

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

---

**Е.А. Тунда**

## **ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА Mathcad**

*Сборник учебно-методических материалов  
к лабораторным работам по информатике*

Издательство  
Томского политехнического университета  
2010

УДК 681.3.06(076.5)  
ББК 32.973\_018.2я73  
Т84

**Тунда Е.А.**  
Т84      Применение пакета Mathcad: сборник учебно-методических материалов к лабораторным работам по информатике / Е.А Тунда; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 44 с.

Материал пособия представлен схемами, таблицами, краткими пояснениями. В пособии приведены примеры и типовые математические задачи. Некоторые примеры можно использовать как упражнения для тренировки и проверки правильности действий с числами, переменными, выражениями, интегралами, дифференциалами, пределами, графиками функций. Представленный список литературы рекомендуется студенту для решения прикладных задач с использованием пакета Mathcad.

Предназначено для студентов 1-го курса кафедры ФМПК направления «Приборостроение», также может быть полезно студентам, преподавателям, применяющим Mathcad.

**УДК 681.3.06(076.5)**  
**ББК 32.973\_018.2я73**

*Рецензенты*

Доктор технических наук, профессор ТПУ

*Б.И. Капранов*

© ГОУ ВПО НИ ТПУ, 2010  
© Тунда Е.А., 2010  
© Оформление. Издательство Томского  
политехнического университета, 2010

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. ПЕРЕМЕННЫЕ И КОНСТАНТЫ.....	6
2. ВЫРАЖЕНИЯ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ .....	8
3. СИМВОЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ С ВЫРАЖЕНИЯМИ .....	10
4. МАТРИЦЫ И ВЕКТОРЫ. СОЗДАНИЕ МАССИВА .....	13
5. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ .....	17
6. ДЕЙСТВИЯ С ВЕКТОРАМИ .....	18
7. ВЕКТОРИЗАЦИЯ РАЗЛИЧНЫХ ОПЕРАЦИЙ .....	19
8. СИМВОЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ С МАТРИЦАМИ .....	20
9. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИЙ.....	20
10. РЯДЫ. ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММЫ. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ В РЯД .....	22
11. ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММ, ПРОИЗВЕДЕНИЙ.....	25
12. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....	26
13. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ .....	28
14. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ.....	32
15. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ .....	35
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	42
ЛИТЕРАТУРА.....	43

## **ВВЕДЕНИЕ**

В пособии приведена справочная информация решения типичных задач с помощью математического пакета Mathcad. Материал пособия представлен с учётом, что студент знает основы программирования и знаком с графическим интерфейсом пользователя пакета Mathcad.

Справочный материал в пособии представлен схемами, таблицами, пояснениями, примерами, упражнениями. Некоторые примеры можно использовать как упражнения для тренировки, приобретения навыков. Некоторые операторы приведены без результатов выполнения, т. е. только в качестве примера их использования.

Предложенная ниже тематическая таблица поможет быстрее ориентироваться в пособии.

*Таблица тематическая*

<b>№</b>	<b>Математический объект</b>	<b>Операция с объектом в Mathcad</b>	<b>Страница</b>
1	Переменные	<ul style="list-style-type: none"><li>• Обычные</li><li>• Размерные</li><li>• Ранжированные</li><li>• Форматы</li></ul>	6 6 6 6
2	Константы	<ul style="list-style-type: none"><li>• Математические</li><li>• Системные</li><li>• Размерные</li></ul>	7 7 7
3	Выражения	<ul style="list-style-type: none"><li>• Вычисления<ul style="list-style-type: none"><li>○ в комплексном виде</li><li>○ в символьном виде</li><li>○ в численном виде</li><li>○ стиль вычисления</li></ul></li><li>• Символьные операции<ul style="list-style-type: none"><li>○ упрощение</li><li>○ преобразование</li><li>○ разложение на слагаемые</li><li>○ коэффициенты полинома</li><li>○ замена переменных</li><li>○ разложение на простые дроби</li></ul></li></ul>	8, 9 12 12 13 13 10 10 11 12 11 12 12
4	Числа	<ul style="list-style-type: none"><li>• Действительные</li><li>• Комплексные</li><li>• Диапазон</li></ul>	8 8 8
5	Матрицы и векторы	<ul style="list-style-type: none"><li>• Создание массивов</li><li>• Операторы матричные</li></ul>	14 17

