

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

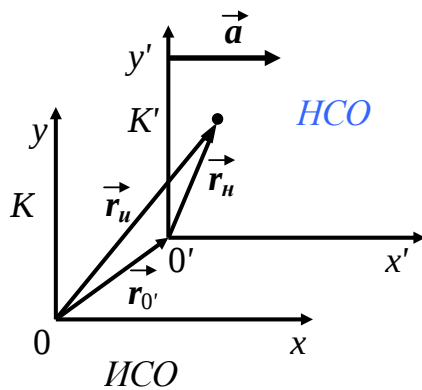
КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

1. Системы отсчета, которые движутся относительно инерциальных систем с ускорением, называются неинерциальными.

Примером неинерциальной системы отсчета является геоцентрическая система отсчета (жёстко связанная с Землёй) вследствие суточного вращения Земли. Однако максимальное ускорение точек поверхности Земли не превышает $0,5 \%g$, поэтому в большинстве практических задач геоцентрическую систему отсчета считают инерциальной.

В неинерциальных системах отсчета законы Ньютона не выполняются.

Принцип Даламбера



Имеем две системы отсчета: инерциальную – систему K и неинерциальную – систему K' .

В момент $t = 0$ начала координат систем K и K' совпадают.

Система K' начинает двигаться относительно K с ускорением $\vec{a}$.

В момент t скорость движения системы K' относительно системы K : $\vec{v}_{0'} = \vec{a}t$.

Если $\vec{r}_u$ – радиус-вектор материальной точки в системе K ,

$\vec{r}_n$ – радиус-вектор материальной точки в системе K' ,

$\vec{r}_{0'}$ – радиус-вектор начала координат системы K' в системе K ,

то $\vec{r}_u = \vec{r}_{0'} + \vec{r}_n$.

Продифференцируем это уравнение по времени:

$$\frac{d\vec{r}_u}{dt} = \frac{d\vec{r}_{0'}}{dt} + \frac{d\vec{r}_n}{dt}, \quad \text{или} \quad \vec{v}_u = \vec{v}_{0'} + \vec{v}_n.$$

Продифференцируем ещё раз по времени:

$$\frac{d\vec{v}_u}{dt} = \frac{d\vec{v}_{0'}}{dt} + \frac{d\vec{v}_n}{dt}, \quad \text{так как } \vec{v}_{0'} = \vec{a}t, \quad \text{то}$$
$$\vec{a}_u = \vec{a} + \vec{a}_n, \quad \Rightarrow \vec{a}_n = \vec{a}_u - \vec{a},$$

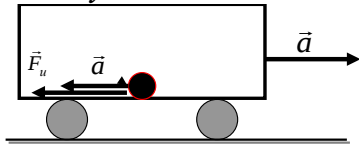
где $\vec{a}_n$ – ускорение материальной точки относительно неинерциальной системы отсчета, $\vec{a}_u$ – ускорение материальной точки относительно

инерциальной системы отсчета, $\vec{a}$ – ускорение неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной системы отсчета.

Умножим полученное выражение $\vec{a}_n = \vec{a}_u - \vec{a}$ на массу материальной точки: $m\vec{a}_n = m\vec{a}_u - m\vec{a}$. Так как относительно инерциальной системы отсчета законы Ньютона выполняются, то $m\vec{a}_u = \vec{F}$ – векторная сумма сил взаимодействия материальной точки с другими телами (реальные силы), величина $(-m\vec{a})$ имеет размерность силы, поэтому эта величина носит название **сила инерции**. Таким образом $\vec{F}_u = -m\vec{a}$, отсюда $m\vec{a}_n = \vec{F} + \vec{F}_u$ – это уравнение движения (второй закон Ньютона) относительно неинерциальной системы отсчета. Таким образом, **произведение массы тела на его ускорение относительно неинерциальной системы отсчета равно векторной сумме сил взаимодействия сложенной с силой инерции**. Данное определение называется **принцип Даламбера (д'Аламбера)**.

Сила инерции – фиктивная сила в том смысле, что она не обусловлена взаимодействием с другими телами, а вызвана ускоренным движением неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной системы отсчета, однако ей приписываются свойства сил сообщать ускорение.

Так как сила инерции обусловлена ускоренным движением системы отсчёта относительно другой системы отсчета, то она не подчиняется *третьему закону Ньютона*.



Если вагон начинает двигаться с ускорением $\vec{a}$, то шарик начнет двигаться с ускорением $\vec{a}$ относительно вагона. Если не учитывать силы трения, то уравнение движения шарика можно записать: $m\vec{a}_u = m\vec{a}_n + m\vec{a} \Rightarrow m\vec{a}_n = \vec{F} + \vec{F}_u$, так как $\vec{F} = 0$, то $m\vec{a}_n = \vec{F}_u$ или $\vec{a}_n = \frac{\vec{F}_u}{m}$, так как $\vec{F}_u = -m\vec{a}$, то $\vec{a}_n = -\vec{a}$.

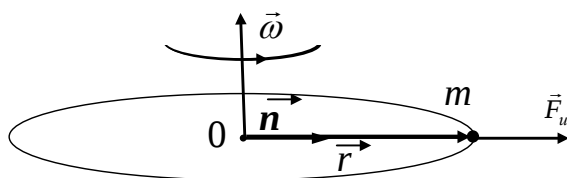
Итак: в неинерциальных системах отсчета законы Ньютона не выполняются. Однако если уравнения движения записать в виде:

$$m\vec{a}_H = \vec{F} + \vec{F}_{ин},$$

где $\vec{a}_H$ – ускорение тела в неинерциальной системе отсчета, $\vec{F}$ – равнодействующая сил, обусловленных воздействием тел друг на друга, $\vec{F}_{ин}$ – сила инерции, то законы Ньютона будут формально выполняться. При этом в уравнение движения кроме реальных сил взаимодействия входят фиктивные силы, которые называются силами инерции. Силы инерции – это силы, действующие в неинерциальной системе отсчета и обусловленные ускоренным движением этой системы.

