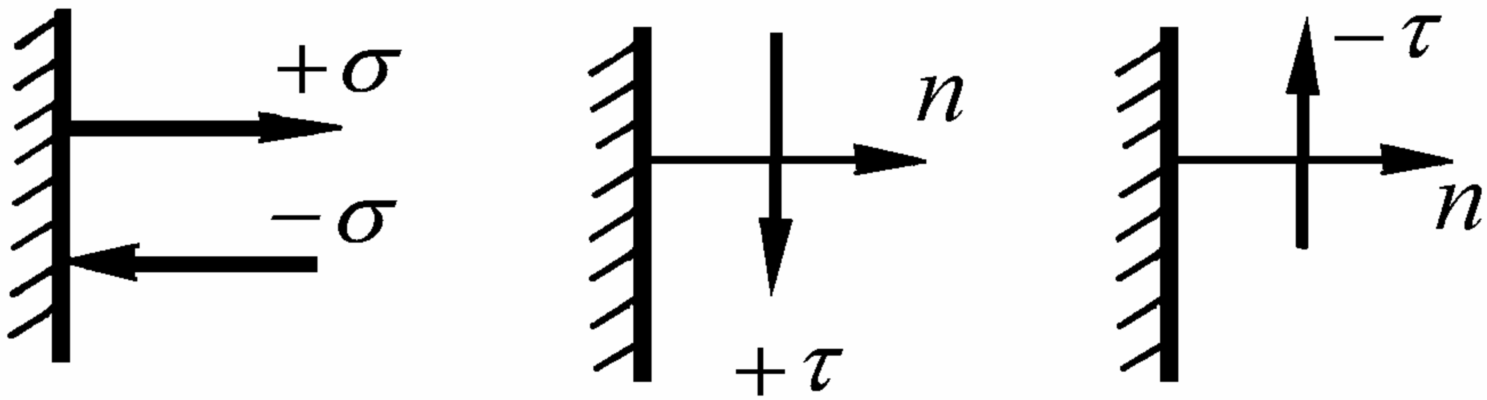
$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} \quad и \quad \tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}$$

Полное напряжение в точке

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

- Напряжения в точке зависят от положения плоскости сечения, поэтому, говоря о напряжении, необходимо указывать ориентацию сечения, проходящего через рассматриваемую точку.

- Совокупность напряжений во всех сечениях, проходящих через рассматриваемую точку, определяет напряженное состояние в точке.
- Напряжение характеризуется знаком (направлением) и модулем.



а *б*

- *Нормальное напряжение считается положительным, если оно направлено от сечения* (рис. *а*).

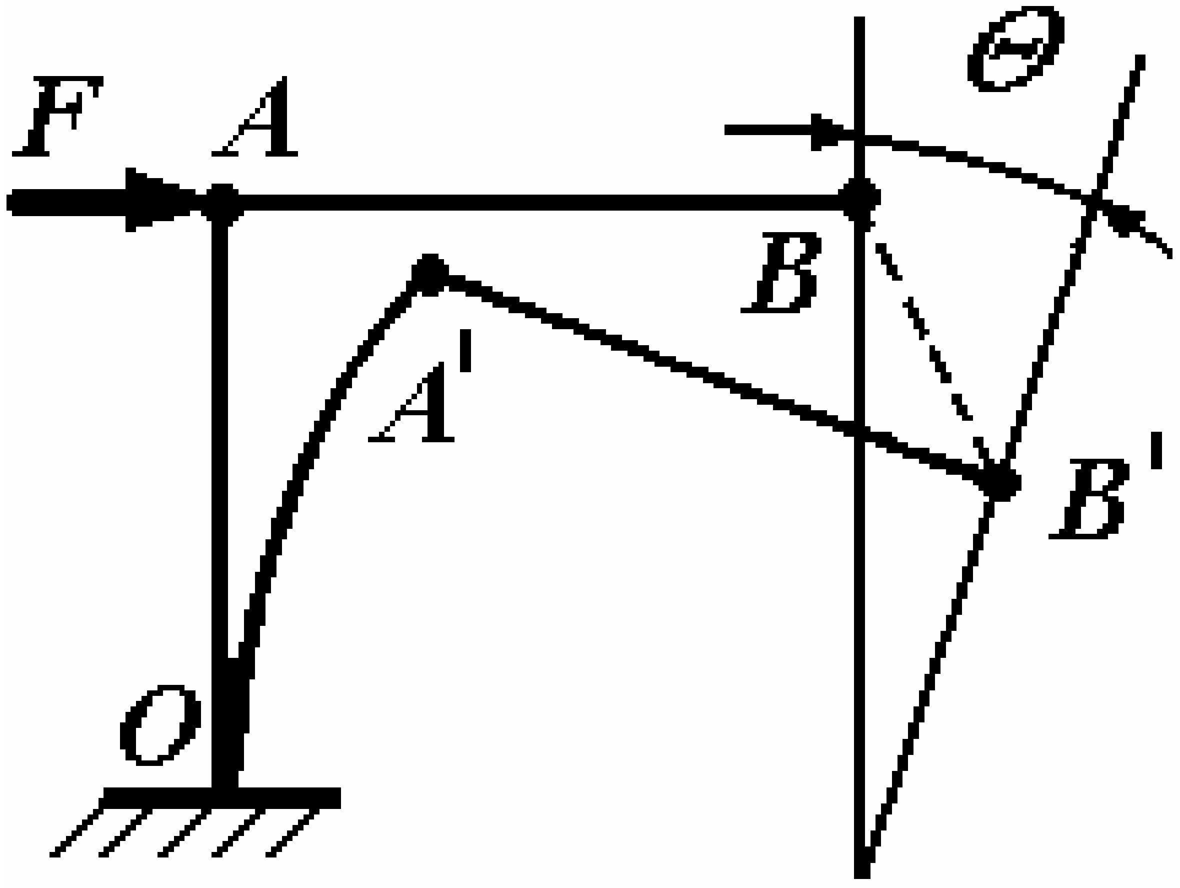
- *Касательное напряжение считается положительным, если для совмещения нормали к сечению с направлением напряжения ее необходимо повернуть по часовой стрелке*

Перемещение и деформация

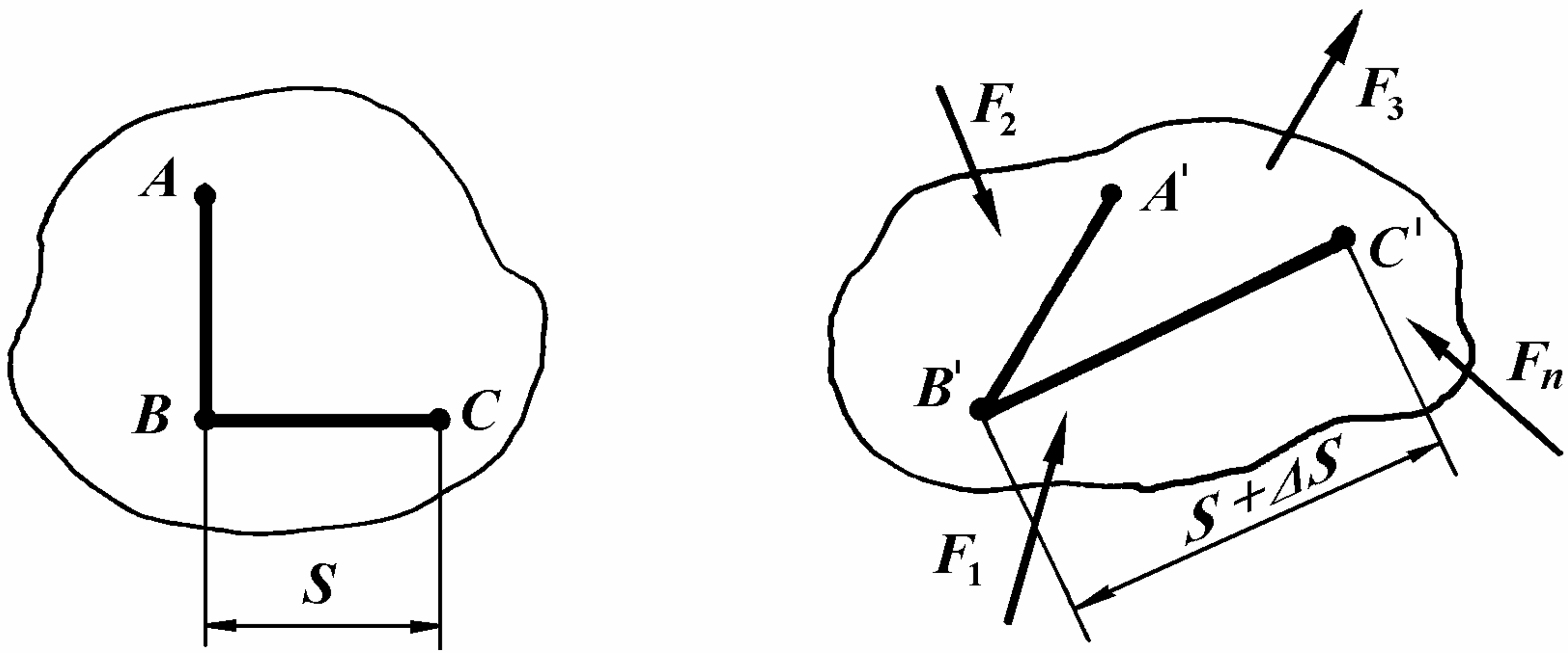
- *Перемещение* - это изменение положения в пространстве сечения или всего элемента конструкции.
- Перемещения подразделяются на линейные и угловые.

- *Деформация* - это геометрическое искажение в окрестности материальной точки.

- Деформация тоже подразделяется на линейную и угловую.


F
A
Θ
B
A'
B'
O

AB и BC –малые отрезки, выделенные в теле до деформации и после нагружения



- Линейная деформация в точке *B*

$$\varepsilon_{BC} = \lim_{BC \to 0} \frac{\Delta S}{S};$$

- Угловая (сдвиговая) деформация в точке *B*

$$\gamma_{Ae,,} = \lim_{AB \to 0,\ \ BC \to 0} (< ABC - < A^1 B^1 C^1)$$

- Совокупность линейных и угловых деформаций по различным направлениям и плоскостям для одной точки определяют деформированное состояние в точке.

Закон Гука

Деформации материала элемента в каждой точке (в определенных пределах) прямо пропорциональны напряжениям в этой же точке и в том же направлении(при нагружении и разгружении тела):

- $\boldsymbol{E}$ – модуль упругости
- $\boldsymbol{G}$ – модуль сдвига

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\tau = G\gamma$$

Принцип независимости действия сил

В условиях выполнения закона Гука и малости деформаций

(в условиях упругого деформирования они не превышают 1,5%)

в расчетах используется принцип независимости действия нагрузок.

Согласно этому принципу *результат воздействия системы нагрузок равен сумме результатов воздействия каждой нагрузки в отдельности, то есть производимый эффект не зависит от порядка приложения внешних сил.*

Растяжение и сжатие

Растяжением (сжатием) называется такой вид нагружения, при котором внешние силы создают в поперечном (перпендикулярном оси) сечении стержня только один внутренний силовой фактор - продольную растягивающую (сжимающую) силу .

Эпюры (диаграммы) внутренних сил

- *Эпюра внутренних сил* - это график, показывающий характер изменения внутренних сил по длине стержня.
- Построение эпюр необходимо для определения положения наиболее нагруженного (опасного) сечения стержня.
- Порядок построения эпюр:

Эпюра внутренних сил - это

график,
показывающий характер

изменения внутренних сил по

длине стержня

Порядок построения эпюр:

- 1. Определяют все внешние нагрузки (активные и реактивные), действующие на стержень.
- .
- 4. По полученным аналитическим выражениям строят эпюры.
- Данный порядок построения эпюр внутренних силовых факторов справедлив при любом виде нагружения.

- 2. Стержень мысленно разделяют на силовые участки.

- *Силовой участок* - это часть стержня, в пределах которой изменение внутреннего силового фактора определяется одним и тем же аналитическим выражением.

- Силовые участки ограничиваются сечениями,в которых приложены сосредоточенные нагрузки или начинают (заканчивают) действовать распределенные нагрузки

- 3. Используя метод сечений, записывают аналитическое выражение для внутреннего силового фактора на каждом силовом участке.

- 4. По полученным аналитическим выражениям строят эпюры.

