

КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Физика является одной из тех наук, знание которой необходимо для успешного изучения общенаучных и специальных дисциплин. При изучении курса физики студенты должны прочно усвоить основные законы и теории, овладеть необходимыми навыками решения задач по физике. **Единственный способ научиться решать задачи – это пытаться решать их самостоятельно. Знание теории закрепляется с использованием ее для решения задач. Уровень подготовки по физике определяется уровнем сложности задач, которые студент может решить.**

Формирование навыков грамотного решения типичных задач является основной целью методического введения (с примерами решения задач) к каждой теме сборника индивидуальных заданий.

В учебном пособии рассмотрены основные вопросы кинематики, приведены методические указания по решению типовых задач, а так же приведены задачи для самостоятельного решения и тесты.

Цель пособия – помочь студентам освоить материал программы, научить активно применять теоретические основы физики как рабочий аппарат, позволяющий решать конкретные задачи, приобрести уверенность в самостоятельной работе.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1. Внимательно прочитайте условия задачи. Сделайте сокращенную запись данных и искомых физических величин, предварительно представив их в системе СИ.

Система СИ состоит из основных, дополнительных и производных единиц. Основными единицами являются: единица длины – метр (м); массы – килограммы (кг); времени – секунда (с); силы электрического тока – ампер (А); термодинамической температуры – кельвин (К); количества вещества – моль (моль); силы света – кандела (кд).

Дополнительные единицы: единица плоского угла – радиан (рад); единица телесного угла – стерadian (ср).

Производные единицы устанавливаются через другие единицы данной системы на основании физических законов, выражающих взаимосвязь между соответствующими величинами.

2. В условиях и при решении задач часто используются множители и приставки СИ для образования десятичных и дольных единиц (см. Приложение).
3. Вникните в смысл задачи. Представьте физическое явление, о котором идет речь; введите упрощающие предположения, которые можно сделать при решении. Для этого необходимо использовать такие абстракции, как материальная точка, абсолютно твердое тело, луч света.
4. Если позволяет условие задачи, выполните схематический чертеж.

5. С помощью физических законов установите количественные связи между заданными и искомыми величинами, то есть составьте замкнутую систему уравнений, в которой число уравнений равнялось бы числу неизвестных.
6. Найдите решение полученной системы уравнений в виде алгоритма, отвечающего на вопрос задачи.
7. Проверьте правильность полученного решения, используя правило размерностей.
8. Подставьте в полученную формулу численные значения физических величин и проведите вычисления. Обратите внимание на точность численного ответа, которая не может быть больше точности исходных величин.

ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Угловое перемещение

При вращении точки вокруг неподвижной оси OZ вводится вектор углового перемещения $\vec{\phi}$, модуль которого равен углу поворота ϕ ; направление этого вектора связано с направлением вращения правилом правого винта и $\vec{\phi}$ всегда направлен вдоль оси вращения. Вектор углового перемещения называется аксиальным или псевдовектором.

Если точка вращается по окружности радиусом R и описывает дугу длиной S , при этом радиус описывает угол $\Delta\phi$, то между этими величинами существует следующее соотношение:

$$S = \Delta\phi R.$$

Мгновенная угловая скорость.

Пусть точка вращается вокруг неподвижной оси OZ и за время dt поворачивается на угол $d\phi(t)$, тогда этот бесконечно малый поворот можно задать вектором углового перемещения $d\vec{\phi}(t)$. Тогда вектором мгновенной угловой скорости называется

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\phi}(t)}{dt}.$$

Направление вектора угловой скорости $\vec{\omega}(t)$ совпадает с направлением вектора $d\vec{\phi}(t)$.

Проекция вектора угловой скорости на ось вращения OZ определяется следующим образом:

$$\omega_z(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}.$$

Вектор мгновенной угловой скорости является псевдовектором.

Средняя угловая скорость.

Отношение угла $\Delta\phi$, описанного радиусом точки, к промежутку времени, за который произошел этот поворот $\Delta t = t_2 - t_1$, называется модулем средней угловой скорости

$$\omega_{cp} \equiv \langle \omega \rangle = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1}.$$

Мгновенное угловое ускорение.

