ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Краткая теория

Первое начало термодинамики – это закон превращения и сохранения энергии.

Математическая формулировка первого начала термодинамики записывается так:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A \qquad (1)$$

и читается так: количество тепла ΔQ, сообщенное системе, идет на изменение внутренней энергии ΔU системы и на работу ΔA, совершаемую системой против внешних тел.

Система в термодинамике может состоять из нескольких тел, но может и из одного тела. Телом можно назвать воздух, воду, ртуть, любой газ, т.е. любое вещество, занимающее определенный объем. Очень часто таким телом является идеальный газ.

Количество тепла ΔQ, подведенное к системе, ни в коем случае нельзя понимать как разность каких-то количеств тепла в конечном и начальном состояниях системы (или тела, если система состоит из одного тела), потому что бессмысленно говорить о запасе тепла, заключенного в теле. ΔQ - это просто количество теплоты, сообщенного телу или системе тел.

Все сказанное о ΔQ также относится к ΔA. ΔA - работа, совершаемая силами, приложенными со стороны системы к внешним телам.

Например, газ находится под поршнем. Если газ будет расширяться, то он будет приподнимать поршень, т.е. совершать работу.

ΔU - изменение внутренней энергии системы. $\Delta U = U_2 - U_1$, где U_1- внутренняя энергия системы в каком-то состоянии 1, а U_2- в состоянии 2.

Если речь идет о бесконечно малом количестве теплоты dQ, сообщенном системе, о бесконечно малом изменении внутренней энергии dU системы и о бесконечно малой работе dA, то первое начало термодинамики записывается в виде

$$dQ = dU + dA \qquad (2)$$

Разберем более подробно, как рассчитывать ΔQ, ΔU и ΔA. Практически во всех задачах рабочим телом является идеальный газ.

Внутренняя энергия U идеального газа – это сумма кинетических энергий всех его молекул, она выражается формулой

$$U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT, \qquad (3)$$

где m-масса газа, μ-масса моля, тогда $\frac{m}{\mu}$-число молей, R- универсальная газовая постоянная, T- температура газа, i-число степеней свободы.

Изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T, \qquad (4)$$

где ΔT – изменение температуры.

Числом степеней свободы i называется наименьшее число независимых координат, которые необходимо ввести и чтобы определить положение тела в пространстве.

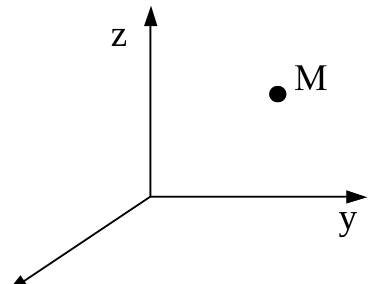

Рис.1

Рассмотрим одноатомный газ.

молекулу такого газа можно считать материальной точкой, положение которой в пространстве (см. рис.1) определяется тремя координатами. Для молекулы одноатомного газа число степеней свободы i=3.

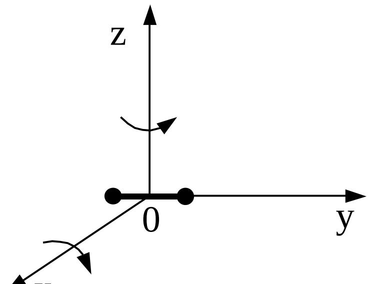

Рис.2

Рассмотрим двухатомный газ.

В двухатомной молекуле каждый атом принимается за материальную точку и считается, что атомы жестко связаны между собой. Это гантельная модель двухатомной молекулы.

Положение ее центра масс задается тремя координатами, это уже три степени свободы, они определяют поступательное движение молекулы. Но молекула может совершать и вращательные движения вокруг осей ox и oz (см. рис.2), это еще две степени свободы, определяющие вращательное движение молекулы. Вращение молекулы вокруг оси oy невозможно, так как материальные точки не могут вращаться вокруг оси, проходящей через эти точки. Для молекулы двухатомного газа число степеней свободы i=5.

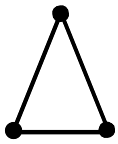

Рис.3

Рассмотрим трехатомный газ. Модель молекулы – три материальные точки, жестко связанные между собой (см. рис.3). Для молекулы трехатомного газа число степеней свободы i=6, из них три степени свободы определяют поступательное движение молекулы, а три – вращательное.

Закон о распределении энергии по степеням свободы утверждает, что на каждую степень свободы молекулы приходится одно и то же количество энергии, равное $\frac{1}{2}kT$.

Следовательно, молекула, имеющая i степеней свободы, обладает энергией:

$$E = \frac{i}{2}kT \qquad ,(5)$$

где k-постоянная Больцмана, T-абсолютная температура газа. Постоянная Больцмана k связана с универсальной газовой постоянной R и числом Авагадро N соотношением:

$$k = \frac{R}{N} \qquad (6)$$

Рассмотрим, как рассчитывать <u>работу идеального газа</u> при различных процессах.

При бесконечно малом изменении объема газа dV можно считать, что давление p газа остается неизменным и бесконечно малая работа газа при этом выражается формулой

$$dA = pdV \tag{7}$$

При конечном измерении объема газа от V_1 до V_2 работа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV\,. \tag{8}$$

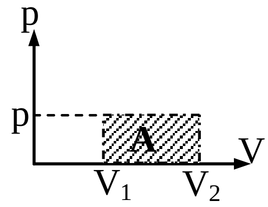

Рис.4

При изобарическом процессе давление газа остается постоянным, $p=Const$, и работа

$$A = p(V_1 - V_2) \tag{9}$$

Строим график процесса в координатах p,V (см. рис.4). Работа A графически выражается площадью заштрихованного прямоугольника.

