

Министерство высшего и среднего специального образования  
РСФСР  
Томский ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового  
Красного Знамени политехнический институт им. С.М.Кирова

---

УТВЕРЖДАЮ

Декан ТЭФ В. Забуга А.С. Заворин  
" 4 " марта 1988г.

### НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Методические указания по расчету нестационарной теплопроводности  
по курсу "Теплопередача" для студентов специальностей 0305, 0308,  
0309, 0310, 0520

Томск 1988



Нестационарная теплопроводность.

Методические указания по расчету нестационарной теплопроводности по курсу "Теплопередача" для студентов специальностей 0305, 0308, 0309, 0310, 0520. Томск, изд. ТПИ им. С.М. Кирова, 1988.-26 с.

Составители: А.В. Фурман  
Ю.И. Чижик

Рецензент доц., к.т.н. В.С. Логинов

Методические указания рассмотрены и рекомендованы методическим семинаром кафедры теоретической и общей теплотехники "10" марта 1988 г.

Зав. кафедрой



Ю.А. Загромов

Теплопроводность представляет собой молекулярный перенос теплоты в твердых телах (или между ними), обусловленный переменностью температуры. При этом процесс теплообмена происходит вследствие передачи энергии микродвижения одних элементарных частиц другим. Процессы переноса теплоты за счет теплопроводности, когда температурное поле в теле меняется не только в пространстве, но и во времени, называют нестационарными. Среди практических задач нестационарной теплопроводности большое значение имеют две группы процессов. К первой группе относятся процессы, когда тело по истечении достаточно большого промежутка времени стремится к тепловому равновесию (в том числе и с окружающей средой). Например, охлаждение или пуск турбины, парогенератора и т.д. Ко второй группе относятся процессы, когда температура тела: а) претерпевает периодические изменения или б) стремится к некоторому установившемуся состоянию. Примером случая а) является процесс регенератора, насадка которого то нагревается дымовыми газами, то охлаждается воздухом. Характерным признаком случая б) является наличие в теле источника или стока тепла мощностью  $q_v$ , Вт/м<sup>3</sup>. Например, пуск электрической машины. В настоящей разработке рассматриваются примеры расчета теплового состояния тел, стремящихся к тепловому равновесию.

#### ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ТЕЛ НЕОГРАНИЧЕННЫХ РАЗМЕРОВ

Все тела можно разделить на 2 группы: тела неограниченных размеров и тела конечных размеров. К первой группе относят неограниченную пластину, неограниченный цилиндр и шар. Пластина (цилиндр) считают неограниченной, если ее толщина  $2R$ , где  $R$  - половина толщины (радиус), мала по сравнению с длиной  $L$  и шириной  $H$  ( $2R/L < 10$ ,  $2R/H < 10$ ). Такое деление оправдывается тем, что для тел неограниченных размеров имеются аналитические решения об изменении температуры  $t$ , °С во времени для любой точки тела. Задача расчета изменения  $t$  во времени в любой точке тела конечных размеров решается на основании о  $t$  тел неограниченных размеров.

Так, температурное поле в неограниченной пластине описывается уравнением

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{R}\right) \exp(-\mu_n^2 F_0), \quad (1)$$

где  $\theta = \frac{t - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}}$  - безразмерная температура тела,  $A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}$  - коэффициент, зависящий только от критерия  $Bi$  (см. таблицу № 1).



Здесь:  $t$  - искомое значение температуры,  $^{\circ}\text{C}$ ;  $t_{ж}$  - температура окружающей среды,  $^{\circ}\text{C}$ ;  $t_0$  - начальная температура тела,  $^{\circ}\text{C}$ ;  $\mu_n$  - корни характеристического уравнения, отвечающие определенному значению критерия  $Bi$  (см. таблицу № 2);  $Bi = \alpha R / \lambda$  - критерий Био;  $\alpha$  - коэффициент теплоотдачи,  $\text{Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{К}$ ;  $\lambda$  - коэффициент теплопроводности,  $\text{Вт}/\text{м} \cdot \text{К}$ ;  $Fo = \alpha \tau / R^2$  - критерий Фурье;  $a = \lambda / c \rho$  - коэффициент температуропроводности,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $c$  - массовая изобарная теплоемкость,  $\text{Дж}/\text{кг} \cdot \text{К}$ ;  $\rho$  - плотность,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $\tau$  - время, с;  $x$  - текущая координата с началом в центре пластины.

Отношение  $\theta = \frac{t - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}}$  есть безразмерная температура тела, причем  $\theta = 1$  соответствует началу нагрева (охлаждения) тела. В условиях теплового равновесия  $\theta = 0$ . Очевидно  $x/R = X$  - есть безразмерная координата, причем  $X = 0$  соответствует центру, а  $X = 1$  - поверхности. Критерии Био и Фурье изменяются в пределах от 0 до  $\infty$ . Случай  $Bi \rightarrow 0$  соответствует процессам теплопроводности в телах с высоким значением  $\lambda$ , а  $Bi \rightarrow \infty$  - интенсивным процессам охлаждения (нагрева) ( $\alpha \rightarrow \infty$ );  $Fo = 0$  соответствует началу нагрева (охлаждения). При  $Fo \rightarrow \infty$  тело стремится к тепловому равновесию.

Температурное поле в цилиндре неограниченных размеров описывается уравнением

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\chi_n \frac{z}{R}) \exp(-\chi_n^2 Fo), \quad (2)$$

где  $B_n = \frac{2 J_1(\chi_n)}{\chi_n [J_0^2(\chi_n) + J_1^2(\chi_n)]}$  - коэффициент, зависящий только от критерия  $Bi$ , (см. таблицу № 3).

Здесь  $J_0$  и  $J_1$  - функции Бесселя 1 рода нулевого и первого порядка, значения которых приведены в таблице № 5;  $\chi_n$  - корни соответствующего характеристического уравнения, значения которых в зависимости от  $Bi$  приведены в таблице № 4;  $z$  - текущий радиус ( $0 \leq z \leq R$ ).

Из (1) и (2) легко заметить, что для центра и поверхности неограниченного тела  $\theta$  есть функция  $Bi$  и  $Fo$ , т.е.

$$\theta_c = f(Bi, Fo) \quad \text{и} \quad \theta_n = \psi(Bi, Fo). \quad (3)$$

Это дает возможность представить функциональные связи (3) в виде графиков (рис. 4-13). Применение этих графиков существенно облегчает расчет температур в центре и на поверхности неограниченных тел.

Корни  $\mu_n$  и  $\chi_n$  обладают тем свойством, что  $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n$ ;  $\chi_1 < \chi_2 < \dots < \chi_n$ . В силу этого члены ряда (1) или (2) быстро убывают. Начиная с момента времени  $\tau$ , соответствующего критерию  $Fo \geq 0,3$ , температурное поле тела с достаточной для практики точностью описывается первым членом ряда (1) или (2).

## ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Тела конечных размеров можно представить как результат пересечения каких-то неограниченных тел. Например, цилиндр длиной  $2h$  и диаметром  $2R$  можно рассматривать как тело, образованное пересечением неограниченной пластины толщиной  $2h$  и неограниченного цилиндра диаметром  $2R$  (см. рис. 1). Брус размерами  $2c \times 2d$  можно представить как результат пересечения двух пластин толщиной  $2c$  и  $2d$ , (см. рис. 2), а параллелепипед размерами  $2c \times 2d \times 2l$  - трех пластин с толщиной  $2c$ ,  $2d$  и  $2l$ .

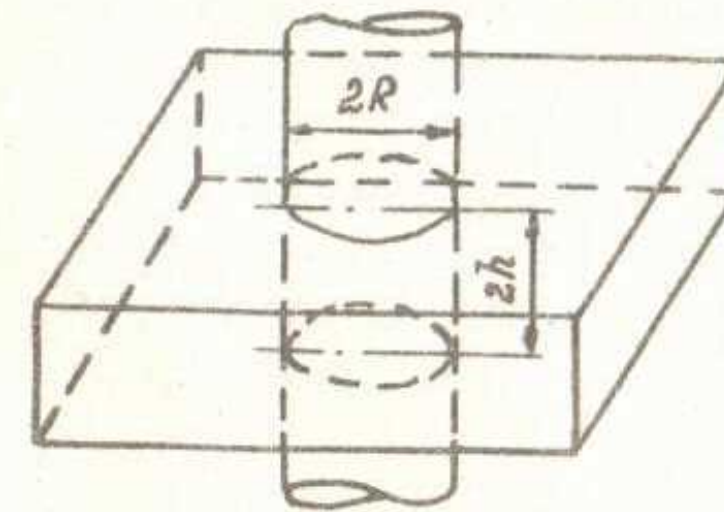


Рис. 1

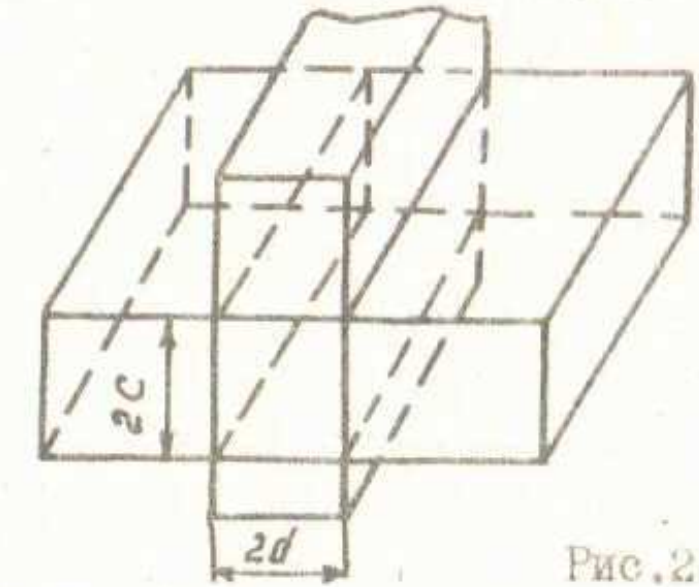


Рис. 2

Безразмерная температура  $\theta$  любой точки тела конечных размеров равна произведению безразмерных температур соответствующих точек тел неограниченных размеров, пересечением которых образовано данное тело. Например, для цилиндра конечных размеров  $\theta = \theta_x \cdot \theta_z$ , для бруса  $\theta = \theta_x \cdot \theta_y$ ; для параллелепипеда  $\theta = \theta_x \cdot \theta_y \cdot \theta_z$ , где  $\theta_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$  - безразмерные температуры соответствующих точек тел неограниченных размеров.

