# ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

## Основные формулы

• Момент силы **F,** действующей на тело, относительно оси вращения

$$M = F_{\perp} l,$$

где $F_{\perp}$ — проекция силы **F** на плоскость, перпендикулярную оси вращения; $l$ — плечо силы **F** (кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы).

• Момент инерции относительно оси вращения:

а) материальной точки

$$J=mr^2,$$

где $m$ — масса точки; $r$ — расстояние ее от оси вращения;

б) дискретного твердого тела

$$J = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2,$$

где $\Delta m_i$ — масса *i-го* элемента тела; $r_i$ — расстояние этого элемента от оси вращения; $n$ — число элементов тела;

в) сплошного твердого тела

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m.$$

Если тело однородно, т. е. его плотность $\rho$ одинакова по всему объему, то

$$dm=\rho dV \text{ и } J = \rho\int r^2 \mathrm{d}V,$$

где $V$ — объем тела.

• Моменты инерции некоторых тел правильной геометрической формы:

| Твердое тело | Положение оси вращения | Момент инерции |
|---|---|---|
| Тонкий стержень длины $\ell$ | Перпендикулярна стержню и проходит через центр тяжести | $1/12\, m\ell^2$ |
| Сплошной цилиндр радиуса $R$ | Ось вращения совпадает с осью цилиндра и проходит через центр тяжести | $1/2\, mR^2$ |
| Тонкий диск радиуса $R$ | Ось вращения совпадает с диаметром диска | $1/4\, mR^2$ |
| Шар радиуса $R$ | Ось вращения проходит через центр тяжести шара | $2/5\, mR^2$ |

• **Теорема Штейнера.** Момент инерции тела относительно произвольной оси

$$J=J_0+ma^2,$$

где $J_0$ — момент инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр тяжести тела параллельно заданной оси; $a$ — расстояние между осями; $m$ — масса тела.

• Момент импульса вращающегося тела относительно оси

$$L=J\omega.$$

• Закон сохранения момента импульса

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = \mathrm{const},$$

где $L_i$ — момент импульса i-го тела, входящего в состав системы. Закон сохранения момента импульса для двух взаимодействующих тел

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = J_1'\omega_1' + J_2'\omega_2',$$

где $J_1, J_2, \omega_1, \text{и } \omega_2$— моменты инерции и угловые скорости тел до взаимодействия: $J_1', J_2', \omega_1', \text{и } \omega_2',$— те же величины после взаимодействия.

Закон сохранения момента импульса для одного тела, момент инерции которого меняется,

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2,$$

где $J_1 \text{ и } J_2,$— начальный и конечный моменты инерции; $\omega_1 \text{ и } \omega_2,$ —• начальная и конечная угловые скорости тела.

• Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

$$\mathbf{M}\mathrm{d}t=\mathrm{d}(J\vec{\omega}),$$

где **M** — момент силы, действующей на тело в течение времени *dt;*
$J$ — момент инерции тела; $\omega$ — угловая скорость; $J\vec{\omega}$ — момент импульса.

Если момент силы и момент инерции постоянны, то это уравнение записывается в виде

$$\mathbf{M}\Delta t=J\Delta\vec{\omega}.$$

В случае постоянного момента инерции основное уравнение динамики вращательного движения принимает вид

$$\mathbf{M}=J\varepsilon,$$

где $\varepsilon$ — угловое ускорение.

• Работа постоянного момента силы *M,* действующего на вращающееся тело,

$$A=M\varphi,$$

где $\varphi$ — угол поворота тела.

• Мгновенная мощность, развиваемая при вращении тела,

$$N=M\omega.$$

• Кинетическая энергия вращающегося тела

$$T=1/2J\omega^2$$

• Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения,

$$T=={}^1/_2mv^2+{}^1/_2J\omega^2,$$

где ${}^1/_2mv^2$ — кинетическая энергия поступательного движения тела; $v$ — скорость центра инерции тела; ${}^1/_2J\omega^2$,— кинетическая энергия вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через центр инерции.