2. Система отсчета, вращающаяся относительно инерциальной системы отсчета с угловой скоростью $\vec{\omega}$ является неинерциальной системой отсчета.

Рассмотрим пример такой неинерциальной системы отсчета. На рисунке изображен вращающийся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ диск, на котором находится тело массой m . Тело относительно диска покоится.



Относительно инерциальной системы отсчета (относительно точки O , относительно Земли) тело движется по окружности и его ускорение равно $\vec{a}_n = \vec{a}_u$, которое направлено к центру окружности.
 $\vec{n}$ – единичный орт.

Уравнение движения тела можно записать в виде: $m\vec{a}_u = m\vec{a}_n + m\vec{a}$ или $m\vec{a}_n = m\vec{a}_u + \vec{F}_u$. Тогда $\vec{F}_u = -m(\vec{a}_u - \vec{a}_n)$.

Так как тело m покоится относительно диска (неинерциальной системы отсчета), оно вращается вместе с диском, то

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a}_n = 0 \\ \vec{a}_u = -\omega^2 \vec{r} \cdot \vec{n} \end{array} \right\} \text{ тогда } \vec{F}_u = m\omega^2 \vec{r} \cdot \vec{n}, \quad \vec{r} = r \cdot \vec{n} \Rightarrow \vec{F}_u = m\omega^2 \vec{r}.$$

$\vec{F}_u = m\omega^2 \vec{r}$ – сила инерции, действующая на неподвижное относительно вращающейся системы отсчета тело, называется *центробежной силой инерции*. Центробежная сила инерции сообщает телу центробежное ускорение $\vec{a}_{ц.б} = \frac{\vec{F}_u}{m} = \omega^2 \vec{r}$.

3. Центробежная сила инерции может совершать работу по перемещению тела. Найдем работу центробежной силы при изменении положения тела относительно точки O от r_1 до r_2 :

$$dA = (\vec{F}_u d\vec{r}) \text{ или } dA = (m\omega^2 \vec{r} \cdot d\vec{r}). \quad \text{Так как } (\vec{r} \cdot d\vec{r}) = r \cdot dr, \text{ то}$$

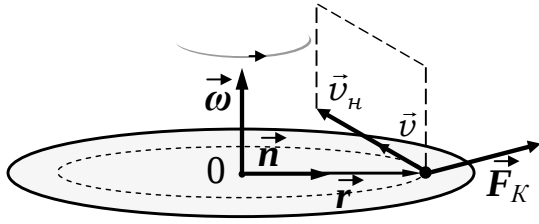
$$dA = m\omega^2 r \cdot dr, \text{ а при изменении положения от } r_1 \text{ до } r_2$$

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} m\omega^2 r \cdot dr = \frac{m\omega^2 r^2}{2} \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{m\omega^2 (r_2^2 - r_1^2)}{2}.$$

Обратите внимание на то, что работа силы инерции не зависит от формы траектории движения тела относительно неинерциальной системы отсчета.

4. Если тело движется в неинерциальной системе отсчета, то кроме центробежной силы инерции действует еще одна сила инерции – сила Кориолиса $\vec{F}_k$. Рассмотрим пример. На рисунке изображен вращающийся с

угловой скоростью $\vec{\omega}$ диск, по которому движется тело массой m со скоростью $\vec{v}_n$ относительно диска.



$\vec{v}_n$ – скорость движения материальной точки относительно вращающейся (неинерциальной) системы отсчета. Направление $\vec{v}_n$ произвольное.

Рассмотрим движение точки относительно инерциальной системы отсчета.

Скорость тела относительно инерциальной системы отсчета: $\vec{v}_u = \vec{v}_n + \vec{v} = \vec{v}_n + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$, так как $\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$ – это скорость, которую имеет тело, так как оно находится на расстоянии r от оси вращающегося с угловой скоростью ω диска. Тело при движении описывает окружность, поэтому согласно второму закону Ньютона можно записать:

$$-\frac{mv_u^2}{r} \vec{n} = -\frac{m(\vec{v}_n + [\vec{\omega} \cdot \vec{r}])^2}{r} \vec{n} = -\frac{mv_n^2}{r} \vec{n} - \frac{2m(\vec{v}_n \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}])}{r} \vec{n} - \frac{m[\vec{\omega} \cdot \vec{r}]^2}{r} \vec{n}.$$

Учтем, что $\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$, тогда

$$\frac{m[\vec{\omega} \cdot \vec{r}]^2}{r} = \frac{mv^2}{r} = \frac{m\omega^2 r^2}{r} = m\omega^2 r;$$

$\frac{2m(\vec{v}_n \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}])}{r} = \frac{2m([\vec{v}_n \cdot \vec{\omega}] \cdot \vec{r})}{r} = 2m([\vec{v}_n \cdot \vec{\omega}] \cdot \vec{n})$, так как $\frac{\vec{r}}{r} = \vec{n}$ – единичный вектор (орт) радиус-вектора.

Тогда движение тела относительно инерциальной системы отсчета можно

записать: $-\frac{mv_u^2}{r} \cdot \vec{n} = -\frac{mv_n^2}{r} \cdot \vec{n} - 2m([\vec{v}_n \cdot \vec{\omega}] \cdot \vec{n} \cdot \vec{n}) - m\omega^2 r \cdot \vec{n}.$

А уравнение движения тела относительно неинерциальной системы отсчета:

$$-\frac{mv_n^2}{r} \cdot \vec{n} = -\frac{mv_u^2}{r} \cdot \vec{n} + 2m[\vec{v}_n \cdot \vec{\omega}] + m\omega^2 r \cdot \vec{n}.$$

Так как относительно инерциальной системы отсчета можно записать второй закон Ньютона в виде: $\vec{F} = m\vec{a}_u = -\frac{mv_u^2}{r} \cdot \vec{n}$, где $\vec{F}$ – реальные силы, действующие на тело относительно инерциальной системы отсчета. В неинерциальной вращающейся системе отсчета на тело действует центробежная сила инерции $\vec{F}_u = m\omega^2 r \cdot \vec{n}$, $\vec{r} = r \cdot \vec{n} \Rightarrow \vec{F}_u = m\omega^2 \vec{r}$, которая обусловлена вращением неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной. Тогда $2m[\vec{v}_n \cdot \vec{\omega}] = \vec{F}_K$ – сила инерции (сила Кориолиса), обусловленная скоростью движения тела относительно неинерциальной вращающейся системы отсчета.

