ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ. КРАТКАЯ ТЕОРИЯ.

1. Идеальный газ – это газ, для которого выполнены следующие условия:

   1) молекулы газа находятся друг от друга на расстояниях настолько больших, что можно пренебречь линейными размерами молекул по сравнению с этим расстояниями, т.е. можно пренебречь собственными объемами молекул;

   2) между молекулами нет сил взаимодействия. Силы взаимодействия появляются только в момент столкновения, причем столкновение является абсолютно упругим.

Многие газы при обычных условиях близких к идеальному газу. Идеальный газ – это газ, для которого справедливы законы Бойля-Мариотта, Гей-Люссака и Шарля.

2. Закон Бойля-Мариотта выполняется для изотермических процессов. Изотермический (или изотермный) процесс – это процесс, идущий при постоянной температуре. Закон Бойля-Мариотта утверждает, что <u>для данной массы газа при постоянной температуре произведение давления газа на его объем есть величина постоянная.</u> Математически закон Бойля-Мариотта записывается так

$$pV = const \text{ при } T = const. \qquad (1)$$

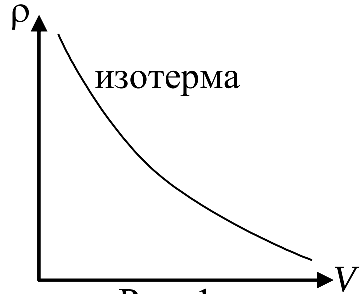

Рис. 1

На графике представлена зависимость давления ρ от объема V, кривая называется изотермой.

Температура T по шкале Кельвина связана с температурой t по шкале Цельсия соотношением

$$T = t + 273. \qquad (2)$$

3. Закон Гей–Люссака выполняется для изобарических (изобарных) процессов.

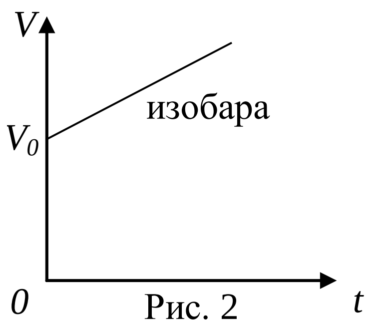

Рис. 2

Изобарический процесс – это процесс, при котором давление газа остается постоянным.

Закон Гей–Люссака утверждает, что <u>объем данной массы газа при постоянном давлении меняется линейно с температурой.</u>

Математическая формулировка этого закона

$$V = V_0(1 + \alpha t) \text{ при } \rho = const, \qquad (3)$$

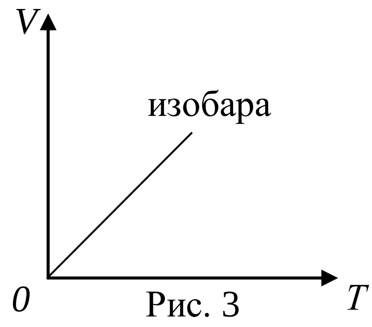

Рис. 3

где V – объем газа при температуре t, взятой по шкале Цельсия, V_0 – объем газа при 0°С, α – коэффициент объемного расширения газа. $\alpha \cong \frac{1}{273} K^{-1}$. На графике (рис. 2) в координатах V, t мы видим прямую, которая называется изобарой. Закон Гей–Люссака может иметь другую математическую формулировку, а именно

$$\frac{V}{T} = const \text{ при } \rho = const, \tag{4}$$

где V – объем газа при температуре T. взятой по шкале Кельвина. На рис. 3 представлена зависимость объема V от температуры T при постоянном давлении ρ.

4. Закон Шарля выполняется при изохорических (изохорных) процессах. Изохорический процесс – это процесс, при котором объем газа остается постоянным. Закон Шарля утверждает, что давление данной массы газа при постоянном объеме меняется линейно с температурой. Математическая формулировка этого закона

$$\rho = \rho_0(1 + \beta t) \text{ при } V = const \tag{5}$$

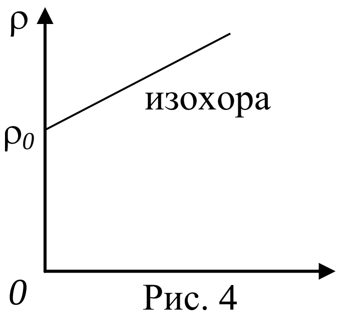

Рис. 4

где ρ – давление газа при температуре t_1, взятой по шкале Цельсия, ρ_0 – давление газа при 0°С, β – термический коэффициент, $\beta \cong \frac{1}{273} K^{-1}$. Зависимость давления ρ от температуры (рис.4) при постоянном объеме выражается прямой линей, которая называется изохорой.

