Глава 1

Численные методы вычисления определенного интеграла

Цель работы — изучение численных методов интегрирования и их практическое применение для приближенного вычисления однократных интегралов.

Продолжительность работы — 2–4 час.

1.1. Постановка задачи

Требуется вычислить приближенно интеграл

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx$$

где $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция.

1.2. Численные методы вычисления интеграла

1.2.1. Квадратурные формулы

В качестве приближенного значения интеграла I рассматривается число

$$I_n = \sum_{i=0}^{n} q_i \cdot f(x_i), \tag{1.2.1}$$

где $f(x_i)$ — значения функции $f(x)$ в точках $x = x_i,\ i = 0, 1, ...n$, q_i — числовые коэффициенты. Формула (1.2.1) называется *квадратурной формулой*. Точки x_i называются *узловыми точками* или *узлами* квадратурной формулы, а числа q_i — *весовыми коэффициентами* или *весами* квадратурной формулы. Разность

$$R_n = I - I_n = \int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} q_i \cdot f(x_i)$$

называется *погрешностью* квадратурной формулы. Погрешность зависит как от расположения узлов, так и от выбора весовых коэффициентов.

Говорят, что квадратурная формула *точна* для многочленов степени s, если при замене $f(x)$ на произвольный алгебраический многочлен степени не выше s приближенное равенство $I \approx I_n$ становится точным.

Введем некоторые понятия, которые будут использоваться в дальнейших рассуждениях.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x)$ *принадлежит классу* $C^k[a,b]$, и писать $f \in C^k[a,b]$, если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и имеет на нем непрерывные производные до порядка k включительно.

Определение 2. Пусть $\varphi(h)$ — некоторая функция переменной h с конечной областью определения D_φ на полуоси $h > 0$, причем $h \in D_\varphi$ может принимать сколь угодно малые значения. Тогда, если существуют такие положительные числа h_0, c, k, что при всех $h \in D_\varphi$, удовлетворяющих условию $0 < h \leqslant h_0$, выполняется неравенство

$$\mid \varphi(h) \mid \leqslant c \cdot h^k,$$

то пишут

$$\varphi(h) = O(h^k)$$

и говорят, что $\varphi(h)$ *есть O большое* от h^k (при $h \to 0$).

Согласно данному определению, выполняются следующие очевидные свойства. Если $\varphi(h) = O(h^k)$, $\psi(h) = O(h^k)$, причем $D_\varphi = D_\psi$, то

$$\varphi(h) + \psi(h) = O(h^k),$$

т.е.

$$O(h^k) + O(h^k) = O(h^k).$$

Если $k > m > 0$, то $O(h^k)$ в то же время есть $O(h^m)$. Наконец, если $\varphi(h) = O(h^k)$, то $\alpha \cdot \varphi(h) = O(h^k)$, где α — постоянная, не зависящая от h.

Рассмотрим наиболее простые квадратурные формулы.

1.2.2. Формула средних прямоугольников

Допустим, что $f \in C^2[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$, $h > 0$. Положим приближенно

$$I = \int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x)dx \approx h \cdot f_0, \tag{1.2.2}$$

где $f_0 = f(0)$. Формула (1.2.2) означает, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, аппроксимируется площадью закрашенного прямоугольника (рис. 1.1,a), высота которого равна значению f_0 функции $f(x)$ в *средней* точке $x = 0$ отрезка $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$. Формула (1.2.2) называется формулой средних прямоугольников.