Уравнение движения тогда можно записать: $m\vec{a}_n = m\vec{a}_u + \vec{F}_K + \vec{F}_u.$

Таким образом, если тело (материальная точка) движется относительно вращающейся (неинерциальной) системы отсчета со скоростью $\vec{v}_n$, тело кроме центробежной силы инерции действует ещё сила Кориолиса, равная $\vec{F}_k = 2m[\vec{v}_n \cdot \vec{\omega}]$.

Решение задач

Задача №1. По клину с углом наклона $\alpha = 30^\circ$ и массой $M = 10$ кг, движущемуся по горизонтальной поверхности без трения, скользит вниз брусок массой $m = 1$ кг. Считая, что трение между бруском и клином отсутствует, найдите ускорение бруска относительно клина. Движение бруска рассмотреть в системе отсчета, связанной с клином.

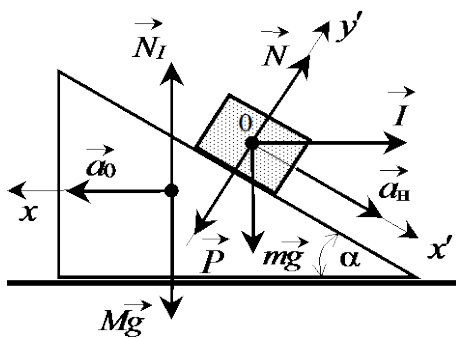


Рис. 2.2

Решение. Будем рассматривать Землю как инерциальную систему отсчета. В этой системе отсчета на клин действуют сила тяжести $M\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}_1$ и сила нормального давления со стороны бруска $\vec{P}$ (рис. 2.2).

Второй закон Ньютона для клина в системе отсчета, связанной с Землей, имеет вид

$$\vec{P} + M\vec{g} + \vec{N}_1 = M\vec{a}_0, \quad (1)$$

где $\vec{a}_0$ – ускорение клина относительно Земли.

Таким образом, под действием силы нормального давления $\vec{P}$ бруска на клин (сила тяжести $M\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}_1$ взаимно скомпенсированы) он получает ускорение $\vec{a}_0$, направленное вдоль оси x , как показано на рис. 2.2, то есть клин можно рассматривать как неинерциальную систему отсчета, движущуюся относительно Земли с ускорением $\vec{a}_0$ вдоль оси x . Запишем в системе отсчета, связанной с Землей, уравнение (1) в проекциях на ось x

$$Ma_0 = P \sin \alpha. \quad (2)$$

В системе отсчета, связанной с клином, на брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ модуль которой по третьему закону Ньютона равен $|\vec{P}|$ и сила инерции $\vec{I} = -m\vec{a}_0$.

Запишем уравнение движения бруска в системе отсчета, связанной с клином:

$$m\vec{g} + \vec{I} + \vec{N} = m\vec{a}_n, \quad (3)$$

где $\vec{a}_n$ – ускорение бруска относительно клина.

Спроектируем уравнение (3) на оси координат x' и y' :

$$mg \sin \alpha + ma_0 \cos \alpha = ma_n, \quad (4)$$

$$P + ma_0 \sin \alpha - mg \cos \alpha = 0. \quad (5)$$

В уравнении (5) учтено, что $|\vec{P}| = |\vec{N}|$. Из уравнения (2) получим

$$P = \frac{Ma_0}{\sin \alpha}. \quad (6)$$

Подставим (6) в (5):

$$\frac{Ma_0}{\sin \alpha} + ma_0 \sin \alpha - mg \cos \alpha = 0. \quad (7)$$

Решая уравнение (7) относительно a_0 , найдем

$$a_0 = \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} = 0,41 \text{ (м/с}^2\text{)}. \quad (8)$$

Подставив (8) в (4) и, решая полученное уравнение относительно a_n , после несложных преобразований, получим

$$a_n = \frac{(M + m)g \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} = 5,25 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Задача № 2. Грузы массой $M = 10$ кг и $m = 5$ кг при помощи нерастяжимой нити подвешены на блоке (рис 2.3). С каким ускорением a_0 относительно Земли нужно двигать блок в вертикальном направлении, чтобы ускорения грузов относительно Земли были направлены в одну сторону? Грузы двигаются по вертикали. Движение рассмотреть в системе отсчета, связанной с блоком.

Решение. Система отсчета, связанная с блоком, представляет собой неинерциальную систему отсчета. Запишем соотношение, связывающее ускорение $\vec{a}$ грузов относительно Земли с ускорением $\vec{a}_n$ грузов относительно блока ускорением $\vec{a}_0$ блока относительно Земли:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_n. \quad (1)$$

В системе отсчета, связанной с блоком, легкий груз массой m поднимается вверх, а тяжелый массой M вниз.

Поэтому в проекции на ось y в случае легкого груза:

$$a_n = a_0 + a_n, \quad (2)$$

а в случае тяжелого груза:

$$a_n = a_0 - a_n. \quad (3)$$

Из уравнения (2) следует, что ускорение $\vec{a}_n$ легкого груза при любом сколь угодно малом ускорении a_0 блока в положительном направлении оси y будет иметь такое же направление, что и $\vec{a}_0$. Поэтому задача сводится к нахождению ускорения блока, при котором ускорение $\vec{a}_n$ тяжелого груза будет направлено в ту же сторону, что и ускорение $\vec{a}_n$ легкого груза.

