

ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ.

Термодинамика – это наука, изучающая условия превращения различных видов энергии в тепловую и обратно, а также количественные соотношения, наблюдаемые при этом.

В основу термодинамики положены два основных закона, которые являются обобщением очень большого фактического материала. Законы дали начало всей науке термодинамике и поэтому получили название начал.

Первое начало термодинамики – это закон сохранения и превращения энергии.

Второе начало термодинамики определяет условия, при которых возможны эти превращения, а также возможные направления протекания процессов. Под словом «тело» в термодинамике понимают любое вещество, занимающее определенный объем, т.е. телом может быть воздух, ртуть, вода и т.п. Очень часто телом является идеальный газ.

Термодинамическая система может включать в себя несколько тел, но может состоять и из одного тела.

Процесс – это переход системы из одного состояния в другое. Огромное значение в термодинамике имеют понятия обратимого и необратимого процессов.

Обратимым процессом – называется такой процесс, который может переходить как в прямом, так и в обратном направлениях, причем при протекании в обратном направлении система проходит через те же самые состояния, что и при прямом процессе, при этом ни в окружающей среде, ни в самой системе не возникает никаких остаточных изменений.

Процессы, не удовлетворяющие условием обратимости, называются необратимыми.

Все реальные процессы необратимы, например процесс растворения сахара в чае.

Обратимые процессы – это идеализация реальных процессов, но изучая эти процессы, можно указать пути повышения КПД вполне реальных машин.

В термодинамике рассматривается бесчисленное множество замкнутых процессов (циклов).

Циклом называется такой процесс, в результате которого система возвращается в исходное состояние.

Прямым циклом называется цикл, в котором часть теплоты, полученной системой, превращается в работу. Система может состоять и из одного рабочего тела. Машина, работающая по прямому циклу, называется тепловой машиной. Схема действия тепловой машины представлена на рис. 1.

На рис.1: Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя; Q_2 – количество тепла, отданное рабочим телом холодильнику; A – работа, совершенная в результате цикла $A=Q_1-Q_2$.

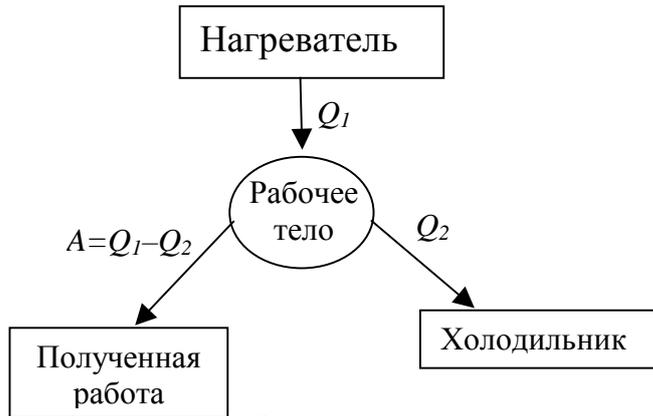


Рис. 1

В качестве нагревателя, например, может выступать котел теплостанции, а холодильником может служить окружающая среда или «водяная рубашка» (вода применяемая для охлаждения системы).

Коэффициент полезного действия (КПД) тепловой машины η – это отношение работы к количеству теплоты, полученной от нагревателя.

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \quad (1)$$

или

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad (2)$$

Так как $Q_2 < Q_1$, то КПД тепловой машины всегда меньше единицы.

Обратным циклом называется цикл, на осуществление которого расходуется работа внешних по отношению к системе тел. Машина, работающая по обратному циклу, называется холодильной машиной. Схема действия холодильной машины представлена на рис. 2.

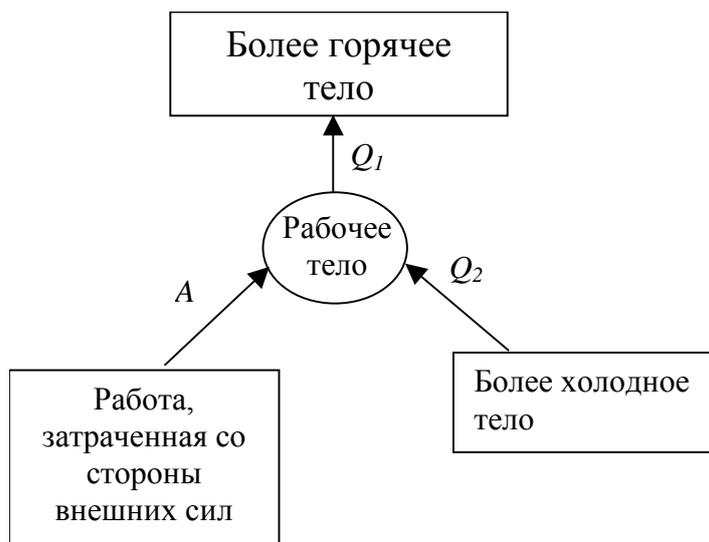


Рис. 2

Холодильная машина работает как «тепловой насос», передающий тепло от более холодного тела к более горячему, но при этом должна быть затрачена работа внешних по отношению к системе сил.

Примером холодильной машины может служить обычный холодильник, стоящий в квартире.

Холодильный коэффициент ε (иногда его называют коэффициентом полезного действия холодильной машины) – это отношение количества тепла Q_2 , отводимого от охлаждаемого тела за цикл, к затраченной работе.

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{A} \quad (3)$$

Соотношение между ε и η выражается формулой

$$\varepsilon \frac{1-\eta}{\eta}, \quad (4)$$

где η – коэффициент тепловой машины, т.е. машины, работающей по прямому циклу.

Из всех циклов самым экономичным циклом, т.е. циклом с наибольшим КПД, является цикл Карно.