## РАСЧЕТ ТЕПЛОТЫ

Количество теплоты, отданное (воспринятое) телом в процессе охлаждения (нагрева), рассчитывается по формуле

$$Q = Q_n (1 - \bar{\theta}), \quad \text{Дж} \quad (4)$$

где  $Q_n$  - количество теплоты, отданное (воспринятое) телом за период полного его охлаждения (нагрева), численно равно

$$Q_n = V c \rho (t_0 - t_{ж}), \quad \text{Дж} \quad (5)$$

$V$  - объем рассматриваемого тела,  $\text{м}^3$ ;  $\bar{\theta} = \frac{1}{V} \int \theta dV$  - средняя безразмерная температура тела;

для неограниченной пластины

$$\bar{\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2 \mu_n}{\mu_n^2 + \mu_n \sin \mu_n \cos \mu_n} \exp(-\mu_n^2 Fo), \quad (6)$$



для неограниченного цилиндра

$$\bar{\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 J_1^2(\gamma_n)}{\gamma_n^2 [J_0^2(\gamma_n) + J_1^2(\gamma_n)]} \exp(-\gamma_n^2 F_0). \quad (7)$$

Для тел конечных размеров средняя безразмерная температура находится как произведение средних безразмерных температур неограниченных тел, пересечением которых образовано тело конечных размеров.

**ПРИМЕР 1.** Стальная пластина толщиной  $2R = 286$  мм, имеющая температуру  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ , помещена в печь с температурой  $t_{ж} = 1020^\circ\text{C}$ . Требуется определить: 1. Температуру в середине и на поверхности пластины через 20 мин. после начала нагрева; 2. Температуру на расстоянии  $\frac{R}{2} = 0,0715$  м от оси пластины через 20 мин. после начала нагрева; 3. Количество теплоты, которое воспринимает пластина за время нагрева  $\tau = 20$  мин.

Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности равны соответственно  $\lambda = 22,85$  Вт/м·К и  $a = 8,33 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с. Коэффициент теплоотдачи к поверхности пластины  $\alpha = 160$  Вт/м<sup>2</sup>·К.

**РЕШЕНИЕ.** 1. Значения критериев Био и Фурье:

$$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda} = \frac{160 \cdot 0,143}{22,85} = 1,0; \quad Fo = \frac{a \tau}{R^2} = \frac{8,33 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 60}{(0,143)^2} = 0,49.$$

Из рис. 8 находим  $1 - \theta_{x=0} = 0,23$ , а из рис. 4  $1 - \theta_{x=R} = 0,49$ . Следовательно  $\theta_{x=0} = 0,77$ ,  $\theta_{x=R} = 0,51$ . Температура искомым точек составит:

$$t_{x=0} = t_{ж} + \theta_{x=0} (t_0 - t_{ж}) = 1020 + 0,77 (20 - 1020) = 250^\circ\text{C};$$

$$t_{x=R} = t_{ж} + \theta_{x=R} (t_0 - t_{ж}) = 1020 + 0,51 (20 - 1020) = 510^\circ\text{C}.$$

2. Для расчета температуры в точке  $x = R/2$  воспользуемся уравнением (1). Учитывая, что  $F_0 = 0,49 > 0,3$ , ограничимся первым членом ряда (1). При  $Bi = 1,0$  из таблицы № 1 находим  $A_1 = 1,119$ , а из таблицы № 2 —  $\beta_1 = 0,860$ . Тогда

$$\theta_{x=\frac{R}{2}} = 1,119 \cdot \cos(0,860 \cdot \frac{0,0715}{0,143}) \exp(-0,86^2 \cdot 0,49) = 0,7,$$

$$t_{x=\frac{R}{2}} = t_{ж} + \theta_{x=\frac{R}{2}} (t_0 - t_{ж}) = 1020 + 0,7 (20 - 1020) = 320^\circ\text{C}.$$

3. Объемная теплоемкость материала пластины

$$c_p = \frac{\lambda}{a} = \frac{22,85}{8,33 \cdot 10^{-6}} = 2,76 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}.$$

Количество теплоты, воспринимаемое 1 м<sup>2</sup> пластины за время ее полного прогрева, находим по формуле (5)

$$q_n = \frac{Q_n}{f} = 2scR (t_{ж} - t_0) = 0,286 \cdot 2,74 \cdot 10^6 (1020 - 20) = 7,84 \cdot 10^8 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}.$$

Среднюю безразмерную температуру  $\bar{\theta}$  пластины в момент времени  $\tau = 20$  мин. рассчитываем по уравнению (6) с использованием первого члена ряда.

$$\text{Имеем } \bar{\theta} = \frac{2 \sin^2 0,86}{0,86^2 + 0,86 \cdot \sin 0,86 \cdot \cos 0,86} \exp(-0,86^2 \cdot 0,49) = 0,645.$$

Количество теплоты, воспринимаемое 1 м<sup>2</sup> поверхности пластины в течении 20 мин. согласно (4) составит

$$q = \frac{Q}{f} = q_n (1 - \bar{\theta}) = 7,84 \cdot 10^8 (1 - 0,645) = 2,78 \cdot 10^8 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}.$$

**ПРИМЕР 2.** Длинный стальной вал  $d = 200$  мм, имеющий температуру  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ , помещен в печь с температурой  $t_{ж} = 1020^\circ\text{C}$ .

Требуется определить: 1. Температуру в середине и на поверхности вала через  $\tau = 20$  мин после начала нагрева; 2. Температуру на расстоянии  $z = \frac{R}{2} = 50$  мм от оси вала к моменту  $\tau = 20$  мин; 3. Количество тепла, которое воспринимает цилиндр за время нагрева  $\tau = 20$  мин.

Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности равны соответственно  $\lambda = 22,85$  Вт/м·К и  $a = 8,33 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с. Коэффициент теплоотдачи к поверхности вала  $\alpha = 160$  Вт/м<sup>2</sup>·К.

**РЕШЕНИЕ.** 1. Значения критериев Био и Фурье:

$$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda} = \frac{160 \cdot 0,1}{22,85} = 0,7; \quad Fo = \frac{a \tau}{R^2} = \frac{8,33 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 60}{(0,1)^2} = 1,0.$$

Из рис. 12 находим  $1 - \theta_{z=0} = 0,65$ , а из рис. 10;  $1 - \theta_{z=R} = 0,74$ . Следовательно,  $\theta_{z=0} = 0,35$ ;  $\theta_{z=R} = 0,26$ . Температура искомым точек составит:

$$t_{z=0} = 1020 + 0,35 (20 - 1020) = 670^\circ\text{C}; \quad t_{z=R} = 1020 + 0,26 (20 - 1020) = 760^\circ\text{C}.$$

2. Для расчета температуры в точке  $z = R/2$  воспользуемся уравнением (2). Учитывая, что  $F_0 = 1 > 0,3$ , ограничимся первым членом ряда (2). При  $Bi = 0,7$  из таблицы № 3 находим  $B_1 = 1,154$ , а из таблицы № 4 —  $\gamma_1 = 1,087$ . Значения функции Бесселя соответствующих аргументов находим из таблицы № 5:

$$J_0(\gamma_1) = J_0(1,087) = 0,725; \quad J_0(\gamma_1 \frac{z}{R}) = J_0(1,087 \cdot 0,5) = 0,925;$$

$$J_1(\gamma_1) = J_1(1,087) = 0,437.$$

$$\text{Тогда } \theta_{z=\frac{R}{2}} = 1,154 \cdot 0,925 \exp(-1,087^2 \cdot 1) = 0,327,$$

$$t_{z=\frac{R}{2}} = 1020 + 0,327 (20 - 1020) = 693^\circ\text{C}.$$

3. Объемная теплоемкость материала цилиндра

$$c_p = \frac{\lambda}{a} = \frac{22,85}{8,33 \cdot 10^{-6}} = 2,74 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}.$$



Количество теплоты, воспринимаемое 1 метром длины цилиндра за время его полного нагрева, находим по формуле (5)

$$Q_{\Pi} = \frac{Q_{\Pi}}{\ell} = \pi R^2 c \rho (t_{ж} - t_0) = 3,14 \cdot 0,1^2 \cdot 2,74 \cdot 10^6 (1020 - 20) = 8,6 \cdot 10^7 \frac{\text{Дж}}{\text{м}}$$

Среднюю безразмерную температуру  $\bar{\theta}$  цилиндра в момент времени  $\tau = 20$  мин. рассчитаем по формуле (7) с использованием первого члена ряда. Имеем

$$\bar{\theta} = \frac{4(0,437)^2}{(1,0873)^2(0,725^2 + 0,437^2)} \exp(-1,087^2 \cdot 1) = 0,286$$

Количество теплоты, воспринимаемое 1 метром длины цилиндра в течении 20 мин, согласно (4) составит

$$Q_{\ell} = \frac{Q}{\ell} = q_{\Pi} (1 - \bar{\theta}) = 8,6 \cdot 10^7 (1 - 0,286) = 6,15 \cdot 10^7 \frac{\text{Дж}}{\text{м}}$$

**ПРИМЕР 3.** Стальная болванка цилиндрической формы диаметром  $2R = 200$  мм и длиной  $2h = 286$  мм, имеющая температуру  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ , была помещена в печь с температурой  $t_{ж} = 1020^\circ\text{C}$ .

Требуется определить: 1. Температуры в точках 1, 2, 3, 4, 5 и 6 через 20 минут после начала нагрева; 2. Количество теплоты, воспринятого болванкой за время нагрева.

Теплофизические и теплообменные характеристики  $\lambda$ ,  $a$  и  $\alpha$  примем теми же, что и в примерах 1 и 2.