- Данный порядок построения эпюр внутренних силовых факторов справедлив при любом виде нагружения.

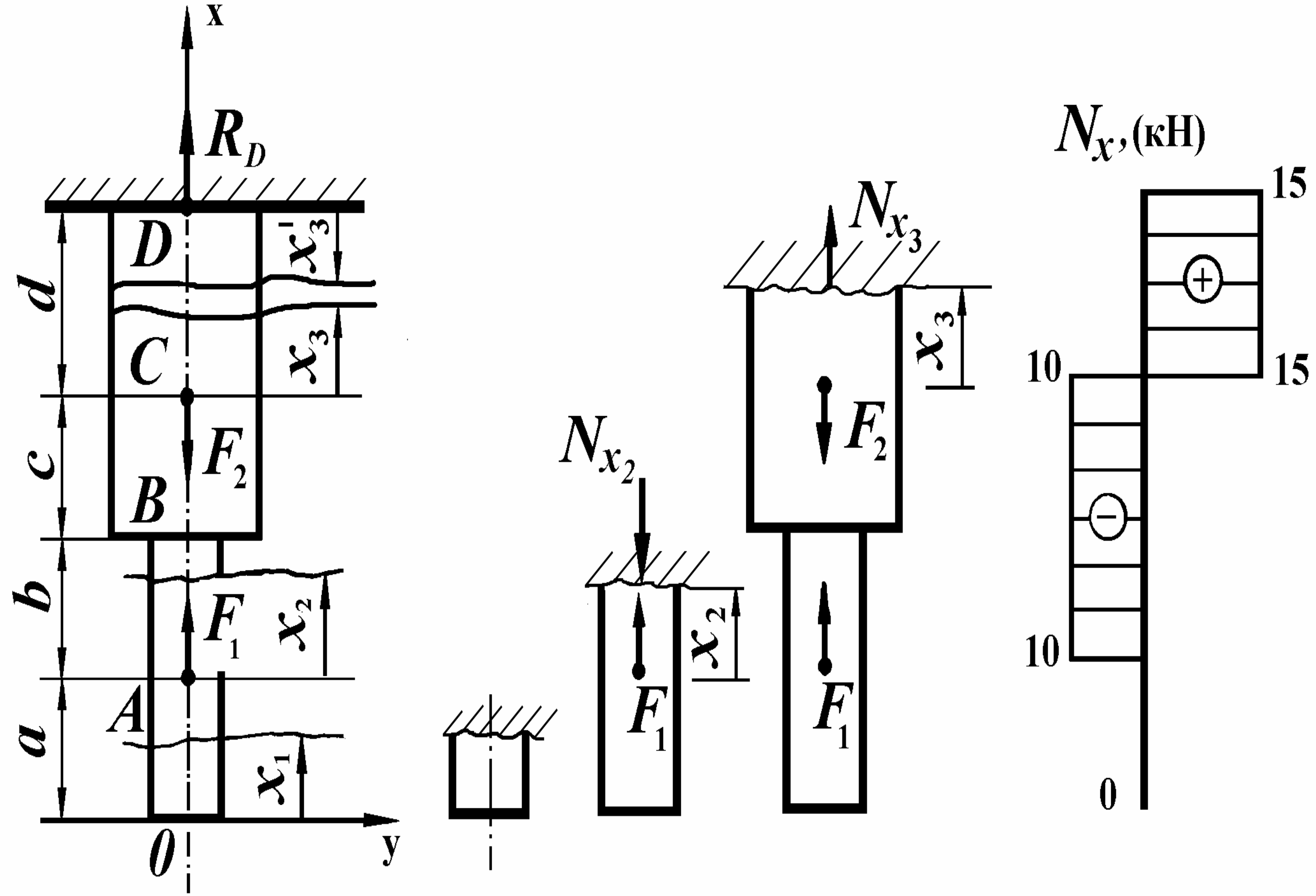
Пример.

- Стержень загружен активными сосредоточенными силами, действующими вдоль оси стержня

$$F_1 = 10 \ кН \ ; \quad F_2 = 25 \ кН$$

- Собственным весом стержня пренебрегаем.

- Построим эпюру внутренних сил (Nx) в соответствии с приведенным порядком построения


x
R_D
D
x_3
d
C
x_3
c
F_2
B
b
F_1
x_2
A
a
x_1
0
y
N_x2
x_2
F_1
N_x3
x_3
F_2
F_1
N_x, (кН)
15
+
10
15
−
10
0

Решение

- 1. Активные нагрузки вызывают реактивную силу .

Определим ее значение из условия равновесия

$$\sum X = 0$$

$$\sum X = R_D - R_2 + F_1 = 0$$

$$R_D = F_2 - F_1 = 15кН$$

2. Имеем три силовых участка:

OA, AC, CD.

3. Рассмотрим *участок OA*.

Начало координат расположим в точке *O*. (В дальнейшем начало координат всегда будем располагать в начале каждого силового участка).

Ось x направим вдоль оси стержня.).

В пределах участка на расстоянии от его начала мысленно сделаем сечение и рассмотрим равновесие отсеченной части длиной .

Для участка *ОА* x_1 лежит в пределах

$$0 \leq x_1 \leq a$$

Внутренняя продольная сила должна уравновесить

внешние силы,

действующие на рассматриваемую часть.

Так как собственным весом стержня пренебрегаем,

а других внешних нагрузок, действующих на участок длиной , нет,

то внутренняя продольная сила на первом участке равна нулю

Рассмотрим *участок* *AC*.

Делаем сечение на расстоянии от нового положения начала координат (начало координат переносим в точку *A*).

Для участка *AC* координата сечения может принимать значения

$$0 \le x_2 \le b + c$$

Однако, согласно методу сечения, рассматриваем равновесие всей нижней части стержня длиной

$$a + x_2$$

Правило знаков для внутренней силы

Рассматриваемую часть стержня

$$a + x_2$$

мысленно закрепляют в сечении.

При этом, если внешняя сила вызывает растяжение исследуемой части стержня, то эта сила создает положительную внутреннюю силу и наоборот.

Для рассматриваемой части внешняя сила F_1 вызывает ее сжатие от сечения приложения силы F_1

до сечения x_2.

$$N_{x_2} = -F_1 = -10 \text{ кН}$$

Участок CD.

Начало координат располагаем в точке *C*. В пределах участка делаем сечение на расстоянии x_3 от точки *C*.

Тогда для участка *CD*: $0 \le x_3 \le d$

При этом внутренняя сила N_{x_3} будет уравновешивать нагрузки, действующие на часть стержня длиной

$$(a + b + c + x_3)$$

Закрепляем эту часть в сечении и в соответствии с правилом знаков записываем аналитическое выражение для :

$$N_{x_3} = -F_1 + F_2 = +15 \text{ кН}$$

В соответствии с полученными значениями строим эпюру продольной силы

Напряжения в поперечном сечении

Сила N_x является равнодействующей внутренних сил dN, действующих на бесконечно малых площадках dA поперечного сечения площадью A.

Так как N_x перпендикулярна сечению,

то dN выражаются через нормальные напряжения

$dN = \sigma\, dA$, тогда

$$N_x = \int_A \sigma dA$$

Нормальные напряжения
по поперечному сечению
распределяются равномерно
(одинаковы во всех точках сечения).

Если σ – const, то получим ,

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

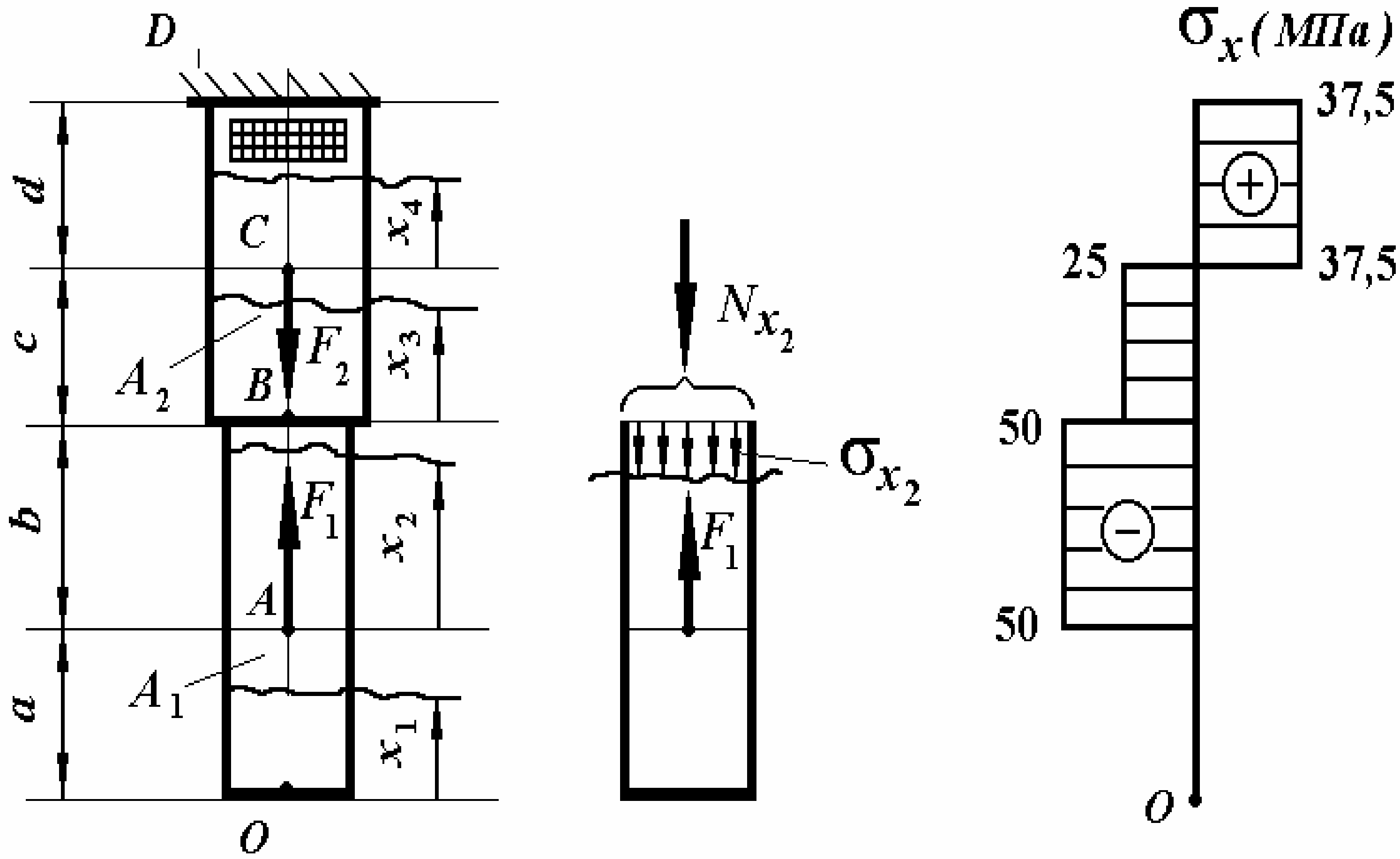
Знак напряжения определяется знаком продольной силы.

Построим эпюру напряжений для ранее рассматриваемого примера

Пусть

$$A_1 = 0{,}2 \cdot 10^{-3}$$ кв.м.

$$A_2 = 0{,}4 \cdot 10^{-3}$$ кв.м



D
d
c
b
a
C
B
A
O
A2
A1
F2
F1
x4
x3
x2
x1
Nx2
σx2
F1
σx (МПа)
37,5
37,5
25
50
50
O

Условие прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{рас}}{A} \le [\sigma]$$

где

$$(\sigma_{\max})$$

- максимальное напряжение в элементе конструкции, возникающее от внешних нагрузок .

$$[\sigma]$$

- максимально допускаемое напряжение для материала, из которого изготовлен данный элемент

- $N_{расч}$ - расчетная внутренняя сила в наиболее нагруженном (опасном) сечении ,

- A – площадь поперечного сечения

- Допускаемое напряжение определяется как

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{n}$$

Здесь

$$\sigma_{пред}$$

- предельное напряжение для материала.

Для пластичного - это предел текучести, для хрупкого - предел прочности.