		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Функции матрицы</li> <li>• Действия с векторами</li> <li>• Векторизация операций</li> <li>• Символьные операции</li> <li>• Сумма вектора</li> </ul>	17 18 19 20 26
6	Пределы	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Выражения</li> <li>• Разрывной функции</li> </ul>	21 21
7	Ряды	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Сумма <ul style="list-style-type: none"> <li>○ сходящегося ряда</li> <li>○ расходящегося ряда</li> <li>○ прогрессии</li> <li>○ символьная</li> </ul> </li> <li>• Сходимость</li> <li>• Интервал сходимости</li> <li>• Разложение в ряд Тейлора</li> <li>• Разложение в ряд Маклорена</li> </ul>	22 23 25 26 23 23 24 24
8	Интеграл	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Определённый</li> <li>• С переменными пределами</li> <li>• Вычисление символьное</li> </ul>	27 27 27
9	Производная	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Первого порядка</li> <li>• Различных порядков</li> <li>• Символьное вычисление</li> <li>• С преобразованием результата</li> <li>• Функции в неявном виде</li> <li>• Обратной производной</li> </ul>	29 29, 31 29 30 31 31
10	Уравнения и системы уравнений	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Кубическое уравнение</li> <li>• Нелинейная система</li> <li>• Система уравнений</li> </ul>	32 33 32
11	Графики функций. Построение	<ul style="list-style-type: none"> <li>• На отрезке</li> <li>• Нескольких функций</li> <li>• Функции в параметрическом виде</li> <li>• Функции в полярной системе координат</li> <li>• Функции с разрывом</li> <li>• Функции табулированной (точечный график)</li> <li>• Функции двух переменных (поверхность)</li> <li>• На основе данных их таблицы (диаграмма)</li> <li>• С анимацией</li> </ul>	35 37 37 38 38 39 39 40 41

## 1. Переменные и константы

Важным моментом при работе с документами в Mathcad является инициализация переменной, константы.

**Переменные** – именованные объекты, имеющие некоторое значение, которое может изменяться по ходу выполнения программы. Имена переменных могут иметь произвольную длину, но начинаться должны с буквы. Они могут состоять из прописных и строчных букв (латинских и греческих), цифр от 0 до 9, символа бесконечности, символа подчеркивания, апострофа, символа процента (%), нижних индексов. Для того чтобы можно было вычислить выражение, зависящее от каких-либо переменных, значения этих переменных должны быть определены.

Переменной с помощью оператора присваивания  $\langle := \rangle$  может быть присвоено численное выражение. Узнать в течение расчёта значение переменной можно, набрав имя переменной и знак равенства.

Существуют локальный и глобальный способы инициализации переменной. Локальный способ инициализации предполагает, что переменная сначала объявляется, а затем используется. Глобальный способ инициализации предполагает, что первоначальное значение переменной можно присваивать в любом месте документа (табл. 1.1).