При изотермическом процессе, т.е. процессе, идущем при постоянной температуре, работа

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln\frac{V_2}{V_1}, \tag{10}$$

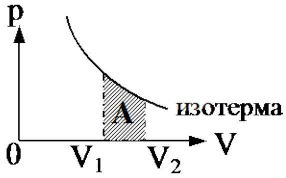

Рис.5

Графически работа A выражается заштрихованной площадью под изотермой (см. рис.5).

При изохорическом процессе объем $V=Const$ и изменении объема газа равно нулю. Следовательно, согласно формулам (7) и (8) работа A газа при изохорическом процессе равна нулю.

При адиабатическом процессе, т.е. в процессе, идущем без теплообмена с окружающей средой, соотношение между параметрами p, V и T выражено соотношениями

$$pV^{\gamma} = Const \tag{11}$$

или

$$TV^{\gamma-1} = Const \tag{12}$$

или

$$Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = Const \tag{13}$$

где γ-коэффициент Пуассона,

$$\gamma = \frac{i+1}{i}, \tag{14}$$

где i – число степеней свободы рассматриваемого газа.

Работа при адиабатическом процессе выражается формулой

$$A = \frac{m}{\mu}\frac{RT_1}{(\gamma-1)}\left\{1-\left(\frac{V_1}{V2}\right)^{\gamma-1}\right\}, \tag{12}$$

При политропическом процессе, при котором давление и объем идеального газа связаны соотношением

$$pV^{n} = Const\,, \tag{13}$$

где n – показатель политропы, работа выражается формулой

$$A = \frac{p_1V_1}{n-1}\left\{1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right\}, \tag{14}$$

Количество теплоты ΔQ, сообщенное газу, рассчитывается по формуле

$$\Delta Q = \frac{m}{\mu} C \Delta T \,, \qquad (15)$$

где $\frac{m}{\mu}$-число молей, C – молярная теплоемкость, ΔT – изменение температуры.

Молярная C и удельная c теплоемкости связаны соотношением

$$C=\mu c, \qquad (16)$$

где μ-масса моля.

Для нагревания одной и той же массы газа до одной и той же температуры требуется различное количество тепла в зависимости от того, нагревается газ при постоянном объеме или при постоянном давлении.

Молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме

$$C_V = \frac{i}{2} R \,, \qquad (17)$$

где i – число степеней свободы молекулы газа, R – универсальная газовая постоянная.

Молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении

$$C_p = \frac{i+2}{2} R \,, \qquad (18)$$

или

$$C_p=C_V+R \qquad (19)$$

Соотношение

$$C_p\text{-}C_V=R \qquad (20)$$

Называется формулой Майера.

Для адиабатического процесса ΔQ=0.

Для политропического процесса ΔQ рассчитывается по формуле (15), молярная теплоемкость идеального газа в политропическом процессе рассчитывается по формуле

$$C = R \frac{n-\gamma}{(\gamma-1)(n-1)} \,, \qquad (21)$$

где R – универсальная газовая постоянная,

n – показатель политропы,

γ-коэффициент Пуассона.

При решении задач может быть полезно выражение для показателя политропы

$$n = \frac{C_p - C}{C_V - C} \,, \qquad (2)$$

где C_p и C_V – молярные теплоемкости идеального газа при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно, C – молярная теплоемкость идеального газа при политропическом процессе.

Методические указания

При решении задач удобно пользоваться следующей таблицей, в которую сведены формулы, требующиеся при рассмотрении того или иного процесса.

Таблица.

процесс	**характеристика процесса**	**соотношение между параметрами**	**подведенное тепло** ΔQ	**внутренняя энергия** ΔU	**работа, совершаемая системой** A
изохорический	$V=Const$	$\frac{p}{T}=Const$	$\Delta Q=\frac{m}{\mu}C_V\Delta T$ $C_V=\frac{i}{2}R$	$\Delta U=\Delta Q$	$A=0$
изобарический	$P=Const$	$\frac{V}{T}=Const$	$\Delta Q=\frac{m}{\mu}C_p\Delta T$ $C_p=\frac{i+2}{2}R$	$\Delta U=\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T$ или $\Delta U=\frac{m}{\mu}C_V\Delta T$	$dA=pdV$ $A=p(V_2-V_1)$
изотермический	$T=Const$	$pV=Const$	$\Delta Q=A$	$\Delta U=0$	$A=\frac{m}{\mu}RT\ln\frac{V_2}{V_1}$
адиабатный	$\Delta Q=0$	$pV^{\gamma}=Const$ $TV^{\gamma-1}=Const$ $Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}=Const$ $\gamma=\frac{i+2}{i}$	$\Delta Q=0$	$\lvert\Delta U\rvert=\lvert A\rvert$	$A=\frac{m}{\mu}\frac{RT_1}{\gamma-1}\left\{1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right\}$
политропический	—	$pV^{n}=Const$ $TV^{n-1}=Const$ $Tp^{\frac{1-n}{n}}=Const$	$\Delta Q=\frac{m}{\mu}G\Delta T$ $C=R\frac{n-\gamma}{(\gamma-1)(n-1)}$	$\Delta U=\frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T$	$A=\frac{p_1V_1}{n-1}\left\{1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right\}$

При решении задач следует пользоваться системой единиц измерения *СИ*. Значение универсальной газовой постоянной в *СИ*: $R=8{,}3\cdot10^3\ \frac{Дж}{кмоль\cdot К}$.