В системе отсчета, связанной с блоком, на тяжелый груз массой M действуют сила тяжести $M\vec{g}$, сила реакции нити $\vec{T}$ и сила инерции $\vec{I} = -M\vec{a}_0$, на легкий – сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции нити $\vec{T}$ и сила инерции $\vec{I} = -m\vec{a}_0$. Запишем уравнения движения грузов относительно блока в проекциях на ось y :

$$T - mg - ma_0 = ma_n, \quad (4)$$

$$T - Mg - Ma_0 = -Ma_n. \quad (5)$$

Решая систему уравнений (4-5) относительно a_n , получим

$$a_n = a_0 = \frac{(M - m)(g + a_0)}{m + M}. \quad (6)$$

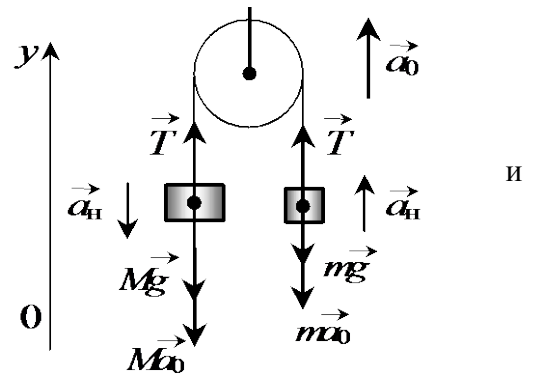


Рис 2.3

и

Подставив (6) в уравнение (3) запишем условие, при котором ускорение более тяжелого груза a_T направлено в положительном направлении оси y , т. е. $a_T > 0$,

$$a_0 - \frac{(M - m)(g + a_0)}{m + M} \geq 0. \quad (7)$$

Решая уравнение (7) относительно a_0 , найдем величину ускорения блока, при котором ускорения обоих грузов направлены в одну сторону (в положительном направлении оси y):

$$a_0 \geq \frac{(M - m)g}{2m} = 5,0 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Задача № 3. Небольшое тело поместили на вершину гладкой сферы радиусом R . Затем сфере сообщили в горизонтальном направлении ускорение $\vec{a}$ и тело начало скользить вниз. Найдите скорость v_H тела A относительно сферы в момент отрыва от нее.

Решение. В неинерциальной системе отсчета, связанной со сферой, на тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила инерции $\vec{I} = -m\vec{a}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$ (рис. 2.4). Пусть в начальный момент $t = 0$ тело находилось в положении 1, а в момент t оказалось в положении 2. Запишем уравнение движения тела в системе отсчета, связанной со сферой,

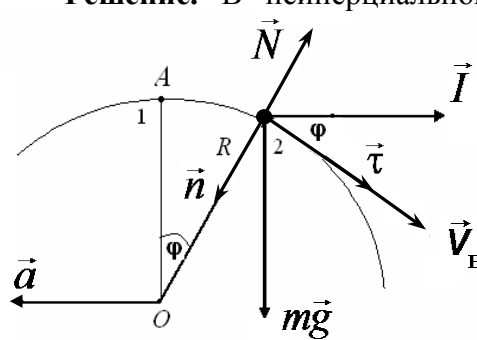
$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{I} = m\vec{a}_H, \quad (1)$$


Рис. 2.4

где $\vec{a}_H = d\vec{v}_H/dt$ – ускорение тела относительно

сферы, $\vec{v}_H$ – скорость тела относительно сферы.

Введем единичные векторы $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$, направленные, соответственно, вдоль скорости $\vec{v}_H$ тела и перпендикулярно скорости $\vec{v}_H$ к центру O кривизны траектории ($\vec{n} \perp \vec{\tau}$). Спроектировав уравнение (1) на направления ортов, получим

$$m \frac{dv_H}{dt} = mg \sin \varphi + ma \cos \varphi, \quad (2)$$

$$m \frac{v_H^2}{R} = mg \cos \varphi - N - ma \sin \varphi. \quad (3)$$

Для дальнейших расчетов учтем, что

$$ds = v_H dt, \quad (4)$$

$$dt = \frac{ds}{v_H} = \frac{R d\varphi}{v_H}. \quad (5)$$

Здесь ds – путь, пройденный телом по сфере за время dt . Подставив (5) в (2), имеем

$$m \frac{v_H dv_H}{R d\varphi} = mg \sin \varphi + ma \cos \varphi. \quad (6)$$

Приведем уравнение (6) к виду, удобному для интегрирования,

$$\int_0^{v_H} m \frac{v_H dv_H}{R} = \int_0^\varphi (mg \sin \varphi + ma \cos \varphi) d\varphi \quad (7)$$

и проинтегрировав (7) с учетом начальных условий (при $t = 0$: $v_n = 0$, $\varphi = 0$), получим

$$m \frac{v_n^2}{2R} = mg(1 - \cos \varphi) + ma \sin \varphi. \quad (8)$$

В момент отрыва $\vec{N} = 0$ и уравнение (3) принимает вид

$$m \frac{v_n^2}{R} = mg \cos \varphi - ma \sin \varphi. \quad (9)$$

Решая систему уравнений (8) – (9) относительно v_n , найдем

$$v_n = \sqrt{2gR/3}. \quad (10)$$

Оказывается, что скорость v_n не зависит от величины ускорения a сферы относительно Земли.

Задача №4. С какой скоростью v_n относительно автобуса должен идти человек по салону автобуса по направлению к кабине водителя, чтобы «взлететь» (потерять вес)? Автобус преодолевает вершину холма (неровного участка дороги) с радиусом кривизны $r = 42$ м. Скорость автобуса $u = 72$ км/ч. Считать, что человек находится в центре автобуса.