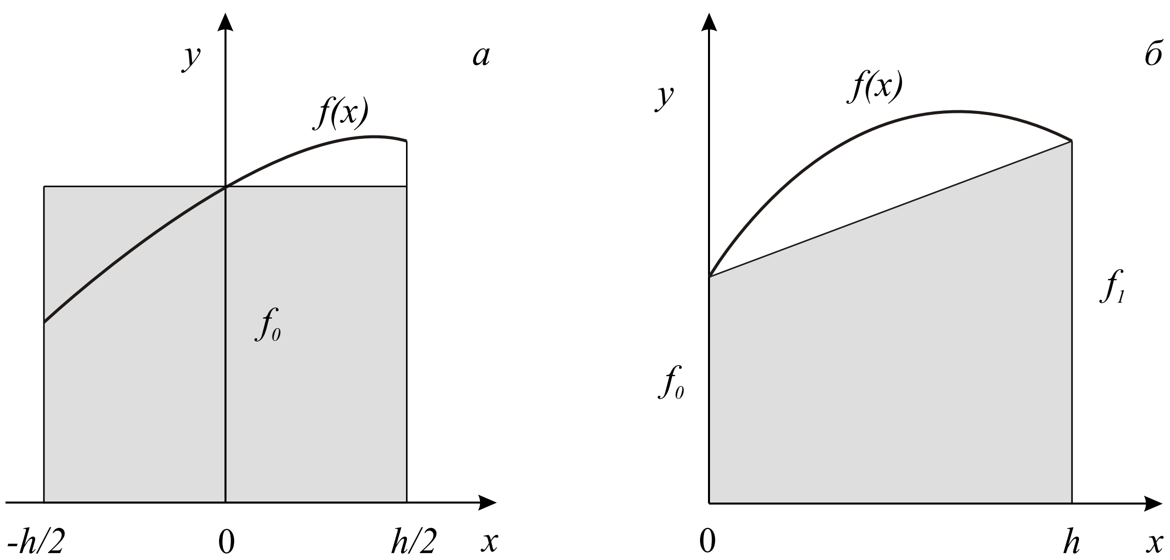

Рис. 1.1.

Получим формулу средних прямоугольников с остаточным членом. Пусть

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt.$$

Так как $F(0) = 0$, $F'(0) = f_0$, $F''(0) = f_0'$, $F'''(x) = f''(x)$, то согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, имеем

$$F(\pm\frac{h}{2}) = F(0) \pm \frac{h}{2}F'(0) + \frac{h^2}{8}F''(0) \pm \frac{h^3}{48}F'''(\xi_\pm)$$

или

$$F(\pm\frac{h}{2}) = \pm\frac{h}{2}f_0 + \frac{h^2}{8}f_0' \pm \frac{h^3}{48}f''(\xi_\pm), \tag{1.2.3}$$

где ξ_-, ξ_+ — некоторые точки, причем $-\frac{h}{2} < \xi_- < 0 < \xi_+ < \frac{h}{2}$.

С учетом (1.2.3) получаем

$$\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x)dx = F\left(\frac{h}{2}\right) - F\left(-\frac{h}{2}\right) = h \cdot f_0 + \frac{h^3}{24} \cdot \frac{f''(\xi_-) + f''(\xi_+)}{2}.$$

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть $f \in C^1[a,b]$, $\xi_i \in [a,b]$ — произвольные точки, $i = 1, 2, ..., n$. Тогда существует такая тока $\xi \in [a,b]$, что

$$[f(\xi_1) + f(\xi_2) + ... + f(\xi_n)]/n = f(\xi).$$

Эта лемма вытекает из очевидных неравенств

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant [f(\xi_1) + f(\xi_2) + ... + f(\xi_n)]/n \leqslant \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

и теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции.

Используя лемму, получаем *формулу средних прямоугольников с остаточным членом*

$$\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x)dx = h \cdot f_0 + \frac{h^3}{24} \cdot f''(\xi), \quad |\, \xi \,| \leqslant \frac{h}{2}.$$

1.2.3. Формула трапеций

Пусть $f \in C^2[0,h]$. Полагаем

$$I = \int\limits_0^h f(x)dx \approx h \cdot \frac{f_0 + f_1}{2}, \qquad (1.2.4)$$

где $f_0 = f(0)$, $f_1 = f(h)$. Из формулы (1.2.4) видно, что искомое значение интеграла приближенно заменяется величиной площади закрашенной на рис. (1.1,*б*) трапеции.

Аналогично тому, как это сделано в п. (1.2.2) можно получить *формулу трапеций с остаточным членом*

$$\int\limits_0^h f(x)dx = h \cdot \frac{f_0 + f_1}{2} - \frac{h^3}{12} \cdot f''(\xi), \quad \xi \in [0,h].$$

1.2.4. Формула Симпсона

Предположим, что $f \in C^4[-h,h]$ и требуется вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{-h}^{h} f(x)dx.$$

Значение этого интеграла приближенно заменяем величиной площади закрашенной криволинейной трапеции (рис. 1.2), ограниченной сверху параболой $p(x)$, проходящей через точки $(-h, f_{-1})$, $(0, f_0)$, (h, f_1), где $f_i = f(i \cdot h)$, $i = -1, 0, 1$. Эта парабола задается уравнением