Используя это значение *R*, массу *m* надо измерять в *кг*, а μ в $\frac{кг}{кмоль}$. Значение μ берется из таблицы «Периодическая система элементов Д.И. Менделеева», например для двухатомного газа кислорода O_2.

$\mu=32\frac{Дж}{кмоль}$.

В С*И* количество теплоты, энергия и работа измеряются в джоулях (*Дж*). Следует также помнить, что изменение температуры по шкале Кельвина равно изменению температуры по шкале Цельсия, т.е. $\Delta T=\Delta t$.

<u>Примеры решения задач</u>

<u>Задача 1</u>

200 г азота нагревают при постоянном давлении от 20^0C до 100^0C. Какое количество теплоты поглощается при этом? Чему равно изменение внутренней энергии газа? Какую работу производит газ?

<u>Дано:</u>

$m=200г=0,2кг$

$t_1=20^0C$

$t_2=100^0C$

$\mu=28\dfrac{кг}{кмоль}$

$R=8,3\cdot 10^3\dfrac{Дж}{кмоль К}$

$\Delta Q=?\ \Delta U=?\ \Delta A=?$

<u>Решение:</u>

Процесс, идущий при постоянном давлении, - это изобарический процесс. При изобарическом процессе количество теплоты, проведенное к данной массе m азота, вычисляется по формуле $\Delta Q=\dfrac{m}{\mu}C_p\Delta T$.

Массу μ киломоля азота N_2 находим в таблице «Периодическая система элементов Д.И. Менделеева», молярная теплоемкость при постоянном давлении $C_p=\dfrac{i+2}{2}R$, где i- число степеней свободы. Для двухатомного газа азота i=5. Измерение внутренней энергии газа вычисляется по формуле $\Delta U=\dfrac{m}{\mu}\dfrac{i}{2}R\Delta T$, а работу, произведенную газом, можно найти, используя математическую формулировку первого начала термодинамики $\Delta Q=\Delta U+\Delta A$, отсюда $\Delta A=\Delta Q-\Delta U$. Подставим численные значения в выражения для ΔQ, ΔU и ΔA. $\Delta Q=\dfrac{0,2}{28}\cdot\dfrac{7}{2}\cdot 8,3\cdot 10^3\cdot 80\,Дж=1,66\cdot 10^4\,Дж$,

$\Delta U=\dfrac{0,2}{28}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot 8,3\cdot 10^3\cdot 80\,Дж=1,18\cdot 10^4\,Дж$, $\Delta A=(1,66\cdot 10^4-1,18\cdot 10^4)\,Дж=4,8\cdot 10^3\,Дж$

<u>Ответ</u>: $1,66\cdot 10^4\,Дж$, $1,18\cdot 10^4\,Дж$, $4,8\cdot 10^3\,Дж$

<u>Задача 2</u>

Необходимо сжать $1\cdot 10^{-2}\,м^3$ воздуха до объема в $2\cdot 10^{-3}\,м^3$. Как выгоднее его сжимать: адиабатически или изотермически?

<u>Дано:</u>

$V_1=1\cdot 10^{-2}\,м^3$

$V_2=2\cdot 10^{-2}\,м^3$

<u>Решение:</u>

Работа при адиабатном процессе выражается формулой

$\dfrac{A_{ад}}{A_{из}} - ?$	$A_{ад} = \dfrac{m}{\mu}\dfrac{RT_1}{\gamma - 1}\left\{1 - \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right\}$,

где T_1 - температура, при которой начинается сжатие, γ – коэффициент Пуассона, $\gamma = \dfrac{i+2}{i}$. Воздух состоит в основном из азота N_2, его в воздухе немного больше 78%, кислорода O_2, его в воздухе ≈21% и ряда других газов: углекислый газ, аргон, гелий, неон, озон, которые присутствуют в малом количестве. Азот и кислород – двухатомные газы, поэтому можно считать, что для воздуха число степеней свободы i=5. работа при изотермическом сжатии $A_{из} = \dfrac{m}{\mu}RT_1 \ln\dfrac{V_2}{V_1}$. Отношение работ $\dfrac{A_{ад}}{A_{из}} = \dfrac{\frac{m}{\mu}R\,T_1\big/\gamma-1\left\{1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right\}}{\frac{m}{\mu}RT_1\ln\frac{V_2}{V_1}}$,

$\dfrac{A_{ад}}{A_{из}} = \dfrac{1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}}{(\gamma-1)\ln\frac{V_2}{V_1}}$. Подставляя численные данные $\dfrac{A_{ад}}{A_{из}} = \dfrac{1-\left(\frac{10^{-2}}{2\cdot10^{-3}}\right)^{0,4}}{0,4\ln\frac{2\cdot10^{-3}}{10^{-2}}} = 1{,}4$,

получим что $A_{ад}$ больше $A_{из}$ в 1,4 раза. Следовательно, сжимать воздух выгоднее изотермически.

<u>Ответ</u>: изотермически.

<u>Задача 3</u>

Температура некоторой массы m идеального газа с молекулярным весом μ меняется по закону $T=\alpha V^2$. Найти работу, совершенную газом при увеличении объема от V_1 до V_2.