Таблица 1.1. Переменные

Обычные (числовые)	Размерные	Ранжированные	Форматы
<p><b>1. Локальные действительные</b>  <math>X := 2.5 \quad X = 2.5</math>  <math>Y := 4 \quad Y = 4</math>  <math>Z := X + Y \quad Z = 6.5</math></p> <p><b>2. Локальные комплексные</b>  <math>Z := X + Y * i</math>  <math>Z = 2.5 + 4i</math>  <math>a := 3 + 5 * i \quad a = 3 + 5i</math></p> <p><b>3. Глобальные</b>  <math>X \equiv 2 \quad X = 2</math></p>	<p><b>Инициализация, использование в выражениях</b></p> <p><math>t := 5 \cdot \text{min}</math>  <math>T := 100 \cdot \text{s}</math>  <math>t + T = 400 \text{ s}</math></p>	<p><b>Инициализация</b></p> <p><b>1. С шагом 1</b>  <math>x := 0, 1 \dots 5</math></p> <p><b>2. С шагом 1</b>  <math>x = 0 \dots 5</math></p> <p><b>3. С шагом 1,1</b>  <math>x := 1, 2.1 \dots 5</math></p> <p><b>4. С шагом (-1)</b>  <math>x := 5 \dots 0</math></p> <p><b>5. С шагом (-2)</b>  <math>x := 10, 8, \dots 1</math></p>	<p><b>1. Десятичный</b>  <math>x := 123.000</math>  <math>y := 12345.000</math>  <math>z := 12345.678</math></p> <p><b>2. Научный</b>  <math>x := 1.230 \times 10^2</math>  <math>y := 1.2345 \times 10^4</math>  <math>z := 1.235\text{E}+004</math></p> <p><b>3. Инженерный</b>  <math>x := 123.000 \times 10^0</math>  <math>y := 12.345 \times 10^3</math>  <math>z := 12.3456\text{E}+003</math></p> <p><b>4. Дробный</b>  <math>x := \frac{5}{7} \quad y := \frac{8}{9}</math>  <math>z := x + y</math>  <math>z = 1.603 \quad z = \frac{101}{63}</math>  <math>z = 1 \frac{38}{63}</math></p>

**Константы** – это именованные объекты, хранящие некоторые значения, которые не могут быть изменены. Числовые константы задаются с помощью арабских цифр, десятичной точки, знака «минус». Размерные константы задаются в виде: <числовая константа><знак умножения><единица измерения>.

Математические и системные константы инициализировать пользователю не нужно.

Точность математических констант по умолчанию составляет 15 знаков. При необходимости любые константы можно переопределить с помощью оператора присваивания или объявить собственные константы (табл. 1.2).

Таблица 1.2 Константы

Математические	Системные	Размерные
<p><b>1. Число Пи.</b>  <math>\pi = 3.142</math></p> <p><b>2. Основание натурального логарифма – e.</b>  <math>e = 2.718</math></p> <p><b>3. Процент – %.</b>  <math>\% = 0.01</math>      <math>5\% = 0.05</math>  <math>\frac{5}{\%} = 500</math>    <math>e\% = 1.01</math></p> <p><b>4. Мнимая единица i.</b>  <math>i^i = 0.208</math>.</p>	<p><b>1. Системная бесконечность <math>\infty</math>.</b>  <math>\infty = 1 \times 10^{307}</math></p> <p><b>2. Погрешность численных методов TOL.</b>  <math>TOL = 0.001</math>.</p> <p><b>3. Нижняя граница индекса массивов.</b>  <math>ORIGIN:=0</math>  <math>ORIGIN=0</math>  <math>ORIGIN:=1</math>  <math>ORIGIN=1</math></p>	<p><b>Определение размерностей</b>  <u>Ангстрем</u>    <u>Нанометр</u>  <math>An:=10^{-10}</math>    <math>nm:=10 \cdot An</math></p> <p><b>Инициализация переменных</b>  <math>a:=100 \cdot nm</math>    <math>b:=5 \cdot An</math></p> <p><b>Примеры использования</b>  <math>A=1 \times 10^{-7}</math>    <math>b=5 \times 10^{-10} m</math>  <math>\frac{a}{b} = 200</math>  <math>a-b = 9.95 \times 10^{-8} m</math></p>

**Задача 1.1.** Дано:  $v = 100$  км/час,  $t = 255$  час,  $s = v \cdot t$ . Вычислите s в метрах.

**Задача 1.2.** Запишите операторы для вычисления  $f = 6,673 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ .

## 2. Выражения. Вычисление выражений

В таблицах 2.1 и 2.2 приведены примеры ввода и вычисления выражений с использованием различного типа переменных, а также варианты использования функций.