Закон Шарля может иметь другую математическую формулировку, а именно

$$\frac{\rho}{T} = const \text{ при } V = const \tag{6}$$

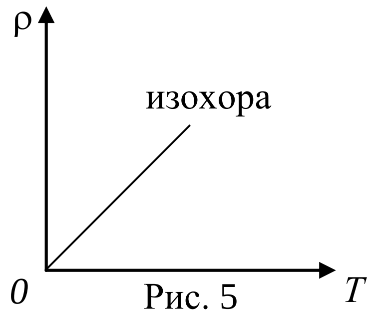

Рис. 5

где ρ – давление газа при температуре T, взятой по шкале Кельвина. Зависимость давления ρ от температуры T при постоянном объеме газа представлены на рис.5.

5. К идеальному газу можно применить также объединенный закон газового состояния, который утверждает, что для данной массы газа произведение давления газа на его объем, деленное на абсолютную температуру газа, есть величина постоянная. Математическая запись закона $\frac{\rho V}{T} = const$ (7)

6. Состояние газа можно характеризовать следующими величинами, называемыми параметрами состояния: m – масса газа, ρ – давление газа, V – объем газа, T – температура газа. Уравнение связывающие параметры m_1, ρ_1, V и T_1 называется уравнение состояния. Уравнение состояния идеального газа является уравнение Менделеева–Клапейрона

$$\rho V = \frac{m}{\mu} RT \tag{8}$$

m – масса газа, μ – масса одного моля газа, тогда $\frac{m}{\mu}$ – число молей газа. Для одного моля газа $\frac{m}{\mu} = 1$ и уравнение Менделеева–Клапейрона для одного моля газа записывается в виде $\rho V = RT$.

7. Величина R_1 входящая в уравнение Менделеева–Клапейрона, называется универсальной газовой постоянной. При рении задач в системе единиц измерения следует брать следующие численные значения универсальной газовой постоянной $R \cong 8{,}3 \cdot 10^3 \frac{Дж}{кмоль \cdot К}$, тогда μ должно измеряться в $\frac{кг}{кмоль}$ или $R \cong 8{,}3 \frac{Дж}{моль \cdot К}$, тогда μ должно измеряться в $\frac{кг}{моль}$.

8. При решении задач в СИ надо знать, что

$$1\,мм.рт.ст. \cong 133 Па \text{ и } 1\,атм \cong 1{,}01 \cdot 10^5 \text{ Па} \qquad (9)$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Задача №1.

Объем пузырька воздуха по мере его всплытия со дна моря на поверхность увеличивается в три раза. Какова глубина моря в данном месте? Температуру воды на любой глубине считать постоянной. Плотность воды равна 1000 кг/м^3. атмосферное давление принять равным $1{,}01 \cdot 10^5$ Па, ускорение силы тяжести - 9,8м/с^2.

Дано: СИ

ρ=1000 кг/м^3

$p_0=1{,}01 \cdot 10^5$ Па

g=9,8м/с^2

h-?

Решение.

Так как температура воды на любой глубине постоянная, то процесс всплывания пузырька является изотермическим.

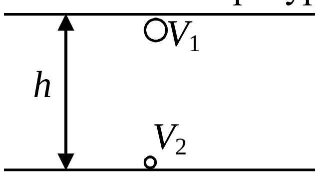

Рис. 6

Обозначим V_1 – объем пузырька на дне моря, V_2 – объем пузырька около поверхности моря.

По условию задачи $V_2=3V_1$. На дне моря пузырек находится под давлением столба воды высотой h (см. рис. 6) и атмосферное давление p_0, т.е на дне моря пузырек воздуха испытывает давление $p_1=p_0+\rho gh$, где ρgh – давление, оказываемое столбом жидкости, находящейся над пузырьком. ρ – плотность воды, g – ускорение силы тяжести, h – высота столба жидкости. На поверхности моря пузырек испытывает только атмосферное давление, т.е. $p_2=p_0$. По закону Бойля–Мариотта $p_1V_1=p_2V_2$ или $(p_0+\rho gh)V_1=p_0 3V_1$. Сократив на V_1, получим $p_0+\rho gh=3p_0$ или $2p=\rho gh$.