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
m μ V_1 V_2 $T = \alpha V^2$	Подставим $T=\alpha V^2$ в уравнение состояния идеального газа, $pV = \dfrac{m}{\mu}RT$ $pV = \dfrac{m}{\mu}R\alpha V^2$. Отсюда $p = \dfrac{m}{\mu}R\alpha V$, по такому закону меняется давление газа. Это уравнение прямой в координатах p, V, причем тангенс угла наклона прямой $tg\varphi = \dfrac{m}{\mu}R\alpha$.
$A - ?$	

Работа A графически выражается площадью заштрихованной трапеции $V_1 12 V_2 V_1$ (см. рис.6). Далее задачу можно решать двумя способами, которые, естественно, приводят к одному и тому же результату.

<u>1-й способ.</u> Элементарная работа $dA=pdV$. Вся работа

$A=\int dA=\int pdV=\frac{m}{\mu}R\alpha\int\limits_{V_1}^{V_2}VdV=\frac{m}{\mu}R\alpha\frac{V_2^2}{2}\Bigg|_{V_1}^{V_2}=\frac{1}{2}\frac{m}{\mu}R\alpha\left(V_2^2-V_1^2\right)$. Такое же выражение для работы $A=\frac{1}{2}mR\alpha\left(V_2^2-V_1^2\right)$ можно получить другим способом.

<u>2-й способ.</u>

Работа A численно равна площади заштрихованной поверхности, которая складывается из площади заштрихованного прямоугольника $V_1 13 V_2 V_1$ и площади заштрихованного треугольника 123 (см. рис.6).

$$A=p_1(V_2-V_1)+\frac{1}{2}(p_2-p_1)(V_2-V_1)=(V_2-V_1)(p_1+\frac{p_2}{2}-\frac{p_1}{2})=\frac{1}{2}(V_2-V_1)(p_2+p_1)=$$

$$\frac{1}{2}(V_2-V_1)\left(\frac{m}{\mu}R\alpha V_2+\frac{m}{\mu}R\alpha V_1\right)=\frac{1}{2}(V_2-V_1)\frac{m}{\mu}\frac{R}{\alpha}(V_2+V_1)=\frac{1}{2}\frac{m}{\mu}R\alpha(V_2^2-V_1^2)$$

Очевидно, что второй способ является более трудоемким. Отметим, что для осуществления процесса $p=\frac{m}{\mu}R\alpha V$ необходим подвод тепла, так как без подвода тепла при расширении газа давление газа падает (уменьшается).

<u>Ответ</u>: $A=\frac{1}{2}\frac{m}{\mu}R\alpha\left(V_2^2-V_1^2\right)$.

Задача 4

Один киломоль газа, находящийся при температуре $T_1=300K$ охлаждается изохорически, вследствие чего его давление уменьшается в два раза. Затем газ изобарически расширяется так, что в конечном состоянии его температура равна первоначальной. Изобразить процесс на диаграмме p_1V. Вычислить произведенную газом работу A, приращение внутренней энергии газа ΔU, количество поглощенного газом тепла ΔQ.

<u>Дано:</u>

$\frac{m}{\mu}=1кмоль$

$T_1=300K$

$p_2=\frac{p_1}{2}, V=Const$

$T_3=T_1, p=Const$

$R=8{,}3\cdot 10^3\ \frac{Дж}{кмоль\cdot K}$

$\Delta Q=?\ \Delta U=?\ A=?$

<u>Решение:</u>

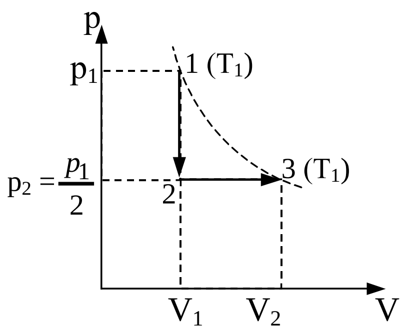

Рис.7

Направление процесса указываем на чертеже стрелкой. Процесс 1→2 изохорический, причем, по условию задачи, $p_2 = \frac{p_1}{2}$. Процесс 2→3 изобарический, точки 1 и 3 лежат на изотерме, согласно условию задачи. Работа A складывается из работ на участках 12 и 23: $A=A_{12}+A_{23}$, но при изохорическом процессе газ не расширяется и работа газа равна нулю, т.е. $A_{12}=0$.

Тогда $A=A_{23}=p_2(V_2-V_1)=p_2V_2-p_2V_1$. Так как точки 1 и 3 лежат на одной изотерме, то согласно закону Бойля - Мариотта $p_1V_1=p_2V_2$ и

$A = p_1V_1 - p_2V_1 = V_1(p_1 - p_2) = V_1(p_1 - \frac{p_1}{2}) = \frac{V_1 p_1}{2}$. V_1p_1 находим из уравнения Менделеева - Клапейрона $p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1, \frac{m}{\mu} = 1$ по условию задачи. Тогда

$A = \frac{RT_1}{2}$.

Изменение внутренней энергии $\Delta U = -\Delta U_{12} + \Delta U_{23}$. На участке 12 давление газа падает, а давление газа прямо пропорционально температуре, поэтому изменение внутренней энергии газа на участке 12 имеет знак «минус». $\Delta U_{12} = -\frac{i}{2}R\Delta T = -\frac{i}{2}R(T_1 - T_2)$. На участке 23

$\Delta U_{23} = -\frac{i}{2}R\Delta T = -\frac{i}{2}R(T_3 - T_2)$, но точки 3 и 1 лежат на одной изотерме,

следовательно, $T_1=T_3$ и $\Delta U_{23} = \frac{i}{2}R(T_1 - T_2)$. Общее изменение внутренней энергии $\Delta U = -\frac{i}{2}R(T_1 - T_2) + \frac{i}{2}R(T_1 - T_2) = 0$. Количество тепла, поглощенного газом, подсчитываем используя первое начало термодинамики.