**РЕШЕНИЕ.** 1. Безразмерная температура любой точки болванки цилиндрической формы равна произведению безразмерных температур соответствующих

точек неограниченной пластины толщиной  $2h = 286$  мм и неограниченного цилиндра диаметром  $2R = 200$  мм. Размеры, теплофизические характеристики и условия нагрева пластины идентичны условиям примера 1. По данным этого примера

$$\theta_{x=0} = 0,77; \quad \theta_{x=\frac{h}{2}} = 0,7;$$

$$\theta_{x=h} = 0,51; \quad \bar{\theta}_h = 0,645$$

Размеры, теплофизические характеристики и условия нагрева цилиндра 2 идентичны условиям примера 2. По данным этого примера

$$\theta_{z=0} = 0,35; \quad \theta_{z=\frac{R}{2}} = 0,327;$$

$$\theta_{z=R} = 0,26; \quad \bar{\theta}_R = 0,284$$

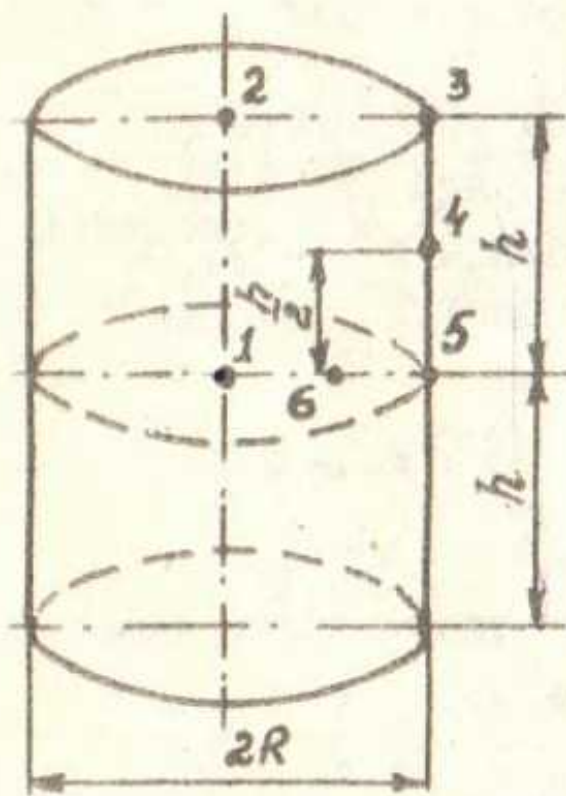


Рис. 3

Температуры соответствующих точек:

$$\text{Точка 1. } \theta_1 = \theta_{x=0} \cdot \theta_{z=0} = 0,77 \cdot 0,33 = 0,27; \quad t_1 = 750^\circ\text{C};$$

$$\text{Точка 2. } \theta_2 = \theta_{x=h} \cdot \theta_{z=0} = 0,51 \cdot 0,35 = 0,178; \quad t_2 = 842^\circ\text{C};$$

$$\text{Точка 3. } \theta_3 = \theta_{x=h} \cdot \theta_{z=R} = 0,51 \cdot 0,26 = 0,133; \quad t_3 = 887^\circ\text{C};$$

$$\text{Точка 4. } \theta_4 = \theta_{x=\frac{h}{2}} \cdot \theta_{z=R} = 0,7 \cdot 0,26 = 0,182; \quad t_4 = 838^\circ\text{C};$$

$$\text{Точка 5. } \theta_5 = \theta_{x=0} \cdot \theta_{z=R} = 0,77 \cdot 0,26 = 0,20; \quad t_5 = 820^\circ\text{C};$$

$$\text{Точка 6. } \theta_6 = \theta_{x=0} \cdot \theta_{z=\frac{R}{2}} = 0,77 \cdot 0,327 = 0,252; \quad t_6 = 768^\circ\text{C};$$

2. Количество теплоты, воспринимаемое цилиндрической болванкой за время полного прогрева (до  $t_{ж}$ )

$$Q_{\Pi} = \pi R^2 2h c \rho (t_{ж} - t_0) = 3,14 \cdot 0,1^2 \cdot 0,286 \cdot 2,74 \cdot 10^6 (1020 - 20) = 2,46 \cdot 10^7 \text{ Дж}$$

Средняя безразмерная температура болванки

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_h \cdot \bar{\theta}_R = 0,645 \cdot 0,284 = 0,183$$

Количество теплоты, воспринимаемое болванкой за время нагрева  $\tau = 20$  мин, согласно (4) составит

$$Q = 2,46 \cdot 10^7 (1 - 0,183) = 2,01 \cdot 10^7 \text{ Дж}$$

**ПРИМЕР 4.** Стальной слиток, имеющий форму параллелепипеда, с размерами  $2c \times 2d \times 2\ell = 0,2 \times 0,4 \times 0,5$  м имел начальную температуру  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ , а затем был помещен в печь с температурой  $t_{ж} = 1220^\circ\text{C}$ .

Требуется определить время  $\tau$ , по истечению которого температура в центре слитка станет равной  $905^\circ\text{C}$ .

Коэффициент теплопроводности и температуропроводности стали равны соответственно  $\lambda = 37,2$  Вт/м·К и  $a = 6,94 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с, а коэффициент теплоотдачи  $\alpha = 186$  Вт/м<sup>2</sup>·К.

**РЕШЕНИЕ.** Безразмерная температура в центре слитка

$$\theta = \frac{t - t_{ж}}{t_0 - t_{ж}} = \frac{905 - 1220}{20 - 1220} = 0,263$$

Время  $\tau$ , по истечению которого безразмерная температура в центре слитка  $\theta$  составит 0,263, будем находить графически. Для этого задаем отрезок времени, ограниченный  $\tau_1 = 60$  мин. и  $\tau_2 = 50$  мин.

Для пластины толщиной  $2c = 0,2$  м и  $\tau_1 = 60$  мин.

$$(Fo_1)_c = \frac{a \tau_1}{c^2} = \frac{6,94 \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 60}{(0,1)^2} = 2,5; \quad (Bi)_c = \frac{\alpha c}{\lambda} = \frac{186 \cdot 0,1}{37,2} = 0,5$$

Из рис. 8 находим  $1 - \theta_{x=0} = 0,62$ ,  $\theta_{x=0} = 0,38$ .

Аналогично для пластины толщиной  $2d = 0,4$  м и  $\tau_1 = 60$  мин. находим:  $(Fo_1)_d = 0,625$ ;  $(Bi)_d = 1,0$ ;  $1 - \theta_{y=0} = 0,3$ ;  $\theta_{y=0} = 0,7$ .

Для пластины толщиной  $2\ell = 0,5$  м имеем:

$$(Fo_1)_\ell = 0,4; \quad (Bi)_\ell = 1,25; \quad 1 - \theta_{z=0} = 0,2; \quad \theta_{z=0} = 0,8$$

Безразмерная температура в центре слитка равна произведению безразмерных температур в центре пластин  $2c$ ,  $2d$  и  $2\ell$ , пересечением которых образован слиток, т.е.



$$\theta = \theta_{x=0} \cdot \theta_{y=0} \cdot \theta_{z=0} = 0,38 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,24.$$

Аналогичные расчеты проводим для пластин 2С, 2d и 2l для произвольно выбранного времени  $\tau = 50$  мин. В результате находим:  $\theta_{x=0} = 0,44$ ;  $\theta_{y=0} = 0,76$ ;  $\theta_{z=0} = 0,86$ ;  $\theta = 0,286$ .

По значениям (0,24; 60) и (0,286; 50) строим график в координатах  $\theta - \tau$ , из которого находим уточненное значение времени нагрева  $\tau = 55$  минут.

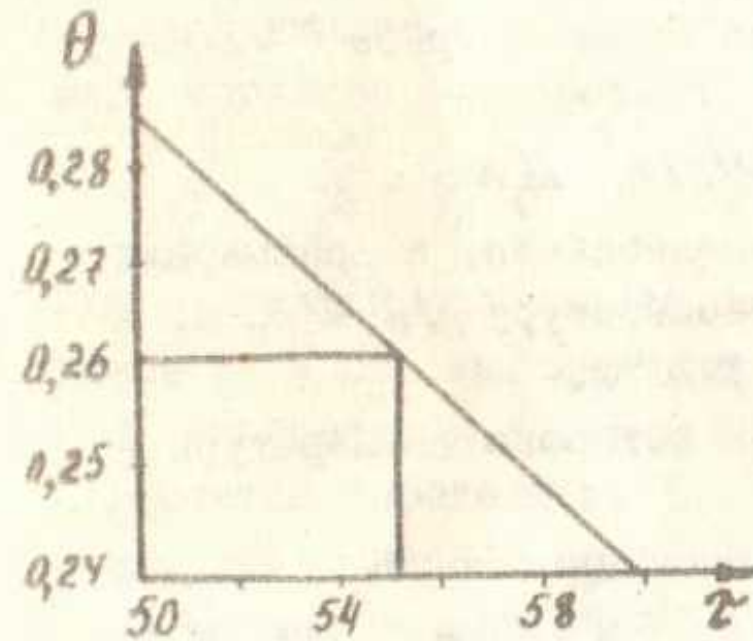


Рис.3а

Для графически найденного значения  $\tau = 55$  минут проводим проверочный расчет температуры нагрева слитка. Имеем: пластина 2С:  $Fo = 2,29$ ,  $Bi = 0,5$ ,  $\theta_{x=0} = 0,41$ ; пластина 2d:  $Fo = 0,57$ ,  $Bi = 1,0$ ,  $\theta_{y=0} = 0,73$ ; пластина 2l:  $Fo = 0,38$ ,  $Bi = 1,25$ ,  $\theta_{z=0} = 0,83$ . Слиток:  $\theta = 0,248$ ,  $t = 922^\circ\text{C}$ .

Относительную погрешность расчета

$$\Delta t = \frac{922 - 905}{905} \cdot 100 = 1,88\%$$

будем считать приемлемой для инженерных расчетов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. — М.: Энергия, 1981. — 416 с.
2. Краснощеков Е.А., Сукомел А.С. Задачник по теплопередаче. — М.: Энергия, 1980. — 288 с.
3. Лыков А.В. Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967. — 600 с.

#### Вопросы для самопроверки

1. В чем отличие нестационарных от стационарных процессов переноса теплоты?
2. Достаточно ли знать дифференциальное уравнение теплопроводности, чтобы определить температурное поле в твердом теле (в любой точке и в любой момент времени)?
3. В чем физический смысл чисел Био и Фурье? В каком диапазоне могут меняться эти числа?
4. В каком диапазоне может меняться  $\theta$ ?