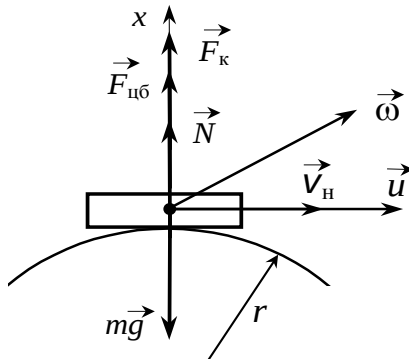


Рис. 2.5

Решение. Поскольку автобус движется по дуге окружности радиусом R , систему отсчета, связанную с автобусом, можно рассматривать как вращающуюся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ систему отсчета (вектор $\vec{\omega}$ направлен от нас). Укажем силы, действующие на человека в неинерциальной системе отсчета, связанной с автобусом (рис. 2.5): сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$, центробежная сила инерции $\vec{F}_{цб} = m\omega^2 \vec{r}$ и сила Кориолиса $\vec{F}_к = 2m[\vec{v}_n \vec{\omega}]$. Потеря веса означает, что $\vec{N} = 0$.

Поэтому человек «взлетит», если равнодействующая остальных сил в проекции на ось x при $\vec{N} = 0$ будет удовлетворять условию

$$F_{цб} - mg + F_k \geq 0. \quad (1)$$

Учитывая приведенные выше выражения для сил, уравнение (1) представим в виде

$$2v_n \omega + \omega^2 r - g \geq 0. \quad (2)$$

Принимая во внимание, что угловая скорость движения автобуса связана с его линейной скоростью соотношением $\omega = u/r$, преобразуем уравнение (2) к следующему виду:

$$\frac{2v_n u}{r} + \frac{u^2}{r} - g \geq 0. \quad (3)$$

Решая уравнение (4) относительно v_n , найдем

$$v_n \geq \frac{gr - u^2}{2u} = 0,30 \text{ (м/с)}.$$

Задача №5. Гладкий горизонтальный диск вращают с угловой скоростью $\omega = 2,0$ рад/с вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр. В центре диска поместили шайбу массой $m = 0,5$ кг и сообщили ей толчком горизонтальную скорость $v_0 = 2,6$ м/с. Найдите модуль силы Кориолиса, в момент, когда шайба оказалась на расстоянии $r = 50$ см от оси вращения.

Решение. Рассмотрим движение шайбы в неинерциальной системе отсчета, связанной с диском. Примем, что в момент t положение шайбы характеризуется радиус-вектором $\vec{r}$ и скоростью шайбы $\vec{V}_H$ (рис. 2.6).

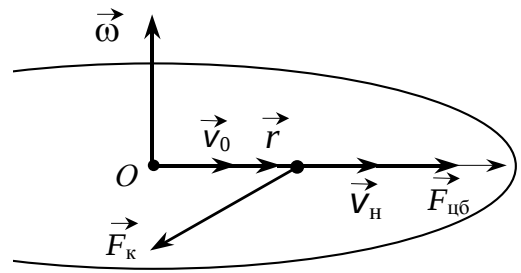


Рис. 2.6

В плоскости движения на шайбу действуют сила Кориолиса $\vec{F}_K = 2m[\vec{V}_H \vec{\omega}]$ и центробежная сила инерции $\vec{F}_{цб} = m\omega^2 \vec{r}$.

Изменение кинетической энергии шайбы в системе отсчета, связанной с диском, обусловлено действием центробежной силы инерции. По теореме об изменении кинетической энергии:

$$dA_{цб} = dT.$$

Следовательно,

$$A_{цб} = \int_0^{\vec{r}} \vec{F}_{цб} d\vec{r} = \int_0^{\vec{r}} m\omega^2 \vec{r} d\vec{r} = \int_0^r m\omega^2 r dr = \frac{m\omega^2 r^2}{2} = \frac{mV_H^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2}. \quad (1)$$

Из уравнения (1) скорость шайбы в момент времени t равна:

$$V_H = \sqrt{V_0^2 + \omega^2 r^2}.$$

Тогда, используя формулу для силы Кориолиса, найдем

$$F_K = 2m\omega\sqrt{V_0^2 + \omega^2 r^2} = 5,57 \text{ (Н)}.$$

Задача №6. Представьте себе, что в земном шаре просверлен канал в плоскости экватора. Вычислите силу F , с которой будет давить на стенку канала тело, падающее по нему с поверхности Земли, в тот момент, когда оно достигнет центра Земли. Считать, что трения нет, а плотность Земли однородна. Учесть, что гравитационная сила, действующая на материальную точку массой m , которая помещена в однородный шар прямо пропорциональна расстоянию от центра шара и определяется формулой $\vec{F}_{гр} = -G \frac{Mm}{R^3} \vec{r}$,

где $\vec{r}$ – радиус-вектор материальной точки.

Решение. Рассмотрим движение тела в системе отсчета, связанной с Землей, учитывая ее вращение относительно оси симметрии. В этой системе отсчета на тело, находящееся в канале в точке с радиус-вектором $\vec{r}$, действуют гравитационная сила

$$\vec{F}_{гр} = -G \frac{Mm\vec{r}}{R^3}, \text{ сила нормальной реакции опоры } \vec{N},$$

центробежная сила инерции $\vec{F}_{цб} = m\omega^2 \vec{r}$ и сила

Кориолиса $\vec{F}_K$ (рис. 2.7). Скорость тела в тот момент,

когда оно достигнет центра Земли, обозначим $\vec{V}_H$. При

движении вдоль канала составляющая ускорения тела,

перпендикулярная оси Or , равна нулю. Поэтому и

сумма проекций сил, действующих на тело в этом

направлении, равна нулю. Следовательно, при

движении и достижении центра Земли, сила Кориолиса

$\vec{F}_K$ должна уравновешиваться силой нормальной

реакции опоры $\vec{N}$. По третьему закону Ньютона, тело

будет действовать на поверхность канала с силой

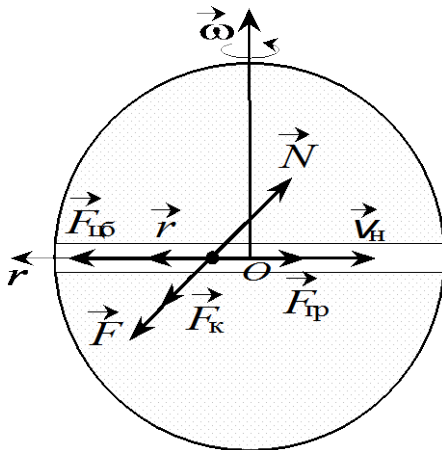


Рис. 2.7

$\vec{F} = -\vec{N}$. Следовательно,

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_{\text{кор}}| = |2m[\vec{V}_H \vec{\omega}]| = 2mV_H \omega. \quad (1)$$

(Угол $\angle(\vec{V}_H \vec{\omega}) = 90^\circ$ в соответствии с рис. 2.7).