Отсюда $h = \frac{2p_0}{\rho g}$. Делаем проверку размерностей в СИ, $[h] = \frac{[p_0]}{[\rho][g]}$.

В СИ размерность давления $\left[p_0\right]=\text{Па}=\frac{Н}{м^2}=\frac{кг\cdot м}{с^2\cdot м^2}=\frac{кг}{с^2\cdot м}$. Размерность плотности $[\rho]=$кг/м^3, а размерность $[g]=$м/с^2.

Тогда размерность $[h]=\frac{кг\cdot м^3\cdot с^2}{с^2\cdot м\cdot кг\cdot м}=м$.

Подставим численное значение $h=\frac{2\cdot 1{,}01\cdot 10^5}{10^3\cdot 9{,}8}м=20{,}4м$.

Ответ: 20,4 м.

Задача №2.

Колба емкостью 200 см^3 нагревается от 15°C до 51°C. Какой объем воздуха в см^3 выйдет из нее при этом?

Дано: СИ	Решение.
V_1=200 см^3 t_1=15°C t_2=51°C ν=?	Так как колба открыта, то при нагревании воздух выходит из нее свободно и давление воздуха в колбе остается постоянным, ρ=const, процесс изобарический. Объем воздуха, вышедшего из колбы,$\Delta V=V_2-V_1$, где V_1 – объем

воздуха при температуре t_1, а V_2 – объем воздуха при температуре t_2. По закону Гей–Люссака $V_1=V_0(1+\alpha t_1)$, (10)

где V_0 – объем воздуха при температуре 0°С, α – коэффициент объемного расширения, $\alpha=\frac{1}{273}$ К$^{-1}$.

Соответственно $$V_2=V_0\left(1+\alpha t_2\right) \qquad (11)$$

Из формул (10) и (11) находим, исключая V_0,

что $V_2=V_1\frac{1+\alpha t_2}{1+\alpha t_1}$ и $\Delta V=V_2-V_1=V_1\frac{1+\alpha t_2}{1+\alpha t_1}-V_1=V_1\frac{\alpha\left(t_2-t_1\right)}{1+\alpha t_1}$.

Итак, $\Delta V=V_1\frac{\alpha\left(t_2-t_1\right)}{1+\alpha t_1}$. Проверим размерности $[\Delta V]=\text{см}^3\frac{\frac{1}{K}\cdot K}{\frac{1}{K}K}=\text{см}^3$.

Подставим численные значения $\Delta V=200\frac{51-15}{273\left(1+\frac{15}{273}\right)}$ см^3=25 см^3.

Ответ: 25 см^3.

Задача №3.

Газ находится в вертикальном цилиндре под поршнем массой 5 кг. Абсолютную температуру газа требуется увеличить вдвое. Какой массы груз надо положить на поршень, чтобы он остался в прежнем положении? Атмосферное давление принять равным 100 кПа, площадь поршня 10 см^2, g=10м/с^2.

Дано: СИ	Решение.
m_0=5кг, ρ_0=100 кПа=10^5Па S=10 см^2=10^{-3}м^2 g=10 м/с^2 m=?	Так как поршень должен остаться в прежнем положении, то объем газа под поршнем остается постоянным, V=const, т.е. процесс нагревания газа будет изохорическим процессом.

Согласно закону Шарля $\frac{\rho_1}{T_1}=\frac{\rho_2}{T_2}$, где ρ_1, T_1 и ρ_2, T_2 – соответственно давление и температура начального и конечного состояний газа.

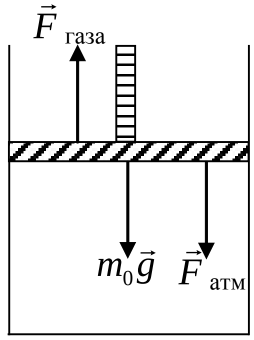

Рис. 7

По условию задачи T_2=2T_1, следовательно $\frac{\rho_1}{T_1}=\frac{\rho_2}{2T_1}$ и $\rho_2=2\rho_1$.