• Работа, совершаемая при вращении тела, и изменение кинетической энергии его связаны соотношением

$$A = 1/2 J\omega^2 - 1/2 J\omega^2 \bullet$$

• Величины, характеризующие динамику вращательного движения, и формулы, описывающие это движение, аналогичны соответствующим величинам и формулам поступательного движения.

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 1.** Маховик, имеющий момент инерции $I$=1 *кг·м*$^2$, раскручивают так, что его угловая скорость изменяется по закону $\omega = \omega_0 \sin^2(\frac{2\pi}{\tau} t)$, где $\tau$=4 *с*, $\omega_0$=31,4 *рад/с*. Найти: момент внешних сил, действующих на маховик через 1 *с* после начала движения; запасенную к этому моменту времени кинетическую энергию.

Решение задачи

Дано:
$\tau$=4 *с,*
$\omega_0$=31,4 *рад/с,*
$\omega = \omega_0 \sin^2(\frac{2\pi}{\tau} t)$
$t$=1 *с*

---

$M$=?
$E_к$=?

В соответствии с уравнением динамики вращательного движения твердого тела момент $M$ действующих сил связан с угловым ускорением ε формулой $M_z = I_z \varepsilon$, где $M_z$ - проекция момента силы на ось вращения, $I_z$ – момент инерции маховика относительно оси вращения. Угловое ускорение находим, воспользовавшись его определением:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \omega_0 \cdot 2\frac{2\pi}{\tau}\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right) = \frac{2\pi\omega_0}{\tau}\sin\left(\frac{4\pi}{\tau}t\right).$$

Тогда $M = I \cdot \frac{2\pi\omega_0}{\tau}\sin\left(\frac{4\pi}{\tau}t\right)$ и, подставив заданные значения, получим $M$=0

Кинетическая энергия вращающегося тела определяется по формуле $E_k = \frac{I\omega^2}{2}$. Тогда $E_k = \frac{I\omega_0^2}{2}\sin^4\left(\frac{2\pi}{\tau}t\right)$. Подставляя заданные значения, получим $E_к$=493 *Дж.*

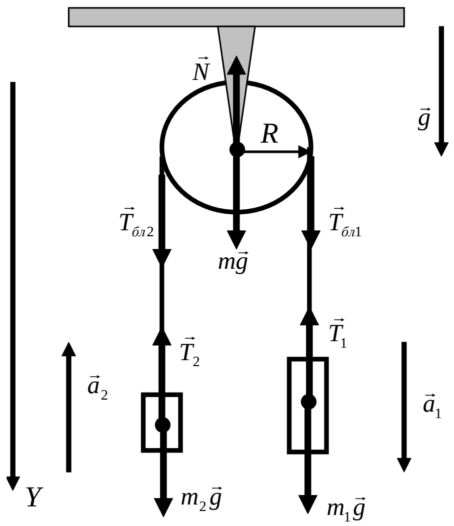
Ответ: $M$=0; $E_к$=493 *Дж.*

**Задача 2.** Через блок в виде однородного диска массой 300 *г*, вращающегося вокруг горизонтальной оси, перекинута невесомая и нерастяжимая нить, на концах которой прикреплены грузы массой $m_1$=300 *г* и $m_2$=200 *г*. Пренебрегая трением в оси блока, найти линейное ускорение грузов и силы натяжения нитей.

Решение задачи

Дано:
$m$=300 *г*
$m_1$=300 *г*
$m_2$=200 *г*

$a$=?
$T_1$=?
$T_2$=?




Представим рисунок. Расставим силы, действующие на тела, участвующие в движении.

Грузы движутся прямолинейно, поэтому для описания их движения достаточно одной оси $Y$ направленной вертикально вниз (по движению более тяжёлого груза).