Вектор мгновенного углового ускорения определяется уравнением

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt}.$$

Проекция вектора углового ускорения на ось вращения OZ

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z(t)}{dt}.$$

Вектор мгновенного углового ускорения является псевдовектором.

Вектор углового ускорения может быть параллелен вектору угловой скорости (равноускоренное движение), или направлен противоположно вектору угловой скорости (равнозамедленное движение).

Среднее угловое ускорение.

Вектор и модуль среднего углового ускорения определяются следующим образом:

$$\vec{\varepsilon}_{cp} \equiv \langle \vec{\varepsilon} \rangle = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1}{t_2 - t_1}$$

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}.$$

Уравнения кинематики вращательного равнопеременного движения ($\vec{\varepsilon} = const$).

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\alpha \vec{\varepsilon}^2}{2};$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} t.$$

Поскольку векторы $\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ направлены вдоль оси вращения OZ , то выбрав направление оси OZ вдоль вектора начальной скорости $\vec{\omega}_0$, можно записать

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2};$$

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t.$$

Знак $\pm$ учитывает ситуации равноускоренного или равнозамедленного движения, соответственно.

Связь между линейными и угловыми кинематическими характеристиками при вращении по окружности радиусом R .

$$dS = d\varphi R;$$

$$S = \Delta \varphi R;$$

$$v = \omega R;$$

$$a_n = \omega^2 R;$$

$$a_\tau = \pm \varepsilon R.$$

Примеры решения задач

Пример 1.

Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $A=10$ рад, $B=20$ рад/с, $C=-2$ рад/с². Найти полное ускорение точки, находящейся на расстоянии $r=0,1$ м от оси вращения, для момента времени $t=4$ с,

Дано:

$$\varphi = 10 + 20t - 2t^2$$

;

$$r = 0,1 \text{ м};$$

$$t = 4 \text{ с}$$

Найти:

a —?

Решение.

Полное ускорение a точки, движущейся по кривой линии, может быть найдено как геометрическая сумма тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$, направленного по касательной к траектории, и нормального ускорения $\vec{a}_n$, направленного к центру кривизны траектории;

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Так как векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ взаимно перпендикулярны, то абсолютная величина ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad (1).$$

Тангенциальное и нормальное ускорения точки вращающегося тела выражаются формулами:

$$a_\tau = \varepsilon r, \quad a_n = \omega^2 r$$

где ω — угловая скорость тела; ε — его угловое ускорение.

Подставляя выражения для $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ в формулу (1), находим

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^2 r^2} = r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2} \quad (2)$$

Угловую скорость ω найдем, взяв первую производную от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct.$$

В момент времени $t=4$ с угловая скорость

$$\omega = [20 + 2(-2)4] = 4 \text{ (рад/с)}$$

Угловое ускорение найдем, взяв первую производную от угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2C = -4 \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Это выражение не содержит времени; следовательно, угловое ускорение заданного движения постоянно.

Подставляя найденные значения ω и ε и заданное значение r в формулу (4), получим

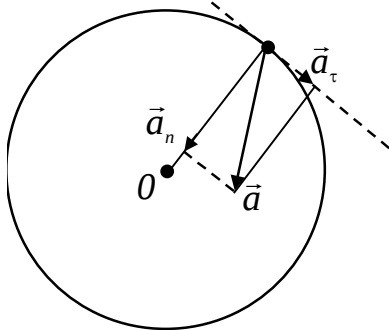


Рис. 3

$$a = 0,1\sqrt{(-4)^2 + 4^4} = 1,65 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Пример 2.

Точка начала двигаться по окружности радиусом 0,6 м с тангенциальным ускорением 0,1 м/с². Чему равны нормальное и полное ускорения в конце третьей секунды после начала движения? Чему равен угол между векторами полного и нормального ускорений в этот момент?

Дано:

$$r = 0,6 \text{ м},$$

$$a_\tau = 0,1 \text{ м/с}^2,$$

$$t = 3 \text{ с}$$

Найти:

$$a_n, a, \alpha - ?$$

Решение.