Запишем условия равновесия поршня в начальном состоянии. На поршень действует (см. рис. 7) сила тяжести m_0g поршня, сила атмосферного давления $F_{атм}=\rho_0 S$, где S – площадь поршня. Обе эти силы направлены вниз.

Кроме того, со стороны газа на поршень действует сила $F_{газа}=\rho_1 S$, где ρ_1 – давление газа на поршень, эта сила направлена вверх.

Условие равновесия поршня $\rho_1 S = m_0 g + \rho_0 S$. (12)

После нагревания поршня условие равновесия запишется так

$$\rho_2 S = m_0 g + mg + \rho_0 S \qquad (13)$$

Появляющаяся дополнительная внешняя сила mg, где m – масса груза, положенного на поршень, компенсируется увеличением силы давления со стороны газа, температура которого увеличилась.

Из уравнения (12) и (13) находим $\rho_2 S - \rho_1 S = mg$.

Учитывая, что $\rho_2 = 2\rho_1$, имеем $(2\rho_1-\rho_1)S = mg$, отсюда $m=\frac{\rho_1 S}{g}$. Используя уравнение (13), получим $m=\frac{m_0 g+\rho_0 S}{g}$ или $m=m_0+\frac{\rho_0 S}{g}$.

Проверим размерность $[m]=кг+\frac{Нм^2с^2}{м^2м}=кг+\frac{кгмс^2}{с^2м}=кг$.

Подставим численные значения $m=\left(5+\frac{10^5\cdot 10^{-3}}{10}\right)кг=15кг$.

Ответ: 15 кг

Задача №4.

В закрытом сосуде вместимостью 1 л содержится 12 кг кислорода. Плотность кислорода равна 1,43кг/м^3. Найти давление кислорода при температуре 15°С.

Дано: СИ

V=1 л=10^{-3}м^3

m=12кг

ρ=1,43кг/м^3

t=15°С (Т=228 К)

p=?

Решение.

Для решения задачи воспользуемся объединенным законом газового состояния $\frac{pV}{T} = const$.

Так как закон справедлив для любых двух состояний газа, то можно записать $\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$. (14)

p_0, V_0, T_0 – давление, объем и температура газа при нормальных условиях, т.е. при t_0=0°С и p_0=760 мм.рт.ст. Температура t_0=0°С соответствует, согласно формуле (2) абсолютной температурой T_0=273 К. давление p_0=760 мм.рт.ст. соответствует 1 атм, а 1 атм ≅1,01·10^5 Па. Объем газа V_0 при нормальных условиях можно найти из формулы

$$\rho = \frac{m}{V_0}, \quad \text{отсюда} \quad V_0 = \frac{m}{g}.$$

Подставив V_0 в (14), получим $\frac{pV}{T} = \frac{\rho_0 m}{\rho T_0}$

или, окончательно, $p = \frac{p_0 m T}{\rho T_0 V}$. Проверим размерности $[p] = \frac{Па \cdot кг \cdot k \cdot м^3}{кг \cdot k \cdot м^3} = Па$.

Подставим численные значения

$$p = \frac{1{,}01 \cdot 10^5 \cdot 12 \cdot 288}{1{,}43 \cdot 273 \cdot 10^{-3}} Па = 8{,}95 \cdot 10^8 Па$$

Ответ: 8,95·10^8 Па

Задача №5

Определить плотность водорода при температуре 15°С и давление 730 мм.рт.ст.

Дано: СИ

t=15°С (T=288 К)

p=730 мм.рт.ст.≅730·133 Па

R≅8,3·10^3 Дж/К моль·К

μ=2 кг/К моль

ρ=?

Решение.

Записываем уравнение Менделеева–Клапейрона, которое является уравнением состоянием идеального газа

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \tag{15}$$

Плотность вещества определяется по формуле $\rho = \frac{m}{V}$ (16)

Из формулы (15) и (16) находим, что плотность водорода можно определить по формуле $\rho = \frac{p\mu}{RT}$.