По второму закону Ньютона уравнение движения каждого груза имеют вид:

$$\vec{T}_1 + m_1\vec{g} = m_1\vec{a}_1 \text{ (для первого груза)}$$

$$\vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2 \text{ (для второго груза).}$$

Так как нить нерастяжима, поэтому грузы будут двигаться с ускорениями, равными по модулю $(a = a_1 = a_2)$, но направленными в противоположные стороны. Проектируя уравнения движения на ось $Y$, получим:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a$$

$$m_2 g - T_2 = -m_2 a.$$

Блок вращается вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через его центр, поэтому момент силы тяжести блока и момент силы реакции оси равны нулю. Так как нить движется без скольжения относительно блока, то вращение блока вызывается действием сил натяжения $\vec{T}_{бл1}$ и $\vec{T}_{бл2}$. Основное уравнение вращательного движения твердого тела тогда имеет вид:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = I\vec{\varepsilon},$$

где $\vec{M}_1, \vec{M}_2$ - моменты сил натяжения нити $\vec{T}_{бл1}$ и $\vec{T}_{бл2}$, модули которых равны соответственно $M_1 = T_{бл1}R$; $M_2 = T_{бл2}R$, где $R$ – плечо силы $\vec{T}_{бл1}$ и $\vec{T}_{бл2}$ (радиус диска).

В проекции на ось вращения блока уравнение вращательного движения примет вид

$$M_1 - M_2 = I\varepsilon \text{ или } T_{бл1}R - T_{бл2}R = I\varepsilon.$$

Учитывая, что угловое ускорение связано с тангенциальным ускорением $\varepsilon = a/R$, а из условия нерастяжимости нити следует, что $T_{бл1} = T_1$ и $T_{бл2} = T_2$, запишем

$$(T_1 - T_2)R = I\frac{a}{R}.$$

Момент инерции диска равен $I = \frac{mR^2}{2}$.

Решая совместно систему уравнений:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a$$
$$m_2 g - T_2 = -m_2 a$$
$$(T_1 - T_2)R = I\frac{a}{R},$$

получим $a = g\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m/2}$

$$T_1 = g\frac{m_1(2m_2 + m/2)}{m_1 + m_2 + m/2} \text{ и } T_2 = g\frac{m_2(2m_1 + m/2)}{m_1 + m_2 + m/2}.$$

Подставляем числовые значения, получим $a$=1,51 *м/с*$^2$, $T_1$=2,49 *Н*; $T_2$=2,26 *Н*.

Ответ: $a$=1,51 *м/с*$^2$, $T_1$=2,49 *Н*; $T_2$=2,26 *Н*.

**Задача 3.** Стержень из однородного материала массой $m_1$=60 *г* и длиной $l_1$=50 *см* висит вертикально в положении равновесия. Он может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси $OZ$ , проходящей через один из его концов. В точку, отстоящую от оси вращения на расстоянии $l_2$=40 *см*, попадает пуля массой $m_2$=10 *г*, летящая горизонтально со скоростью 400 *м/с* перпендикулярно оси вращения стержня. Пуля застревает в стержне. Найти угловую скорость ω, с которой начинает вращаться стержень сразу после попадания пули, и максимальный угол отклонения стержня φ.