Эти характеристики материала определяются экспериментально

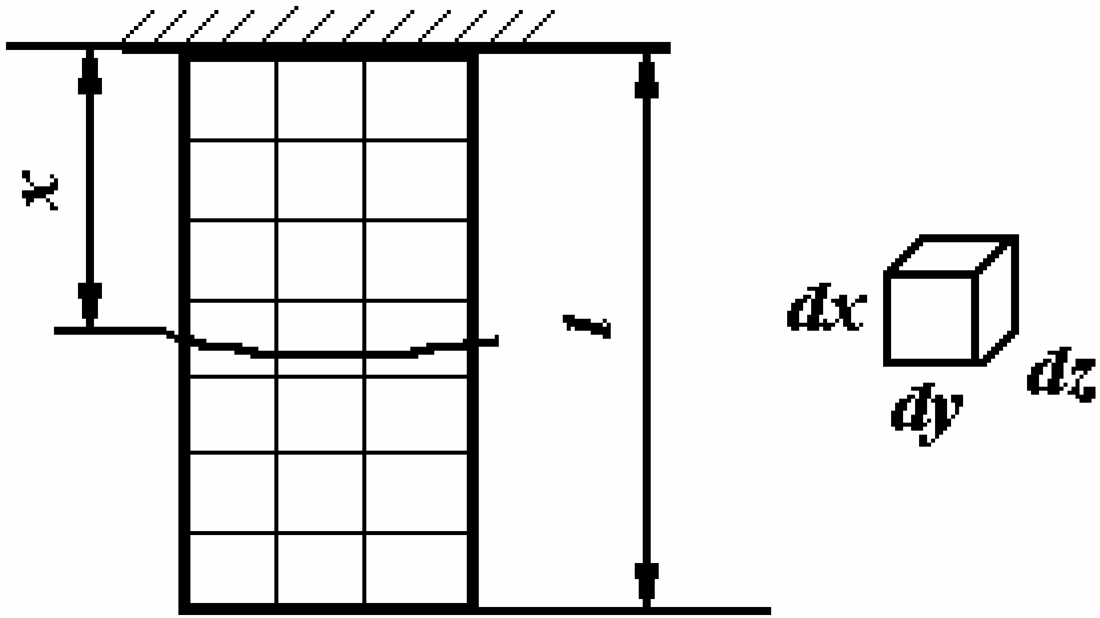
- n - коэффициент запаса прочности.

Величина n назначается,

исходя из предшествующего опыта проектирования и эксплуатации подобных конструкций, конкретных условий работы рассчитываемого элемента, степени его ответственности и последствий выхода его из строя.

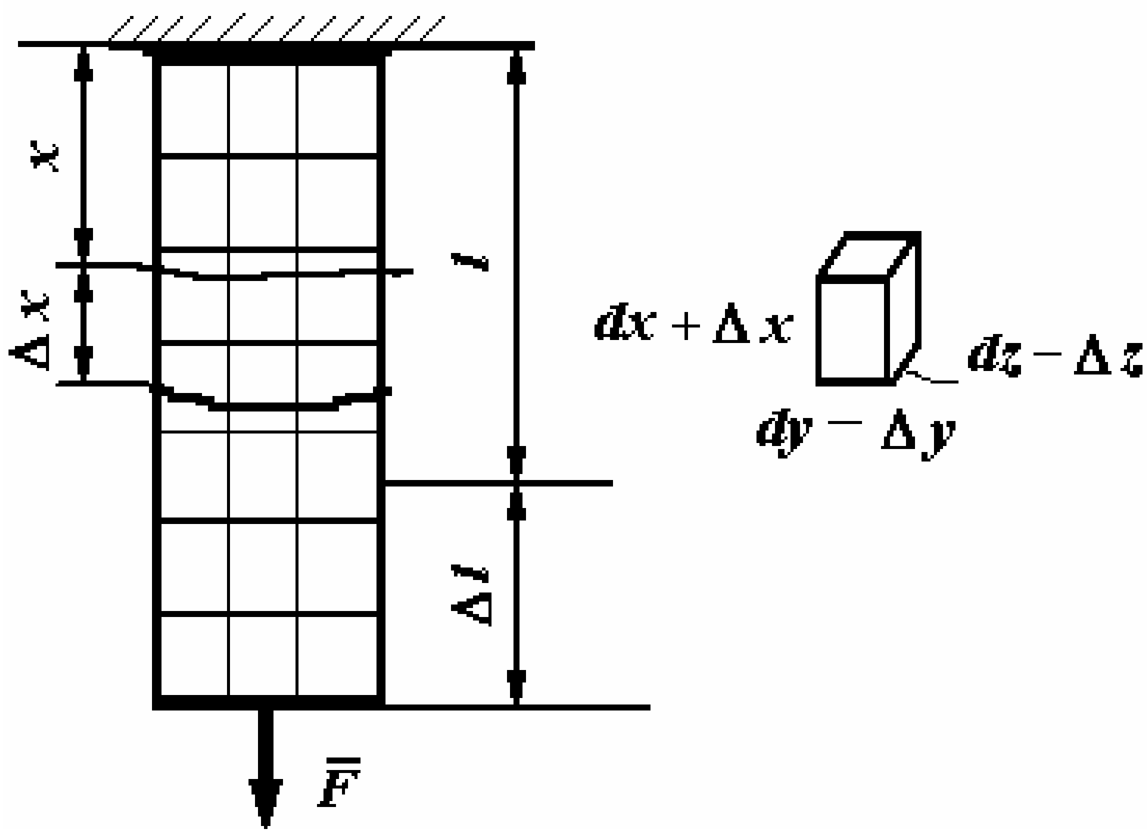
Деформации и перемещения

До приложения нагрузки в стержне с площадью поперечного сечения A *и длиной не возникают напряжения, а, следовательно, отсутствуют и деформации. Выделим в нем элементарный объем со сторонами* dx, dy, dz


dx
dy
dz

- После приложения нагрузки размеры элементарного объема изменятся и будут равны:

$$dx + \Delta dx, \quad dy - \Delta dy, \quad dz - \Delta dz$$


x
Δx
l
Δl
F
dx + Δx
dz − Δz
dy − Δy

- При этом, линейные деформации можно выразить как

продольную

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx},$$

и поперечные

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}.$$

При упругом деформировании отношение поперечной деформации к продольной для конкретного материала является постоянной величиной.

- Это отношение, взятое по абсолютной величине, называют *коэффициентом Пуассона* .

$$\mu = \left|\frac{\varepsilon_{\text{попер}}}{\varepsilon_{\text{прод}}}\right|$$

- Определим перемещение Δx сечения, расположенного на расстоянии x от опоры.
- Из выражения продольной деформации

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx},$$

$$\Delta dx = \varepsilon_x dx$$

- Тогда

$$\Delta x = \int_0^x \varepsilon dx$$

- С учетом закона Гука

$$\Delta x = \int_0^x \frac{\sigma}{E} dx$$

Или

$$\Delta x = \int_0^x \frac{N}{AE} dx$$

Если в пределах рассматриваемого участка стержня N = const;

A = const; E=const (один и тот же материал), то

$$\Delta x = \frac{Nx}{EA}$$

Для стержня, имеющего несколько *n* участков, для которых постоянны

$$N_i, A_i, E_i,$$

изменение всей длины определится как алгебраическая сумма изменений длины стержня на каждом участке.

При этом знак Δl_i

определяется знаком N_{x_i}

- Изменение длины всего стержня (перемещение нижнего сечения относительно опоры) будет равно

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i}$$

Пример.

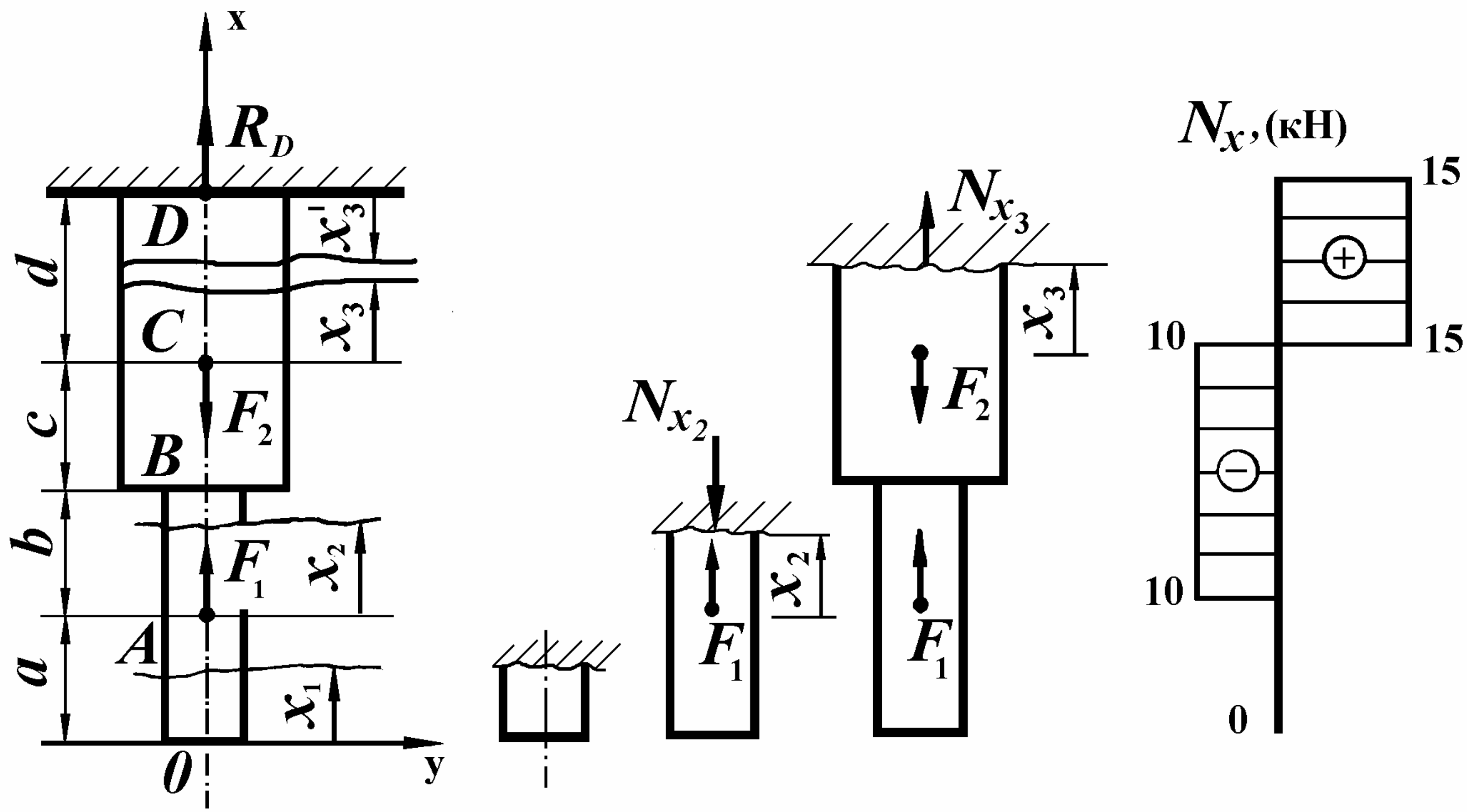
Построим эпюру перемещений сечений стержня