Прямой цикл Карно состоит из четырех процессов: двух изотерм и двух адиабат (см. рис. 3). Процесс $1 \rightarrow 2$ – изотермическое расширение

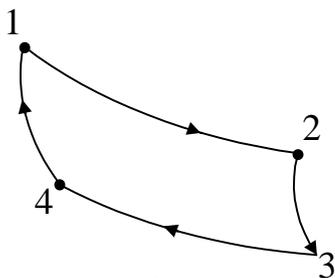


Рис. 3

(направление процессов на рис. 3 показано стрелкой), процесс $2 \rightarrow 3$ – адиабатическое расширение, процесс $3 \rightarrow 4$ – изотермическое сжатие и процесс $4 \rightarrow 1$ – адиабатическое сжатие.

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (5)$$

где T_1 – температура нагревателя, T_2 – температура холодильника. Обе температуры определяются по шкале Кельвина. Машина, работающая по прямому циклу Карно, является идеальной тепловой машиной. Отметим, что даже в идеальной тепловой машине $\eta < 1$, т.к. $T_2 < T_1$.

В идеальной машине отсутствуют тепловые потери, отсутствует трение между отдельными частями машины; все процессы в цикле Карно являются обратимыми процессами. Поэтому цикл Карно можно осуществить в обратном направлении. В обратном цикле Карно (см. рис. 4) процесс $1 \rightarrow 4$ – адиабатическое расширение, $4 \rightarrow 3$ – изотермическое расширение, процесс $3 \rightarrow 2$ – адиабатическое сжатие, процесс $2 \rightarrow 1$ – изотермическое сжатие.

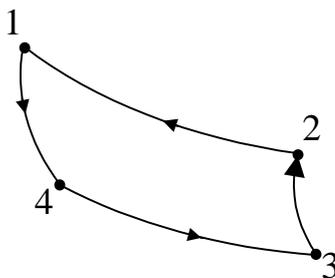


Рис. 4

Обратный цикл Карно лежит в основе работы идеальной холодильной машины. Холодильный коэффициент ε определяется по формуле (3), а соотношение между η и ε выражается формулой (4).

Существует множество формулировок второго начала термодинамик. Приводим несколько формулировок, наиболее распространенных и наиболее точно выражающих суть второго начала термодинамики:

1. Невозможно осуществить такой периодический процесс, единственным результатом которого было бы превращение теплоты, полученной от нагревателя в работу.

При получении от нагревателя количества тепла Q_1 рабочее тело обязательно отдает часть Q_2 этого тепла холодильнику, а в работу превращается только разность.

$$Q_1 - Q_2 = A \quad (6)$$

2. **Тепло, не может самопроизвольно переходить от тела, менее нагретого, к телу, более нагретому.**

Такой процесс может происходить только принудительно, т.е. при совершении работы внешних, по отношению к системе, сил.

3. Коэффициент полезного действия любой реальной тепловой машины (см. формулу 2) всегда меньше коэффициента полезного действия идеальной тепловой машины (см. формулу 5), поэтому $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, для идеальной

тепловой машины $\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$.

Объединяя обе последние формулы, можно записать

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (7)$$

это **неравенство Клаузиуса**, которое тоже является одной из формулировок второго начала термодинамики. Прежде чем привести еще несколько формулировок второго начала термодинамики, необходимо кратко рассмотреть понятие энтропии и статистический смысл второго начала термодинамики.

Если тело, или система тел, при переходе из одного состояния в другое на бесконечно малом участке этого перехода получает бесконечно малое количество теплоты dQ , то отношение $\frac{dQ}{T}$ является дифференциалом некоторой функции S , которая называется энтропией.

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (8)$$

При обратимом процессе изменение энтропии

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}, \quad (9)$$

причем изменение энтропии ΔS не зависит от того, каким способом совершается переход из состояния 1 в состояние 2. Это означает, что каждому термодинамическому состоянию тела или системы тел, соответствует только одно значение S , т.е. энтропия S является функцией состояния системы (или тела, если система состоит из одного тела). Следовательно, бесконечно малое изменение энтропии dS является полным дифференциалом. Количество теплоты, получаемое телом, зависит от способа, которым тело переходит из состояния 1 в состояние 2, поэтому dQ не является полным дифференциалом, если это хотят подчеркнуть то в формуле (8) вместо dQ пишется δQ . При необратимых процессах энтропия возрастает.

Энтропия замкнутой (т.е. теплоизолированной) системы либо возрастает, либо остается постоянной, это тоже формулировка второго начала термодинамики. Запишем математическую формулировку первого начала термодинамики

$$dQ = dU + dA, \quad (10)$$

где dQ – бесконечно малое количество тепла, сообщенное системе,
 dU – бесконечно малое изменение внутренней энергии системы,
 dA – бесконечно малая работа, совершаемая системой против внешних тел.

$$dA = p dV \quad (11)$$

где p – давление, dV – бесконечно малое изменение объема.

Учитывая, что $dQ = T ds$ (см. формулу 8), можно записать

$$T ds \geq dU + p dv, \quad (12)$$

это основное уравнение термодинамики, объединяющее первое и второе начало термодинамики. Знак равенства относится к обратимым процессам, знак неравенства к необратимым.

Второе начало термодинамики является статистическим законом, оно применимо только к системам, состоящим из огромного числа молекул. К системам с очень малым числом частиц второе начало термодинамики неприменимо.

Любое макросостояние системы (например, равномерное распределение газа по объему) может быть осуществлено очень большим числом микросостояний.

Понятие «микросостояние системы» предполагает, что оказываются заданными состояния всех молекул системы. Но молекулы находятся в вечном хаотическом движении, они постоянно меняют свое месторасположение, обмениваются скоростями, т.е. микросостояния системы все время изменяются, а макросостояния (равномерное распределение молекул в данном объеме) остается.

Число микросостояний, которыми может быть осуществлено данное макросостояние, называется термодинамической вероятностью W (или статистическим весом) макросостояния. Процессы в природе протекают так, что система переходит из состояния, менее вероятного, в состояние, более вероятное. Все реальные процессы необратимы, а необратимые процессы в природе протекают также с возрастанием энтропии.