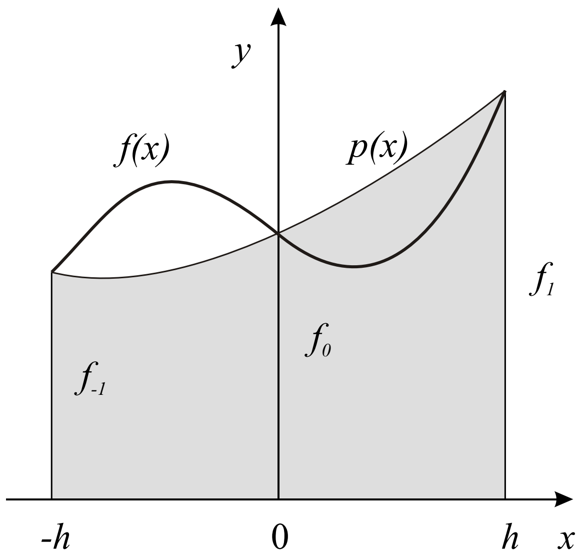

Рис. 1.2.

$$p(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \cdot x + \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{2h^2} \cdot x^2$$

и

$$\int\limits_{-h}^{h} p(x)dx = \frac{h}{3} \cdot (f_{-1} + 4f_0 + f_1).$$

Следовательно

$$\int\limits_{-h}^{h} f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot (f_{-1} + 4f_0 + f_1). \tag{1.2.5}$$

Формула Симпсона с остаточным членом имеет вид

$$\int\limits_{-h}^{h} f(x)dx = \frac{h}{3} \cdot (f_{-1} + 4f_0 + f_1) - \frac{h^5}{90} \cdot f^{(IV)}(\xi), \quad \xi \in [-h, h].$$

Рассмотренные квадратурные формулы средних прямоугольников (1.2.2), трапеций (1.2.4) и Симпсона (1.2.5) назовем *каноническими*.

1.2.5. Составные квадратурные формулы

На практике, если требуется вычислить приближенно интеграл, обычно делят заданный отрезок $[a, b]$ на n равных *частичных* отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, 1, ..., n$; $x_0 = a, x_n = b, h = (b - a)/n$. На каждом частичном отрезке используют каноническую квадратурную формулу и суммируют полученные результаты. При применении формул средних прямоугольников и трапеций длину частичных отрезков удобно принять за h, а при использовании формулы Симпсона — за $2h$. В результате получаются следующие формулы, которые будем называть *составными*.

Составная квадратурная формула средних прямоугольников записывается в виде (рис. 1.3)

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h \cdot (f_{c1} + f_{c2} + ... + f_{cn}), \tag{1.2.6}$$

где $h = (b-a)/n$, $f_{ci} = f(x_{ci})$; $x_{ci} = a+(i-1/2)h$, $i = 1, 2, ..., n$ — координаты средних точек частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$.

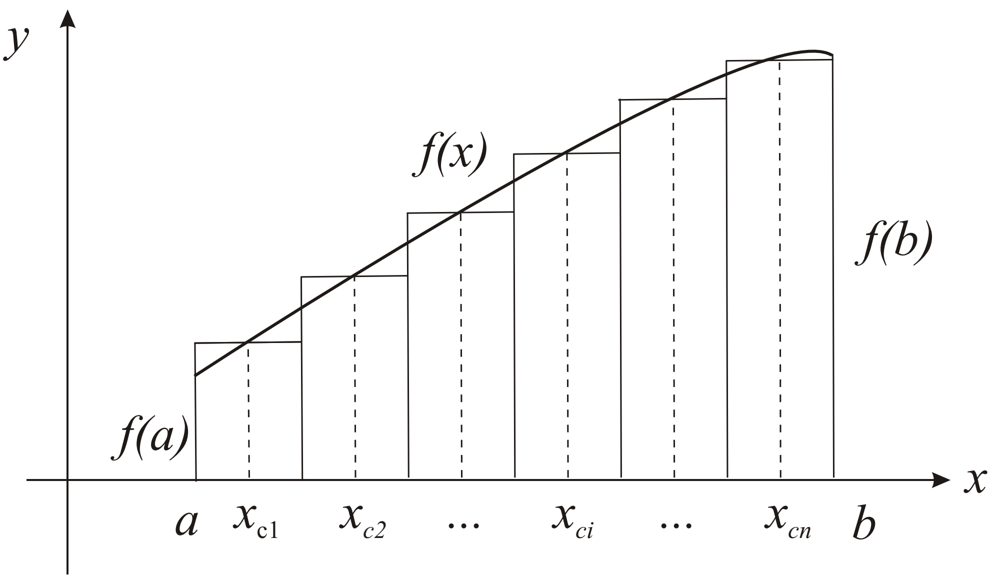

Рис. 1.3.