$\Delta Q = \Delta U + A$. Так как $\Delta U = 0$, то $\Delta Q = A$. Подставив численные значения в формулу для A, получим $A = \frac{8{,}3 \cdot 10^3 \cdot 300}{2} \text{ Дж} \cong 1{,}25 \cdot 10^8 \text{ Дж}$.

Ответ:. $\cong 1{,}25 \cdot 10^8$ *Дж*;0;$\cong 1{,}25 \cdot 10^8$ *Дж*.

Задача 5

Сосуд, содержащий некоторое количество азота при температуре $t_1=15^0$C, движется со скоростью $\upsilon = 100\, м/с$. Чему будет равна температура t_2 газа в сосуде, если он внезапно остановится? Передачей теплоты стенкам можно пренебречь.

Дано:	Решение:
$t_1 = 15^0 C$ $\upsilon = 100\, м/с$ $\mu = 28\, кг/кмоль$ $R = 8{,}3 \cdot 10^3\, Дж/кмоль \cdot К$ $i = 5$ $t_2 - ?$	Значение μ для азота находим в таблице Менделеева. Так как азот N_2 двухатомный газ, то число степеней свободы для молекулы азота i=5. μ и i можно занести в таблицу данных задачи. Газ в сосуде обладает энергией поступательного движения $\frac{m\upsilon^2}{2}$, где m- масса газа. При внезапной остановки сосуда эта энергия

переходит только во внутреннюю энергию газа, т.е. в энергию теплового движения его молекул, поскольку передачей энергии стенкам сосуда можно, по условию задачи, пренебречь.

Найдем происходящее при этом изменение температуры газа. $\frac{m\upsilon^2}{2} = \Delta U$, где ΔU – изменение внутренней энергии данной массы газа.

$\Delta U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T$. Тогда $\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T$ и $\Delta T = \frac{m\upsilon^2}{iR}$. $\Delta T = \Delta t$, а $\Delta t = t_2 - t_1$ или $t_2 = t_1 + \Delta t$. окончательно $t_2 = t_1 + \frac{m\upsilon^2}{iR}$. Подставляя численные данные,

$$t_2 = (15 + \frac{28 \cdot 10^4}{5 \cdot 8{,}3 \cdot 10^3})^0 C = 21{,}73^0 C.$$

Ответ: $21{,}73^0 C$

Задача 6

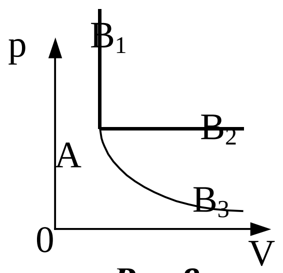

Рис.8

На графике изображены три процесса изменения состояния газа: AB_1, AB_2 и AB_3. При переходе из первого состояния A в одно из последующих (B_1, B_2 или B_3) газ получает некоторое количество теплоты.

Совершает ли газ работу и изменяется ли его внутренняя энергия в каждом из этих процессов? Процесс AB_3 идет при постоянной температуре.

Решение

Рассмотрим процесс AB_1. Это процесс, при котором объем газа остается постоянным, V=$Const$, т.е. изохорический процесс. При изохорическом процессе работа газа против внешних сил равна нулю, так как газ совершает работу только при своем расширении, которого в данном случае нет. Согласно первому началу термодинамики $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$. Так как $\Delta A = 0$, то

$\Delta Q = \Delta U$, т.е. подведенное к газу тепло целиком идет на изменение внутренней энергии газа. Интенсивность теплового движения молекул газа увеличивается, внутренняя энергия газа увеличивается.

Рассмотрим процесс AB_2. это процесс изобарический, т.е. идущий при постоянном давлении $p=Const$.

Записываем первое начало термодинамики $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$. При $p=Const$ газ совершает работу $\Delta A = p\Delta V$, где ΔV - изменение объема газа, но и внутренняя энергия газа тоже увеличивается.

Изменение внутренней энергии газа $\Delta U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T$, где ΔT – изменение температуры газа. Запишем уравнение Менделеева - Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$.

При процессе AB_2 увеличивается объем, а при увеличении объема V увеличивается температура T, следовательно, увеличивается внутренняя энергия газа.

Рассмотрим процесс AB_3. Это изотермический процесс, т.е. процесс, идущий при постоянной температуре, $T=Const$. Запишем первое начало термодинамики $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$. Изменение внутренней энергии газа выражается формулой $\Delta U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T$, $\Delta U=0$, так как при изотермическом процессе равно нулю изменение температуры, $\Delta T=0$. Тогда $\Delta Q=\Delta A$, т.е. все количество теплоты, подведенное к газу, идет на совершение газом работы. Внутренняя энергия газа, выражается формулой $U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R\Delta T$, остается при этом постоянной.

Ответ: Процесс AB_1: нет, увеличивается;

Процесс AB_2: да, увеличивается;

Процесс AB_3: да, остается постоянной.

Задача 7

Молярная теплоемкость идеального газа при некотором процессе изменяется по закону $C = \frac{\alpha}{T}$, где α – постоянная величина.