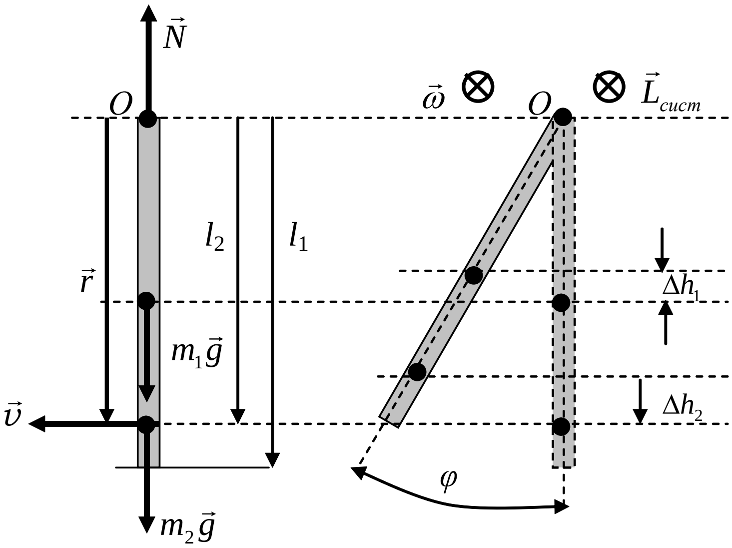
Решение задачи

| Дано: |
|---|
| $l_1$=50 *см* |
| $l_2$=40 *см* |
| $m_1$=60 *г* |
| $m_2$=10 *г* |
| $\upsilon$=400 *м/с* |
| ω=? |
| φ=? |

Представим рисунок, Расставим силы, действующие на стержень.

На стержень действуют сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$, приложенная в точке $O$ и сила тяжести $m_1\vec{g}$, приложенная к центру масс стержня. На пулю действует сила тяжести $m_2\vec{g}$. В течение взаимодействия (удара) пули со стержнем моменты сил $\vec{N}$, $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$ относительно точки $O$ равны нулю, так как линия их действия проходит через эту точку (плечо силы равно нулю). Таким образом, для системы «пуля – стержень» можно применить закон сохранения момента импульса относительно точки $O$:

$$\vec{L}_{сист} = \vec{L}'_{сист},$$




где $\vec{L}_{сист}, \vec{L}'_{сист}$ - моменты импульса системы до и после взаимодействия. Учитывая, что система состоит из двух тел, можно записать: $\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}'_1 + \vec{L}'_2$, где $\vec{L}_1, \vec{L}_2$ - моменты импульса стержня и пули до взаимодействия; $\vec{L}'_1, \vec{L}'_2$ - моменты импульса стержня и пули после взаимодействия.

До взаимодействия с пулей стержень был неподвижен, следовательно, его момент импульса $\vec{L}_1 = 0$. Момент импульса пули $\vec{L}_2$, движущейся поступательно,

$$\vec{L}_2 = \left[\vec{r} \times m_2\vec{\upsilon}\right],$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор пули относительно точки *O*, $m_2$ – масса пули, $\vec{\upsilon}$ - скорость пули в момент удара о стержень.

После абсолютно неупругого соударения стержень и пуля будут двигаться вместе, начиная вращение относительно оси *Z* с угловой скоростью $\vec{\omega}$, поэтому

$$\vec{L}'_1 + \vec{L}'_2 = I_1\vec{\omega} + I_2\vec{\omega} = (I_1 + I_2)\vec{\omega},$$

где $I_1$ и $I_2$ - моменты инерции стержня и пули относительно оси вращения *Z*. Таким образом, закон сохранения импульса приобретет вид

$$\left[\vec{r} \times m_2\vec{\upsilon}\right] = (I_1 + I_2)\vec{\omega}.$$

В проекции на ось *Z*, совпадающей с направлением $\vec{\omega}$, уравнение движения можно записать в следующем виде:

$$l_2 m_2 \upsilon = (I_1 + I_2)\omega.$$

Моменты инерции стержня и пули относительно оси вращения *Z* равны соответственно: $I_1 = \frac{m_1 l_1^2}{3}$ и $I_2 = m_2 l_2^2$. Подставляя выражения для моментов инерции $I_1$ и $I_2$ в уравнение движения и решая его относительно угловой скорости ω, получим $\omega = \frac{3m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + 3m_2 l_2^2}\upsilon$. Подставляя исходные данные, получим ω=0,320 *рад/с*.

Для определения угла отклонения стержня воспользуемся законом сохранения механической энергии:

$$E_м^Н = E_М^В,$$

где $E_м^Н$ и $E_М^В$ - механическая энергия системы в нижнем и верхнем положениях стержня.

Механическая энергия системы $E_м^Н$ сразу после попадания пули (в момент окончания неупругого удара):

$$E_М^Н = E_К^Н + E_П^Н = \frac{(I_1 + I_2)\omega^2}{2} + m_1 g h_1 + m_2 g h_2,$$

где $h_1$ и $h_2$ – высота центров масс стержня и пули относительно поверхности Земли.