Погрешность R_n получается в результате суммирования погрешностей по частичным отрезкам

$$R_n = \frac{h^3}{24}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = \frac{h^3}{24}n \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)\right),$$

где $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. В соответствии со сформулированной выше леммой последнее выражение для R_n можно переписать в виде

$$R_n = \frac{h^3}{24} \cdot n \cdot f''(\xi) = h^2 \cdot \frac{(b-a)}{24} \cdot f''(\xi), \;\; \xi \in [a, b].$$

Пусть M — максимальное значение модуля второй производной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, т.е. $M = \max\limits_{x \in [a,b]} | f''(x) |$; тогда из выражения для R_n получаем следующую оценку:

$$| R_n | \leqslant h^2 \cdot \frac{(b-a) \cdot M}{24},$$

это означает, что погрешность формулы средних прямоугольников на всем отрезке интегрирования $[a, b]$ есть величина $O(h^2)$ (см. определение 2).

В этом случае говорят, что квадратурная формула имеет *второй порядок точности.*

Замечание. Возможны формулы прямоугольников и при ином, чем в формуле средних прямоугольников, расположении узлов. Например,

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h \cdot f_{x_{i-1}}, \qquad \int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} h \cdot f_{x_i}.$$

Однако из-за нарушения симметрии погрешность таких формул является величиной $O(h)$, т.е. порядок точности таких формул на единицу ниже порядка точности формулы средних прямоугольников.

Составная квадратурная формула трапеций имеет вид

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2} \right), \tag{1.2.7}$$

где $f_i = f(x_i)$, $x_i = a + i \cdot h$, $h = (b-a)/n$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Аналогично предыдущему случаю можно получить выражение для погрешности R_n составной формулы трапеций

$$R_n = -h^2 \cdot \frac{(b-a)}{12} \cdot f''(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Тогда имеет место оценка

$$| R_n | \leqslant h^2 \cdot \frac{(b-a) \cdot M}{12}, \quad M = \max_{x \in [a,b]} | f''(x) | .$$

Таким образом, формула трапеций (1.2.7) имеет, так же как и формула средних прямоугольников (1.2.6), второй порядок точности ($R_n = O(h^2)$); следует заметить, что ее погрешность оценивается величиной в два раза большей, чем погрешность формулы средних прямоугольников.

Составная квадратурная формула Симпсона записывается так

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot \left(f_0 + f_{2n} + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i} \right), \tag{1.2.8}$$

где $f_j = f(x_j)$, $x_j = a + j \cdot h$, $h = (b-a)/(2n)$, $j = 0, 1, ..., 2n$.

Погрешность составной формулы Симпсона имеет вид

$$R_n = -h^4 \cdot \frac{(b-a)}{180} \cdot f^{(IV)}(\xi), \;\; \xi \in [a, b].$$

Отсюда получаем оценку

$$\mid R_n \mid \leqslant h^4 \cdot \frac{(b-a) \cdot M}{180}, \;\; M = \max_{x \in [a,b]} \mid f^{(IV)}(x) \mid,$$

т.е. составная формула Симпсона существенно точнее, чем формулы средних прямоугольников и трапеций. Она имеет на отрезке $[a, b]$ четвертый порядок точности ($R_n = O(h^4)$).

Из выражений погрешностей видно, что формулы средних прямоугольников и трапеций точны для многочленов первой степени, т.е. для линейных функций, а формула Симпсона точна для многочленов третьей степени (для них погрешность равна нулю).

1.2.6. Квадратурные формулы Гаусса

Будем считать, что интеграл предварительно приведен к стандартной форме, когда областью интегрирования является отрезок $[-1, 1]$. Итак, пусть требуется вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx.$$

Мы рассматривали до сих пор квадратурные формулы с заданными узлами и убедились, что формулы средних прямоугольников и трапеций точны для многочленов первой степени, а формула Симпсона — для многочленов третьей степени. Пусть мы имеем квадратурную формулу с n *узловыми точками*

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot f(x_i). \tag{1.2.9}$$

Если считать неизвестными не только весовые коэффициенты q_i, но и узлы x_i, то можно потребовать, чтобы квадратурная формула (1.2.9) была точна для полиномов наиболее высокой степени m. Такую формулу называют *квадратурной формулой Гаусса*. При этом оказывается, что $m = 2n - 1$.

Формула (1.2.9) должна быть точна для $f(x) = 1$, x, x^2, ..., x^{2n-1}, т.е.