Найти: а) работу A, совершаемую киломолем газа при его нагревании от температуры T_1 до температуры $T_2=2T_1$; б) уравнение, связывающие параметры p и V при этом процессе. Коэффициент Пуассона для данного газа равен γ.

Дано:	Решение:
$\frac{m}{\mu}=1кмоль$ $C=\frac{\alpha}{T}$ $\alpha=Const$ $T_2=2T_1$	а) запишем первое начало термодинамики в дифференциальной форме $dQ=dU+dA$. dQ - бесконечно малое количество теплоты, подведенное к данной массе газа;
A=?	dU -бесконечно малое изменение

внутренней энергии данной массы газа;
dA - бесконечно малая работа, совершаемая газом при его нагревании.
$dA=dQ-dU, dQ=\frac{m}{\mu}CdT$, где $\frac{m}{\mu}=1кмоль$ по условию задачи, молярная теплоемкость $C=\frac{\alpha}{T}$, dT – бесконечно малое изменение температуры. Для одного кмоля газа $dU=\frac{i}{2}RdT$, где i – число степеней свободы данного идеального газа. Тогда $dA=CdT-\frac{i}{2}RdT=\alpha\frac{dT}{T}-\frac{i}{2}RdT$, R – универсальная газовая постоянная.
Вся работа A, совершаемая газом при его нагревании от температуры T_1 до температуры T_2, выражается формулой
$A=\int dA=\alpha\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T}-\frac{i}{2}R\int_{T_1}^{T_2}dT=\alpha\ln\frac{T_2}{T_1}-\frac{i}{2}R(T_2-T_1)$. Учитывая, что $T_2=2T_1$, получим $A=\alpha\ln 2-\frac{i}{2}RT_1$. Число степеней свободы i в данной задаче не указано, но коэффициент Пуассона γ дан. Коэффициент Пуассона $\gamma=\frac{i+2}{i}$ или $\gamma=1+\frac{2}{i}$, отсюда $\frac{i}{2}=\frac{1}{\gamma-1}$. Тогда работа $A=\alpha\ln 2-\frac{RT_1}{\gamma-1}$.
б) запишем первое начало термодинамики в дифференциальной форме $dQ=dU+dA$. Учитывая, что $\frac{m}{\mu}=1кмоль$ по условию задачи, имеем $dQ=CdT=\frac{\alpha}{T}dT, dU=\frac{i}{2}RdT$. Бесконечно малую работу dA при бесконечно малом изменении объема ΔV газа можно находить по формуле $dA=pdV$, считая, что давлеение газа p не успеет измениться за то бесконечно малое время, в течении которого изменяется объем газа. Теперь, учитывая, что $C=\frac{\alpha}{T}$, первое начало термодинамики можно записать так $\alpha\frac{dT}{T}=\frac{i}{2}RdT+pdV$, но в этом уравнении три переменные величины T, p и V. Пользуясь уравнением Менделеева-Клапейрона для одного киломоля $pV=RT$, выражаем p через переменные T и V: $p=\frac{RT}{V}$. Тогда первое начало термодинамики будет

выглядеть так $\alpha\dfrac{dT}{T}=\dfrac{i}{2}RdT+\dfrac{RT}{V}dV$. Делим на RT все члены уравнения $\dfrac{\alpha}{RT}\dfrac{dT}{T}=\dfrac{i}{2}\dfrac{dT}{T}+\dfrac{dV}{V}$. Берем интеграл от левой и правой частей уравнения $\dfrac{\alpha}{R}\int\limits_{T_1}^{T_2}\dfrac{dT}{T^2}+\dfrac{i}{2}\int\limits_{T_1}^{T_2}\dfrac{dT}{T}+\int\limits_{V_1}^{V_2}\dfrac{dV}{V};-\dfrac{\alpha}{R}\left(\dfrac{1}{T_2}-\dfrac{1}{T_1}\right)=\dfrac{i}{2}\left(\ln T_2-\ln T_1\right)+\ln V_2-\ln V_1$

или $\dfrac{\alpha}{RT_1}+\dfrac{i}{2}\ln T_1+\ln V_1=\dfrac{\alpha}{RT_2}+\dfrac{i}{2}\ln T_2+\ln V_2$. Как видно из вышесказанного $\left(\dfrac{\alpha}{RT_1}+\dfrac{i}{2}\ln T+\ln V\right)$ является постоянной величиной. По условию задачи, требуется найти уравнение, связывающие параметры p и V, поэтому параметр T надо исключить. Из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV=RT$. Находим $T=\dfrac{pV}{R}$. Тогда $\dfrac{\alpha}{pV}+\dfrac{i}{2}\ln\dfrac{pV}{R}+\ln V=C_1$, где C_1 – постоянная величина. Находим число степеней свободы i. Коэффициент Пуассона $\gamma=\dfrac{i+2}{i}$, отсюда $\dfrac{i}{2}=\dfrac{1}{\gamma-1}$.

$\dfrac{\alpha}{pV}+\dfrac{1}{\gamma-1}\ln\dfrac{pV}{R}+\ln V=C_1$. Так как логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей, то $\ln\dfrac{pV}{R}=\ln\dfrac{1}{R}+\ln(pV)$ и $\dfrac{\alpha}{pV}+\dfrac{1}{\gamma-1}\ln\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{\gamma-1}\ln(pV)+\ln V=C_1$. Или $\dfrac{\alpha}{pV}+\dfrac{1}{\gamma-1}\ln(pV)+\ln V=C_1-\dfrac{1}{\gamma-1}\ln\dfrac{1}{R}$.