Зададим дополнительно: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа,

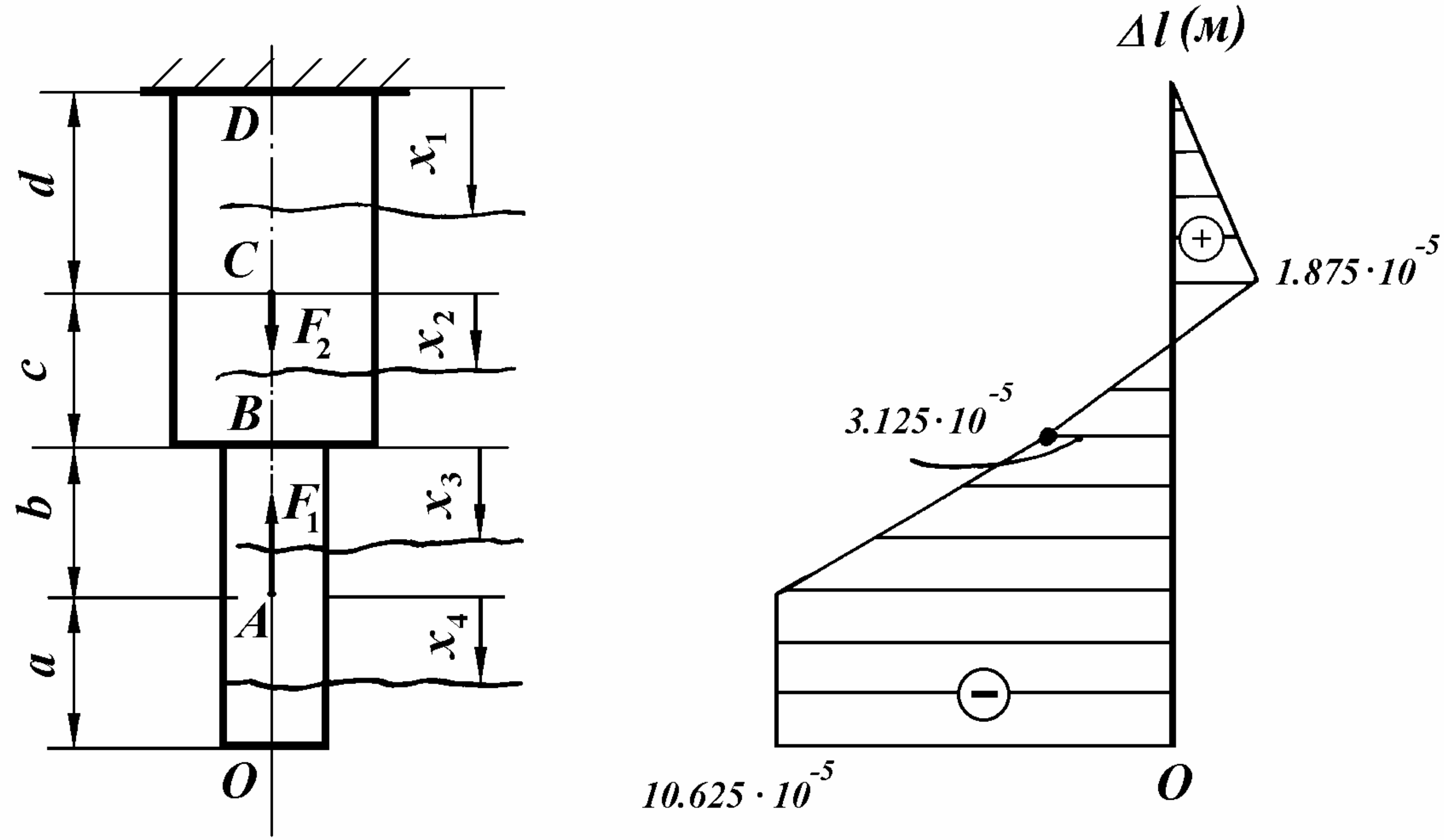
a = 0,2 м, b = 0,3 м, c = 0,4 м, d =0,1м .

Решение.

Стержень имеет четыре участка *DC, CB, BA, AO*.



x
R_D
D
x_3
d
C
c
F_2
B
b
F_1
x_2
A
a
x_1
0
y
N_{x_2}
F_1
x_2
N_{x_3}
x_3
F_2
F_1
N_x, (кН)
15
15
10
10
0


D
C
B
A
O
d
c
b
a
F2
F1
x1
x2
x3
x4
Δl (м)
1.875 · 10-5
3.125 · 10-5
10.625 · 10-5
O

Участок DC $(0 \le x_1 \le d)$.

- Начало координат в точке *D*. Перемещение сечения x_1, относительно неподвижного сечения *D* с учетом эпюры N_x будет иметь вид

$$\Delta_{x_1 D} = \frac{N_{x_1} \cdot x_1}{E \cdot A_2}$$

- Переменной величиной для участка *DC* является только x_1.
- Рассчитаем перемещение в начале участка ($x_1=0$), и в конце ($x_1=d$) .

$$\Delta_{x_1 D(x=0)_1} = 0$$

$$\Delta_{x_1 D(x_1=d)} = \Delta_{CD} = \frac{15 \cdot 0{,}1}{2 \cdot 10^8 \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-3}} = 1{,}875 \cdot 10^{-5}$$

- Здесь Δ_{CD}- перемещение сечения *C* относительно *D.*

- *Участок СВ* $(0 \le x_2 \le c).$

Начало координат в точке *С*.

- Перемещение сечения $x2$

относительно сечения *D*

можно выразить как алгебраическую сумму перемещений ΔCD и перемещения сечения $x2$

относительно сечения $C(\Delta_{x_2 C})$

$$\Delta_{x_2 D} = \Delta_{CD} + \Delta_{x_2 C}$$

- Или

$$\Delta_{x_2 D} = \Delta_{CD} + \frac{N_{x_2} \cdot x_2}{E \cdot A_2}$$

- тогда

$$\Delta_{x_2 D(x_2 = 0)} = \Delta_{CD} = 1{,}875 \cdot 10^{-5}$$

- В конце участка

$$\Delta_{x_2 D(x_2 = C)} = \Delta_{BD} = 1{,}875 \cdot 10^{-5} - \frac{10 \cdot 0{,}4}{2 \cdot 10^{8} \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-3}} = -3{,}125 \cdot 10^{-5}$$

Участок BA $(0 \le x_3 \le b)$

- Перемещение

$$\Delta_{x_3 D} = \Delta_{BD} + \Delta_{x_3 B} = \Delta_{BD} + \frac{N_{x_3} \cdot x_3}{E \cdot A_1}.$$

$$\Delta_{x_3 D(x_3=0)} = \Delta_{BD} = -3{,}125 \cdot 10^{-5}$$

$$\Delta_{x_3 D(x_3=b)} = \Delta_{AD} = -3{,}125 \cdot 10^{-5} - \frac{10 \cdot 0{,}3}{2 \cdot 10^{8} \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3}} = -10{,}625 \cdot 10^{-5}$$

Участок АО $(0 \le x_4 \le a).$

Внутренняя сила на данном участке

$$N_{x_4} = 0$$

Следовательно, он не деформируется, хотя и перемещается за счет деформации части стержня *DA*.

$$\Delta_{x_4 D} = \Delta_{AD} = \Delta_{OD}$$

- Перемещение сечения *O* относительно *D* также можно получить, рассматривая действие на стержень отдельно каждой внешней силы.

$$\Delta_{OD} = \Delta l_{OD} = \frac{F_2 \cdot d}{E \cdot A_2} - \frac{F_1 (c + d)}{E \cdot A_2} - \frac{F_1 \cdot b}{E \cdot A_1}$$

Условие жесткости

- Условие жесткости накладывает ограничения на изменение размеров элементов конструкций под действием нагрузок и имеет вид:

$$\Delta l_{\max} = \left(\frac{N\ l}{EA} \right)_{\max} \le [\Delta l]$$

- Или

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\Delta l_{\max}}{l} \le [\varepsilon]$$

- здесь- $[\Delta l]$; $[\varepsilon]$ соответственно, допускаемое абсолютное и относительное изменение длины наиболее деформируемого участка стержня, регламентируемые для конкретного материала .

Три типа задач

- 1.*Проверочный расчет*. Цель расчета - проверка условий прочности и жесткости при следующих известных параметрах: внешние нагрузки, размеры конструкции и ее элементов, материал элементов конструкции , .

2. *Проектный расчет*

- Цель расчета - определение размеров элементов конструкции, если известны внешние нагрузки и материал элементов конструкции.
- При данном расчете возможен и подбор материала для заданных размеров деталей.

3.Расчет допустимых нагрузок

- Цель расчета - определение максимально допустимых внешних нагрузок для заданных размеров элементов конструкции и выбранном материале.

Механические испытания материалов

- В расчетах на прочность и жесткость элементов конструкций необходимо знать механические свойства материалов, из которых они будут изготовлены.

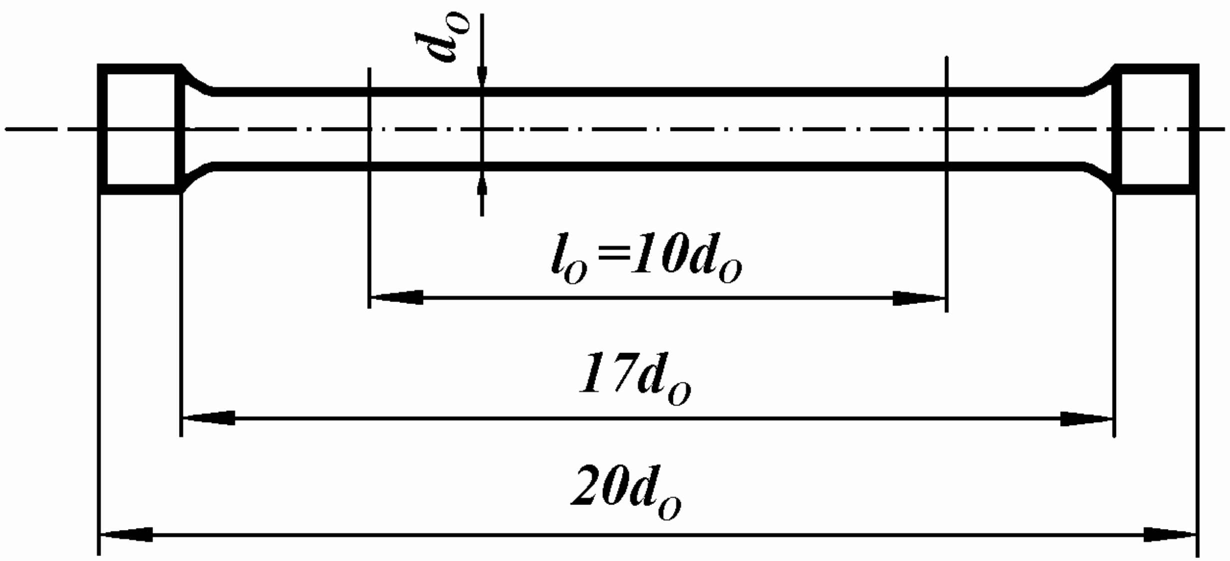
Эти свойства изучаются экспериментально при механических испытаниях образцов из конкретных материалов.

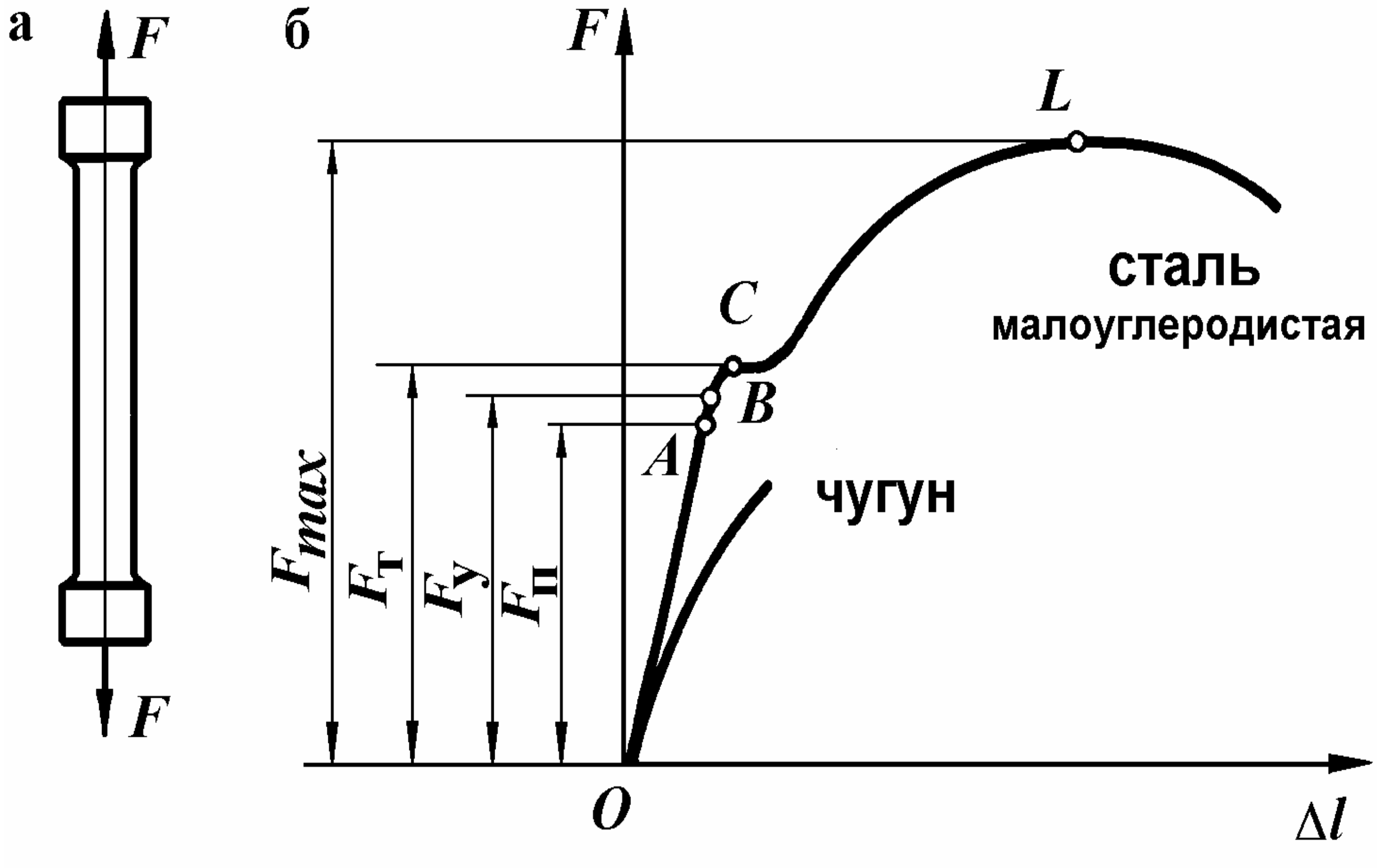
При испытаниях оцениваются характеристики прочности, пластичности и упругости

Условия испытания представлены в Государственных стандартах.