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot x_i^l = \int\limits_{-1}^{1} x^l dx = \left.\frac{x^{l+1}}{l+1}\right|_{-1}^{1} = \frac{1+(-1)^l}{l+1},$$

где $l = 0, 1, ..., 2n-1$. В результате для узлов x_i и коэффициентов q_i получим следующую систему $2n$ нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + ... + q_n = 2\,, \\ q_1x_1 + q_2x_2 + ... + q_nx_n = 0\,, \\ q_1x_1^2 + q_2x_2^2 + ... + q_nx_n^2 = \dfrac{2}{3}\,, \\ \qquad\qquad \vdots \\ q_1x_1^{2n-1} + q_2x_2^{2n-1} + ... + q_nx_n^{2n-1} = \dfrac{1+(-1)^{2n-1}}{2n}. \end{cases} \tag{1.2.10}$$

В простейшем случае $n = 1$ систему (1.2.10) можно решить и убедиться, в том, что полученная формула Гаусса совпадает с формулой средних прямоугольников: $I_n = 2 \cdot f(0)$, и что она верна для любой линейной функции $f(x) = c_0 + c_1 x$. В общем случае при произвольном n можно показать (см., например, [4]), что узлами квадратурной формулы Гаусса являются корни *полинома Лежандра* $P_n(x)$, а весовые коэффициенты вычисляются по формуле

$$q_j = \int\limits_{-1}^{1} Q_{n-1,j}(x)dx, \;\; j = 1, ..., n; \tag{1.2.11}$$

где подынтегральная функция

$$Q_{n-1,j}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\cdots(x - x_n)}{(x_j - x_1)(x_j - x_2)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)}.$$

Функция $Q_{n-1,j}(x)$ является полиномом степени $(n - 1)$. В числителе у него стоит произведение $(n - 1)$-ого множителей $(x - x_i)$, $i = 1, ..., n, i \neq j$; в знаменателе — значение числителя в узле $x = x_j$. Таким образом, полином $Q_{n-1,j}(x)$ в узлах x_i принимает следующие значения

$$Q_{n-1,j}(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Полиномы Лежандра. Они определяются формулой

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \, n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n, \;\; n = 0, 1, 2, ..., \tag{1.2.12}$$

Согласно (1.2.12) $P_0(x)$=1, $P_1(x) = x$. Для последующих значений n можно воспользоваться рекуррентным соотношением

$$nP_n(x) = (2n - 1) \cdot x \cdot P_{n-1}(x) - (n - 1)P_{n-2}(x).$$

Пользуясь этой формулой, выпишем полиномы Лежандра для $n = 2, 3, 4, 5$:

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\,, \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\,,$$
$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\,, \qquad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

Графики полиномов $P_n(x)$ до $n = 5$ представлены на рис. 1.4.

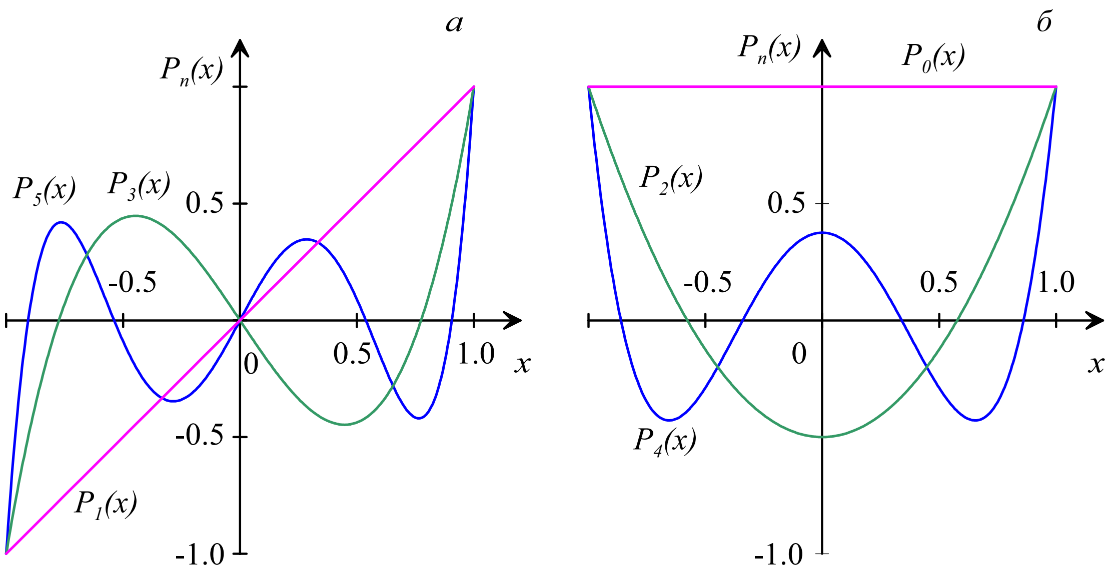

Рис. 1.4.