Таблица 2.1. Примеры выражений

Числа действительные и комплексные	Использование переменных в функции пользователя	Диапазон чисел. Ранжированная переменная																																																																																									
<p>• Инициализация локальной переменной, её вычисление и использование в выражениях</p> $x := \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad x = 0.707$ $X:=2 \quad X = 2$ $X:=4 \quad X = 4$ $Y:=2$ $Z:=X+Y \quad Z = 6$ $X:=X^2 \quad X=16$ $X:=X+1 \quad X = 17$ $X:=X+1 \quad X = 18$ $Z:=X+Y \cdot 1i \quad Z = 18+2 \cdot 1i$ $a:=3+4 \cdot 1i \quad b:=2 - 1i$ $a+b=5+3i \quad a \cdot b = 10+5i$ $b^2 = 3-4i$ $\sin(b) = 1.403 + 0.489i$ <p>• Инициализация глобальной переменной и её использование</p> $L = 2 \quad (L=2 \text{ в любом месте документа после объявления глобальной переменной } L)$ $L := 9 \quad L = 9$ $L \equiv 2 \quad L=2$ $L \cdot 5 = 10$	<p>Определение функции пользователя и вычисление значений функции</p> $f(x):=2 \cdot x^2$ $x:=5$ $f(x)=50$ $f(2) = 8$ $F(x, y) := x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot y\right)$ $x:=1$ $y:=1$ $F(x, y)=1$ $F(2, 1)=2$ $F(2 \cdot x, 3 \cdot y) = -2$ $F(x, 2 \cdot x)=0$	<p>Определение диапазона переменной, вычисление её значений в виде списка, использование для вычисления значений выражения, функции.</p> <p>• Шаг дискретности 1.</p> $x := 0..5$ <table border="1" data-bbox="1034 1115 1342 1368"> <thead> <tr> <th>x =</th> <th>x<sup>2</sup> =</th> <th>sin(x) =</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>0.841</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>0.909</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td><td>0.141</td></tr> <tr><td>4</td><td>8</td><td>-0.757</td></tr> <tr><td>5</td><td>10</td><td>-0.959</td></tr> </tbody> </table> <p>• Шаги дискретности 1,5 и -2.</p> $x := 1,2,5..10 \quad y := 10,8..0$ <table border="1" data-bbox="1034 1503 1342 1944"> <thead> <tr> <th>x =</th> <th>y =</th> <th>x·y =</th> <th>sin(x·y) =</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>10</td><td>10</td><td>-0.906</td></tr> <tr><td>2.5</td><td>8</td><td>25</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>6</td><td>40</td><td>-0.917</td></tr> <tr><td>5.5</td><td>4</td><td>55</td><td>0.67</td></tr> <tr><td>7</td><td>2</td><td>70</td><td>-0.305</td></tr> <tr><td>8.5</td><td>0</td><td>85</td><td>-0.757</td></tr> <tr><td>10</td><td></td><td>100</td><td>-0.544</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>8</td><td>-0.288</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>20</td><td>-8.851·10<sup>-3</sup></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>32</td><td>0.271</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>44</td><td>0.529</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>56</td><td>0.745</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>68</td><td>0.909</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>80</td><td>-0.959</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>6</td><td>0.989</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>15</td><td>-1</td></tr> </tbody> </table>	x =	x <sup>2</sup> =	sin(x) =	0	0	0	1	2	0.841	2	4	0.909	3	6	0.141	4	8	-0.757	5	10	-0.959	x =	y =	x·y =	sin(x·y) =	1	10	10	-0.906	2.5	8	25	1	4	6	40	-0.917	5.5	4	55	0.67	7	2	70	-0.305	8.5	0	85	-0.757	10		100	-0.544			8	-0.288			20	-8.851·10 <sup>-3</sup>			32	0.271			44	0.529			56	0.745			68	0.909			80	-0.959			6	0.989			15	-1
x =	x <sup>2</sup> =	sin(x) =																																																																																									
0	0	0																																																																																									
1	2	0.841																																																																																									
2	4	0.909																																																																																									
3	6	0.141																																																																																									
4	8	-0.757																																																																																									
5	10	-0.959																																																																																									
x =	y =	x·y =	sin(x·y) =																																																																																								
1	10	10	-0.906																																																																																								
2.5	8	25	1																																																																																								
4	6	40	-0.917																																																																																								
5.5	4	55	0.67																																																																																								
7	2	70	-0.305																																																																																								
8.5	0	85	-0.757																																																																																								
10		100	-0.544																																																																																								
		8	-0.288																																																																																								
		20	-8.851·10 <sup>-3</sup>																																																																																								
		32	0.271																																																																																								
		44	0.529																																																																																								
		56	0.745																																																																																								
		68	0.909																																																																																								
		80	-0.959																																																																																								
		6	0.989																																																																																								
		15	-1																																																																																								