Состояние между энтропией S и W найдено Больцманом

$$S = k \ln W + const, \quad (13)$$

где k – постоянная Больцмана.

Выражение (13) тоже является формулировкой второго начала термодинамики.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.

1. Перед решением задачи рекомендуется прочитать раздел «Краткая теория» данного методического пособия.
2. Решение задач следует проводить в СИ.
3. В пособии рассмотрены задачи, связанные с прямыми циклами (см. задачи №1, №2, №3), с обратными циклами (см. задачи №4, №5) и задачи на вычисление энтропии (задачи №6, №7, №8, №9).

4. При решении задач на вычисление изменения энтропии следует помнить, что энтропия сложной системы складывается и из энтропий частей этой системы. Переход системы, а система может состоять из одного тела, из начального состояния в конечное состояние может осуществляться несколькими, последовательно протекающими процессами.

Тогда следует найти изменение энтропии в каждом отдельно взятом процессе и полное изменение энтропии будет равно алгебраической сумме изменений энтропий в рассматриваемых процессах.

5. При решении задач в системе единиц измерения СИ количество теплоты, работа, энергия изменяются в джоулях (*Дж*). Значение универсальной газовой постоянной $R = 8,3 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{к} \cdot \text{моль} \cdot \text{К}}$, постоянная

Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$, число Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{26} \frac{1}{\text{к} \cdot \text{моль}}$, масса

m измеряется в кг, молярная масса μ в $\frac{\text{кг}}{\text{к} \cdot \text{моль}}$. Значение μ берется из

таблицы «Периодическая система элементов Д.И. Менделеева». Температура T по шкале Кельвина связана с температурой t по шкале Цельсия соотношением $T = t + 273$.

ЗАДАЧИ.

Задача №1

Температура парогенератора на теплоэлектростанции, использующей перегретый пар, равна 600°C . В холодильник подается речная вода при $t=20^{\circ}\text{C}$. Чему равен максимальный коэффициент полезного действия, который может быть получен при таких условиях?

Дано: СИ
 $t_1=600^{\circ}\text{C}$ ($T_1=873\text{ K}$)
 $t_2=20^{\circ}\text{C}$ ($T_2=293\text{ K}$)
 $\eta=?$

Решение:
Максимальный КПД имеет тепловая машина, работающая по циклу Карно.

КПД цикла Карно выражается формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$,

где T_1 – температура нагревателя, T_2 – температура холодильника. Обе температуры определяются по шкале Кельвина. Подставим численные данные $\eta = \frac{873 - 293}{873} = 0,663$. $\eta = 66,3\%$

Ответ: $\eta = 66,3\%$

Задача №2

Один киломоль кислорода совершает цикл Карно в интервале температур от 27°C до 327°C . известно, что отношение максимального за цикл давления P_{max} к минимальному давлению P_{min} равно 20. Определить: 1) количество тепла Q_1 , полученного от нагревателя за цикл, 2) КПД цикла η , 3) количество тепла Q_2 , отданного холодильнику за цикл, 4) работу A , совершенную газом за цикл.

Дано: СИ
 $m = 1\text{ к·моль}$
 μ
 $t_1=327^{\circ}\text{C}$
($T_1=600\text{ K}$)
 $t_2=27^{\circ}\text{C}$
($T_2=300\text{ K}$)
 $\frac{P_{max}}{P_{min}} = 20$
 $R=8,3 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{к·моль·К}}$
 $i=5$
 $Q_1=?$ $\eta=?$ $Q_2=?$ $A=?$

Решение:

1) Чертим цикл Карно в координатах P, V

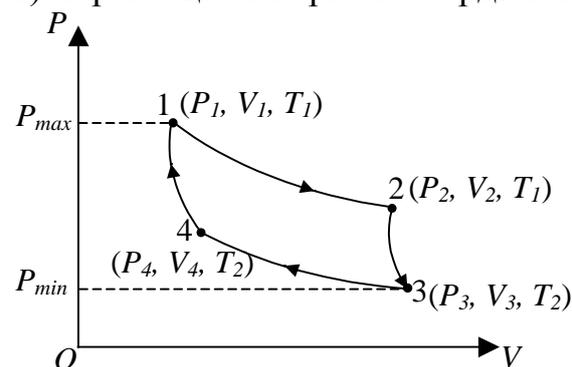


Рис. 5

Стрелками показываем направление процессов.

Сразу отметим, что $P_{max}=P_1$, $P_{min}=P_3$. за весь цикл газ получает от нагревателя тепло Q_1 только на участке $1 \rightarrow 2$, соответствующему

изотермическому расширению кислорода. Согласно первому началу термодинамики $Q_1 = \Delta U + A$, но изменение внутренней энергии ΔU зависит только от изменения температуры, на участке $1 \rightarrow 2$ ΔU равно нулю, т.к. данный участок изотерма и температура T_1 является постоянной величиной.

Следовательно, $Q_1 = A$. При изотермическом процессе $A = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$ или

$Q_1 = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$. Находим отношение $\frac{V_2}{V_1}$ объемов газа. Для изотермического

процесса $1 \rightarrow 2$ по закону Бойля–Мариотта $P_1 V_1 = P_2 V_2$. Отсюда $\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}$.

Находим давление P_2 . Процесс $2 \rightarrow 3$ соответствует адиабатному расширению газа. Записываем уравнение адиабаты $P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma$, γ – коэффициент

Пуассона. Отсюда $P_2 = P_3 \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^\gamma$ (14)

Уравнение адиабаты $2 \rightarrow 3$ можно записать и в такой форме $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$.