Полиномы Лежандра с четными номерами являются четными функциями, а с нечетными — нечетными. Полиномы Лежандра $P_n(x)$ в точках $x = \pm 1$ принимают следующие значения: $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$. На интервале $(-1, 1)$ многочлен $P_n(x)$ имеет n простых нулей. В силу четности или нечетности $P_n(x)$ нули полиномов Лежандра располагаются симметрично относительно точки $x = 0$.

Можно показать, что весовые коэффициенты q_j (1.2.11) квадратурной формулы Гаусса положительны (см., например, [3]). Кроме того, в симметричных относительно точки $x = 0$ корнях полинома Лежандра $x_j = -x_{n-(j-1)}$ весовые коэффициенты, соответствующие этим узлам, совпадают при любом n: $q_j = q_{n-(j-1)}$.

Приведем значения корней x_i и соответствующих им весов q_i квадратурных формул Гаусса для $n = 1, ..., 5$:

$$
\begin{aligned}
&n = 1: \quad x_1 = 0, \;\; q_1 = 2;\\
&n = 2: \;\; -x_1 = x_2 = \sqrt{1/3}, \;\; q_1 = q_2 = 1;\\
&n = 3: \;\; -x_1 = x_3 = \sqrt{3/5}, \;\; x_2 = 0, \;\; q_1 = q_3 = 5/9, q_2 = 8/9;\\
&n = 4: \;\; -x_1 = x_4 = \sqrt{(15 + 2\sqrt{30})/35}, \;\; -x_2 = x_3 = \sqrt{(15 - 2\sqrt{30})/35},\\
&\qquad\qquad q_1 = q_4 = (18 - \sqrt{30})/36, \qquad q_2 = q_3 = (18 + \sqrt{30})/36;\\
&n = 5: \;\; -x_1 = x_5 = \sqrt{(35 + 2\sqrt{70})/63}, \;\; -x_2 = x_4 = \sqrt{(35 - 2\sqrt{70})/63},\\
&\qquad\qquad q_1 = q_5 = (322 - 13\sqrt{70})/900, \quad q_2 = q_4 = (322 + 13\sqrt{70})/900,\\
&\qquad\qquad x_3 = 0, \;\; q_3 = 128/225.
\end{aligned}
\tag{1.2.13}
$$

Численные значения узлов x_i и весов q_i (1.2.13) с десятью десятичными знаками после запятой приведены в табл. 1.1. На оценке погрешности квадратурных формул Гаусса останавливаться не будем (см., например, [5]).

1.2.7. Правило Рунге практической оценки погрешности

При выводе формулы средних прямоугольников предполагалось, что $f \in C^2[a, b]$. Погрешность этой формулы, выражающаяся через вторую производную $f''(x)$, есть величина $O(h^2)$. Если подынтегральная функция имеет производные более старших порядков, то можно получить более содержательную оценку погрешности.

Если $f \in C^4[a, b]$, то можно получить следующее выражение для

$I = \int\limits_a^b f(x)dx$:

$$I = I_h^{np} + c \cdot h^2 + O(h^4), \qquad (1.2.14)$$

где I_h^{np} — значение интеграла, вычисленное по составной формуле средних прямоугольников с шагом h ($h = (b-a)/n$); c — постоянная, не зависящая от h, $c = \frac{1}{24} \int\limits_a^b f''(x)dx$.

Величина ch^2 в выражении (1.2.14) называется *главной частью погрешности* формулы средних прямоугольников. Может случиться, что $c = 0$. Тогда главная часть погрешности формулы средних прямоугольников является величиной порядка h^4. Но обычно $c \neq 0$.

Если $f \in C^4[a,b]$, то можно получить также соотношение

$$I = I_h^{mp} + c_1 \cdot h^2 + O(h^4), \qquad (1.2.15)$$

где I_h^{mp} — приближенное значение интеграла I, найденное по составной формуле трапеций с шагом h; c_1 — постоянная, не зависящая от h, $c_1 = -\frac{1}{12} \int\limits_a^b f''(x)dx$.

Если $f \in C^6[a,b]$, то аналогично выражениям (1.2.14) и (1.2.15) можно получить следующее соотношение

$$I = I_h^C + c \cdot h^4 + O(h^6), \qquad (1.2.16)$$

где I_h^C — приближенное значение интеграла I, найденное по составной формуле Симпсона; c — некоторая не зависящая от h постоянная.