Коэффициенты  $A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cdot \cos \mu_n}$  Таблица 1

Bi	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>
0	1,000	-0,000	0,000	-0,000
0,001	1,000	-0,000	0,000	-0,000
0,002	1,000	-0,000	0,000	-0,000
0,004	1,001	-0,001	0,000	-0,000
0,006	1,001	-0,001	0,000	-0,000
0,008	1,001	-0,002	0,000	-0,000
0,01	1,002	-0,002	0,000	-0,000
0,02	1,003	-0,004	0,001	-0,000
0,04	1,006	-0,008	0,002	-0,001
0,06	1,010	-0,012	0,003	-0,001
0,08	1,013	-0,016	0,004	-0,002
0,1	1,016	-0,020	0,005	-0,002
0,2	1,031	-0,038	0,010	-0,004
0,4	1,058	-0,072	0,020	-0,009
0,6	1,081	-0,102	0,029	-0,013
0,8	1,102	-0,128	0,038	-0,017
1,0	1,119	-0,152	0,047	-0,022
1,5	1,154	-0,201	0,067	-0,032
2,0	1,178	-0,237	0,085	-0,041
3,0	1,210	-0,288	0,115	-0,059
4,0	1,229	-0,321	0,140	-0,075
5,0	1,240	-0,344	0,159	-0,088
6,0	1,248	-0,360	0,174	-0,099
7,0	1,253	-0,372	0,186	-0,109
8,0	1,257	-0,381	0,196	-0,117
9,0	1,251	-0,388	0,204	-0,125
10,0	1,261	-0,393	0,210	-0,131
15,0	1,268	-0,408	0,232	-0,151
20,0	1,269	-0,415	0,239	-0,162
30,0	1,271	-0,420	0,247	-0,172
40,0	1,272	-0,422	0,250	-0,176
50,0	1,273	-0,423	0,252	-0,178
60,0	1,273	-0,423	0,253	-0,179
80,0	1,273	-0,424	0,253	-0,180
100,0	1,273	-0,424	0,254	-0,181
∞	1,273	-0,424	0,255	-0,182



$$\text{Значение } B_n = \frac{2 J_1(\delta_n)}{\delta_n [J_0^2(\delta_n) + J_1^2(\delta_n)]}$$

Таблица № 2

Значения  $\mu_n$  для пластины

$B_i$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$
0	0,000	3,142	6,283	9,425
0,001	0,032	3,142	6,283	9,425
0,002	0,045	3,142	6,283	9,425
0,004	0,063	3,143	6,284	9,425
0,006	0,077	3,143	6,284	9,425
0,008	0,089	3,144	6,284	9,426
0,01	0,100	3,145	6,285	9,426
0,02	0,141	3,148	6,286	9,427
0,04	0,199	3,154	6,289	9,429
0,06	0,242	3,161	6,293	9,431
0,08	0,279	3,167	6,296	9,435
0,1	0,311	3,173	6,299	9,435
0,2	0,433	3,204	6,315	9,446
0,4	0,593	3,264	6,346	9,467
0,6	0,705	3,320	6,377	9,488
0,8	0,791	3,374	6,407	9,509
1,0	0,860	3,426	6,427	9,529
1,5	0,988	3,542	6,510	9,580
2,0	1,077	3,644	6,578	9,630
3,0	1,192	3,809	6,704	9,724
4,0	1,265	3,935	6,814	9,812
5,0	1,314	4,034	6,910	9,893
6,0	1,350	4,112	6,992	9,967
7,0	1,377	4,175	7,064	10,03
8,0	1,398	4,226	7,126	10,09
9,0	1,415	4,269	7,181	10,15
10,0	1,429	4,306	7,228	10,20
15,0	1,473	4,425	7,396	10,39
20,0	1,496	4,491	7,495	10,51
30,0	1,520	4,561	7,606	10,65
40,0	1,532	4,598	7,665	10,73
50,0	1,540	4,620	7,701	10,78
60,7	1,545	4,635	7,726	10,82
80,0	1,551	4,654	7,757	10,86
100,0	1,555	4,666	7,776	10,89
$\infty$	1,571	4,712	7,854	11,00

$B_i$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
0,0	1,0000	-0,0000	+0,0000	-0,0000
0,01	1,0031	-0,0034	+0,0013	-0,0008
0,02	1,0049	-0,0067	+0,0027	-0,0015
0,04	1,0102	-0,0135	0,0052	-0,0031
0,06	1,0150	-0,0201	0,0081	-0,0046
0,08	1,0199	-0,0268	0,0110	-0,0062
0,10	1,0245	-0,0333	0,0135	-0,0077
0,15	1,0366	-0,0497	0,0202	-0,0116
0,20	1,0482	-0,0653	0,0269	-0,0154
0,30	1,0711	-0,0972	0,0401	-0,0231
0,40	1,0931	-0,1277	0,0582	-0,0307
0,50	1,1142	-0,1571	0,0662	-0,0383
0,60	1,1345	-0,1857	0,0790	-0,0458
0,70	1,1539	-0,2132	0,0917	-0,0533
0,80	1,1724	-0,2398	0,1043	-0,0608
0,90	1,1902	-0,2654	0,1167	-0,0682
1,00	1,2071	-0,2901	0,1289	-0,0756
1,50	1,2807	-0,4008	0,1877	-0,1117
2,00	1,3377	-0,4923	0,2422	-0,1404
3,00	1,4192	-0,6309	0,3384	-0,2114
4,00	1,4698	-0,7278	0,4184	-0,2699
5,00	1,5029	-0,7973	0,4842	-0,3220
6,00	1,5253	-0,8484	0,5382	-0,3679
7,00	1,5409	-0,8869	0,5825	-0,4080
8,00	1,5523	-0,9225	0,6189	-0,4430
9,00	1,5611	-0,9393	0,6491	-0,4735
10,0	1,5677	-0,9575	0,6784	-0,5000
15,0	1,5853	-1,0091	0,7519	-0,5901
20,0	1,5918	-1,0309	0,7889	-0,6382
30,0	1,5964	-1,0488	0,8195	-0,6827
40,0	1,5988	-1,0550	0,8335	-0,7018
50,0	1,5996	-1,0587	0,8396	0,7112
60,0	1,6009	-1,0589	0,8428	0,7165
80,0	1,6012	-1,0599	0,8463	0,7212
100,0	1,6014	-1,0631	0,8505	0,7245
$\infty$	1,6021	1,0648	0,8558	0,7296



Мн

Таблица № 4

Значения  $\gamma_n$  для цилиндра

$\beta_i$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$
0,0	0,000	3,832	7,016	10,17
0,01	0,141	3,834	7,017	10,17
0,02	0,199	3,837	7,018	10,18
0,04	0,281	3,842	7,027	10,18
0,06	0,344	3,847	7,024	10,18
0,08	0,396	3,852	7,027	10,18
0,10	0,442	3,858	7,030	10,18
0,15	0,538	3,871	7,037	10,19
0,20	0,617	3,883	7,044	10,19
0,30	0,746	3,909	7,058	10,20
0,40	0,852	3,934	7,072	10,21
0,50	0,941	3,959	7,086	10,22
0,60	1,018	3,984	7,100	10,23
0,70	1,087	4,008	7,114	10,24
0,80	1,149	4,032	7,128	10,25
0,90	1,205	4,056	7,142	10,26
1,0	1,256	4,079	7,156	10,27
1,5	1,457	4,190	7,223	10,32
2,0	1,599	4,201	7,288	10,37
3,0	1,789	4,463	7,410	10,46
4,0	1,908	4,602	7,520	10,54
5,0	1,990	4,713	7,618	10,62
6,0	2,049	4,803	7,700	10,70
7,0	2,094	4,877	7,780	10,76
8,0	2,129	4,938	7,846	10,83
9,0	2,157	4,990	7,905	10,88
10,0	2,179	5,033	7,957	10,94
15,0	2,251	5,177	8,142	11,14
20,0	2,288	5,257	8,253	11,27
30,0	2,326	5,341	8,377	11,42
40,0	2,345	5,385	8,443	11,51
50,0	2,357	5,411	8,484	11,56
60,0	2,365	5,429	8,512	11,60
80,0	2,375	5,452	8,547	11,65
100,0	2,385	5,465	8,568	11,67
$\infty$	2,405	5,720	8,654	11,79

Таблица № 5

функции Бесселя I рода нулевого и первого порядков

$J_0(\eta)$  и  $J_1(\eta)$ .

$\eta$	$J_0(\eta)$	$J_1(\eta)$	$\eta$	$J_0(\eta)$	$J_1(\eta)$
0,0	1,000	0,000	7,0	0,300	-0,005
0,1	0,997	0,050	7,2	0,295	0,054
0,2	0,990	0,100	7,4	0,279	0,110
0,4	0,960	0,196	7,6	0,252	0,159
0,6	0,912	0,287	7,8	0,215	0,201
0,8	0,846	0,369	8,0	0,172	0,236
1,0	0,765	0,440	8,2	0,122	0,258
1,2	0,671	0,498	8,4	0,069	0,271
1,4	0,567	0,542	8,6	0,015	0,273
1,6	0,455	0,570	8,8	-0,039	0,264
1,8	0,340	0,582	9,0	-0,090	0,245
2,0	0,224	0,577	9,2	-0,137	0,217
2,2	0,110	0,556	9,4	-0,177	0,182
2,4	0,002	0,520	9,6	-0,209	0,140
2,6	-0,097	0,471	9,8	-0,232	0,093
2,8	-0,185	0,410	10,0	-0,246	0,044
3,0	-0,260	0,339	10,2	-0,250	-0,007
3,2	-0,320	0,261	10,4	-0,243	-0,056
3,4	-0,364	0,179	10,6	-0,228	-0,101
3,6	-0,392	0,096	10,8	-0,203	-0,142
3,8	-0,403	0,013	11,0	-0,171	-0,177
4,0	-0,397	-0,066	11,2	-0,133	-0,204
4,2	-0,375	-0,139	11,4	-0,090	-0,222
4,4	-0,342	-0,203	11,6	-0,045	-0,232
4,6	-0,296	-0,267	11,8	0,002	-0,232
4,8	-0,240	-0,298	12,0	0,048	-0,223
5,0	-0,178	-0,328	12,2	0,091	-0,206
5,2	-0,110	-0,343	12,4	0,130	-0,181
5,4	-0,041	-0,345	12,6	0,163	-0,144
5,6	-0,027	-0,334	12,8	0,189	-0,111
5,8	-0,092	-0,314	13,0	0,207	0,070
6,0	0,151	-0,277	13,2	0,217	0,027
6,2	0,202	-0,233	13,4	0,218	0,017
6,4	0,243	-0,182	13,6	0,210	0,059
6,6	0,274	-0,125	13,8	0,194	0,098
6,8	0,293	-0,065	14,0	0,171	0,133