**Задача 2.1.** Даны действительные  $a, b$ . Вычислите  $y=2x+3x+x+5$ , где  $x = \frac{a^2 + b^2}{1 + a^2 + b^2}$ .

**Задача 2.2.** Даны действительные  $c, d$ . Переменной  $a$  присвойте значение, равное разности, а переменной  $b$  – значение, равное утроенному произведению значений переменных  $c, d$ .

**Задача 2.3.** Составьте программу, получающую значения температуры по Цельсию  $TC$  от  $-20$  до  $+20$  и температуры по Фаренгейту  $c$  с использованием формулы:  $TF := 1.8 \cdot C + 32$ .

Таблица 2.2. Примеры ввода выражений

Ввод выражений		Преобразование выражений
Выражение	Последовательность ввода символов выражения с клавиатуры	
$x := 1$ $y \equiv 5$ $\frac{x}{y} =$ $\frac{x+1}{2} + 4 =$ $x^2 =$ $x^{\sin(y)} =$ $a_1 :=  x $ $a_{1,1} := x!$ $\sqrt{x} =$  $(x+y) \cdot 2 =$ $z := 0..10$	* Буква П означает нажатие пробела  $x := 1$ $y \sim 5$ $x / y =$  $x + 1П / 2 П + 4 =$  $x^2 =$ $x^{\sin(y)} П =$  $a [1 П :=   x$ $a [1 , 1 П := x!$ $x \backslash =$  $' x + y П П * 2 =$  $z := 0 : 10$	<b>Вычисление значений функции в символьном виде</b> (Оператор символьного значения $\leftrightarrow$ выбирается на панели Symbolic)  $f(x) := 2 \cdot x^2$ $f(t) \rightarrow 2 \cdot t^2$  $F(x, y) := x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot y\right)$  $F\left(b \cdot z, \frac{1}{t}\right) \rightarrow := b \cdot z \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{t}\right)$

**Задача 2.5.** Вычислите с точностью до 0,0001 выражение  $\sqrt[5]{35}$ .

Решение:

1) Используем меню *Format* (Формат)/ *Result* (Результат), Закладка *Number Format*, поле *Number of decimal places* – устанавливаем число 4.

2) Вводим выражение и вычисляем:  $\sqrt[5]{35} = 2.0362$

**Задача 2.6.** Функция  $f(x;y)$  называется симметрической, если для любых допустимых  $x$  и  $y$  выполняется равенство  $f(x;y)=f(y;x)$ . Среди указанных функций найдите симметрические:

$$f(x,y) := x^2 - 5 \cdot x - 5 \cdot y + y^2 \quad f(x,y) := \cos(x-y)$$

$$f(x,y) := x^y + y^x \quad f(x,y) := \cos(x) - \cos(y)$$

### 3. Символьные операции с выражениями

При решении математических задач выражения, как правило, упрощаются, преобразуются, разбиваются на слагаемые и т.п.

#### Пример 3.1. Упрощение выражений

##### 1-ый вариант решения:

Если выражение упрощается полностью, его следует выделить и выбрать команду *Sybolics / Simplify* – Символика / Упростить (рис. 3.1). Результат отобразится под упрощаемым выражением (рис.3.2).