Правило Рунге. Пусть I_h — приближенное значение интеграла I, найденное по одной из трех рассмотренных составных формул (по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона). Объединим соотношения (1.2.14), (1.2.15) и (1.2.16) в одно:

$$I = I_h + c \cdot h^k + O(h^{k+2}), \qquad (1.2.17)$$

где c не зависит от h, k — порядок точности квадратурной формулы ($k = 2$ для составных формул средних прямоугольников и трапеций, $k = 4$ для составной формулы Симпсона). Предполагается, что $f \in C^{k+2}[a, b]$.

На основании формулы (1.2.17) можем записать, что

$$I = I_{h/2} + c \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^k + O(h^{k+2}). \tag{1.2.18}$$

Вычитая равенство (1.2.18) из (1.2.17), находим

$$I_{h/2} - I_h = c \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^k (2^k - 1) + O(h^{k+2}).$$

Отсюда

$$c \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^k = \frac{I_{h/2} - I_h}{2^k - 1} + O(h^{k+2})$$

и, следовательно, согласно формуле (1.2.18), с точностью до $O(h^{k+2})$ имеем

$$I - I_{h/2} \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{2^k - 1}. \tag{1.2.19}$$

Вычисление приближенной оценки погрешности по формуле (1.2.19) при выполнении условия (1.2.17), т.е. при возможности представления значения интеграла I в виде (1.2.17), называется *правилом Рунге.*

Вычитая из умноженного на 2^k равенства (1.2.18) равенство (1.2.17), получаем

$$I \cdot (2^k - 1) = 2^k \cdot I_{h/2} - I_h + O(h^{k+2}).$$

Отсюда $I = I_h^* + O(h^{k+2})$, где

$$I_h^* = \frac{2^k \cdot I_{h/2} - I_h}{2^k - 1}.$$

Число I_h^* называется *уточненным по Ричардсону* приближенным значением интеграла I.

1.3. Задание

Для предложенного варианта лабораторной работы интеграл

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx$$

вычислите:

1) аналитически,
2) численно с точностью до $\varepsilon = 0.0001$:
   - по формуле средних прямоугольников,
   - по формуле трапеций,
   - по формуле Симпсона.

Точность вычислений определяется с помощью правила Рунге. Точность ε, с которой необходимо найти приближенное значение интеграла, считается достигнутой, когда в процессе вычислений будет выполнено неравенство

$$\frac{|\ I_{h/2} - I_h\ |}{2^k - 1} < \varepsilon.$$

Алгоритм вычислений с использованием правила Рунге. Приближенное вычисление интеграла с заданной точностью ε проводим *методом итераций*. На l-той итерации вычисляем значение $I_l = I_h$ интеграла I по одной из трех требуемых составных формул приближенного вычисления интегралов с шагом h_l, затем находим значение $I_{l+1} = I_{h/2}$ по той же составной формуле, но с шагом $h_{l+1}{=}h_l/2$. Если для найденных значений I_l и I_{l+1} выполняется неравенство

$$\frac{|\ I_{l+1} - I_l\ |}{2^k - 1} < \varepsilon, \tag{1.3.1}$$

то точность считается достигнутой. В противном случае проводим следующую итерацию: I_l присваиваем значение I_{l+1}, увеличиваем в два раза число разбиений n, находим новое значение I_{l+1} и опять проверяем выполнение условия (1.3.1).

При вычислении начального приближения I_0 (для $l = 0$) в качестве шага h_0 можно взять значение $h_0 \approx \sqrt[k]{\varepsilon}$. Однако, при этом, соответствующее значению h_0 первоначальное число разбиений n_0, если его определять по формуле $n_0 = (b-a)/h_0$, скорее всего окажется не целым числом. Число разбиений n по своему смыслу на каждой итерации l должно быть целым, поэтому вначале надо задавать число разбиений, а затем вычислять шаг, соответствующий данному числу разбиений. Это можно сделать следующим образом:

$$n_0 = \left[\frac{b-a}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1, \quad h_0 = \frac{b-a}{n_0} \tag{1.3.2}$$

для формул средних прямоугольников и трапеции;

$$n_0 = \left[\frac{b-a}{2\sqrt[4]{\varepsilon}}\right] + 1, \quad h_0 = \frac{b-a}{2n_0} \tag{1.3.3}$$

для формулы Симпсона.

В этих формулах квадратные скобки [ ] обозначают целую часть заключенного в них числа.