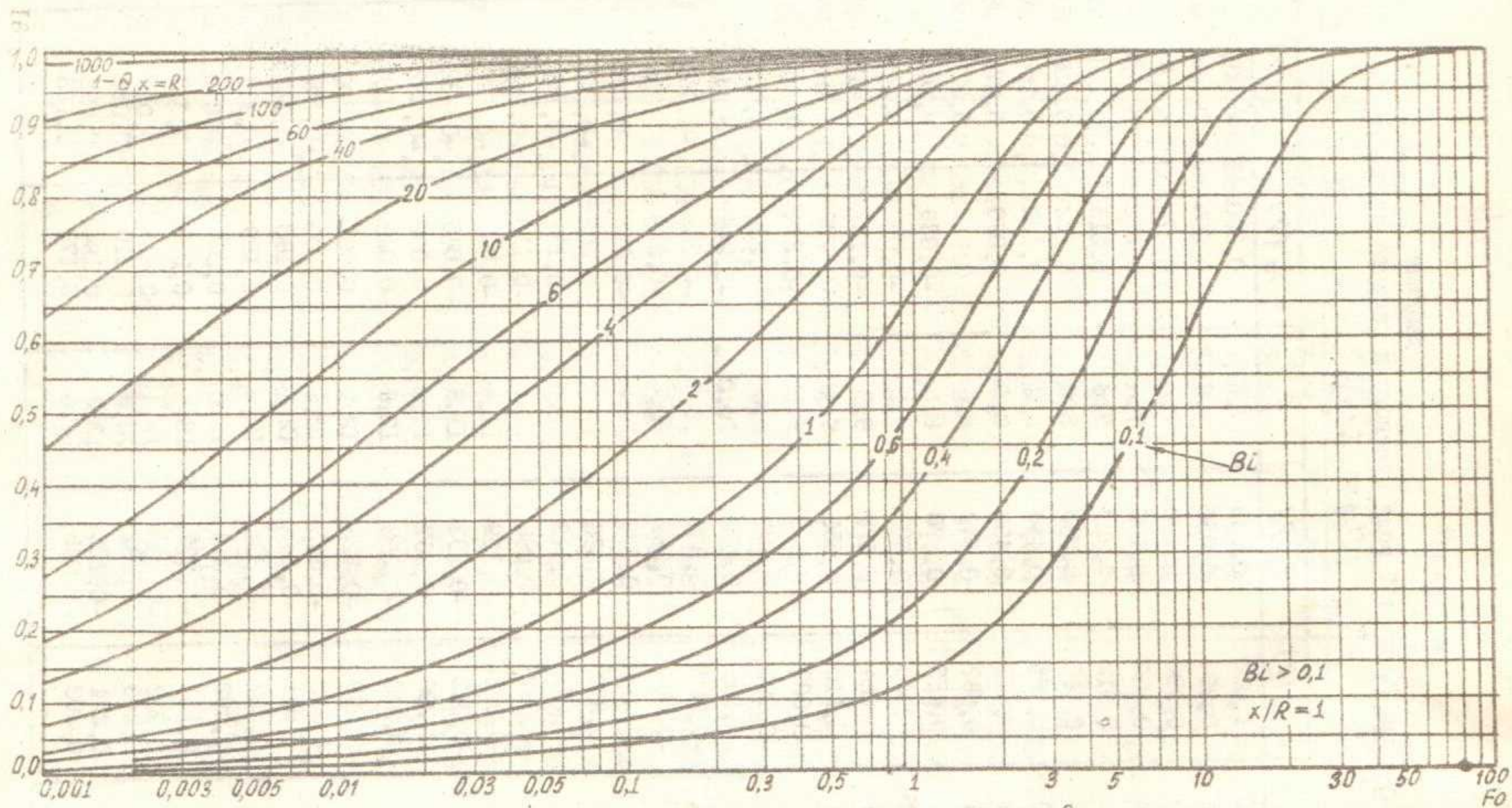


Рис. 4. Графики для определения относительной избыточной температуры  $\theta_{x=R}$  на поверхности пластины для больших значений критерия  $Bi$  ( $0,1 < Bi < 1000$ )

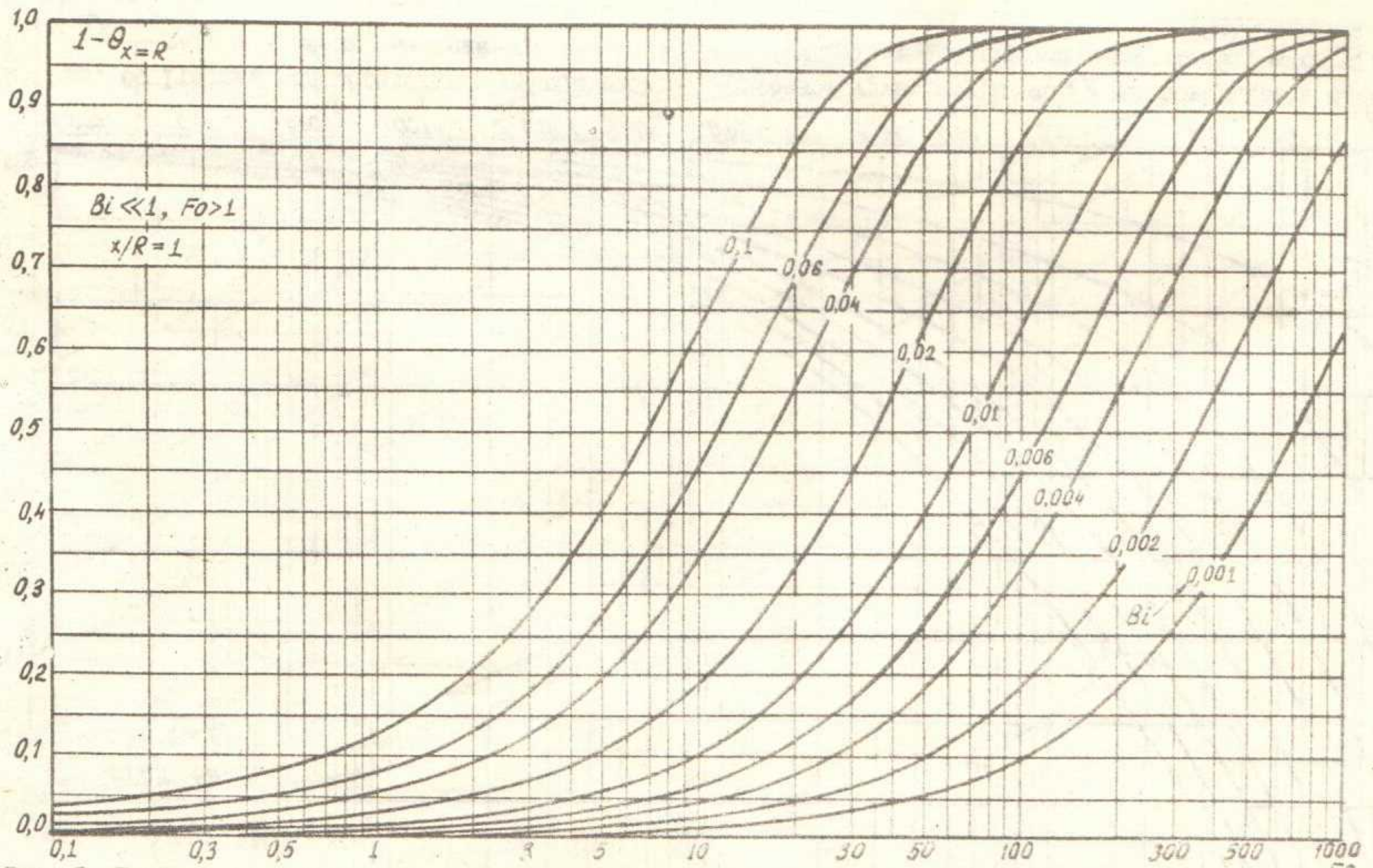


Рис. 5. Графики для определения относительной избыточной температуры  $\theta_{x=R}$  на поверхности пластины для малых значений критерия  $Bi$  ( $0,001 < Bi < 0,1$ )