Отсюда $\left(\frac{V_3}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2}$ и $\frac{V_3}{V_2} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$. Подставляя $\frac{V_3}{V_2}$ в формулу (14), получим

$$P_2 = P_3 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \text{ и } \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_3} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\gamma-1}.$$

Тогда $Q_1 = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \left\{ \frac{P_1}{P_3} \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right\}$. Подставим численные значения,

учитывая, что $\frac{P_1}{P_3} = \frac{P_{max}}{P_{min}}$ и что коэффициент Пуассона $\gamma = \frac{i+2}{i}$, где i – число

степеней свободы. Для двухатомного газа кислорода $i=5$ и $\gamma = \frac{5+2}{5} = 1,40$.

$$Q_1 = 1 \cdot 8,3 \cdot 10^3 \cdot 600 \cdot \ln \left\{ 20 \cdot \left(\frac{300}{600} \right)^{\frac{1,40}{1,40-1}} \right\} Дж = 2,8 \cdot 10^6 Дж.$$

2) Коэффициент полезного действия η цикла Карно рассчитывается по формуле $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$, где T_1 и T_2 – абсолютные температуры нагревателя и холодильника соответственно.

$$\text{Получим численные значения } \eta = \frac{600 - 300}{600} 100\% = 50\%.$$

3) За весь цикл газ отдает тепло Q_2 только на участке $3 \rightarrow 4$, соответствующему изотермическому сжатию. КПД машины, работающей по

прямому циклу, можно выразить формулой $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$, где Q_1 – количество тепла, полученное от нагревателя, Q_2 – количество тепла, отданного холодильнику. Отсюда $\eta Q_1 = Q_1 - Q_2$ и $Q_2 = Q_1(1 - \eta)$. Подставим численные данные $Q_2 = 2,8 \cdot 10^6(1 - 0,5) \text{ Дж} = 1,4 \cdot 10^6 \text{ Дж}$

4) КПД цикла $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$, но $Q_1 - Q_2 = A$, где A – работа, совершаемая

рабочим телом (в данном случае кислородом) за цикл $\eta = \frac{A}{Q_1}$. Отсюда

$A = \eta Q_1$. Подставляем численные данные: $A = 0,5 \cdot 2,8 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 1,4 \cdot 10^6 \text{ Дж}$.

Ответ: $Q_1 = 2,8 \cdot 10^6 \text{ Дж}$,
 $Q_2 = 1,4 \cdot 10^6 \text{ Дж}$,
 $A = 1,4 \cdot 10^6 \text{ Дж}$, $\eta = 50\%$

Задача №3

Прямой цикл, совершаемый Z киломолями идеального газа, состоит из двух адиабат, изобары и изохоры. В начале адиабатического сжатия температура газа T_1 . Степень адиабатического сжатия $a = \frac{V_1}{V_2}$, степень

изобарического расширения $b = \frac{V_3}{V_2}$. Отношение $\frac{C_p}{C_v}$ равно γ . Найти

количество тепла Q_1 , полученного газом за цикл, и КПД цикла η .

Дано:

$$\frac{m}{\mu} = Z \quad a = \frac{V_1}{V_2} \quad b = \frac{V_3}{V_2}$$

$$T_1 \quad \gamma \quad R$$

$Q_1 = ? \quad \eta = ?$

Решение:

Чертим цикл в координатах P, V стрелками показываем направление процессов. Процесс $1 \rightarrow 2$ – адиабатическое сжатие, $2 \rightarrow 3$ – изобарическое расширение, процесс $3 \rightarrow 4$ – адиабатическое расширение, $4 \rightarrow 1$ – изохорический процесс, при

котором происходит охлаждение газа. Адиабатические процессы это процессы, идущие без теплообмена с окружающей средой. Следовательно, газ получает тепло только при одном процессе, а именно при процессе $2 \rightarrow 3$, соответствующем изобарному расширению. Согласно первому началу термодинамики $Q_1 = \Delta U_{23} + A_{23}$.

Изменение внутренней энергии ΔU_{23} газа на участке $2 \rightarrow 3$ цикла выражается

$$\text{формулой } \Delta U_{23} = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R(T_3 - T_2), \quad (15)$$

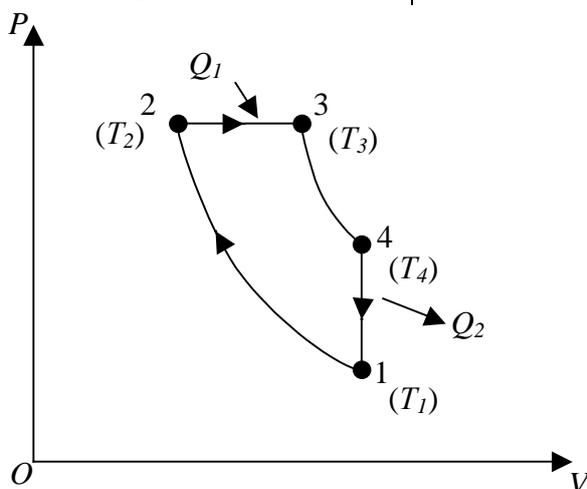


Рис. 6

где $\frac{m}{\mu}$ – число киломолей, i – число степеней свободы идеального газа, R – универсальная газовая постоянная, T_3 и T_2 – абсолютные температуры газа в состояниях 3 и 2 (рис. 6) соответственно. По условию задачи $\frac{m}{\mu} = Z$, число степеней свободы i можно найти, зная коэффициент Пуассона γ .

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = 1 + \frac{2}{i}, \text{ отсюда } \frac{i}{2} = \frac{1}{\gamma-1}.$$

Находим температуры T_2 и T_3 . Адиабатический процесс 1→2 описывается уравнением $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$. Отсюда $T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = T_1 a^{\gamma-1}$. Для изобарного процесса 2→3 согласно закону Гей–Люссака запишем $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}$.

Отсюда $T_3 = T_2 \frac{V_3}{V_2} = T_2 b = T_1 a^{\gamma-1} \cdot b$. Подставляя значения T_2 и T_3 в формулу

$$(15) \text{ получим } \Delta U_{23} = Z \frac{R}{\gamma-1} (T_1 a^{\gamma-1} b - T_1 a^{\gamma-1}) = \frac{ZRT_1 a^{\gamma-1}}{\gamma-1} (b-1).$$

Находим работу, совершаемую газом при изобарическом расширении на участке 2→3 рассматриваемого цикла.

$$A_{23} = P_2 (V_3 - V_2) = P_2 V_2 \left(\frac{V_3}{V_2} - 1 \right) = P_2 V_2 (b-1),$$

где P_2 – давление газа на участке 2→3.