3) дайте оценку сверху погрешности вычислений, используя формулы, выражающие R_n через соответствующие производные подынтегральной функции;
4) оцените погрешность как разность между точным значением интеграла и значением, полученным численным методом;
5) сравните между собой погрешности, полученные в п.п. 3 и 4;

6) оформите отчет по лабораторной работе. Отчет должен содержать описание использованного метода, результаты и текст программы.

Варианты лабораторной работы и ответы представлены в таблице 1.2.

Таблица 1.1. Координаты узловых точек и весовые коэффициенты квадратурной формулы Гаусса

Число узлов n	Номер точки i	Координата точки x_i	Коэффициент q_i
1	1	0	2
2	1	$x_1 = -x_2$	1
	2	0.5773502692	1
3	1	$x_1 = -x_3$	$q_1 = q_3$
	2	0	0.8888888889
	3	0.7745966692	0.5555555556
4	1	$x_1 = -x_4$	$q_1 = q_4$
	2	$x_2 = -x_3$	$q_2 = q_3$
	3	0.3399810436	0.6521451549
	4	0.8611363116	0.3478548451
5	1	$x_1 = -x_5$	$q_1 = q_5$
	2	$x_2 = -x_4$	$q_2 = q_3$
	3	0	0.5688888889
	4	0.5384693101	0.4786286705
	5	0.9061798459	0.2369268851

Таблица 1.2. Варианты лабораторной работы

№ вар.	a	b	Функция $f(x)$	Ответ
1	2	3	4	5
1	0	1	$\mathrm{e}^x + 1$	e
2	0	1	$2^x + 1/\ln 2$	$2/\ln 2$
3	0	1	$3^x + 1/\ln 3$	$3/\ln 3$
4	0.1	$0.1 \cdot \mathrm{e}$	$\ln(10 \cdot x)$	0.1
5	0.2	$0.2 \cdot \mathrm{e}$	$\ln(5 \cdot x)$	0.2
6	1	2	$\mathrm{e}^x + 1/x$	$\mathrm{e}(\mathrm{e}-1) + \ln 2$
7	0	1	$x \cdot \mathrm{e}^x$	1
8	1	e	$x^2 + 16/x$	$(\mathrm{e}^3 - 1)/3 + 16$
9	0	1	$2x - \mathrm{e}^{-x}$	$1/\mathrm{e}$
10	1	2	$2x + 1/x$	$3 + \ln 2$
11	1	2	$3x^2 + 1/x$	$7 + \ln 2$
12	0	1	$4x^3 - \mathrm{e}^{-x}$	$1/\mathrm{e}$
13	0	1	$2x + \mathrm{e}^x$	e
14	0	1	$1/(1 + x^2)$	$\pi/4$
15	0	1	$1 - 2x\mathrm{e}^{-x^2}$	$1/\mathrm{e}$

Окончание таблицы 1.2.

1	2	3	4	5
16	0	1	$2x\mathrm{e}^{x^2}$	$\mathrm{e}-1$
17	0	1	$1-x\mathrm{e}^{-x}$	$2/\mathrm{e}$
18	1	e	$\ln^2 x/x$	$1/3$
19	0	1	$x/(1+x^4)$	$\pi/8$
20	1	2	$\mathrm{e}^{1/x}/x^2$	$\mathrm{e}-\sqrt{\mathrm{e}}$
21	$\ln 2$	$2\ln 2$	$1/(\mathrm{e}^x-1)$	$\ln(3/2)$
22	0	$\pi/2$	$\cos^3 x\cdot\sin(2x)$	$2/5$
23	0	$\pi/2$	$(x+\sin x)/(1+\cos x)$	$\pi/2$
24	1	2	$1/(x+x^2)$	$\ln(4/3)$
25	0	$\pi/2$	$\mathrm{e}^x\cdot\cos x$	$(\mathrm{e}^{\pi/2}-1)/2$
26	0	1	$\mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x}$	$\mathrm{e}^{\mathrm{e}}-\mathrm{e}$
27	0.5	$0.5\cdot\mathrm{e}$	$\ln(2x)$	$1/2$
28	0	1	4^x	$1/\ln 4$
29	0	1	$5^x+1/\ln 5$	$5/\ln 5$
30	0	1	$10^x+1/\ln 10$	$10/\ln 10$

Литература

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука,1989. 432 с.

2. Самарский А.А. Введение в численные методы. СПб.: Издательство «Лань», 2005. 288 с.

3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. 632 с.

4. Костомаров Д.П., Фаворский А.П. Вводные лекции по численным методам. М.: Университетская книга, Логос, 2006. 184 с.

5. Волков Е.А. Численные методы. М.: Наука, 1987. 248 с.

6. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

7. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высш. шк., 1994. 544 с.