Лабораторные задания

Задание. Применяя одношаговые и многошаговые численные методы, найти решение задачи Коши для ОДУ и систем ОДУ.

Варианты заданий

Вариант №1.

$$y' = x^2 + y^2,$$
$$y(0) = 0,4;\ x \in [0,1].$$

Вариант №2.

$$y' = \cos(x + y),$$
$$y(0) = 0,4;\ x \in [0,1].$$

Вариант №3.

$$\begin{cases} y' = xy + z, \\ z' = y - z, \end{cases}$$
$$y(0) = 1;\ z(0) = 0;\ x \in [0,1].$$

Вариант №4.

$$\begin{cases} y' = x^2 + z, \\ z' = y - z, \end{cases}$$
$$y(0) = 1;\ z(0) = 0;\ x \in [0,1].$$

Вариант №5.

$$\begin{cases} y' = z^2 + x, \\ z' = xy, \end{cases}$$
$$y(0) = 1;\ z(0) = -0,5;\ x \in [0,1].$$

Вариант №6.

$$y' = e^{x} - y,$$
$$y(0) = 1;\ x \in [0,1].$$

Вариант №7.

$$y' = \sqrt{x} + y,$$
$$y(0) = 1;\ x \in [0,1].$$

Вариант №8.

$$y' = y\sin(x) + x,$$
$$y(0) = 0,2;\ x \in [0,1].$$

Вариант №9.

$$y' = y\cos(x) + x,$$
$$y(0) = 0,1;\ x \in [0,1].$$

Вариант №10.

$$\begin{cases} y' = x + y + z, \\ z' = y - z; \end{cases}$$
$$y(0) = 1;\ z(0) = -1;\ x \in [0,1].$$

Вариант №11.

$$\begin{cases} y' = xy + z, \\ z' = y + xz; \end{cases}$$
$$y(0) = 0;\ z(0) = 0,5;\ x \in [0,1].$$

Вариант №12.

$$\begin{cases} y' = x^2 - z, \\ z' = y + x; \end{cases}$$
$$y(0) = 1;\ z(0) = 1;\ x \in [0,1].$$

Вариант №13.

$$\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = yz; \end{cases}$$
$$y(0) = 0,5;\ z(0) = 0;\ x \in [0,1].$$

Вариант №14.

$$y' = 2y - 3x^2 - 2,$$
$$y(0) = 2;\ x \in [0,1].$$

Вариант №15.

$$y' = x + y\sqrt{x},$$
$$y(0) = 0,2;\ x \in [0,1].$$

Вариант №16

$$y' = 1 + 0,2y\sin(x) - y^2,$$
$$y(0) = 0,2;\ x \in [0,1].$$

Вариант №17.

$$\begin{cases} y' = -xz, \\ z' = \dfrac{y}{x}; \end{cases}$$
$$y(0) = 1;\ z(0) = 0;\ x \in [0,1].$$

Вариант №18.

$$\begin{cases} y' = (y+z)x, \\ z' = (-y+z)x; \end{cases}$$
$$y(0) = 1;\ z(0) = 1;\ x \in [0,1].$$

Вариант №19.

$$\begin{cases} y' = -yz + \dfrac{\cos(x)}{x}, \\ z' = -z^2 + \dfrac{2,5x}{1+x^2}; \end{cases}$$
$$y(0) = 0;\ z(0) = -0,2;\ x \in [0,1].$$

Вариант №20.

$$\begin{cases} y' = z - (2y + 0,25z)y, \\ z' = e^{y} - (2 + 2z)y; \end{cases}$$
$$y(0) = 0,5;\ z(0) = 0,5;\ x \in [0,1].$$

Вариант №21.

$$y' = x\ln(y) + y\ln(x),$$
$$y(1) = 1;\ x \in [1,6].$$

Вариант №22.

$$y' = e^{x} - y,$$
$$y(0) = 0;\ x \in [0,2].$$

Вариант №23.

$$y' = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$
$$y(1) = 0,5;\ x \in [1,2].$$

Вариант №24.

$$\begin{cases} y' = z + 0,5, \\ z' = y - x; \end{cases}$$
$$y(0) = 0,5;\ z(0) = 0,5;\ x \in [0,1].$$

Вариант №25.

$$y' = y\sin(x) - y^{2},$$
$$y(0) = 0,5;\ x \in [0,1].$$

Вариант №26.

$$\begin{cases} y' = \cos(y+2z)+2, \\ z' = \dfrac{2}{x+6y^2}+x+1; \end{cases}$$
$$y(0)=0,1;\ z(0)=0,5;\ x\in[0,1].$$

Вариант №27.

$$\begin{cases} y' = \sin(x^2)+y+z, \\ z' = x+y-z^2+1; \end{cases}$$
$$y(0)=0,5;\ z(0)=1;\ x\in[0,1].$$