Существуют стандарты на следующие основные виды нагружения: растяжение, сжатие, сдвиг, кручение и изгиб.

- Рассмотрим подробнее испытание на растяжение. Для испытания на растяжение чаще используются образцы круглого реже прямоугольного сечений.

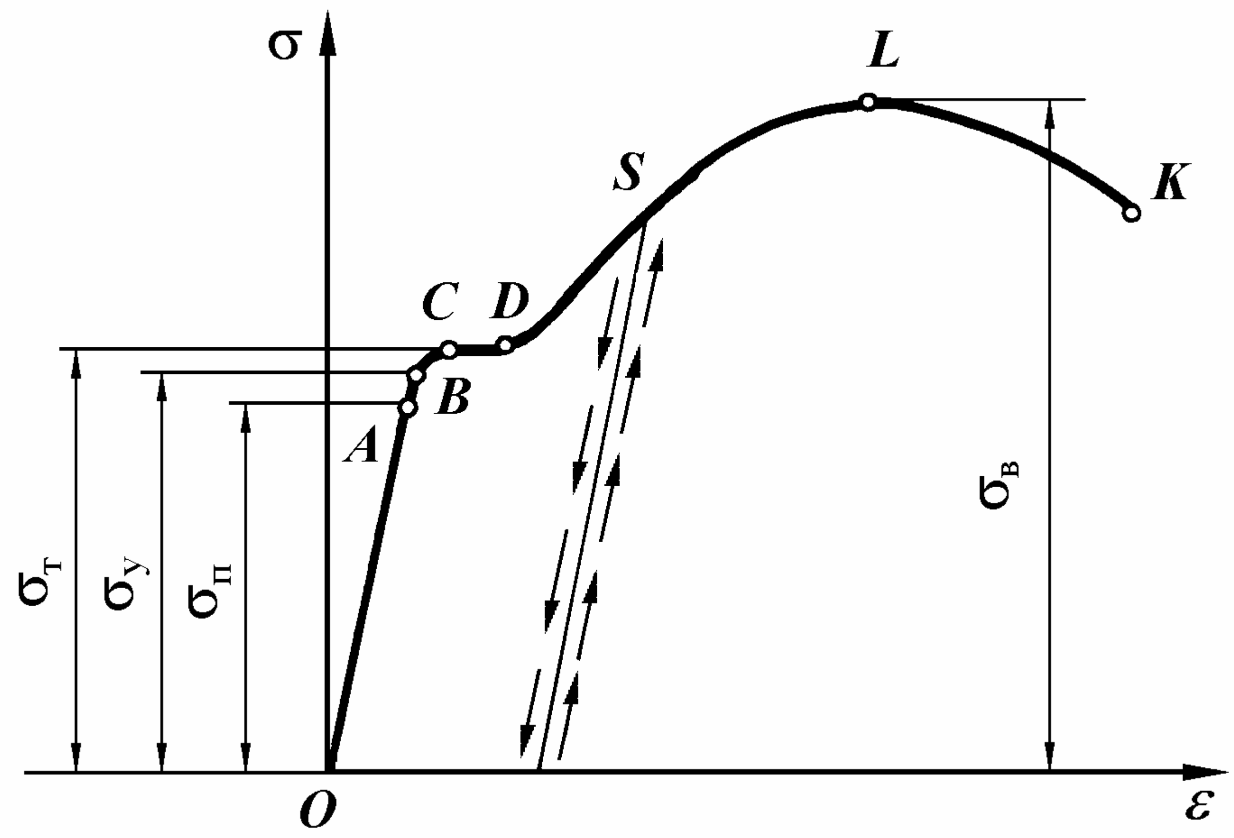




а
F
F
б
F
L
C
B
A
сталь
малоуглеродистая
чугун
F_{max}
$F_т$
$F_у$
$F_п$
O
Δl

Для исключения зависимости от размеров образца

диаграмму растяжения перестраивают в координатах: напряжение (σ) - деформация (ε)


σ
L
S
K
C
D
B
A
$\sigma_т$
$\sigma_у$
$\sigma_п$
$\sigma_в$
O
ε

При этом напряжение и деформация рассчитываются, как

$$\sigma = \frac{F}{A_o}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

где

A_0 - соответственно, площадь поперечного сечения и

l_0 рабочая длина образца до испытания.

На диаграмме условно можно выделить четыре зоны.

1. *ОВ - зона упругого деформирования*.

При снятии нагрузки в этой зоне деформирования образец принимает начальные размеры.

Точка *А* на оси соответствует *пределу пропорциональности* .

$\sigma_{п}$ - это наибольшее напряжение, до которого материал деформируется в соответствии с законом Гука).

- 2. *BD* называется *зоной общей пластичности*.

Для нее характерно значительное увеличение деформации без заметного роста напряжений за счет одновременных сдвигов в кристаллической решетке по всему объему материала образца.

Точка *C* на диаграмме соответствует *пределу текучести* . Это напряжение, при котором в материале возникают значительные деформации без заметного роста напряжений.

- 3. *DL - зона упрочнения*.

Под *упрочнением* понимается повышение уровня напряжений, до которого материал деформируется упруго.

Так, если разгрузить образец из состояния, соответствующего точке *S*, то при последующем нагружении он будет деформироваться упруго до точки *S*, где напряжение выше предела упругости.

Это явление повышения предела упругости материала в результате пластического деформирования носит название "*наклёп*" и широко используется в технике.

Наклеп при необходимости может быть снят термической обработкой - *отжигом.*

4. LK называется *зоной местной текучести*

В этой зоне требуется все меньшая нагрузка для дальнейшего деформирования образца. Это объясняется образованием местного сужения (шейки) в наиболее слабом сечении образца, и дальнейшее деформирование происходит в зоне шейки, где площадь сечения быстро уменьшается.

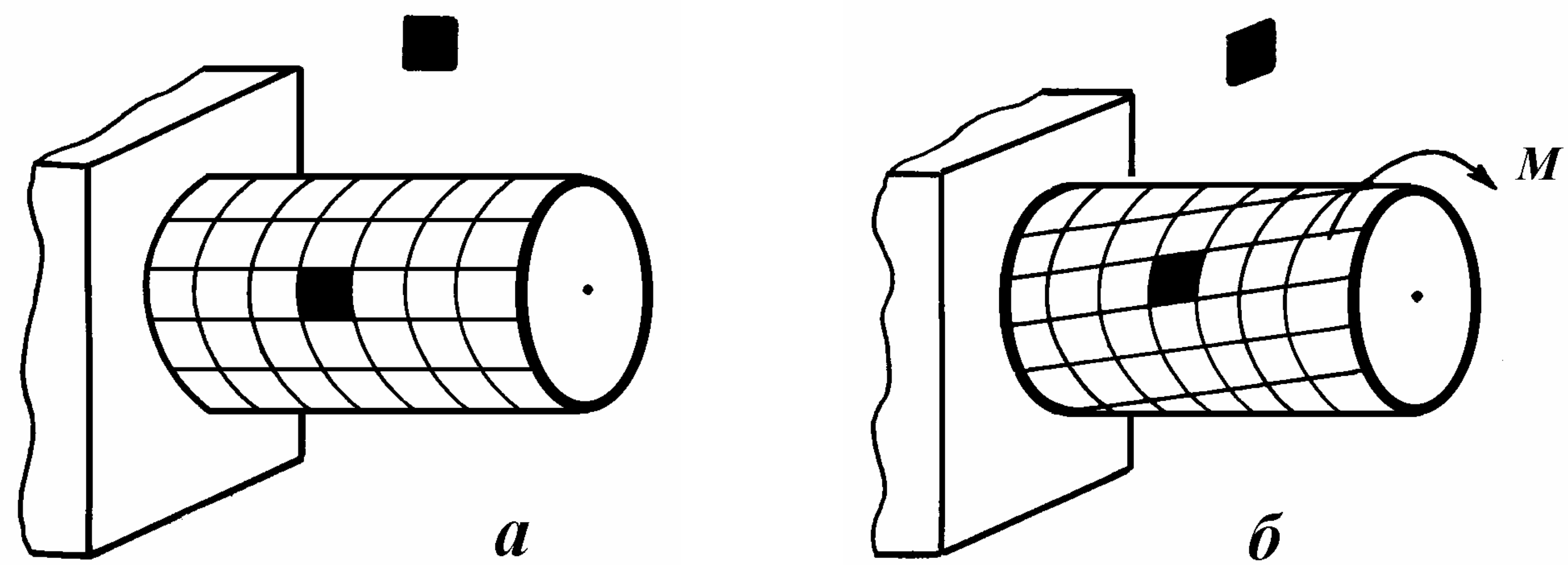
Однако многие материалы разрушаются без заметного образования шейки.

Кручение

- *Кручение* **-** это такой вид нагружения, когда из шести внутренних силовых факторов в поперечном сечении стержня возникает только один - крутящий момент (M_x).
- Стержень, работающий на кручение, называют *валом.*

Деформации и перемещения при кручении

Рассмотрим стержень круглого поперечного сечения радиусом r, заделанный одним концом и нагруженный вращающим моментом M на другом конце