К моменту времени t точка, двигаясь равноускоренно с ускорением a_τ , приобретает скорость v , определяемую по формуле $v = a_\tau t$. Нормальное ускорение a_n точки при этом будет

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{a_\tau^2 \cdot t^2}{r} = \frac{1 \cdot 10^{-2} \cdot 9}{0,6} = 0,15 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Полное ускорение $\vec{a}$ равно геометрической сумме тангенциального и нормального ускорений $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Угол между векторами $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ всегда равен $\pi/2$, поэтому

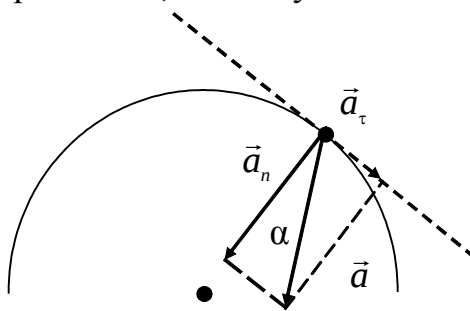


Рис. 4

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{0,1^2 + 0,15^2} \cong 0,18 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Из рис. 4 видно, что $\sin \alpha$ угла между векторами $\vec{a}_n$ и $\vec{a}$ будет равен

$$\sin \alpha = \frac{a_\tau}{a} = \frac{0,1}{0,18} = 0,556.$$

$$\text{Угол } \alpha = \arcsin 0,556 \cong 33^\circ 25'$$

Пример 3. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega = \omega_0 - \alpha\varphi$, где α и φ – положительные постоянные. В момент $t = 0$ угол $\varphi = 0$. Найдите зависимость от времени:

а) угла поворота; б) угловой скорости.

Решение. Угловая скорость ω связана с углом φ поворота формулой $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

Тогда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - \alpha\varphi. \quad (1).$$

Разделив переменные, имеем

$$\frac{d\varphi}{\omega_0 - \alpha\varphi} = dt. \quad (2)$$

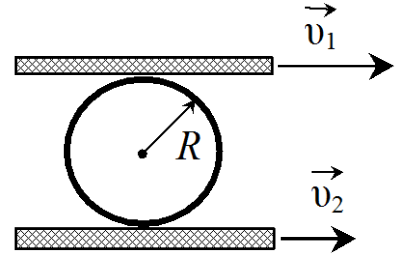
Проинтегрировав (2), найдем после несложных преобразований

$$\varphi = \frac{\omega_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}). \quad (3)$$

Продифференцировав (2), получим $\omega = \omega_0 e^{-\alpha t}$.

Ответы: $\varphi = \frac{\omega_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$; $\omega = \omega_0 e^{-\alpha t}$.

Пример 4. Цилиндрический каток радиусом 1 м помещен между двумя параллельными рейками. Рейки движутся в одну сторону со скоростями $v_1 = 4$ м/с и $v_2 = 2$ м/с. Определите угловую скорость вращения катка, если проскальзывание отсутствует.



Решение. Так как каток движется поступательно со скоростью v и вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω , то линейная скорость точек катка в системе отсчета, связанной с его осью, равна ωR . Эту скорость имеют и точки касания катка с рейками. Так как проскальзывание отсутствует, то это скорость реек в системе отсчета, связанной с катком. Тогда по теореме сложения скоростей Галилея, скорости реек относительно лабораторной системы отсчета, связанной с Землей:

$$v_1 = v + \omega R. \quad (1)$$

$$v_2 = v - \omega R.. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1) - (2), найдем

$$\omega = \frac{1}{2R}(v_1 - v_2) = 1 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: $\omega = \frac{1}{2R}(v_1 - v_2) = 1 \text{ с}^{-1}$

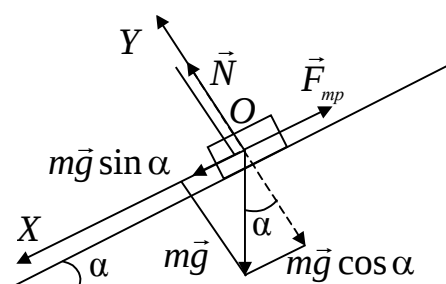


Рис. 5