Вариант №28

$$\begin{cases} y' = \ln(2x+z), \\ z' = \sqrt{4x^2+y^2}; \end{cases}$$
$$y(0)=1;\ z(0)=1;\ x\in[0,4].$$

Вариант №29.

$$y' = \frac{\cos(x)}{1+y^2},$$
$$y(0)=0;\ x\in[0,4].$$

Вариант №30.

$$y' = e^{-x}(y^2+1,04),$$
$$y(0)=0;\ x\in[0,1].$$

Вариант №31.

$$\begin{cases} y' = \cos(y+2z)+4, \\ z' = \dfrac{2}{x+4y}+x+1; \end{cases}$$
$$y(0)=0{,}1;\ z(0)=0{,}5;\ x\in[0{,}1].$$

Вариант №32.

$$\begin{cases} y' = \sqrt{x^2+2y^2}+z, \\ z' = \cos\left(2z\right)+x; \end{cases}$$
$$y(0)=0{,}4;\ z(0)=0{,}4;\ x\in[0{,}1].$$

Вариант №33.

$$\begin{cases} y' = e^{-(y+z)}+2x, \\ z' = x^2+y; \end{cases}$$
$$y(0)=1;\ z(0)=1;\ x\in[0{,}1].$$

Вариант №34.

$$y' = -\frac{y}{x}-y^2\ln\left(x\right),$$
$$y(1)=2;\ x\in[1{,}2].$$

Вариант №35.

$$y' = \frac{1}{\cos(x)} - y\,\mathrm{tg}(x),$$
$$y(0) = 2;\ x \in [0,1].$$

Литература

1. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985.
2. *Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.* Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
3. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Вычислительные методы, том 2. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
4. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – М.: Наука, 1978. - 512 с.
5. *Копченова Н.В., Марон И.А.* Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972. – 369 с.
6. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 632 с.
7. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
8. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений, том 2. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 620 с.
9. *Арушанян О.Б., Залёткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на фортране. – М.: изд-во МГУ, 1990. – 336 с.
10. *Ракитин В.И., Первушин В.Е.* Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров. – М.: Высшая школа, 1998. – 383 с.
11. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. Введение в теорию. – М.: Наука, 1977. – 439 с.
12. *Вержбицкий В.М.* Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 848 с.
13. *Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д.* Методы приближенных вычислений. – Томск: изд. ТГУ, ч. II, 2007. – 288 с.

Вопросы для самоконтроля

1. Постановка задачи Коши для ОДУ первого порядка.
2. Теорема Коши.
3. Формулировка Задачи Коши для ОДУ n –го порядка.
4. Классификация методов решения задачи Коши для ОДУ.
5. Понятие о приближенных и численных методах.
6. Одношаговые и многошаговые численные методы, явные и неявные численные методы.
7. Пояснить понятие плохо обусловленной задачи на примере следующей задачи Коши:

$$y' = y - x,$$
$$y(0) = 1;\ x \in [0,100].$$

8. Аналитический метод разложения в ряд Тейлорарешения задачи Коши для ОДУ I порядка.
9. Метод последовательных приближений Пикара. Основная идея метода.
10. Численный метод Эйлера. Вывод явного метода Эйлера.
11. Оценка погрешности аппроксимации метода Эйлера.
12. Неявный метод Хьюна. Оценка погрешности аппроксимации.
13. Общий способ построения одношаговых вычислительных правил, предложенный Рунге и Куттой.
14. Два эквивалентных приема получения параметров $(\alpha), (\beta), (A)$ методов Рунге – Кутты.
15. Построение метода Рунге – Кутты первого порядка точности $(q = 0)$.
16. Метод второго порядка точности $(q = 1)$. Вывод расчетных формул.
17. Понятие о многошаговых методах решения задачи Коши для ОДУ I порядка.
18. Построить экстраполяционную формулу Адамса (случай $s = 0, q = 1$).
19. Построить интерполяционную формулу Адамса $(s = 1, q = -1)$.

20. Вывести многошаговое правило типа Коуэлла $(s = 2, q = 1)$.
21. Обобщение многошаговых методов на систему ОДУ I порядка.
22. Подход Дальквиста к исследованию устойчивости многощаговых методов.
23. Понятие *условия корней* и его связь с устойчивостью метода.
24. С помощью подхода Дальквиста исследовать на устойчивость: а) явный метод Эйлера; б) неявный метод Эйлера.
25. Применить подход Дальквиста к исследованию устойчивости: а) экстраполяционного метода Адамса; б) интерполяционного метода Адамса.
26. Исследование устойчивости явного и неявного метода Эйлера на модельном уравнении (второй подход).
27. Применение второго подхода исследования устойчивости явного (неявного) метода Эйлера на случай системы ОДУ I порядка.