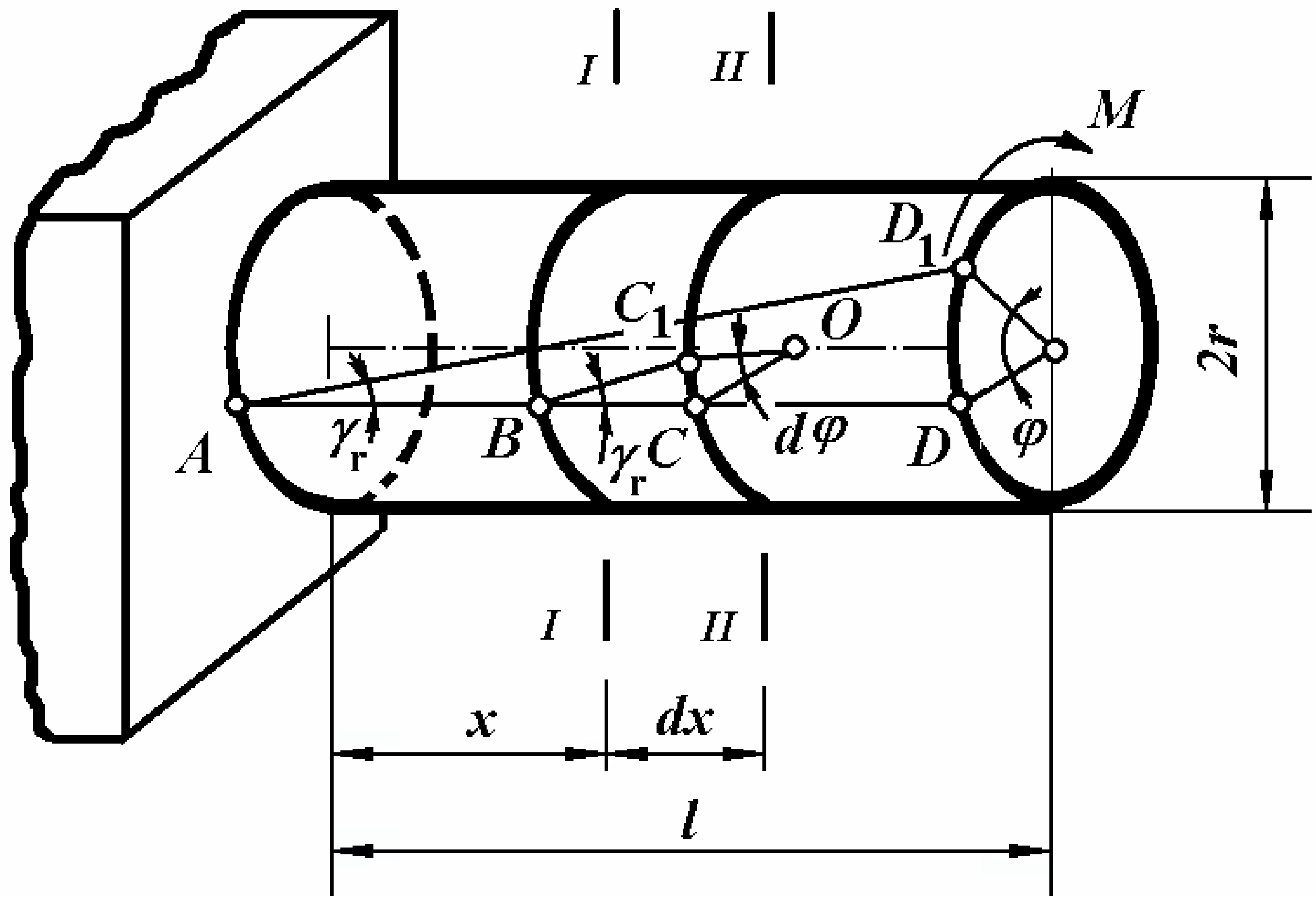

М
а
б

После приложения внешнего момента ячейка получит геометрические искажения (рис.б), соответствующие искажениям при сдвиге.

Следовательно, *кручение по своей физической сущности - это сдвиг смежных плоских сечений друг относительно друга, приводящий к взаимному повороту, отстоящих на некотором расстоянии поперечных сечений*.

Таким образом, получается, что плоские поперечные сечения остаются плоскими и после приложения крутящего момента;

радиусы поперечных сечений при деформации остаются прямыми; расстояние между поперечными сечениями после нагружения вала не изменяются.



I
II
M
D_1
C_1
O
A
γ_r
B
γ_r
C
$d\varphi$
D
φ
2r
I
II
x
dx
l

Угол γ_r (угол сдвига) определяет угловую деформацию смежных сечений

на поверхности вала, а угол φ (угол поворота) показывает на сколько крайнее правое сечение повернулось относительно сечения в заделке, отстоящее на расстоянии l,

то есть φ - это угловое перемещение.

Сечения I-I и II-II имеют относительный сдвиг γ_r и взаимный угол поворота $d\varphi$.

Если из треугольников C_1BC и C_1OC выразить дугу C_1C и приравнять, то получим следующее соотношение

$$dx\gamma_r = r \cdot d\varphi,$$

- Угол сдвига на поверхности зависит от радиуса цилиндрического стержня

$$\gamma_r = r\frac{d\varphi}{dx}$$

- Относительный угол закручивания

$$\frac{d\varphi}{dx} = \theta$$

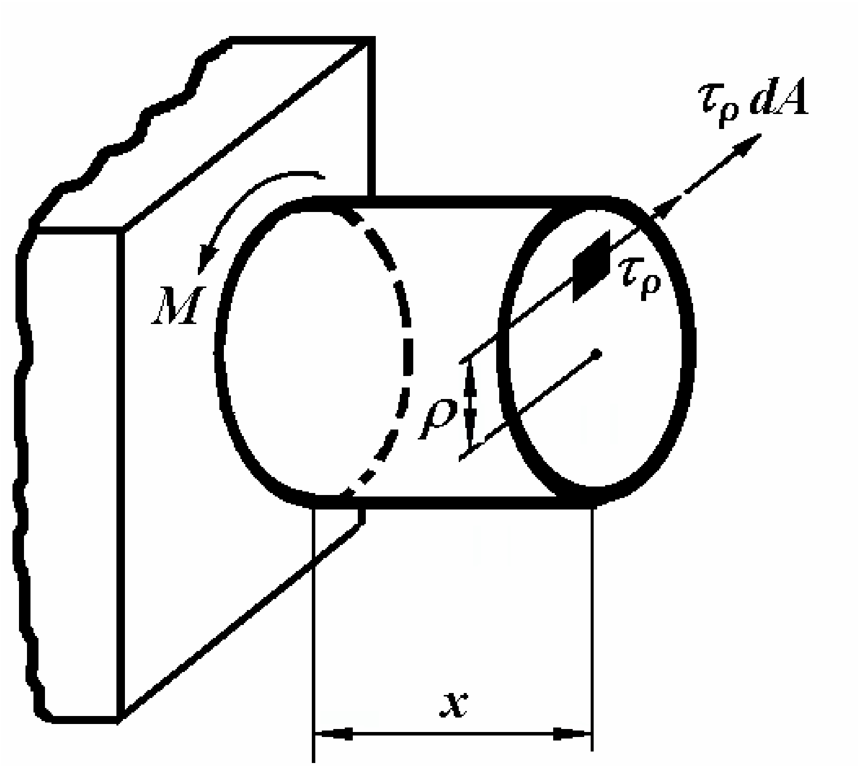
Напряжения в поперечном сечении

Внутренний сосредоточенный момент M_x, лежащий в плоскости поперечного сечения вала, можно выразить через касательные напряжения, которые согласно закону Гука при сдвиге связаны с деформацией

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho$$

• или

$$\tau_\rho = G\frac{d\varphi}{dx}\rho$$



- Элементарный внутренний момент

$$dM = \tau_\rho \cdot dA \cdot \rho$$

- Внутренний сосредоточенный момент

$$M_x = G \frac{d\varphi}{dx} I_\rho,$$

- откуда

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{GI_\rho}$$

- Интеграл

$$\int_A \rho^2 dA = I_\rho$$

представляет собой геометрическую характеристику поперечного сечения и носит название полярного момента инерции сечения

- Для сечения круглой формы полярный момент инерции сечения

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32}$$

- Геометрическая характеристика сечения, которая называется *полярным моментом сопротивления*.

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}} = \frac{I_\rho}{r}$$

- Для круглого сечения

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}$$

Условие прочности

Условие прочности ограничивает максимальные напряжения в наиболее нагруженном поперечном сечении вала максимально допускаемыми напряжениями для конкретного материала

$$\tau_{\max} = \frac{M_{pac}}{W_{\rho}} \leq [\tau],$$

Расчет перемещений и условие жесткости

Угловое перемещение (взаимный угол поворота φ) сечений

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{x_i} l_i}{G \cdot I_\rho}$$

условие жесткости

накладывает ограничение на взаимный угол поворота крайних сечений наиболее деформированного участка вала

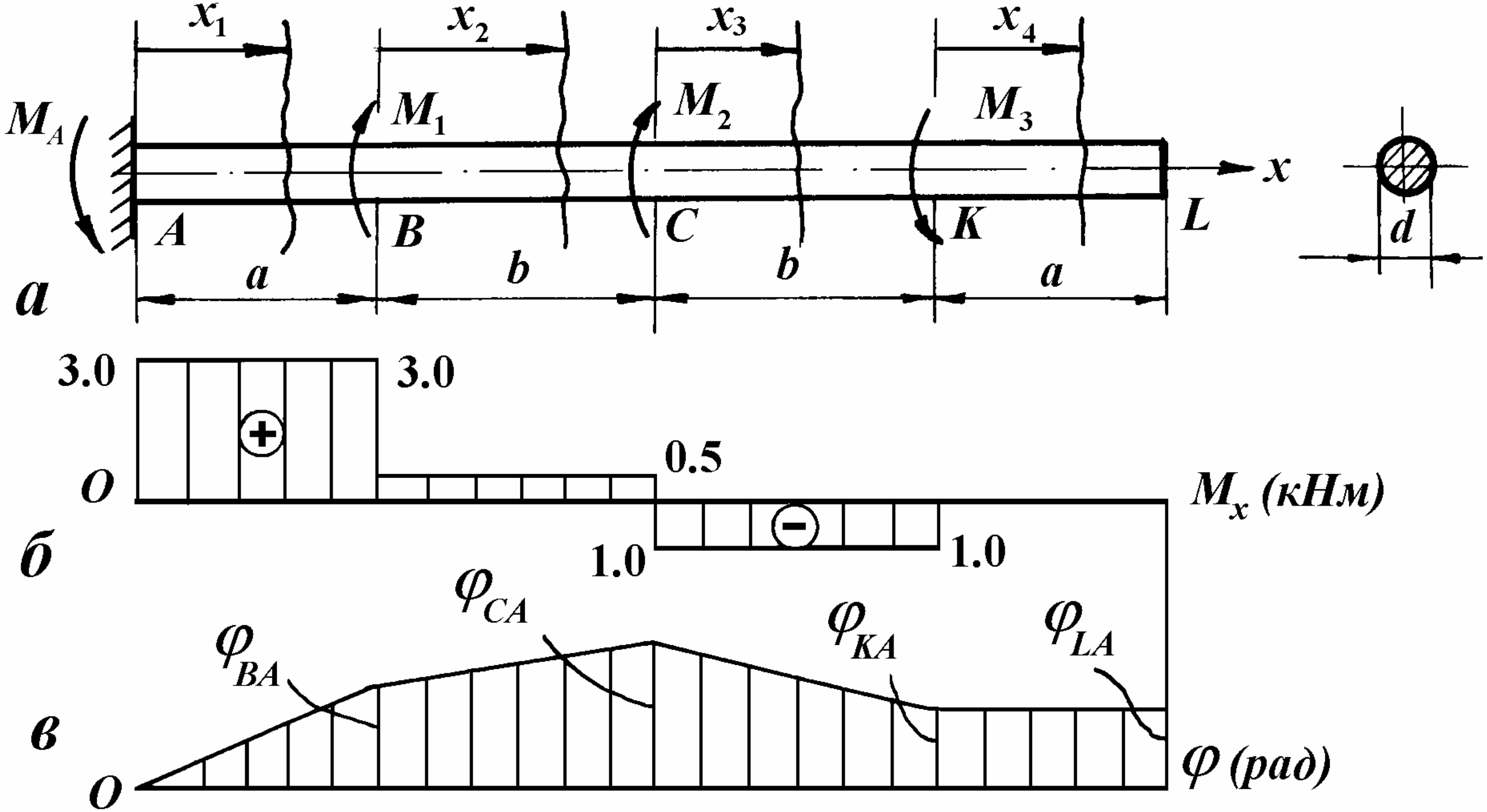
$$\varphi_{max} \leq [\varphi],$$

Пример. Определить диаметр вала постоянного поперечного сечения

Дано: $M_1 = 2{,}5 кНм;\ M_2 = 1{,}5 кНм;$

$$M_3 = 1 кНм; \quad a = 0{,}1 м; \quad b = 0{,}2 м; \quad G = 8 \cdot 10^4\, МПа.$$

$$[\tau] = 70 МПа; \quad [\theta] = 2 град/м;$$



x_1
x_2
x_3
x_4
M_A
M_1
M_2
M_3
x
A
B
C
K
L
d
a
b
b
a
а
3.0
3.0
0.5
O
M_x (кНм)
1.0
1.0
б
φ_{CA}
φ_{BA}
φ_{KA}
φ_{LA}
в
O
φ (рад)

- Расчетный момент - 3 [кНм], тогда минимальное значение диаметра вала, удовлетворяющее условию прочности будет равно

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{pac}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3}{3{,}14 \cdot 70 \cdot 10^3}} = 0{,}06$$

Участок AB $\left(0 \le x_1 \le a\right)$

$$\varphi_{x_1 A} = \frac{M_{x_1} \cdot x_1}{G \cdot I_\rho}$$

- Из выражения видно, что угол поворота на участке *AB* изменяется по линейному закону, то есть для построения эпюры достаточно рассчитать значение в начале и в конце участка:

- Начало

$$\varphi_{x_1(x_1=0)} = \varphi_{AA} = \frac{3 \cdot 0}{8 \cdot 10^7 \cdot I_\rho} = 0;$$

- конец

$$\varphi_{x_1 A(x_1=a)} = \varphi_{BA} = \frac{3 \cdot 0{,}1}{8 \cdot 10^7 \cdot I_\rho} = \frac{0{,}375}{10^8 I_\rho}.$$

Участок BC $\left(0 \le x_2 \le b\right)$

Угол поворота сечения x_2 относительно A

$$\varphi_{x_2 A} = \varphi_{BA} + \varphi_{x_2 B} = \varphi_{BA} + \frac{M_{x_2} \cdot x_2}{G \cdot I_\rho}$$

- Начало

$$\varphi_{x_2 A(x_2=0)} = \varphi_{BA}$$

- конец

$$\varphi_{x_2 A(x_2=b)} = \varphi_{BA} + \frac{M_{x_2} b}{G \cdot I_\rho} = \varphi_{CA} = \frac{0{,}375}{10^8 I_\rho} + \frac{0{,}5 \cdot 0{,}2}{8 \cdot 10^7 I_\rho} = \frac{0{,}5}{10^8 \cdot I_\rho}$$

Участок СК $\left(0 \le x_3 \le b\right)$

- Угол поворота

$$\varphi_{x_3 A} = \varphi_{CA} + \varphi_{x_3 C}$$

- Начало

$$\varphi_{x_3 A(x_3=0)} = \varphi_{CA};$$

- конец

$$\varphi_{x_3 A(x_3=b)} = \varphi_{CA} + \frac{M_{x_3} \cdot b}{G \cdot I_\rho} = \varphi_{KA} = \frac{0,5}{10^8 \cdot I_\rho} + \frac{-1 \cdot 0,2}{8 \cdot 10^7} = \frac{0,25}{10^8 \cdot I_\rho}.$$

Участок KL $\left(0 \le x_4 \le a\right)$

- Угол поворота

$$\varphi_{x_4 A} = \varphi_{KA} + \varphi_{x_4 K}.$$

- Начало
- $$\varphi_{x_4 A(x_4=0)} = \varphi_{KA};$$

- конец

$$\varphi_{x_4 A(x_4=a)} = \varphi_{KA} + \frac{M_{x_4} a}{G \cdot I_\rho} = \varphi_{KA} = \frac{0{,}25}{10^8 I_\rho} + 0 = \frac{0{,}25}{10^8 I_\rho}.$$

- наибольший относительный угол поворота будет на участке *AB.*

$$[\theta]\cdot\frac{\pi}{180}=0{,}0349\,\frac{рад}{м}$$

- Условие жесткости

$$\frac{0,375}{10^7 \cdot I_\rho} \leq 0,0349,$$

$$d_2 \geq \sqrt[4]{\frac{0{,}375 \cdot 32}{10^7 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}0349}} = 0{,}057$$

Изгиб

- Рассмотрим плоский поперечный *изгиб*. Это такой вид нагружения, когда под действием внешних нагрузок из шести внутренних силовых факторов в поперечном сечении стержня могут возникать только два - изгибающий момент и поперечная сила

- *Изгиб называют чистым, если в поперечном сечении возникает только изгибающий момент*.

- Стержень, работающий на изгиб, называют *балкой.*

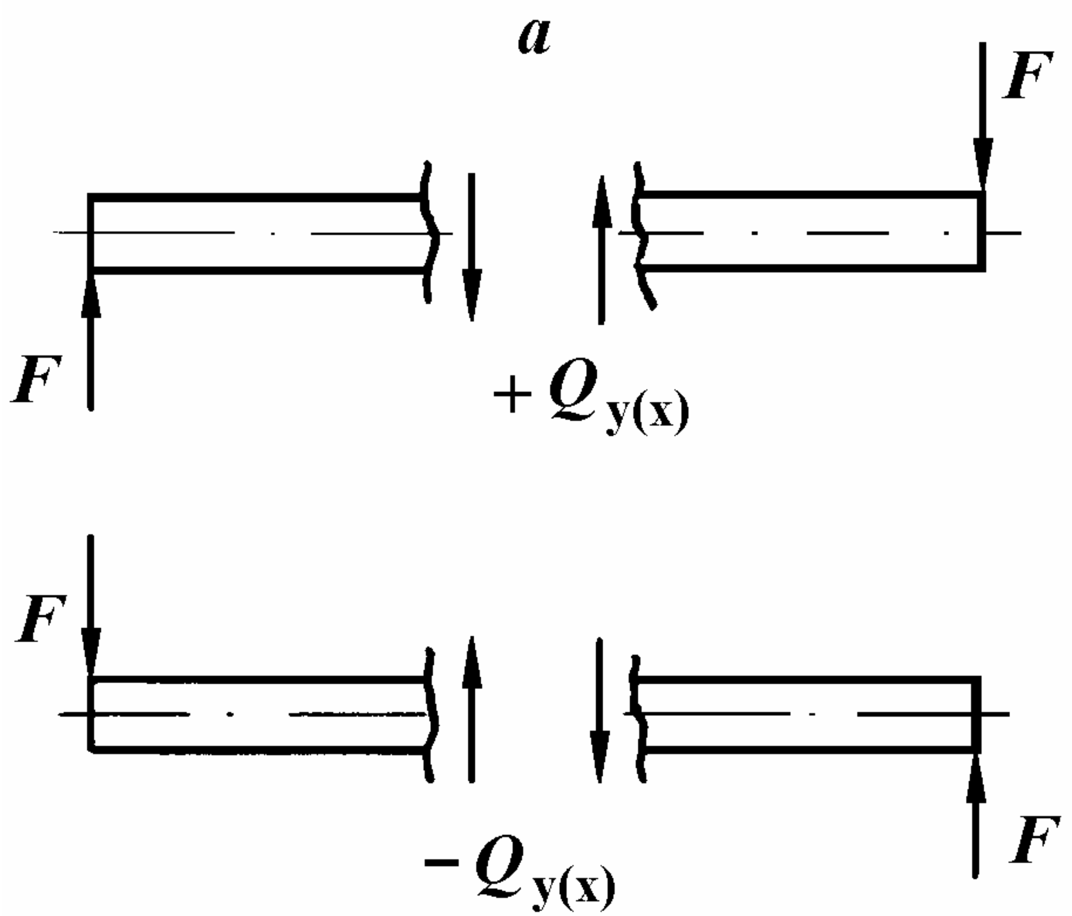
- Реакции связей

$$R_B = \frac{F \cdot a}{a+b};$$

$$R_A = \frac{F \cdot b}{a+b}.$$

Правило знаков для внутренней поперечной силы.

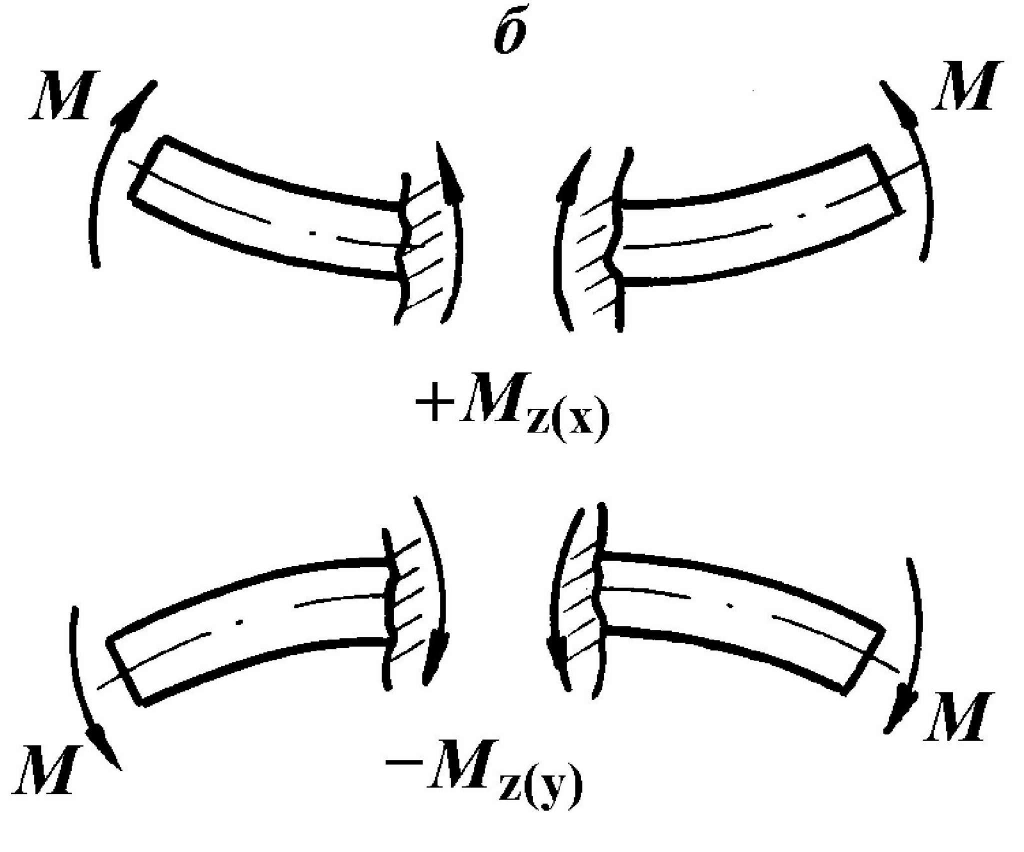
- *Если внешняя сила направлена таким образом, что стремится повернуть рассматриваемую часть стержня относительно сечения по часовой стрелке, то она создает положительную внутреннюю силу*



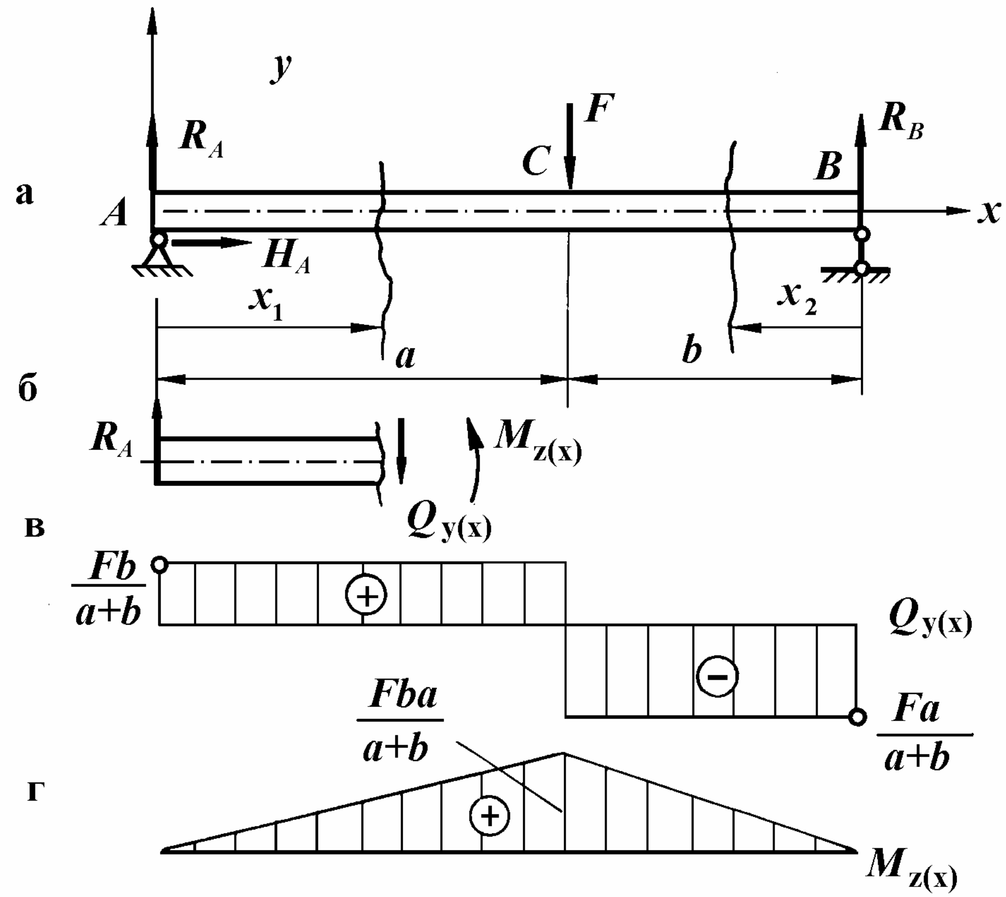
a
F
F
+ Q y(x)
F
- Q y(x)
F

Правило знаков для внутреннего момента.