Из уравнения Менделеева–Клапейрона, записанного для состояния 2, находим $P_2 V_2 = \frac{m}{\mu} RT_2$ или $P_2 V_2 = ZRT_1 a^{\gamma-1}$, R – универсальная газовая постоянная. Тогда $A_{23} = ZRT_1 a^{\gamma-1} (b-1)$. Подставляя ΔU_{23} и A_{23} в выражение первого начала термодинамики, имеем

$$Q_1 = \Delta U_{23} + A_{23} = \frac{ZRT_1 a^{\gamma-1} (b-1)}{\gamma-1} + ZRT_1 a^{\gamma-1} (b-1).$$

$$\text{Окончательно } Q_1 = \frac{ZRT_1 a^{\gamma-1} \gamma}{\gamma-1} (b-1)$$

Находим КПД рассматриваемого прямого цикла

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \text{ где } Q_1 \text{ – количество теплоты, полученное от нагревателя,}$$

Q_2 – количество теплоты, отданное холодильнику.

В рассматриваемом цикле тепло ожидается только на участке 4→1, соответствующем изохорическому процессу. Записываем первое начало термодинамики для этого процесса

$-Q_2 = \Delta U_{41} + A_{41}$. Знак (-) при Q_2 показывает, что тепло отдается. При изохорном процессе газ не расширяется (объем газа не меняется), следовательно, $A_{41} = 0$ и $Q_2 = -\Delta U_{41}$.

Изменение внутренней энергии

$$-\Delta U_{41} = \Delta U_{14} = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R (T_4 - T_1) = \frac{ZR}{\gamma - 1} (T_4 - T_1).$$

Находим T_4 , записывая уравнение адиабатического процесса 3→4:
 $T_3 V_3^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1}$.

$$\text{Отсюда } T_4 = T_3 \left(\frac{V_3}{V_1} \right)^{\gamma-1} = T_1 a^{\gamma-1} b \left(\frac{V_3}{V_2} \cdot \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = T_1 a^{\gamma-1} b \cdot b^{\gamma-1} \frac{1}{a^{\gamma-1}} = T_1 b^\gamma.$$

$$\text{Теперь } Q_2 = \frac{ZR}{\gamma - 1} (T_1 b^\gamma - T_1) = \frac{ZRT_1 (b^\gamma - 1)}{\gamma - 1}$$

Записываем КПД цикла

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{ZRT_1 (b^\gamma - 1)(\gamma - 1)}{(\gamma - 1) \cdot ZRT_1 a^{\gamma-1} \gamma (b - 1)} = 1 - \frac{b^\gamma - 1}{\gamma \cdot a^{\gamma-1} (b - 1)}.$$

$$\text{Ответ: } \eta = 1 - \frac{b^\gamma - 1}{\gamma \cdot a^{\gamma-1} (b - 1)},$$

$$Q_1 = \frac{ZRT_1 a^{\gamma-1} \gamma (b - 1)}{\gamma - 1}$$

Задача №4

Для поддержания в помещении температуры $t_2 = 0^\circ \text{C}$ холодильной установкой, работающей по обратному циклу Карно, ежечасно совершается работа $A = 5 \cdot 10^6$ Дж. Определить температуру t_1 окружающей среды и количество отводимого из помещения тепла Q_2 , если холодильный коэффициент $\varepsilon = 7$. Продолжительность цикла – один час.

Дано:

$$t_2 = 0^\circ \text{C} \quad (T_2 = 273 \text{ К})$$

$$A = 5 \cdot 10^6 \text{ Дж}$$

$$\varepsilon = 7$$

$$t_1 = ?, \quad Q_2 = ?$$

Решение:

Схема холодильной машины такова (см. рис. 7). Более холодным телом в данной задаче является помещение, в котором надо поддерживать $t_2 = 0^\circ \text{C}$. Более горячим телом является окружающая среда, в которую отводится

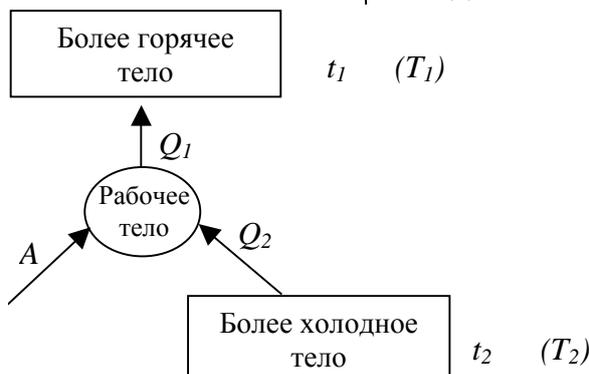


Рис. 7

тепло из помещения.

Продолжительность цикла – один час. Q_2 – количество теплоты, отводимое за один час, т.е. за один цикл, из помещения с $t_2 = 0^\circ \text{C}$.

A – работа, затрачиваемая за один час, т.е. за один цикл, со стороны внешних сил, эта работа затрачивается на приведение холодильной установки в действие.

Q_1 – количество теплоты, отдаваемое в окружающую среду за один час, т.е. за один цикл. Температура t_1 окружающей среды более высокая, чем температура t_2 .

Эффективность холодильной машины характеризуется ее холодильным коэффициентом ε .