Запишем в системе отсчета, связанной с Землей, уравнение движения тела в проекциях на ось Or

$$m\ddot{r} = -G \frac{mM}{R^3} r + m\omega^2 r. \quad (2)$$

Представим уравнение (2) в виде

$$\ddot{r} + \left(G \frac{M}{R^3} + \omega^2 \right) r = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) представляет уравнение гармонического осциллятора с циклической частотой ω_1

$$\omega_1 = \sqrt{G \frac{M}{R^3} - \omega^2}, \quad (4)$$

то есть тело совершает гармонические колебания относительно центра Земли с циклической частотой ω_1 .

Запишем решение дифференциального уравнения (3) в виде

$$r(t) = A \sin(\omega_1 t + \alpha_0). \quad (5)$$

Амплитуду A и начальную фазу α_0 определим из начальных условий ($r = R$, $v = 0$ при $t = 0$): $r = R \sin \alpha_0$, $A \omega_1 \cos \alpha_0 = 0$. Отсюда $\alpha_0 = \pi/2$ и $A = R$. Тогда закон движения приобретает вид

$$r(t) = R \sin \left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (6)$$

Подставив числовые данные, можно показать, что

$$G \frac{M}{R^3} \gg \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2},$$

где T – период суточного вращения Земли. Поэтому $\omega_1 \approx \sqrt{G \frac{M}{R^3}}$ и уравнение (6) можно записать в виде

$$r(t) = R \sin \left(\sqrt{G \frac{M}{R^3}} t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (7)$$

Тогда закон изменения скорости

$$v_H = \frac{dr}{dt} = R \omega_1 \cos \left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (8)$$

Так как в центре Земли (начало координат) $r = 0$ и $\sin(\omega_1 t + \pi/2) = 0$, то $\cos(\omega_1 t + \pi/2) = 1$. Следовательно, скорость тела в центре Земли, учитывая, что ускорение свободного падения на поверхности Земли

$$g = G \frac{M}{R^2}, \quad v_H = \sqrt{gR}. \quad (9)$$

Теперь, подставим (9) в (1) и найдем силу давления тела на стенку в центре Земли:

$$F = 2m\omega\sqrt{gR} = \frac{4\pi}{T}m\sqrt{gR}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \frac{4\pi}{T}m\sqrt{\frac{R}{g}}g = \frac{4\pi}{T}\sqrt{\frac{R}{g}}mg; \quad F = \frac{4\pi}{T}\sqrt{\frac{R}{g}}P,$$

где $P = mg$ – вес тела на поверхности Земли.

Задача №7. На горизонтально расположенный стержень надета небольшая муфта, которая может перемещаться вдоль стержня. Стержень вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов, с угловой скоростью $\vec{\omega}$ (рис. 2.8а) и поэтому представляет неинерциальную систему отсчета. В начальный момент времени муфта находилась на расстоянии r_0 и имеет скорость v_0 , направленную от оси вращения. Далее оказалось, что скорость муфты v_n относительно стержня растет линейно с удалением от оси вращения $v_n = v_0 r / r_0$. При каком коэффициенте трения μ между муфтой и стержнем возможно такое движение? Силой тяжести пренебречь.

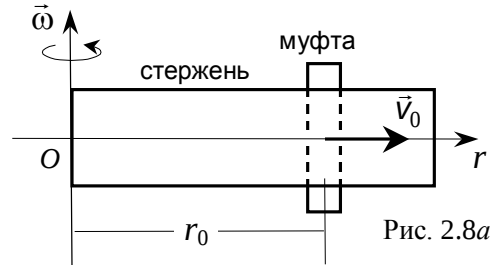


Рис. 2.8а

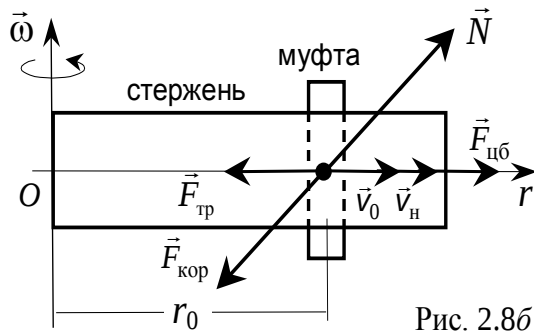


Рис. 2.8б

Решение. В системе отсчета, связанной с вращающимся стержнем, на муфту действуют центробежная сила инерции $\vec{F}_{цб} = m\omega^2\vec{r}$, сила Кориолиса $\vec{F}_{кор} = 2m[\vec{v}_n\vec{\omega}]$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр} = \mu\vec{N}$ (рис. 2.8б). При движении муфты вдоль стержня кинетическая энергия муфты увеличивается под действием центробежной

силы инерции $\vec{F}_{цб}$ и уменьшается в результате действия силы трения $\vec{F}_{тр}$. По закону сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_n^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + A_{цб} - A_{тр}, \quad (1)$$

где $mv_0^2/2$ – начальная кинетическая энергия муфты, $mv_n^2/2$ – кинетическая энергия муфты на расстоянии r от оси вращения, $A_{цб}$ – работа центробежной силы инерции на расстоянии $(r - r_0)$, $A_{тр}$ – работа силы трения на расстоянии $(r - r_0)$.