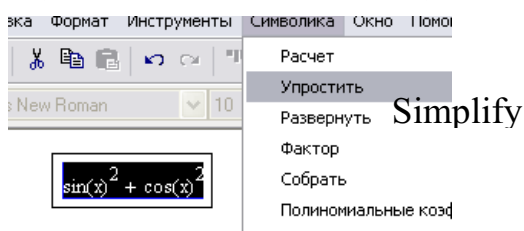


Рис. 3.1

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2$$

$$1$$

Рис. 3.2

##### 2-ой вариант решения:

Можно использовать палитру символьных вычислений. Для этого следом после ввода выражения нужно щёлкнуть по пиктограмме с названием команды *simplify* (упрощать) (рис. 3.3). В результате отображается ключевое слово *simplify* и символьное значение вычисления (рис. 3.4).

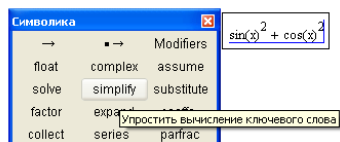


Рис. 3.3

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 \text{ simplify} \rightarrow 1$$

Рис. 3.4

### Пример 3.2. Разложение выражений на слагаемые

$$(x + y) \cdot (x - y) \cdot (x^2 + y^2) \text{ expand, } x, y \rightarrow x^4 - y^4$$
$$(x + y) \cdot (x - y) \cdot (x^2 + y^2) \text{ expand, } (x^2 + y^2) \rightarrow (x^2 + y^2) \cdot x^2 - (x^2 + y^2) \cdot y^2$$

Инструкцию *expand* (раскрыть скобки) используют по-разному. Преобразуемое выражение вводят слева от инструкции. Справа от инструкции иногда указывают часть выражения (множитель), которую при преобразовании следует оставить в неизменном виде. Выполнить обратную операцию, т. е. представить выражение в виде произведения, можно с помощью инструкции *factor* (множитель).

### Пример 3.3. Преобразование выражений

$$x^4 - y^4 \text{ factor} \rightarrow [-(y - x)] \cdot (x + y) \cdot (x^2 + y^2) \Leftarrow \text{Разложение выражений на множители}$$

$$xy + x^2 + y^2 + x^2 \cdot y^2 \text{ collect, } x \rightarrow (y^2 + 1) \cdot x^2 + xy + y^2$$

$\Leftarrow$  Группировка слагаемых по степеням

$$xy + x^2 + y^2 + x^2 \cdot y^2 \text{ collect, } y \rightarrow (1 + x^2) \cdot y^2 + xy + x^2$$

Для использования инструкции *collect* (группировать) слева указывается полиномиальное выражение, в котором следует сгруппировать слагаемые по степеням одной из переменных, а справа – та переменная, по степеням которой следует выполнять группировку.

### Пример 3.4. Коэффициенты полинома

Для выражений полиномиального типа часто бывает важно определить его коэффициенты, т. е. множители при степенных слагаемых. вектор коэффициентов полинома возвращается с помощью инструкции *coeffs* (коэффициенты). В зависимости от того, по какой переменной группируются слагаемые, различными будут и коэффициенты.

$$xy + x^2 + 2y^2 + x^2 \cdot y^2 \text{ coeffs, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot y^2 \\ y \\ y^2 + 1 \end{pmatrix} \quad xy + x^2 + 2y^2 + x^2 \cdot y^2 \text{ coeffs, } y \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 2 + x^2 \end{pmatrix}$$

### Пример 3.5. Замена переменных

Замена переменных (или подстановки) осуществляется посредством *substitute* (замена). В примере вместо переменной  $y$  введено выражение  $\sin(z)$ .

$$x \cdot y + x^2 + y^2 + x^2 \cdot y^2 \text{ substitute } , y = \sin(x) \rightarrow x \sin(x) + x^2 + \sin(x)^2 + x^2 \cdot \sin(x)^2$$

### Пример 3.6. Разложение рационального выражения на простые дроби

#### 1-ый вариант решения:

После ввода выражения используется инструкция *parfrac* и выполняется щелчок на пиктограмме *parfrac* палитры *Symbolic*.

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - x} \text{ convert, parfrac, x} \rightarrow \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1+x}$$

#### 2-ой вариант решения:

Следует ввести выражение и выделить переменную, по которой необходимо разложить рациональную функцию на простые дроби, выполнить команду меню *Symbolics / Convert / Variable / Convert to Partial Fraction* (Символика / Переменная / Преобразовать в элементарную дробь).