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{A}$$

$$\text{Отсюда } Q_2 = \varepsilon A. \quad (16)$$

Соотношение между холодильным коэффициентом ε и термическим КПД η выражается соотношением $\varepsilon = \frac{1-\eta}{\eta}$, где $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$. Тогда

$$\varepsilon = \frac{1}{\eta} - 1 = \frac{T_1}{T_1 - T_2} - 1 = \frac{T_1 - T_1 + T_2}{T_1 - T_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \text{ Теперь из соотношения } \varepsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

$$\text{находим } T_1 = \frac{T_2(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} \quad (17)$$

Подставляем численные значения в формулы (16) и (17)

$$Q_2 = 7.5 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 3.5 \cdot 10^7 \text{ Дж}.$$

$$T_1 = \frac{273(1 + 7)}{7} \text{ К} = 312 \text{ К}.$$

Так как $T_1 = 273 + t_1$, то $t_1 = T_1 - 273$ или $t_1 = (312 - 273)^\circ\text{C} = 39^\circ\text{C}$.

Ответ: $t_1 = 39^\circ\text{C}$,

$$Q_2 = 3.5 \cdot 10^7 \text{ Дж}$$

Задача №5

Идеальная холодильная машина работает по обратному циклу Карно в интервале температур от 100°C до 9°C . Работа машины за цикл равна $4,55 \cdot 10^5 \text{ Дж}$. Определить: 1) холодильный коэффициент ε , 2) количество тепла Q_2 , отводимого от охлаждаемого тела за цикл, 3) количество тепла Q_1 , отдаваемого теплоприемнику за цикл.

Дано:

$$t_1 = 100^\circ\text{C}$$

$$(T_1 = 373\text{K})$$

$$t_2 = 9^\circ\text{C} \quad (T_2 = 282\text{K})$$

$$A = 1,55 \cdot 10^5 \text{ Дж}$$

$$\varepsilon = ?$$

$$Q_2 = ? \quad Q_1 = ?$$

Решение:

обратный цикл Карно состоит из четырех процессов:

двух адиабат и двух изотерм

(см. рис. 8). Процесс 1→4

адиабатическое расширение,

процесс 4→3 –

изотермическое расширение,

процесс 3→2 –

адиабатическое сжатие,



Рис. 8

процесс 2→1 – изотермическое сжатие. Стрелки на рис. 8 показывают направление процесса.

Холодильный коэффициент ε определяется по формуле $\varepsilon = \frac{Q_2}{A}$,

с другой стороны $\varepsilon = \frac{1-\eta}{\eta}$,

где η – коэффициент полезного действия идеальной тепловой машины, т.е. машины, работающей по прямому циклу Карно в том же самом температурном интервале, что и идеальная холодильная машина.

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

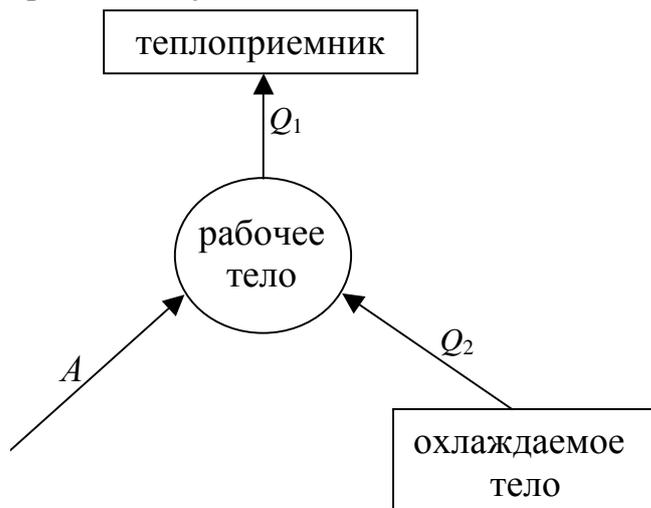
Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{1-\eta}{\eta} = \frac{1}{\eta} - 1 = \frac{T_1}{T_1 - T_2} - 1 = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (18)$$

Если ε известно, то $Q_2 = \varepsilon A$ (19)

Находим количество теплоты Q_1 , отдаваемое за цикл теплоприемнику. Чертим схему действия холодильной машины.



A – работа, затрачиваемая на приведение холодильной машины в действие.

$$A + Q_2 = Q_1.$$

Это закон сохранения энергии, так как $Q_2 = \varepsilon A$, то $Q_1 = A + \varepsilon A$ или

$$Q_1 = A \cdot (1 + \varepsilon) \quad (20)$$

Подставляем численные значения в формулы (18), (19) и (20).

$$\varepsilon = \frac{282}{373 - 282} \cong 3,1,$$

$$Q_2 = 3,1 \cdot 1,55 \cdot 10^2 \text{ Дж} = 4,8 \cdot 10^5 \text{ Дж},$$

$$Q_1 = 1,55 \cdot 10^5 (1 + 3,1) \text{ Дж} = 6,4 \cdot 10^5 \text{ Дж}$$

Ответ: $\varepsilon \cong 3,1$;

$$Q_2 = 4,8 \cdot 10^5 \text{ Дж}$$

$$Q_1 = 6,4 \cdot 10^5 \text{ Дж}$$

Задача № 6

Сосуд, наполненный гелием, оказался неплотно закрытым. Газ, первоначально находившийся при давлении $2,026 \cdot 10^7$ Па очень медленно

выходит из сосуда при температуре 20°C. Чему равно изменение энтропии, приходящееся на 1 кг газа?

Дано:

$$m=1 \text{ кг}$$

$$p_1=2,026 \cdot 10^7 \text{ Па}$$

$$p_2=1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$\mu=4 \text{ кг/к·моль}$$

$$t_1=20^\circ\text{C} \quad (T_1=293\text{K})$$

$$R=8,3 \cdot 10^3 \text{ Дж/к·моль·К}$$

$$\Delta S = ?$$

Решение:

Изменение энтропии, при переходе из состояния 1 в состояние 2, вычисляется по формуле $\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$ (21).

Так как газ выходит из сосуда очень медленно, то можно изменением температуры газа пренебречь и считать этот процесс изотермическим, т.е. идущим при постоянной температуре T . Согласно первому началу термодинамики $dQ = dU + dA$.