Работа центробежной силы инерции на расстоянии $(r - r_0)$ равна:

$$A_{цб} = \int_{r_0}^r \vec{F}_{цб} d\vec{r} = \int_{r_0}^r m\omega^2 \vec{r} d\vec{r} = \int_{r_0}^r m\omega^2 r dr = \frac{m\omega^2(r^2 - r_0^2)}{2}. \quad (2)$$

Сила нормальной реакции опоры, так как в направлении, перпендикулярном оси Or , муфта не перемещается, равна по модулю силе Кориолиса, то есть

$$N = F_{кор} = 2mv_n\omega = 2m\frac{v_0 r}{r_0}\omega. \quad (3)$$

Тогда работа силы трения $F_{тр} = \mu N$ на расстоянии $(r - r_0)$ равна:

$$A_{\text{тр}} = \int_{r_0}^r \mu N d\vec{r} = \int_{r_0}^r \mu F_{\text{кор}} d\vec{r} = \int_{r_0}^r 2m\mu \frac{v_0 \omega}{r_0} r dr = \frac{\mu m \omega v_0 (r^2 - r_0^2)}{r_0}. \quad (4)$$

Подставим (2) и (4) в (1):

$$\frac{mv_0^2 r^2}{2r_0^2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{m\omega^2 (r^2 - r_0^2)}{2} - \frac{\mu m \omega v_0 (r^2 - r_0^2)}{r_0}. \quad (5)$$

Решая уравнение (5) относительно μ , найдем

$$\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega r_0}{v_0} - \frac{v_0}{\omega r_0} \right). \quad (6)$$

Поскольку $\mu > 0$, то из (6) следует, что $\omega r_0 > v_0$.

Задача №8. Из ружья произведен строго вверх (то есть параллельно линии отвеса) выстрел. Начальная скорость пули $v_0 = 100$ м/с, географическая широта места $\varphi = 60^\circ$. Учитывая осевое вращение Земли, определите приближенно, насколько восточнее или западнее от места выстрела упадет пуля. Сопротивление воздуха не учитывать. Учесть, что кориолисова сила инерции много меньше силы притяжения тела к Земле.

Решение. Учитывая, что сила инерции Кориолиса много меньше силы притяжения тела Земле, в первом приближении можно считать, при движении вертикально вверх скорость $\vec{V}_H$ пули направлена вдоль радиуса Земли и численно равна: $v_H = v_0 - gt$. (рис. 2.9a) При движении пули вертикально вверх под действием силы Кориолиса $\vec{F}_K = 2m[\vec{V}_H \vec{\omega}]$ пуля отклоняется на запад (рис. 2.9a). Модуль силы Кориолиса равен: $F_K = 2mv_H \sin \beta$, где угол $\beta = \angle(\vec{V}_H \vec{\omega})$. В нашем случае, согласно 2.9a, угол $\beta = (90^\circ - \varphi)$. Поэтому величина силы Кориолиса:

$$F_K = 2m\omega v_H \sin \beta = 2m\omega v_H \cos \varphi. \quad (1)$$

Ускорение $\vec{a}_K$, сообщаемое пуле силой Кориолиса, направлено по касательной к поверхности Земли с востока на запад (вдоль оси x) и равно:

$$a_K = 2\omega v_H \cos \varphi = 2(v_0 - gt)\omega \cos \varphi. \quad (2)$$

Так как $a_K = dv_K/dt = d^2s/dt^2$, где v_K – составляющая скорости пули, касательная к поверхности Земли, s – смещение пули на запад при движении пули вверх вдоль линии отвеса, то

$$dv_K = a_K dt = 2(v_0 - gt)\omega \cos \varphi dt. \quad (3)$$

Интегрируя (3) по v от 0 до v_K и по t от 0 до t , найдем зависимость от времени западной составляющей скорости пули:

$$v_K = 2v_0 t \omega \cos \varphi - gt^2 \omega \cos \varphi. \quad (4)$$

Скорость пули связано с длиной пути формулой $v = ds/dt$. Поэтому

$$ds = v_K dt = (2v_0 t \omega \cos \varphi - gt^2 \omega \cos \varphi) dt. \quad (5)$$

Учитывая, что время движения пули до верхней точки подъема $t = v_0/g$, проинтегрировав (5) по s от 0 до s и по t от 0 до v_0/g , найдем смещение (на запад) пули при ее подъеме до верхней точки подъема:

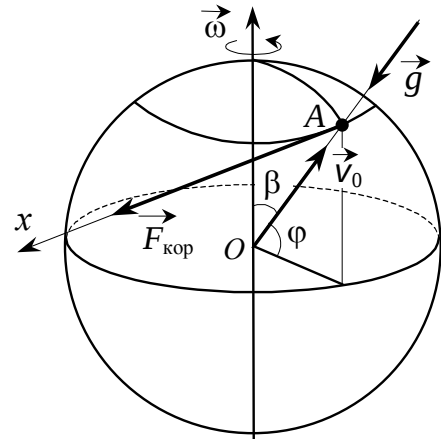


Рис. 2.9a

к
что

рис.

$$s_1 = \frac{2\omega V_0^3}{3g^2} \cos \varphi. \quad (6)$$

В верхнюю точку подъема пуля приходит с составляющей скорости (4), направленной на запад, приобретенной под действием силы Кориолиса. Ее величину в верхней точке подъема, которую обозначим как начальную скорость $\vec{V}_{03}$, направленную на запад при падении пули, найдем, подставив $t = v_0/g$ в (3),

$$V_{03} = \frac{\omega V_0^2}{g} \cos \varphi. \quad (7)$$

Поэтому при падении на землю результирующее смещение, если принять направление на запад за положительное направление оси x ,

$$s = s_1 + s_2, \quad (8)$$

где $s_2 = s_3 - s_4$; s_3 – смещение пули на запад при ее падении на Землю, обусловленное начальной западной скоростью v_{03} ; s_4 – смещение на восток, обусловленное силой Кориолиса, направленной при падении пули с запада на восток.

$$s_3 = V_{03} t = \frac{\omega V_0^3}{g^2} \cos \varphi. \quad (9)$$

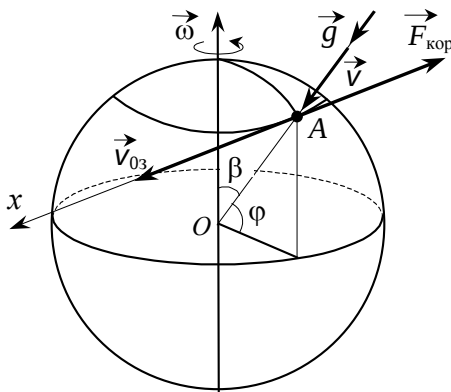


Рис. 2.9б

В (9) учтено, что в поле тяжести время падения на Землю равно времени подъема до высшей точки: $t = v_0/g$.