### Пример 3.7. Вычисление выражений

При обработке символьных выражений на некоторых этапах работы важно вычислить или оценить в численном виде значение этого выражения. Для вычисления выражения в численном виде после него указывают инструкцию *float*, справа от которой вводится число, определяющее точность вычисления выражения. Имеется возможность вычислять выражения на множестве комплексных чисел. Соответствующая инструкция носит название *complex*. При вычислении арксинуса или арккосинуса от числа, большего по абсолютной величине единицы, результат будет комплексным.

$$\text{asin}(2)^2 - \text{acos}(2)^2 \text{ complex} \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \pi^2 - i \cdot \pi \cdot \ln\left(2 + 3\frac{1}{2}\right) \Leftarrow \text{В комплексном виде}$$

$$\text{asin}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \text{acos}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{-1}{12} \cdot \pi^2 \Leftarrow \text{В символьном виде}$$

$$\text{asin}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \text{acos}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ float, 15} \rightarrow -.82246703342411 \Leftarrow \text{В численном виде}$$

### Примечание

Последний пункт меню *Evaluation Style* (стиль вычислений) открывает окно, в котором устанавливаются стили вывода результатов преобразований (рис. 3.5). В первом поле можно выбрать один из трёх переключателей:

1. Вертикальный стиль с вставкой строки комментария. В этом случае ниже преобразуемого выражения пишется комментарий, а на следующей строке выводится результат преобразования.

2. Вертикальный стиль без вставки строки комментария. Результат преобразований выводится на следующей строке. Это стиль устанавливается по умолчанию.

3. Горизонтальный. Результат выводится правее преобразуемого выражения.

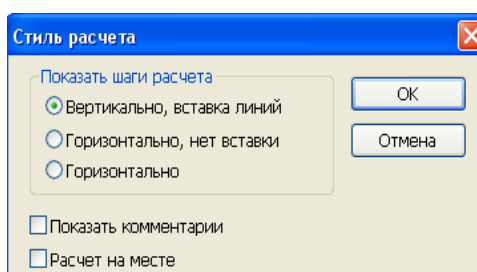


Рис. 3.5

**Задача 3.1.** Упростите выражения и найдите их значения при  $x = 1$ ,  $y = -8$ .

$$\begin{aligned} & (-0.3 \cdot x + y)^2 - (0.4x + 0.1 \cdot y) \cdot (0.1 \cdot y - 0.4x) - (0.9y - 2 \cdot x) \cdot (1.1 \cdot y + x) \\ & \frac{a + \sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} + \frac{a - 1}{1 + \sqrt{a}} - 2\sqrt{a} \quad \frac{1 - \sin(a)^2}{\cos(a)^2} - (\cos(a) \cdot \tan(a))^2 \end{aligned}$$

**Задача 3.2.** Сократите дробь:

$$\frac{4 \cdot x + 12 \cdot y}{3 \cdot x + 9 \cdot x} \quad \frac{x^2 - y^2}{3 \cdot x - 3 \cdot y} \quad \frac{3 \cdot x^2 + xy + x}{y^2 + 3 \cdot xy + y} \quad \frac{x^4 + 3 \cdot x^2 + 4}{x^2 - x + 2}$$

## 4. Матрицы и векторы. Создание массива

Матрицы и векторы реализуются в Mathcad в виде массивов, т. е. матрица – это массив размерностью два, а вектор – с размерностью один. Задаются векторы и матрицы различным способом. В таблице 4.1 приведены способы инициализации массивов.