Изменение внутренней энергии dU газа зависит только от изменения температуры газа, а так как в данном случае $T = const$, то $dU = 0$ и $dQ = dA$.

Бесконечно малая работа dA вычисляется по формуле $dA = pdV$, а давление p можно найти из уравнения Менделеева–Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$.

Отсюда $p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V}$ и $dA = \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V}$. Подставим dA в формулу (21):

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_1^2 dA = \frac{m}{\mu} \frac{Rt}{T} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Для изотермического процесса справедлив закон Бойля–Мариотта

$$p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

Отсюда $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$, p_1 известно из условия задачи, а давление p_2

равняется атмосферному давлению, т.е. $p_2 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$, так как гелий выходит из сосуда в атмосферу.

Тогда изменение энтропии

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{p_1}{p_2}$$

μ для гелия можно найти из таблицы «Периодическая система химических элементов» Д.И. Менделеева. Для гелия $\mu = 4 \text{ кг/к·моль}$.

Подставляем численные значения

$$\Delta S = \frac{1}{4} 8,3 \cdot 10^3 \ln \frac{2,026 \cdot 10^7}{1,013 \cdot 10^5} \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cong 1,1 \cdot 10^4 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}.$$

Ответ: $\Delta S \cong 1,1 \cdot 10^4 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$

Задача №7

Найти изменение энтропии при нагревании 100 г воды от 0°C до 100°C и последующем превращении воды в пар той же температуры. Удельная

теплоемкость воды равна $4,18 \cdot 10^3$ Дж/кг·К, удельная теплота парообразования равна $2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Дано: СИ

$$m=100 \text{ г}=0,1 \text{ кг}$$

$$t_1=0^\circ\text{C} \quad (T_1=273\text{K})$$

$$t_2=100^\circ\text{C} \quad (T_2=373\text{K})$$

$$c=4,18 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}$$

$$\lambda=2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$$

$$\Delta S = ?$$

Решение:

В данной задаче рассматриваются два процесса, а именно нагревание воды от 0°C до 100°C и превращение воды в пар. Полное изменение энтропии ΔS равно алгебраической сумме изменений энтропии в каждом процессе.

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2, \quad (22)$$

где ΔS_1 – изменение энтропии при нагревании воды, ΔS_2 – изменение энтропии при превращении воды в пар. Находим ΔS_1 , учитывая, что бесконечно малое количество теплоты dQ , необходимое для нагревания воды на бесконечно малое изменение температуры dT , вычисляется по формуле $dQ = mcdT$.

Тогда

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mcdT}{T} = mc \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = mc \ln T \Big|_{T_1}^{T_2} = mc(\ln T_2 - \ln T_1) = mc \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Находим изменение энтропии ΔS_2 при превращении воды в пар. Количество теплоты ΔQ , необходимое для парообразования, вычисляется по формуле $\Delta Q = \lambda m$, где λ – удельная теплота парообразования.

$$\Delta S_2 = \frac{\Delta Q}{T_2} = \frac{\lambda m}{T_2}.$$

T_2 – температура, при которой вода превращается в пар. Подставляем ΔS_1 и ΔS_2 в (22) и находим общее изменение энтропии $\Delta S = mc \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda m}{T_2}$.

Подставим численные значения

$$\Delta S = \left(0,1 \cdot 4,18 \cdot 10^3 \ln \frac{373}{272} + \frac{2,26 \cdot 10^6 \cdot 0,1}{373} \right) \text{ Дж / К} \cong 738 \text{ Дж / К}$$

Ответ: $\Delta S \cong 738 \text{ Дж / К}$

Задача №8

Кусок льда, имевший первоначальную температуру (-33°C), превращен в пар при температуре 100°C . Определить изменение энтропии, удельные теплоемкости льда и воды равны соответственно $1,8 \cdot 10^3$ Дж/кг·К и $4,18 \cdot 10^3$ Дж/кг·К, удельная теплота плавления льда равна $3,35 \cdot 10^5$ Дж/кг и удельная теплота парообразования для воды при атмосферном давлении равна $2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг. Масса куска льда равна 0,1 кг.

Дано: СИ

$$m=0,1 \text{ кг}$$

$$t_1=-33^\circ\text{C} \quad (T_1=240\text{K})$$

$$t_2=100^\circ\text{C} \quad (T_2=373\text{K})$$

$$C_l=1,8 \cdot 10^3 \text{ Дж/к}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}$$

$$C_в=4,18 \cdot 10^3 \text{ Дж/к}\cdot\text{моль}\cdot\text{К}$$

$$r=3,35 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$$

$$\lambda=2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$$

$$m=01 \text{ кг}$$

$$\Delta S = ?$$

Решение:

Переход вещества из начального состояния (лед) в конечное состояние (пар) осуществляется четырьмя последовательно протекающими процессами:

- 1) нагревание льда до температуры плавления льда;
- 2) плавление льда, т.е. превращение его в воду;
- 3) нагревание получившейся воды до температуры кипения;
- 4) превращение воды а пар в процессе кипения. Соответственно общее изменение

энтропии ΔS при превращении льда в пар складывается из четырех величин

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4$$

1). Находим изменение энтропии ΔS_1 при нагревании льда от температуры $t_1 = -33^\circ \text{C}$ ($T_1=240 \text{ K}$) до температуры плавления льда, т.е. до температуры $t_0=0^\circ \text{C}$ ($T_0=273 \text{ K}$).