Все физические величины в этой формуле должны быть выражены в СИ. Если взять значение универсальной газовой постоянной $R \cong 8{,}3 \cdot 10^3$ Дж/Кмоль·К, то молярная масса для водорода H_2, которая должна быть найдена из таблицы «Периодическая система химических элементов» Д.И. Менделеева, будет равной $\mu = 2$ кг/К моль. Проверим размерности в формуле (17), учитывая что размерность давления [р]=Па=Н/м^2, а 1 Дж=1Н·м. Тогда

$$[\rho] = \frac{H \cdot кг \cdot кмоль \cdot k}{м^2 \cdot к\,моль \cdot н \cdot м \cdot k} = \frac{кг}{м^3}.$$

Подставляем численные значения

$$\rho = \frac{730 \cdot 133 \cdot 2}{8{,}3 \cdot 103 \cdot 288}\,\frac{кг}{м^3} = 0{,}081\frac{кг}{м^3}$$

<u>Ответ:</u> 0,081 кг/м^3

<u>Задача №6</u>

6 г углекислого газа CO_2 и 5 г. закиси азота N_2O заполняют сосуд объемом в $2 \cdot 10^{-3}$ м^3. определить общее давление в сосуде при температуре 127°С.

<u>Дано:</u> <u>СИ</u>

m_1=6г.=$6 \cdot 10^{-3}$ кг

m_2=5г.=$5 \cdot 10^{-3}$ кг

V=$2 \cdot 10^{-3}$ кг

t=127°С (T=400 К)

$R \cong 8{,}3 \cdot 10^3$ Дж/кмоль·к

ρ=?

<u>Решение</u>.

Согласно закону Дальтона давление смеси газов, химически не взаимодействующих друг с другом, равно сумме их парциальных давлений. Закон Дальтона справедлив для идеальных газов. Парциальное давление – это давление, которое оказывал бы каждый отдельный газ смеси в отсутствие остальных газов, составляющих данную газовую смесь.

Если бы в сосуде находился только один углекислый газ CO_2, то давление p_1 которое он бы производил, можно было бы найти из уравнения Менделеева–Клапейрона

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} Rt, \text{ отсюда } P_1 = \frac{m_1 RT}{\mu_1 V}$$

Аналогично, если бы в сосуде находились только закись азота N_2O, то ее давление $P_2 = \frac{m_2 RT}{\mu_2 V}$.

Так как в сосуде находятся оба газа, то согласно закону Дальтона общее конечное давление $p = p_1 + p_2 = \frac{m_1 RT}{\mu_1 V} + \frac{m_2 RT}{\mu_2 V} = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{V}$.

Итак, $p == \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{V}$.

Молярные массы μ_1 и μ_2 для CO_2 и N_2O находим из таблицы «Периодическая система химических элементов» Д.И. Менделеева. Для газа CO_2 μ_1 равно массе атомного веса углерода *C* и атомных весов двух атомов кислорода O, т.е. кг/моль=44 кг/моль. Аналогично подсчитываем μ_2 для закиси азотаN_2O, $\mu_2 = (2 \cdot 14 + 16)$ кг/моль=44 кг/моль.

Делаем проверку размерностей в СИ.

$$[p] = \frac{кг \cdot к \cdot моль \cdot Дж \cdot К}{кг \cdot кмоль \cdot К \cdot м^3} = \frac{Дж}{м^3} = \frac{Н \cdot м}{м^3} = \frac{Н}{м^2} = Па\,.$$

Подставим численные значения

$$p = \left(\frac{6 \cdot 10^{-3}}{44} + \frac{5 \cdot 10^{-3}}{44} \right) \frac{8{,}3 \cdot 10^3 \cdot 400}{2 \cdot 10^{-3}} Па = 4{,}15 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

Ответ: $4{,}15 \cdot 10^5$ Па

Задача №7

Баллон содержит газ при 27° Си давлении 200 кПа. Каково будет давление газа, если из баллона выпустить 80% газа, после чего баллон с газом охлаждается до 12° С.

Дано: СИ	Решение.
t_1=27° С (T_1=300 К) p_1=200 кПа t_2=12° С (T_2=285 К)	В данной задаче объем *V* газа в начальном и конечном состоянии один и тот же и равен объему баллона. Но, несмотря на то, что *V*=const, данную задачу нельзя решать
p_2=?	по закону Шарля $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$, потому что закон Шарля, также

И закон Бойля–Мариотта и закон Гей–Люссака, справедлив только для постоянной, не изменяющейся в данном процессе, массы газа (*m*=const).