Выражение $C_1-\dfrac{1}{\gamma-1}\ln\dfrac{1}{R}$ является постоянной величиной. $C_1-\dfrac{1}{\gamma-1}\ln\dfrac{1}{R}=Const$.

Тогда $\dfrac{\alpha}{pV}+\dfrac{1}{\gamma-1}\ln(pV)+\ln V=Const$, или $\dfrac{\alpha(\gamma-1)}{pV}+\ln(pV)+(\gamma-1)\ln V=Const$, или $\dfrac{\alpha(\gamma-1)}{pV}+\ln(pV)+\ln V^{\gamma-1}=Const$, $\dfrac{\alpha(\gamma-1)}{pV}+\ln(pV^{\gamma})=Const$. Потенцируем $pV^{\gamma}e^{\frac{\alpha(\gamma-1)}{pV}}=Const$. Получим уравнение, связывающие параметры p и V *в* данном процессе, e – основание натурального логарифма.

<u>Ответ</u>: $A=\alpha\ln 2-\dfrac{RT_1}{\gamma-1}$, $pV^{\gamma}e^{\frac{\alpha(\gamma-1)}{pV}}=Const$.

<u>Задача 8</u>

Один киломоль идеального одноатомного газа расширяется по политропе с показателем n=1,5, причем его температура уменьшается на один градус. Определить:

а) молярную теплоемкость C газа при этом процессе;

б) количество тепла ΔQ, полученного газом;

в) работу A, совершаемую газом. За счет, каких источников энергии совершается эта работа?

Дано:	Решение:
$\frac{m}{\mu}=1 кмоль$ $n=1{,}5$ $\Delta T=-1K$ $R=8{,}3\cdot 10^3\, Дж/кмоль\cdot K$ $i=3$	а) так как газ одноатомный, то число степеней свободы для i=3, что можно вписать в данные задачи. Молярная теплоемкость C идеального газа в политропическом процессе выражается формулой $C=R\frac{n-\gamma}{(\gamma-1)(n-1)}$,
C= ? A=? ΔQ=?	

где R-универсальная газовая постоянная, n-показатель политропы, γ-коэффициент Пуассона. Так как $\gamma=\frac{i+2}{i}$, то $C=R\frac{n-\frac{i+2}{i}}{(\frac{i+2}{i}-1)(n-1)}$. Подставим i=3. $C=R\frac{1{,}5-\frac{5}{3}}{(\frac{5}{3}-1)(1{,}5-1)}=-0{,}5R, C=-0{,}5R$. Подставляя численное значение универсальной газовой постоянной R, получим

$$C=-0{,}5\cdot 8{,}3\cdot 10^3\frac{Дж}{кмоль\cdot K}=-4{,}15\cdot 10^3\frac{Дж}{кмоль\cdot K};$$

б) количество теплоты Q, полученное одним киломолем идеального газа, подсчитывается по формуле $\Delta Q=C\Delta T$, где C-молярная теплоемкость газа. Так как $C=-0{,}5R$, то $\Delta Q=-0{,}5R\Delta T$. Подставлим численные данные

$$\Delta Q=-0{,}5\cdot 8{,}3\cdot 10^3(-1)\frac{Дж}{кмоль}=4{,}15\cdot 10^3\frac{Дж}{кмоль};$$

в) запишем первое начало термодинамики $\Delta Q=\Delta U+\Delta A$. Отсюда $A=\Delta Q-\Delta U$ Изменение внутренней энергии для одного киломоля газа $\Delta U=\frac{i}{2}R\Delta T$, так как i=3, то $\Delta U=1{,}5R\Delta T$. Подставляя ΔU и ΔQ в формулу для работы, получим $A=-0{,}5R\Delta T-1{,}5R\Delta T=-2{,}0R\Delta T, A=-2{,}0R\Delta T$. Знак «минус» имеет физический смысл. Работа совершается за счет поглощения тепла и за счет уменьшения внутренней энергии газа. Подставим численные значения

$$A=-2{,}0\cdot 8{,}3\cdot 10^3(-1)\frac{Дж}{кмоль}=16{,}6\cdot 10^3\frac{Дж}{кмоль}.$$

Ответ: $-4{,}15\cdot 10^3\frac{Дж}{кмоль\cdot K}$, $4{,}15\cdot 10^3\frac{Дж}{кмоль}$, $16{,}6\cdot 10^3\frac{Дж}{кмоль}$.

Задача 9

Некоторое количество идеального газа расширяется так, что процесс на диаграмме p,V изображается прямой линией, проходящей через начало координат.

Известны: начальный объём газа V_1, начальное давление p_1 и отношение $\gamma = \frac{Cp}{Cv}$. В результате расширения объём газа увеличился в три раза.

Найти: а) показатель политропы n,

б) приращение внутренней энергии ΔU газа,

в) работу A, совершаемую газом,

г) молярную теплоемкость C газа при этом процессе.

<u>Дано:</u>

V_1

p_1

γ

$V_2=3V_1$

---

n=?

ΔU=?

A=?

C=?

<u>Решение:</u>

а) чертим диаграмму p, V.