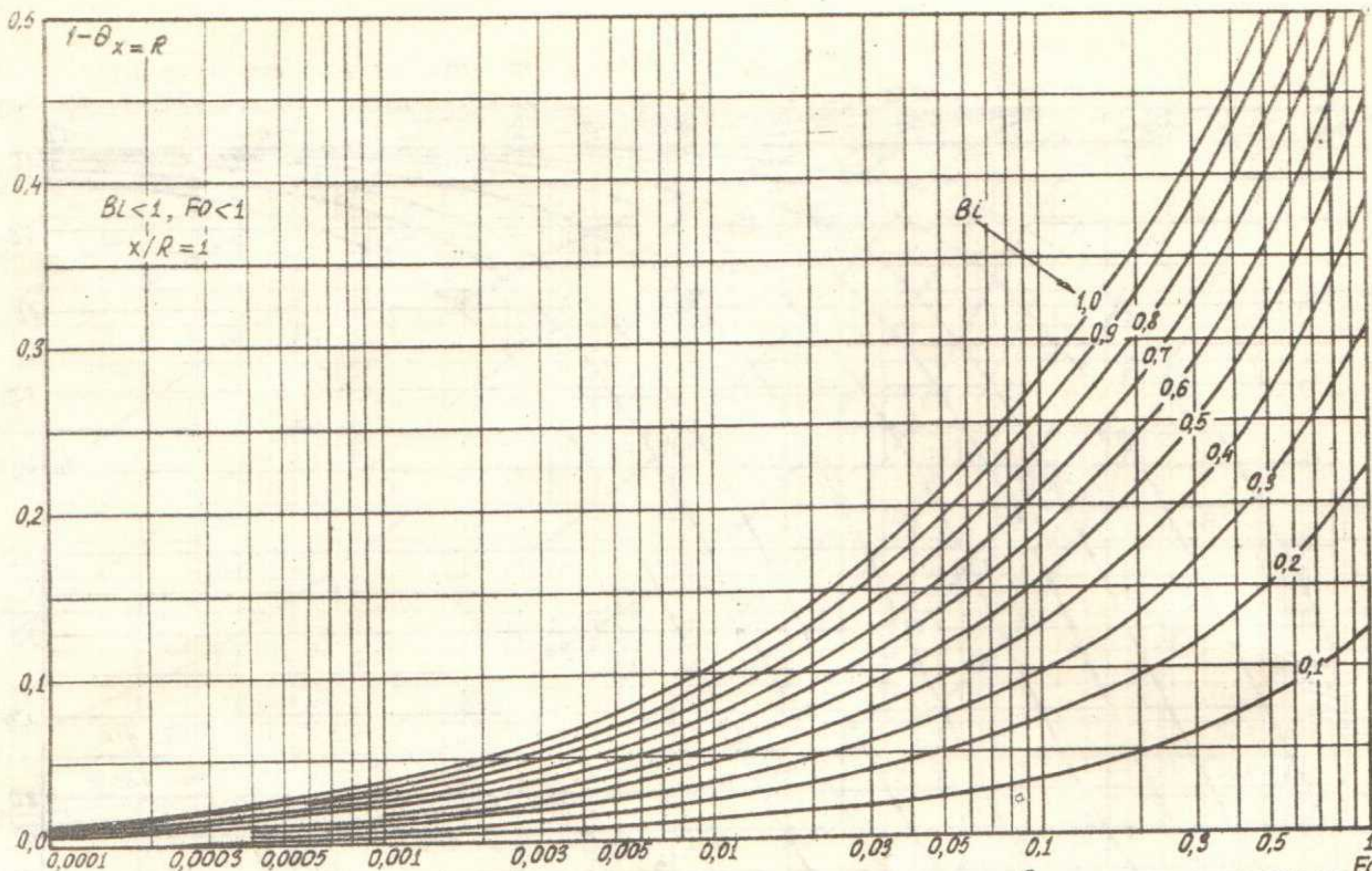


Рис. 6. Графики для определения относительной избыточной температуры  $\theta_{x=R}$  на поверхности пластины для малых значений  $Fo$  ( $0,0001 < Fo < 1$ ) и средних значений  $Bi$  ( $0,1 < Bi < 1,0$ )

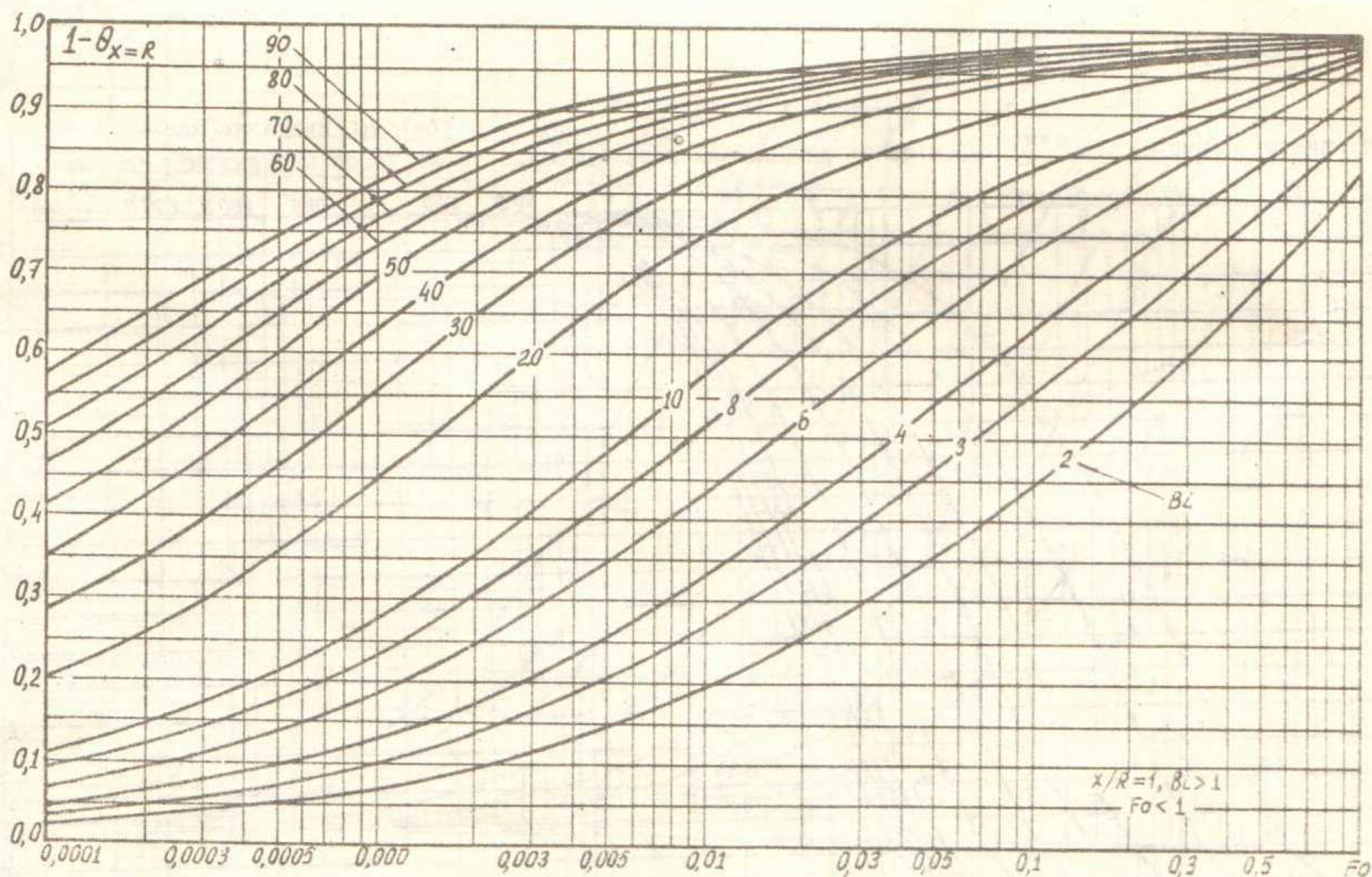


Рис. 7. Графики для определения относительной избыточной температуры  $\theta_{x=R}$  на поверхности пластины для малых значений  $Fo$  ( $0,0001 < Fo < 1$ ) и больших значений  $Bi$  ( $1 < Bi < 100$ )



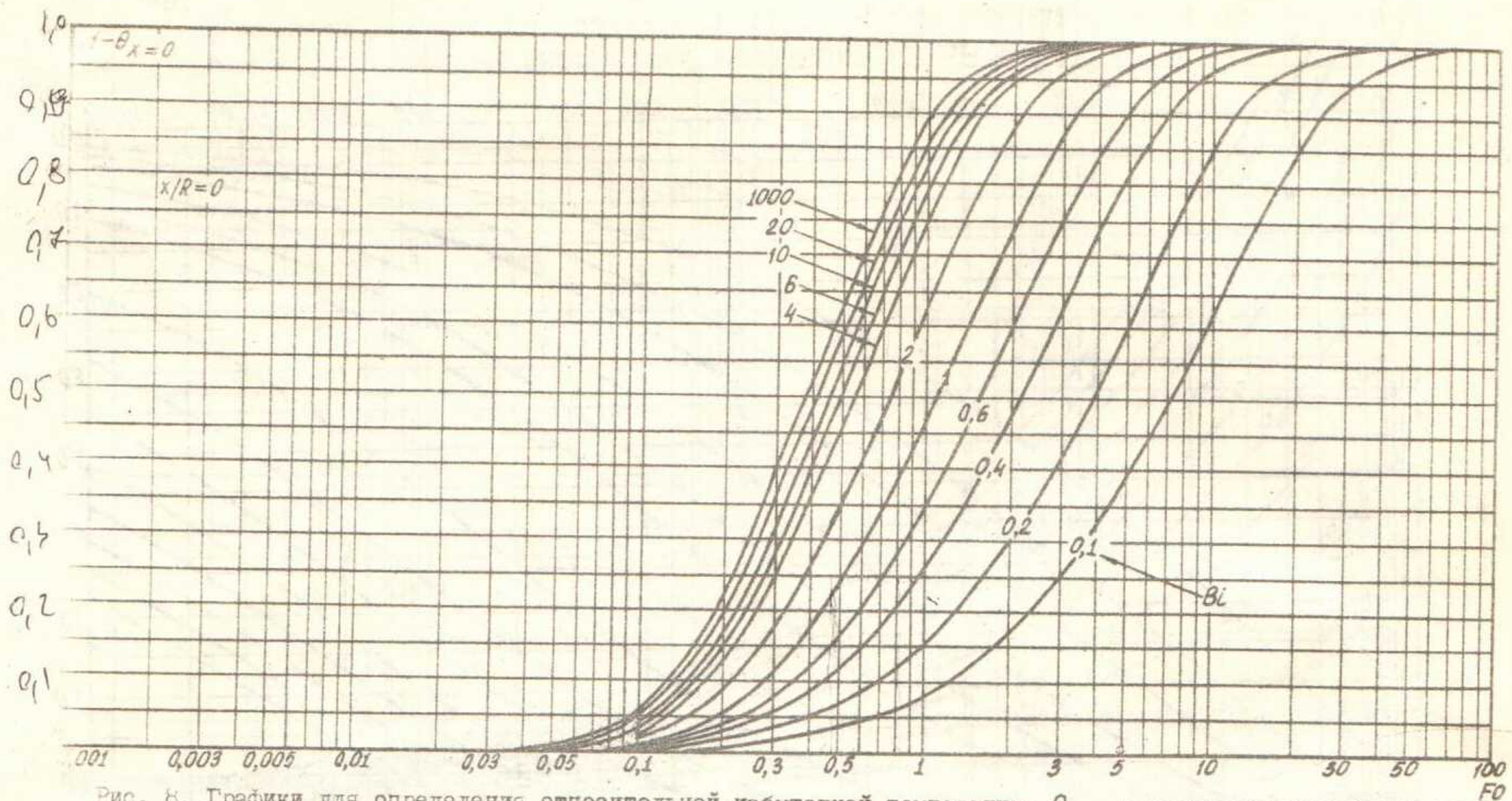


Рис. 8. Графики для определения относительной избыточной температуры  $\theta_{x=0}$  в середине пластины для больших значений  $Bi$  ( $0,1 < Bi < 1000$ )