Механическая энергия $E_М^В$ системы в момент наибольшего отклонения стержня от вертикали (в момент окончания вращательного движения):

$$E_М^В = E_П^В = m_1 g h_1' + m_2 g h_2',$$

где $h_1'$ и $h_2'$ - высота центров масс стержня и пули относительно поверхности Земли в верхнем положении.

Так как $E_м^Н = E_М^В$, то $\frac{(I_1 + I_2)\omega^2}{2} + m_1 g h_1 + m_2 g h_2 = m_1 g h_1' + m_2 g h_2'$, после преобразований получим:

$$\frac{(I_1 + I_2)\omega^2}{2} = m_1 g \Delta h_1 + m_2 g \Delta h_2,$$

где $\Delta h_1$ и $\Delta h_2$ – высота подъема центров масс стержня и пули, соответственно, которые можно найти, воспользовавшись рисунком $\Delta h_1 = \frac{l_1}{2}(1 - \cos\varphi)$; а $\Delta h_2 = l_2(1 - \cos\varphi)$.

Решая уравнения

$$\frac{(I_1 + I_2)\omega^2}{2} = m_1 g \Delta h_1 + m_2 g \Delta h_2,$$

$$\Delta h_1 = \frac{l_1}{2}(1 - \cos\varphi),$$

$$\Delta h_2 = l_2(1 - \cos\varphi)$$

совместно относительно φ, находим: $\varphi = \arccos\left[1 - \frac{(m_1 l_1^2 + 3 m_2 l_2^2)\omega^2}{g(3 m_1 l_1 + 6 m_2 l_2)}\right]$.

Подставляя числовые значения, получим φ=3,38°.

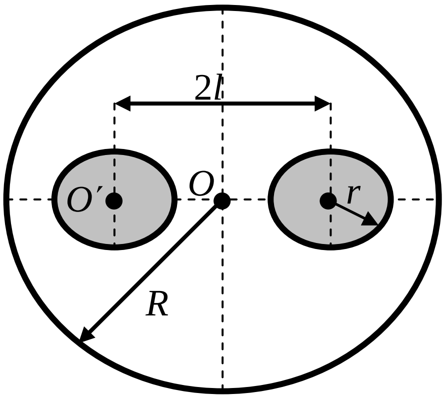
Ответ: ω=0,320 *рад/с*, φ=3,38°.

**Задача 4.** Определить момент инерции медного диска радиусом $R$=6 *см*, в котором сделаны два выреза в виде кругов радиусом $r$=2 *см*. Центры вырезов находятся на прямой, проходящей через центр диска на расстоянии $l$=3 *см* от него. Толщина диска $d$=0,1 *см*. Ось вращения проходит через центр диска и перпендикулярна его плоскости.

Решение задачи

| Дано: |
|---|
| $R$=6 *см* |
| $r$=2 *см* |
| $l$=3 *см* |
| $d$=0,1 *см* |
| $\rho$=8900 *кг/м*$^3$ |
| $I_z$=? |

Обозначим момент инерции сплошного диска радиусом $R$ и массой $M$ относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно плоскости диска $I_0 = \frac{MR^2}{2}$.




Момент инерции круглого отверстия (отверстие в виде круга) радиуса $r$ и массой $m$ относительно оси, проходящей через центр отверстия (через точку *O′)* перпендикулярной его плоскости $I_{0rh} = \frac{mr^2}{2}$. По теореме Штейнера, момент инерции круга относительно оси , проходящей через центр диска (через точку *O*) равен $I'_z = \frac{mr^2}{2} + ml^2$, где $l$ - расстояние между осями *O* и *O′*.

Следовательно, момент инерции диска относительно оси , проходящей через точку *O* перпендикулярно плоскости диска $I_z = I_0 - 2I'_z = \frac{MR^2}{2} - 2\left(\frac{mr^2}{2} + ml^2\right)$.