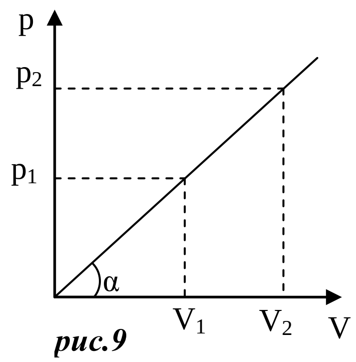

рис.9

Уравнение политропического процесса записывается формулой $pV^n=const$ или $p_1V_1^n= p_2V_2^n$, где n –показатель полиропы. Согласно условию задачи зависимость p от V изображается прямой линей. Уравнение прямой линии $p=\alpha V$, где коэффициент α равнее тангенсу угла наклона прямой к оси V.

$a=tg\alpha$. Соответственно $p_1=aV_1$ и $p_2=aV_2$. Подставив значение p_1 и p_2 в уравнение политропы: $aV_1 \cdot V_1^{\ n} = aV_2V_2^{\ n}$, получаем $V_1^{\ n+1} = V_2^{\ n+1}$.

По условию задачи $V_2 = 3V_1$. Тогда $V_1^{n+1} = (3V_1)^{n+1}$ или $1 = 3^{n+1}$. Приравниваем показатели степеней $0=n+1$. Отсюда показатель политропы $n=-1$. Уравнение рассматриваемого процесса теперь можно записать так: $pV_1 = const$ или $\frac{p}{V} = const$.

б) Приращение внутренней энергии газа

$\Delta U = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} R\Delta T$, где i- число степеней свободы, $\frac{m}{\mu 1}$- число кмолей,

R – универсальная газовая постоянная, рассчитанная на кмоль газа,

ΔT - изменение температуры газа в данном процессе. Величину $\frac{m}{\mu}R\Delta T$ можно найти, записав уравнение Менделеева-Клапейрона для начального и конечного состояния газа, а именно $p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$, $p_2V_2 = \frac{m}{\mu}RT_2$. вычитая одно уравнение из другого ,получим $\frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1) = p_2V_2 - p_1V_1$. Объем $V_2 = 3V_1$ по условию задачи. Находим соотношение между p_1 и p_2.

Для рассматриваемого процесса $\frac{p_1}{V_1}=\frac{p_2}{V_2}$. Отсюда $p_2=\frac{p_1V_2}{V_1}=\frac{p_1 3V_1}{V_1}=3p_1$.

Давление $p_2=3p_1$. Тогда $\frac{m}{\mu}R(T_2-T_1)=3p_1 3V_1-p_1V_1=9p_1V_1-p_1V_1=8p_1V_1$ и $\Delta U=\frac{i}{2}8p_1V_1$. Находим *i*. Коэффициент Пуассона $\gamma=\frac{C_p}{C_V}$ равен отношению теплоемкостей газа (удельных или молярных соответственно) при постоянном давлении и при постоянном объеме. Учитывая, что удельные теплоемкости $c_p=\frac{C_p}{\mu}$ и $c_V=\frac{C_V}{\mu}$, и что молярные теплоемкости $C_p=\frac{i+2}{2}R$ и $C_V=\frac{i}{2}R$, имеем $\gamma=\frac{i+2}{i}$. Отсюда $\frac{i}{2}=\frac{1}{\gamma-1}$ и $\Delta U=\frac{8p_1V_1}{\gamma-1}$.

в) бесконечно малая работа *dA*, совершаемая газом, выражается формулой *dA=pdV*. Вся работа *A* газа равна сумме элементарных работ, т.е. $A=\int dA=\int pdV$. Но под знаком интеграла стоят две переменные величины p и V. Находим зависимость давления p от объема *V*.

Рассматриваемый процесс изображается на диаграмме *p*, *V* прямой линией, т.е. *p=aV*, где *a=tgα* (см. рис.9). Из чертежа видно, что $tg\alpha=\frac{p_1}{V_1}$. Тогда $p=\frac{p_1}{V_1}V$. Теперь $A=\int pdV=\frac{p_1}{V_1}\int_{V_1}^{V_2}VdV=\frac{p_1}{2V_1}(V_2^2-V_1^2)=\frac{p_1}{2V_1}(9V_1^2-V_1^2)=4p_1V_1$.

$A=4p_1V_1$.

г) количество тепла, сообщенного газу, $\Delta Q=\frac{m}{\mu}C\Delta T$. Из этой формулы можно найти молярную теплоемкость *C* газа, но для этого надо знать, чему равны величины ΔQ и $\frac{m}{\mu}\Delta T$. $\frac{m}{\mu}R\Delta T$ было уже найдено в данной задаче в пункте б).

$\frac{m}{\mu}R\Delta T=8p_1V_1$. Отсюда $\frac{m}{\mu}\Delta T=\frac{8p_1V_1}{R}$. Находим ΔQ. Запишем первое начало термодинамики $\Delta Q=\Delta U+\Delta A$. В данной задаче уже было найдено, что $\Delta U=\frac{8p_1V_1}{\gamma-1}$ и $\Delta A=4p_1V_1$. Тогда $\Delta Q=\frac{8p_1V_1}{\gamma-1}+4p_1V_1=4p_1V_1\frac{\gamma+1}{\gamma-1}$. Подставляем найденные значения ΔQ и $\frac{m}{\mu}\Delta T$ в формулу $\Delta Q=\frac{m}{\mu}C\Delta T$, получим $4p_1V_1\frac{\gamma+1}{\gamma-1}=C\frac{8p_1V_1}{R}$. Отсюда $C=\frac{R}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}$.

<u>Ответ:</u> а)n=-1; б) $\Delta U=\frac{8p_1V_1}{\gamma-1}$; в) $A=4p_1V_1$; г) $C=\frac{R}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}$.