количество теплоты dQ , требующееся для повышения температуры льда на бесконечно малую величину dT , вычисляется по формуле

$$dQ = c_l m dT, \text{ где } c_l - \text{удельная теплоемкость льда, } m - \text{масса куска льда.}$$

Изменение энтропии

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_0} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_0} \frac{c_l m dT}{T} = c_l m \int_{T_1}^{T_0} \frac{dT}{T} = c_l m \ln \frac{T_0}{T_1}.$$

2). Находим изменение энтропии ΔS_2 при плавлении льда. На плавление льда затрачивается количество теплоты $\Delta Q = rm$, где r – удельная теплота плавления льда, m – масса льда. Плавление льда происходит при температуре $t_0=0^\circ\text{C}$ ($T_0=273 \text{ K}$), эта температура остается постоянной все время таяния льда.

$$\text{Поэтому } \Delta S_2 = \frac{\Delta Q}{T_0} = \frac{rm}{T_0}$$

3). Получившуюся от таяния льда воду надо нагреть до температуры кипения при атмосферном давлении, т.е. до $t_2=100^\circ\text{C}$ ($T_2=373 \text{ K}$). Бесконечно малое количество теплоты dQ вычисляется по формуле $dQ = c_в m dT$, где $c_в$ – удельная теплоемкость воды, m – масса получившейся воды, равная массе растаявшего льда, dT – бесконечно малое изменение температуры.

Тогда изменение энтропии ΔS_3 при нагревании получившейся воды от $t_0=0^\circ\text{C}$ ($T_0=273 \text{ K}$) до $t_2=100^\circ\text{C}$ ($T_2=373 \text{ K}$), выражается формулой

$$\Delta S_3 = \int_{T_0}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T_2} \frac{c_в m dT}{T} = c_в m \int_{T_0}^{T_2} \frac{dT}{T} = c_в m \ln \frac{T_2}{T_0}$$

4). Находим изменение энтропии ΔS_4 при превращении воды в пар в процессе кипения. Процесс парообразования идет при постоянной

температуре $t_2=100^\circ\text{C}$ ($T_2=373\text{ K}$). количество теплоты, требующейся для парообразования, вычисляется по формуле $\Delta Q = \lambda m$,

где λ – удельная теплота парообразования для воды, находящейся при атмосферном давлении, m – масса воды.

$$\text{Тогда } \Delta S_4 = \frac{\Delta Q}{T_2} = \frac{\lambda m}{T_2} .$$

Общее изменение энтропии ΔS при превращении льда в пар получим, складывая выражения для ΔS_1 , ΔS_2 , ΔS_3 и ΔS_4

$$\Delta S = c_{\text{л}} m \ln \frac{T_0}{T_1} + \frac{rm}{T_0} + c_{\text{в}} m \ln \frac{T_2}{T_0} + \frac{\lambda m}{T_2}$$

Подставим численные значения

$$\Delta S = \left(1,8 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot \ln \frac{273}{240} + \frac{3,35 \cdot 10^5 \cdot 0,1}{273} + 4,18 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot \ln \frac{373}{273} + \frac{2,26 \cdot 10^6 \cdot 0,1}{373} \right) \text{ Дж / К} \cong 883 \text{ Дж / К}$$

Ответ: $\Delta S \cong 883 \text{ Дж / К}$

Задача №9

Один киломоль идеального газа, состоящего из одноатомных молекул, находится в сосуде при температуре $T=300\text{ K}$. Газ нагрели изохорически на $\Delta T=1,0\text{ K}$. Определить статистический вес (термодинамическую вероятность) этой макросистемы.

Дано: СИ

$$\frac{m}{\mu} = 1 \text{ к·моль}$$

$$i=3$$

$$T=300\text{ K}$$

$$\Delta T=1,0\text{ K}$$

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{26} \text{ 1/к·моль}$$

$W?$

Решение:

Макросистемой в данном случае является один киломоль идеального газа. Соотношение между энтропией S системы и термодинамической вероятностью W ее состояния выражается формулой (13), а именно $S = k \ln W + const$, где R – постоянная Больцмана. Изменение энтропии

$$\Delta S = k \ln W \quad (23).$$

С другой стороны изменение энтропии

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

Процесс нагревания газа протекает изохорически, т.е. при постоянном объеме $V = const$.

При изохорическом процессе

$$dQ = \frac{m}{\mu} C_v dT$$

где $\frac{m}{\mu}$ – число киломолей, C_v – молярная теплоемкость при постоянном объеме $C_v = \frac{i}{2}R$, где i – число степеней свободы (для одноатомного газа $i=3$), а R – универсальная газовая постоянная.

$$\text{Тогда } dQ = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R dT$$

$$\text{и } \Delta S = \int_1^2 \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R \frac{dT}{T} = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R \int_T^{T+\Delta T} \frac{dT}{T} = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R \ln \frac{T+\Delta T}{T}.$$

$$\text{Итак} \quad \Delta S = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R \ln \frac{T+\Delta T}{T} \quad (24)$$

Приравниваем правые части формул (23) и (24)

$$k \ln W = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R \ln \frac{T+\Delta T}{T}$$

Постоянная Больцмана k равна отношению двух констант R и N_A , где R – универсальная газовая постоянная, а N_A – число Авогадро.

$$k = \frac{R}{N_A}$$

Теперь

$$\ln W = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} \frac{R}{R} N_A \ln \frac{T+\Delta T}{T} = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} N_A \ln \left(1 + \frac{\Delta T}{T} \right).$$

$$\ln \left(1 + \frac{\Delta T}{T} \right) \text{ разложим в ряд, при разложении достаточно ограничиться}$$

только первым членом ряда.

$$\ln \left(1 + \frac{\Delta T}{T} \right) \cong \frac{\Delta T}{T}.$$

$$\text{Тогда } \ln W = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} N_A \frac{\Delta T}{T}$$

Подставим численные значения

$$\ln W = 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 6,02 \cdot 10^{26} \frac{1}{300} \cong 3 \cdot 10^{24}$$

$$\text{Отсюда } W = e^{3 \cdot 10^{24}}$$

e – основание натурального логарифма.

e – число иррациональное, с точностью до второго десятичного знака

$$e = 2,71828\dots$$

$e^{3 \cdot 10^{24}}$ – огромное число, следовательно, состояние макросистемы, данной задаче одного киломоля идеального газа, может быть реализовано огромнейшим числом микросостояний.

$$\text{Ответ: } W = e^{3 \cdot 10^{24}}$$