В данной задаче масса газа изменилась. Начальная масса m_1, в конечном состоянии в баллоне остается только 20% газа, 80% газа было выпущено, т.е. в конечном состоянии масса газа m_2=0,2m_1.

Учитывая, что масса газа в баллоне изменяется, надо для начального и конечного состояния записать уравнение Менделеева–Клапейрона

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu} RT \qquad (17)$$

и $$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} RT \qquad (18)$$

разделив уравнение (18) на (17), получим $\frac{p_2}{p_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{T_2}{T_1}$. Учитывая что m_2=0,2m_1, получим $p_2 = 0{,}2 p_1 \frac{T_2}{T_1}$. Проверяем размерности в СИ $[p_2] = Па \frac{к}{к} = Па$.

Подставим численные значения

$$p_2 = 0{,}2 \cdot 2 \cdot 10^5 \frac{285}{300} Па = 380 \cdot 10^3 Па.$$

<u>Ответ:</u>$38 \cdot 10^3$ Па

<u>Задача №8</u>

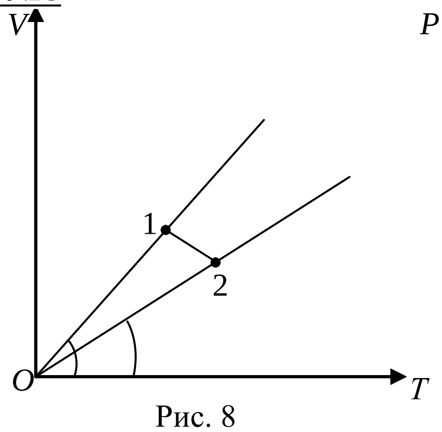

Рис. 8

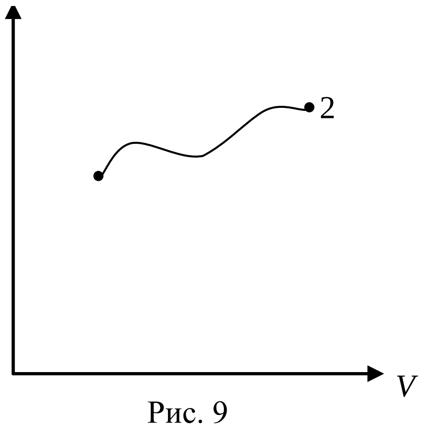

Рис. 9

На рис. 1 и 2 изображены диаграммы процессов, протекающих с газом. Определить по этим диаграммам:

1) Как изменилась масса газа при переходе из состояния 1 в состояние 2?(рис.8)

2) Как изменилась температура газа при переходе из состояния 1 в состояние 2? (рис. 9)

<u>Решение</u>.

1) На рисунке 8 изображены две изобары, образующие углы α_1 и α_2 соответственно с горизонтальной осью. Находим массу газа из уравнение Менделеева–Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$.

Отсюда $m = \frac{pV\mu}{RT}$, согласно условию задачи p и μ являются константами, универсальная газовая постоянная R тоже константа. Следовательно, величина $\frac{p\mu}{R}$ является постоянной величиной в данной задаче, обозначим ее буквой C $\frac{p\mu}{R} = C$. Итак, $m = C\frac{V}{T}$, но $\frac{V}{T} = tg\alpha$ (см. рис.8). Тогда масса газа в состоянии 1 (рис. 8) равна $m_1 = C \cdot tg\alpha_1$, а масса газа в состоянии 2 $m_2 = C \cdot tg\alpha_2$. Но $\alpha_2 < \alpha_1$ и $tg\alpha_2 < tg\alpha_1$. Следовательно, при переходе из состояния 1 в состояние 2 масса газа уменьшилась.

2) Находим температуру газа из уравнения Менделеева–Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$ и $T = \frac{pV}{\frac{m}{\mu} R}$. Так как по условию задачи $\frac{m}{\mu} = const$ и R тоже постоянная величина, то $\frac{m}{\mu} R = C$ и температура T зависит только от давления ρгаза и от

объема V газа. В состоянии 2 (рис.9) давление и объем газа больше, чем в состоянии 1. следовательно, при переходе газа из состояния 1 в состояние 2 газ нагревается, т.е. его температура увеличивается.

Ответ: 1) уменьшается;
2) увеличивается.