При падении пули направление силы Кориолиса изменяется на противоположное (рис. 2.9б). Смещение s_4 на восток, обусловленное силой Кориолиса, найдем аналогично смещению на запад [см. уравнения (1) – (5)], приняв $v_n = gt$,

$$s_4 = \frac{1}{3} \omega \frac{V_0^3}{g^2} \cos \varphi. \quad (10)$$

Подставив (6), (9) и (10) в (8), получим, что при выстреле вертикально вверх при падении на Землю

пуля сместится на запад на

$$s = \frac{2\omega V_0^3}{3g^2} \cos \varphi + \frac{\omega V_0^3}{g^2} \cos \varphi - \frac{\omega V_0^3}{3g^2} \cos \varphi = \frac{4\omega V_0^3}{3g^2} \cos \varphi. \quad (11)$$

Учитывая, что период суточного вращения Земли связан с циклической частотой вращения соотношением $T = 2\pi/\omega$, найдем величину смещения пули

$$s = \frac{8\pi V_0^3}{3g^2 T} \cos \varphi = 0,5 \text{ (см)}.$$

Задача №9. Покажите, что в неинерциальных системах отсчета при $\vec{a} = \text{const}$ и $\vec{\omega} = \text{const}$ полная механическая энергия механической системы сохраняется.

Решение. Закон сохранения энергии в механике утверждает, что полная механическая энергия консервативной системы с течением времени не изменяется.

Консервативной системой, как известно,

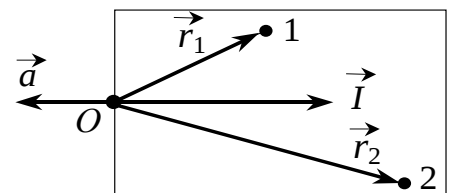


Рис. 2.10

называют систему, внутренние силы которой консервативны, а внешние – консервативны и стационарны.

Пусть материальная точка в неинерциальной системе, движущейся поступательно с ускорением $\vec{a} = \text{const}$, перемещается из произвольной точки 1 с радиус-вектором $\vec{r}_1$ в произвольную точку 2 с радиус-вектором $\vec{r}_2$ (рис. 2.10). Тогда имеем:

а) для поступательной силы инерции $\vec{I} = -m\vec{a}$:

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{I} d\vec{r} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\vec{a} d\vec{r} = m\vec{a} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2). \quad (1)$$

где A_{12} – работа по перемещению материальной точки из положения 1 в положение 2. Согласно (1) работа силы $\vec{I} = -m\vec{a}$ не зависит от пути, по которому частица переходит из одного положения в другое и, следовательно, эта сила является консервативной.

б) для центробежной силы инерции $\vec{I} = m\omega^2 \vec{r}$

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\omega^2 \vec{r} d\vec{r} = m\omega^2 \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{r} d\vec{r}. \quad (2)$$

Легко показать, что $\vec{r} d\vec{r} = \frac{1}{2} d(\vec{r}^2) = r dr$. Тогда (2) примет вид

$$A_{12} = m\omega^2 \int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{m(r_2^2 - r_1^2)}{2}. \quad (3)$$

Из выражения (3) работа центробежной силы инерции $\vec{I} = m\omega^2 \vec{r}$ не зависит от пути, по которому частица переходит из одного положения в другое и, следовательно, эта сила является консервативной.

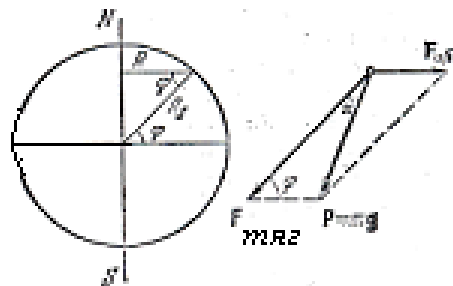
Итак, показано, что поступательная сила инерции $\vec{I} = -m\vec{a}$ (при $\vec{a} = \text{const}$) и центробежная сила инерции $\vec{I} = m\omega^2 \vec{r}$ (при $\vec{\omega} = \text{const}$) являются консервативными силами. Поэтому в этих случаях механическая система является консервативной и, следовательно, полная энергия механической системы при $\vec{a} = \text{const}$ и при $\vec{\omega} = \text{const}$ с течением времени не изменяется.

Примечание. Действие силы Кориолиса $\vec{F}_k = 2m[\vec{v}_n \vec{\omega}]$ не рассматривалось, так как $\vec{F}_k$ в любой момент времени перпендикулярна к скорости $\vec{v}_n$ частицы относительно неинерциальной системы отсчета и, следовательно, работу не совершает (гироскопическая сила).

Задача №10. Найдите (приближенно) зависимость ускорения свободного падения тела g от широты φ и постройте график $g(\varphi)$.

Решение: Центробежную силу инерции необходимо учитывать, рассматривая движение тел относительно Земли (вращающаяся система отсчета). Пусть тело находится на широте φ .

Ускорение свободного падения тела обусловлено действием векторной силы



$$m\vec{g} = \vec{F}_{тяг} + \vec{F}_{цб}. \quad (1)$$

В результате ускорение силы тяжести $\vec{g}$ не совпадает с направлением силы $\vec{F}_{тяг}$.

$$\text{Здесь } F_{цб} = m\omega^2 R = m\omega^2 R_z \cos \varphi. \quad (2)$$

По теореме синусов:

Поправка $F_{тяг} - F_{цб}$ составляет 0 на полюсах и 0,3% от силы $F_{тяг}$ на экваторе.