Массы диска и круга соответственно равны $M = \rho\pi R^2 d$ и $m = \rho\pi r^2 d$, где $d$ - толщина диска; ρ – плотность меди.

После подстановки окончательно получим: $I_z = \rho\pi d\left(\frac{R^2}{2} - r^4 - 2r^2 l^2\right)$.

Подставляя заданные значения, находим: $I_z$= 1,16·10$^{-4}$ *кг·м*$^2$.

Ответ: $I_z$= 1,16·10$^{-4}$ *кг·м*$^2$.

**Задача 5.** Человек стоит в центре скамьи Жуковского и вместе с ней вращается по инерции с частотой $n_1$= 0,5 *с*$^{-1}$. В вытянутых руках человек держит по гире массой $m$=2 *кг* каждая. Исходное расстояние между гирями $l_1$= 1,6 *м*. Какой будет частота вращения $n_2$ скамьи с человеком, когда он опустит руки и расстояние между гирями станет равным $l_2$=0,4 *м*? Считать, что момент инерции тела человека и скамьи относительно оси вращения не изменяется и равен $I_0$=1,6 *кг·м*$^2$.

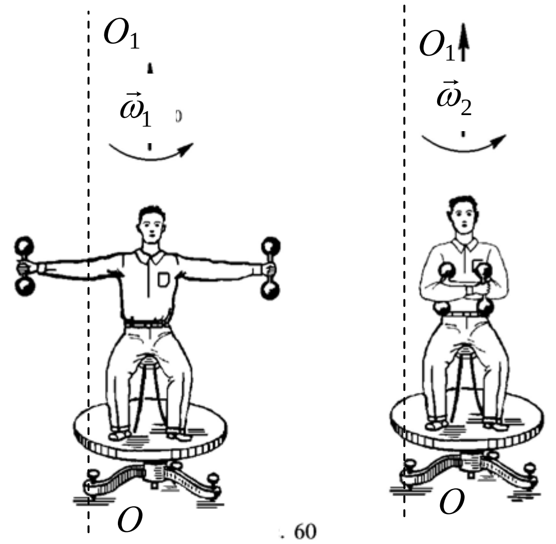
Решение задачи

Дано:
$n_1$=0,5 $c^{-1}$
$l_2$=2$r_2$=0,4 *м*
$l_1$=2$r_1$=1,6 *м*
$m$=2 *кг*
$I_0$=1,6 *кг·м*$^2$

---

$n_2$=?

Скамья Жуковского представляет собой горизонтальную платформу (диск), которая может свободно вращаться без трения вокруг вертикальной оси $OO_1$. Человек сидит на скамье и держит в вытянутых руках гимнастические гантели и вращается вместе со скамьей вокруг оси $OO_1$ с угловой скоростью $\omega_1$.



. 60

Поскольку момент внешних сил (сил тяжести и реакции подшипников) относительно оси $OO_1$ равен нулю, то момент импульса системы относительно оси $OO_1$ сохраняется: $(I_0 + 2mr_1^2)\omega_1 = (I_0 + 2mr_2^2)\omega_2$,

где $I_0$ – момент инерции человека и скамьи относительно оси $OO_1$, $2mr_1^2$ и $2mr_2^2$ – моменты инерции гантелей в первом и втором положениях относительно оси $OO_1$, $m$ – масса одной гантели, $r_1$ и $r_2$ – расстояния от гантелей до оси вращения, $\omega_1$ и $\omega_2$ – угловые скорости вращения системы. Учитывая взаимосвязь угловой скорости и частоты вращения $\omega = 2\pi n$, выразим искомую частоту: $(I_0 + 2mr_1^2)n_1 = (I_0 + 2mr_2^2)n_2$ или $n_2 = \dfrac{I_0 + 2mr_1^2}{I_0 + 2mr_2^2} n_1$. Подставляя заданные значения, получим $n_2$=1,18 $c^{-1}$.

Ответ: $n_2$=1,18 $c^{-1}$.