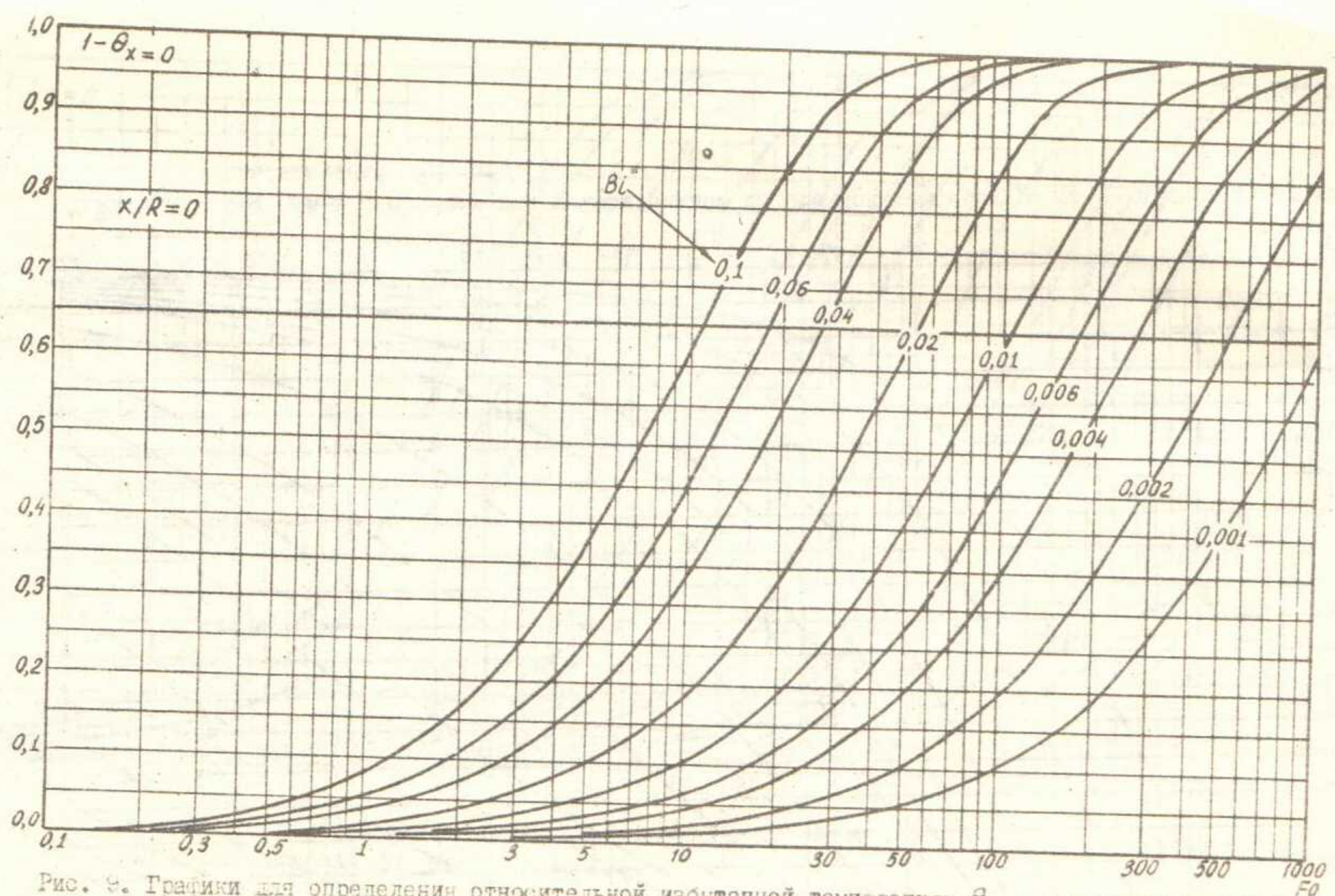


Рис. 9. Графики для определения относительной избыточной температуры  $\theta_{x=0}$  в середине пластины для малых значений  $Bi$  ( $0,001 < Bi < 0,1$ )



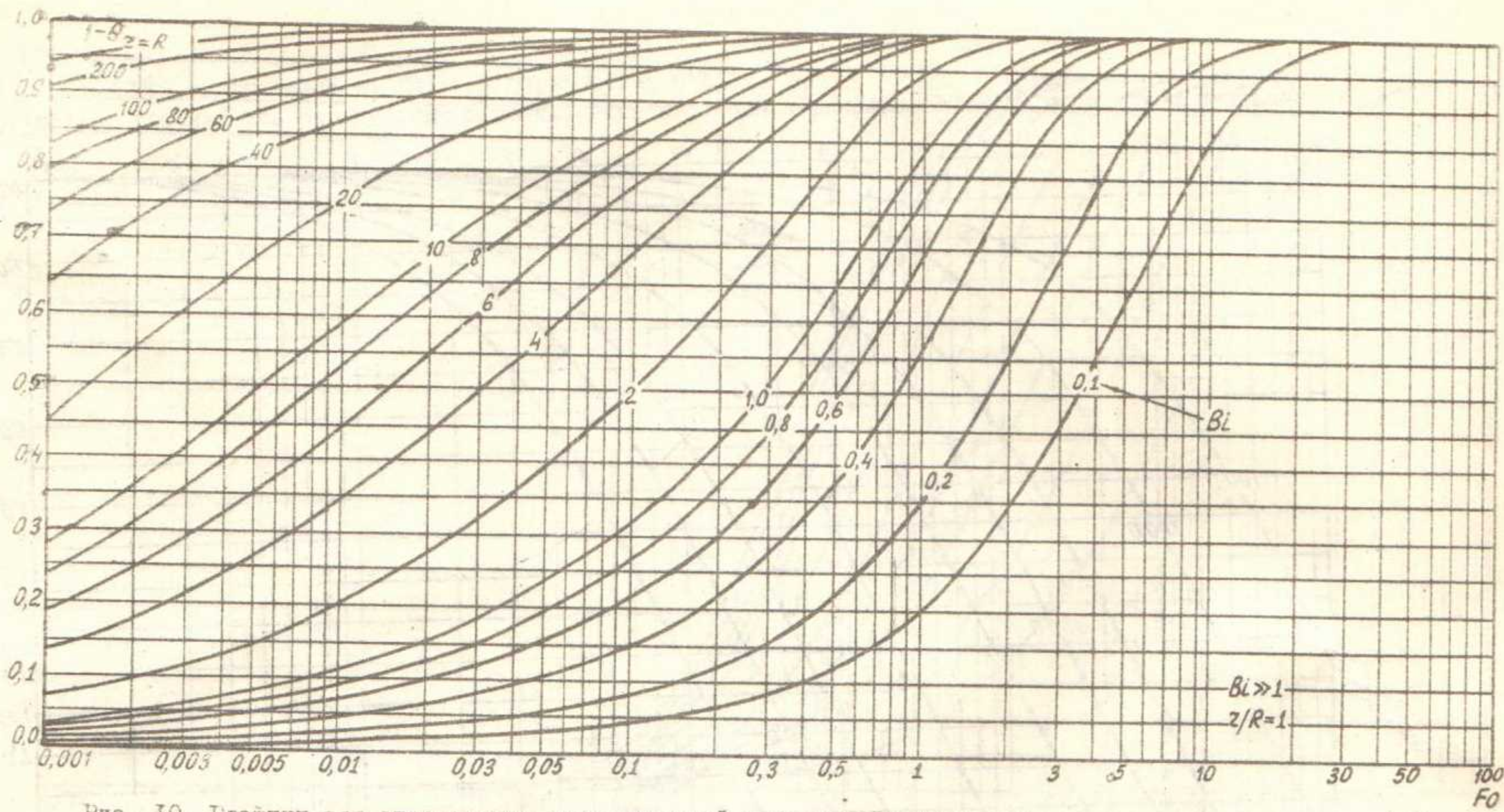


Рис. 10. Графики для определения относительной изоточной температуры на поверхности цилиндра  $\theta_{z=R}$  для значений  $Bi$  от 0,1 до 1000.