Если внешние нагрузки деформируют рассматриваемую часть стержня, мысленно закрепленную в сечении, выпуклостью вниз, то они создают положительный момент


б
M
M
+Mz(x)
M
M
−Mz(y)

Пример



y
F
R_A
R_B
C
B
а
A
x
H_A
x_1
x_2
a
b
б
R_A
$M_{z(x)}$
$Q_{y(x)}$
в
$\frac{Fb}{a+b}$
$Q_{y(x)}$
$\frac{Fa}{a+b}$
$\frac{Fba}{a+b}$
г
$M_{z(x)}$

- Опорные реакции определим из уравнений равновесия балки:

$$\sum m_A = -F \cdot a + R_B\left(a + b\right) = 0;$$

$$\sum Y = R_A - F + R_B = 0.$$

- Реакции связей

$$R_B = \frac{F \cdot a}{a+b};$$

$$R_A = \frac{F \cdot b}{a+b}.$$

Для исследуемого стержня имеем два силовых участка: *АС, СВ*.

Далее, используя метод сечений,

на каждом участке записываем аналитические выражения для внутренних силовых факторов

участок AC $\left(0 \le x_1 \le a\right)$

- Рассмотрим равновесие мысленно отсеченной части стержня длиной a .

- Эта часть стержня нагружена внешней сосредоточенной силой R_A,

которую должна уравновесить внутренняя поперечная сила $Q_y(x_1)$.

- Если на рассматриваемую часть стержня действует несколько внешних сил, то внутренняя сила будет равна сумме их проекций на ось y.
- Следовательно

$$Q_{y(x_1)} = R_A = \frac{F \cdot b}{a+b}.$$

- Согласно правилу знаков внешняя сила R_A в сечении x_1 создает положительную внутреннюю силу.
- Однако, рассматриваемая часть стержня длиной x_1 под действием R_A и $Qy(x_1)$ в равновесии не находится, так как эти силы создают момент, равный

$$M_{z(x)} = R_{A} \cdot x_1$$

Таким образом, если на рассматриваемую часть действует несколько внешних нагрузок,

то изгибающий момент $Mz(x)$

в сечении стержня равен сумме моментов от внешних нагрузок,

взятых **относительно центра тяжести рассматриваемого сечения.**

$$M_{z(x_1)} = R_A \cdot x_1 = \frac{F \cdot b}{a+b} \cdot x_1$$

- Поэтому, чтобы построить эпюру моментов *на участке* AC необходимо знать значение момента в начале участка и в конце:

$$M_{z(x_1=0)} = 0;$$

$$M_{z(x_1=a)} = \frac{F \cdot b}{a+b} \cdot a.$$

участок BC $0 \le x_2 \le b$

Для *участка CB* удобнее начало координат перенести в сечение B

и рассмотреть равновесие мысленно отсеченной части стержня длиной x_2

- Тогда для *ВС внутренняя поперечная сила на участке ВС - постоянная и отрицательная, а момент - положительный и изменяется по линейному закону.*

$$Q_{y(x_2)} = -R_B = -\frac{F \cdot a}{a+b}$$

$$M_{z(x_2)} = R_B \cdot x_2 = \frac{F \cdot a}{a+b} \cdot x_2.$$

- В начале участка

$$M_{z(x_2=0)} = 0,$$

- в конце

$$M_{z(x_2=b)} = \frac{F \cdot a}{a+b} \cdot b.$$

На эпюре $Q_{y(x)}$ в сечении,

где приложена сосредоточенная внешняя сила, будет скачок на величину этой силы,

а на эпюре $M_{z(x)}$- излом.

Расчеты на прочность

- Из трех возможных типов задач рассмотрим пример проектного расчета.
- **Пример.** Определить размеры поперечного сечения балки

- Дано: $M = 6 кНм$, $q = 4 кН/м$, $h = 2b$, $a = 1 м$

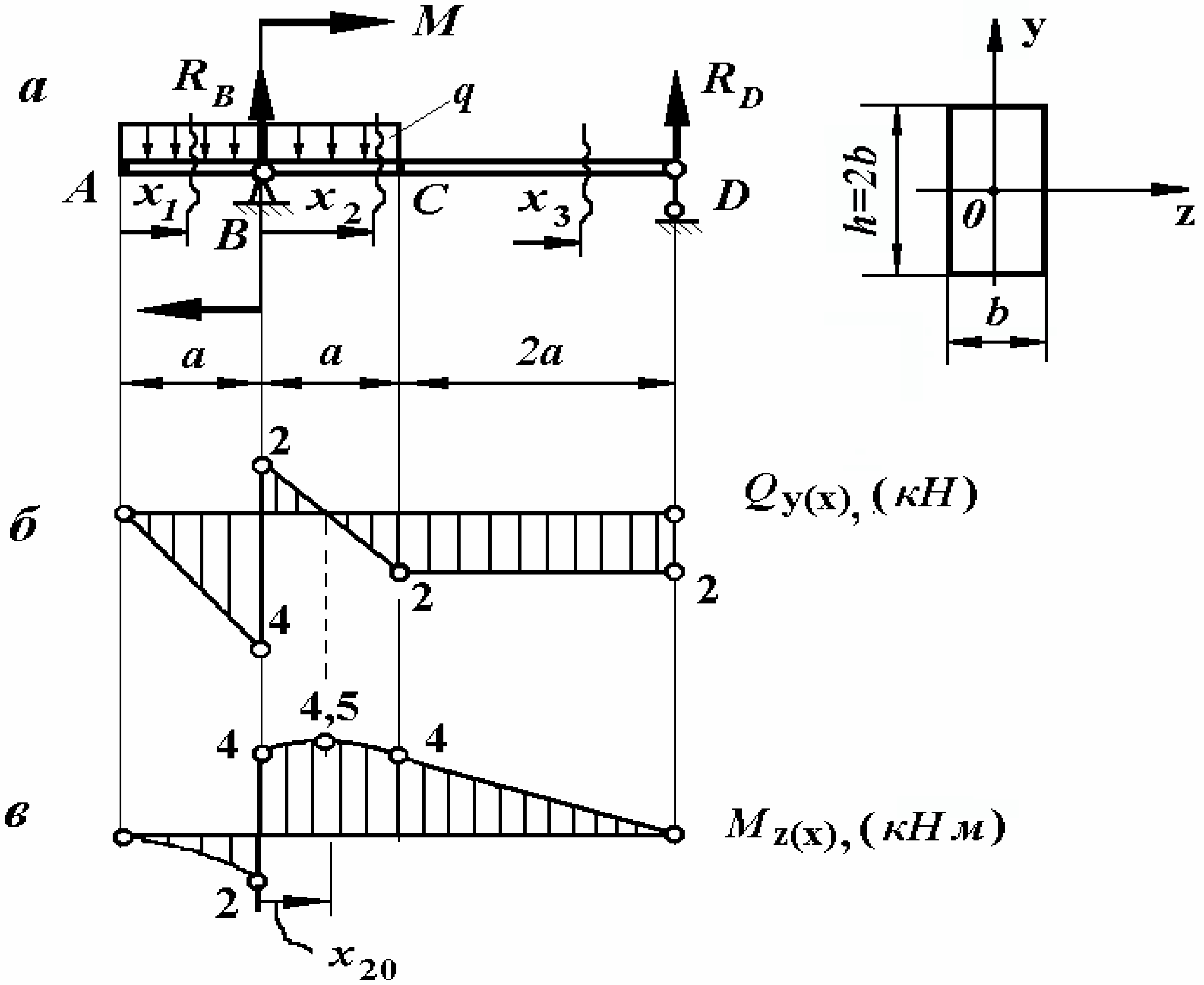
$$[\sigma] = 160 МПа \qquad [\tau] = 80 МПа;$$

Определить размеры поперечного сечения балки

Размеры сечения определим

из условия прочности по нормальным напряжениям,

а проверочный расчет сделаем по условию прочности для касательных напряжений.



а
M
R_B
q
R_D
A
x_1
B
x_2
C
x_3
D
a
a
2a
y
h=2b
0
z
b
б
2
4
2
2
$Q_{y(x)}$, (кН)
в
4
4,5
4
2
x_{20}
$M_{z(x)}$, (кН м)

- из условий равновесия определим опорные реакции:

$$\sum m_в = -M + R_D 3a = 0$$

$$\sum m_D = q2a3a - M - R_B 3a = 0$$

- $R_D = \dfrac{M}{3a} = \dfrac{6}{3} = 2$ кН
-
-
- $R_B = \dfrac{q6a^2 - M}{3a} = 6$ кН

Участок *AB* $\left(0 \le x_1 \le a\right)$

- Поперечная сила

$$Q_{y(x_1)} = -qx_1$$

начало

$$Q_{y(x_{1=0})} = 0$$

конец $$Q_{y(x_{1=a})} = -qa = -4\text{ кН}$$

- Изгибающий момент

$$M_{z(x_1)} = -q\frac{x_1^2}{2}$$

- начало

$$M_{z(x_1=0)} = 0$$

- конец
-

$$M_{z(x_1=a)} = -q\frac{a^2}{2} = -2 \text{ кНм}$$

- Изгибающий момент на данном участке изменяется по закону квадратной параболы.

- В сечении *A* поперечная сила равна нулю, следовательно, эпюра моментов в этом сечении имеет экстремум

Участок *BC* . $\left(0 \le x_2 \le a\right)$

Начало координат в сечении *B*. Поперечная сила

$$Q_{y(x_2)} = -q\left(a + x_2\right) + R_B$$

начало $$Q_{y(x_2=0)} = -qa + R_B = 2$$ кН

конец $$Q_{y(x_{1=a})} = -qa = -4$$ кН

Изгибающий момент

$$M_{z(x_2)} = -q\frac{(a+x_2)^2}{2} + M + R_B x_2$$

Начало $M_{z(x_2=0)} = -q\frac{a^2}{2} + M = 4$ кНм

конец

$$M_{z(x_2=a)} = -q\frac{4a^2}{2} + M + R_B a = 4 \text{ кНм}$$

- На данном участке изгибающий момент также изменяется по закону квадратной параболы.

- С целью определения положения экстремума эпюры моментов выражение для поперечной силы, как первой производной функции моментов, приравняем к нулю

- Поперечная сила

$$-q\left(a + x_{20}\right) + R_B = 0$$

- найдем из этого уравнения координату экстремального значения момента

- $$x_{20} = \frac{-qa + R_B}{q} = 0{,}5$$ м

- Тогда экстремальное значение момента будет равно

$$M_{z(x_2=x_{20})} = -q\frac{(a+x_{20})^2}{2} + M + R_B x_{20} = 4{,}5 \text{ кНм}$$

Участок *DC* $\left(0 \le x_3 \le 2a\right)$

Начало координат выгоднее расположить в сечении *D*.

Поперечная сила

$$Q_{y(x_3)} = -R_D = -2 \quad \text{[кН].}$$

- Изгибающий момент $$M_{z(x_3)} = R_D x_3$$
- Начало $$M_{z(x_3=0)} = 0$$
- Конец $M_{z(x_3=2a)} = R_D 2a = 4$ кНм

Так как балка по всей длине имеет постоянное поперечное сечение,

то расчетное значение момента будет равно его максимальной величине на эпюре

$$M_{рас} = M_{max} = 4{,}5 \text{ кНм}.$$

- Для прямоугольного сечения осевой момент сопротивления стержня

$$W_z = \frac{bh^2}{6}$$

- или для рассматриваемого случая

$$W_z = \frac{2}{3} b^3$$

- Из условия прочности

$$W_z \geq \frac{M_{рас}}{[\sigma]}$$

- Тогда

- $$b \geq \sqrt[3]{\frac{3M_{рас}}{2[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 4{,}5}{2 \cdot 160 \cdot 10^3}} \approx 0{,}035 \quad \text{м}$$

- Проверим выполнение условия прочности по касательным напряжениям для полученного значения *b*

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{bh} = 2{,}45 МПа < [\tau]$$

Здесь Qy - максимальное значение поперечной силы, взятое из эпюры .

Так как условие прочности выполняется, то значение b = 0,035 м является окончательным.