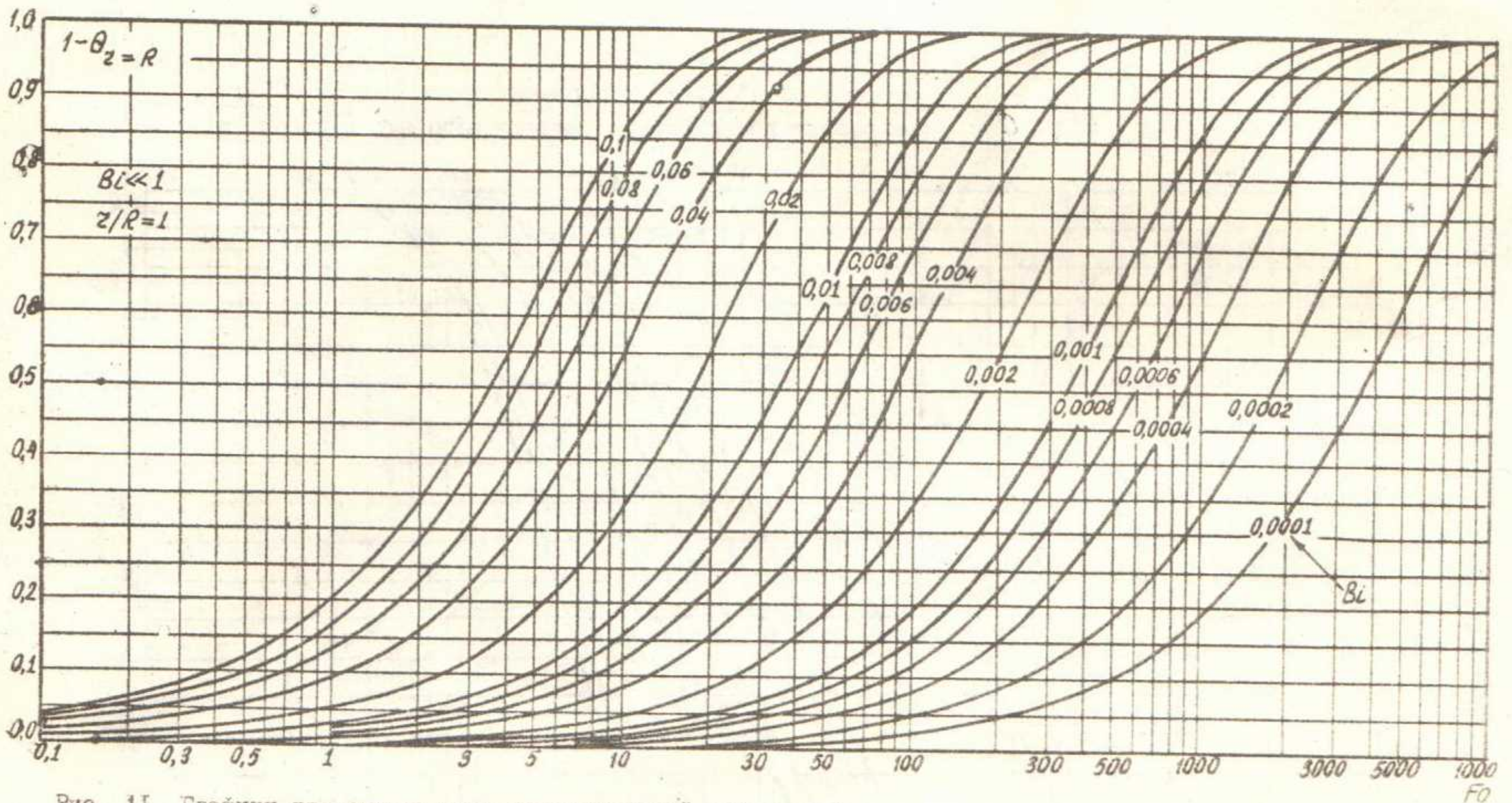


Рис. 11. Графики для определения относительной изоточной температуры на поверхности цилиндра  $\theta_{z=R}$  для малых значений  $Bi$  от 0,001 до 0,1.



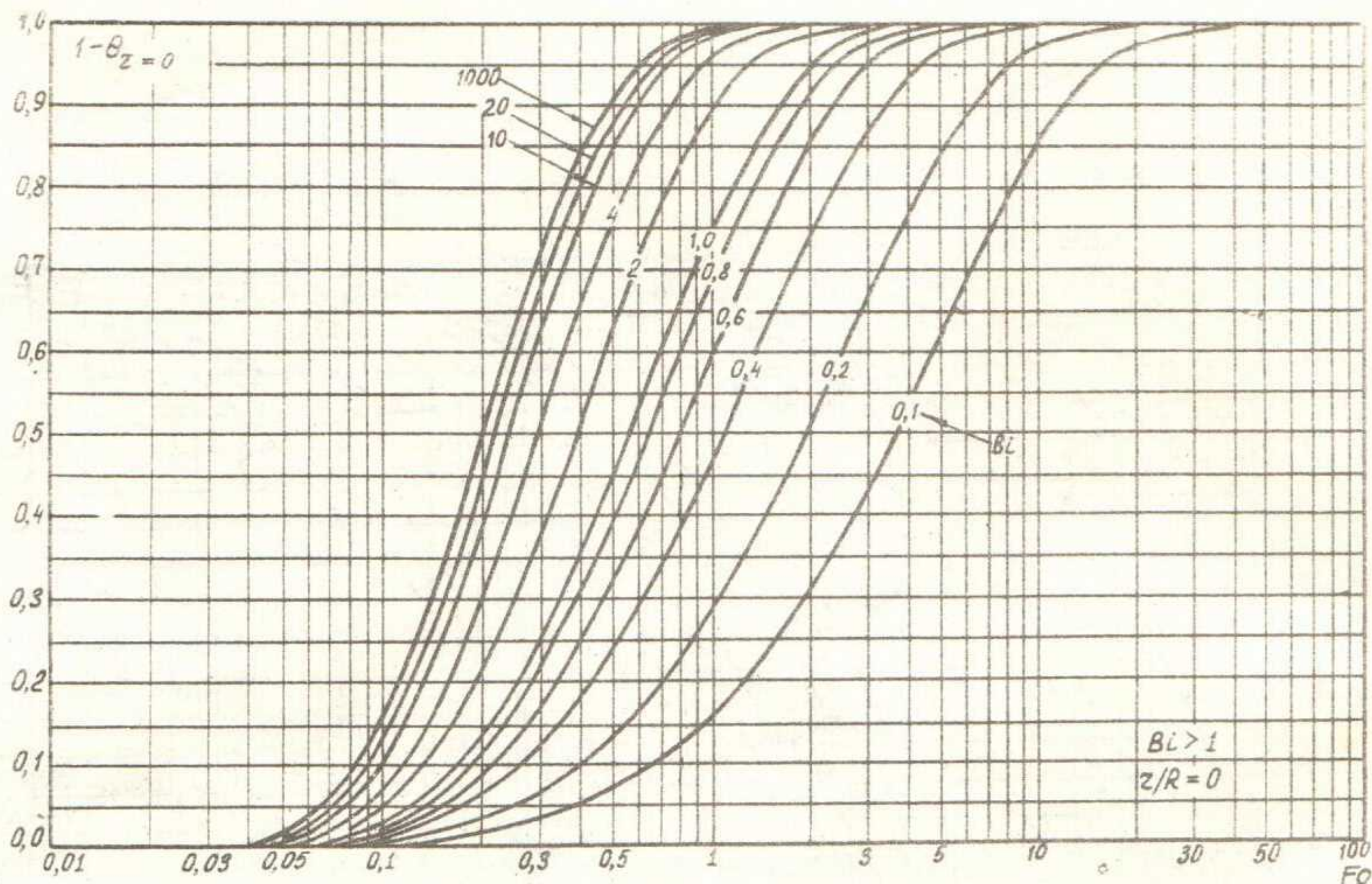


Рис. 12. Графики для определения относительной избыточной температуры в центре цилиндра  $\theta_{z=0}$  для малых значений  $Bi$  от 0,1 до 1000.

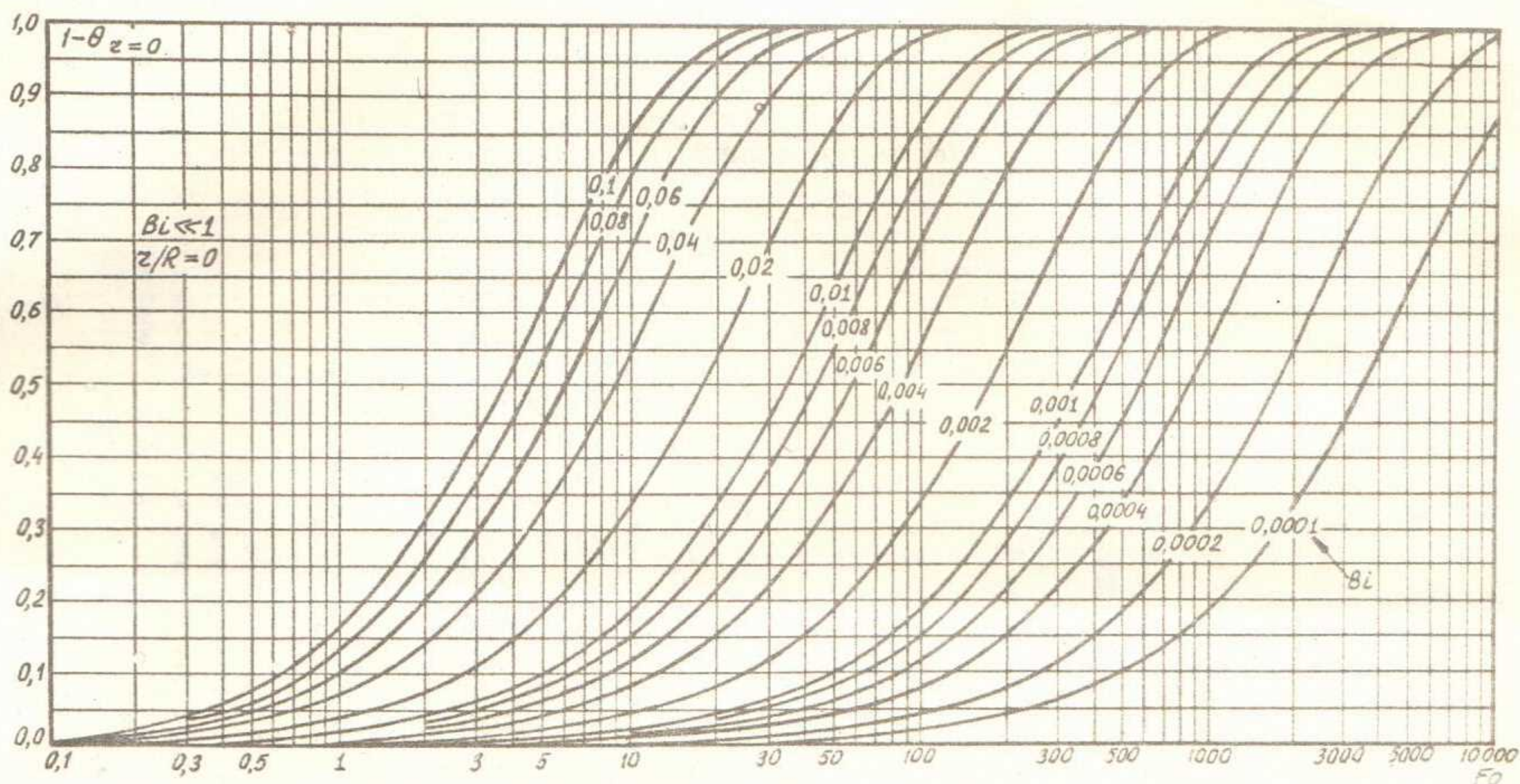


Рис. 13. Графики для определения относительной избыточной температуры в центре цилиндра  $\theta_{z=0}$  для малых значений  $Bi$  от 0,001 до 0,1.



НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Методические указания

Составители: Александр Владимирович Фурман

Юрий Иванович Чижик

Технический редактор Н.А. Вихорь

Подписано к печати 04.03.88.

Формат 60x84/16. Бумага № 2.

Плоская печать. Усл. печ. л. 1,52 Уч.-изд. л. 1,37.

Тираж 200 экз. Заказ № 539, Бесплатно.

Ротапринт ТПИ. 634004, Томск, пр. Ленина, 30.