Таблица 4.1. Создание массивов

Задание и проверка начального индекса массива	$\text{ORIGIN} := 1$ $\text{ORIGIN} = 1$ $\text{ORIGIN} := 0$ $\text{ORIGIN} = 0$
1. Инициализация массива с помощью палитры матрицы	$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & -2 + i & \sin(2) \\ \sqrt{2} & 1 & 2 + 5i \\ 6 & \exp(2) & e^2 \end{pmatrix} \quad p := 2$ $D := (p \quad p + 2 \quad p + 3)$ $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 4.5 & -2 + i & 0.909 \\ 1.414 & 1 & 2 + 5i \\ 6 & 7.389 & 7.389 \end{pmatrix} \quad D = (2 \quad 4 \quad 5)$
2. Инициализация массива через другой массив или с использованием функций матрицы	$Q := 2 \cdot X \quad Z := X + Y \quad E := B^T \quad D := D^T$ $Q = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 5.5 & i & 3.909 \\ 5.414 & 6 & 8 + 5i \\ 13 & 15.389 & 16.389 \end{pmatrix} \quad E = (1 \quad 2 \quad 3) \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
3. Инициализация массива с использованием функции <i>matrix</i>	$\text{ORIGIN} = 0$ $F1(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2} \quad Q1 := \text{matrix}(3, 4, F1)$ $Q1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1.414 & 2.236 & 3.162 \\ 2 & 2.236 & 2.828 & 3.606 \end{pmatrix}$ <p>Здесь для матрицы Q1 размера <math>x \times y</math> используется функция <math>F1(x, y)</math> и <math>i = 0, 1, 2, \dots, x-1</math>; <math>j = 0, 1, 2, \dots, y-1</math>; при значении <math>\text{ORIGIN} = 0</math></p>
4. Инициализация массива с использованием функций объединения, подматрицы	$R1 := \text{stack}(X, Y) \quad R2 := \text{augment}(X, Y)$ $R1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4.5 & -2 + i & 0.909 \\ 1.414 & 1 & 2 + 5i \\ 6 & 7.389 & 7.389 \end{pmatrix} \quad R2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4.5 & -2 + i & 0.909 \\ 4 & 5 & 6 & 1.414 & 1 & 2 + 5i \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 7.389 & 7.389 \end{pmatrix}$ $\text{ORIGIN} = 0 \quad \text{ORIGIN} := 1$ $Z2 := \text{submatrix}(X, 1, 2, 1, 2) \quad Z3 := \text{submatrix}(X, 1, 2, 1, 2)$ $Z1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Z3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

5. Поэлементное присваивание значений

$ORIGIN = 0$   $k := 1..5$   
 $RU_{1,1} := -2$   $d_1 := 0$   $U_2 := 5$   $i := 1..5$   $P_{2,k} := 0$   
 $RU_{1,2} := -4$   $d_2 := 1.2$   $U_3 := 6$   $UU_i := i^2$   $P_{2,k-1} := 1$   
 $RU = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$   $d_3 := 2.3$   $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.2 \\ 2.3 \end{pmatrix}$   $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$   $UU = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \end{pmatrix}$

	0
0	0
1	1
2	0
3	1
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	1
10	0

$i := 0..4$   $i := 1..5$   
 $j := 0..5$   $EE_{2,i} := 2 \cdot i$   
 $RR_{i,j} := i + j$   $EE_{2,i-1} := 2 \cdot i - 1$

	0
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10

$RR = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

**Задачи на тему «Матрицы»**

4.1. Даны три матрицы

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -3 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -3 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{9} \end{pmatrix}$$

- а) Равны ли матрицы A и B (найдите разность)? B и C?
- б) Верно ли равенство  $A+B=2 \cdot A$ ?
- в) Найти сумму  $A+C$ .
- г) Найти матрицу  $D=A+(-1) \cdot B+2 \cdot C$ .
- д) Создайте матрицы A и B (4x4) по формулам:

$$F(x,y) := \sqrt{x} + \sqrt{y}; \quad f(x,y) := x^2 + y^2$$

е) Создайте матрицу  $Q$ , элементы которой вычисляются по формуле:

$$Q_{i,j} := A_{i,j} + B_{i,j}$$

4.2. Дана матрица  $A$ . Доказать, что для любого натурального числа  $n$ :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3. Покажите, что если матрица  $A$  – невырожденная, то:

а)  $\det(A^2) > 0$ ;

б) матрица  $A^2$  имеет обратную, причём  $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ , т. е. обратная матрица для квадрата матрицы  $A$  равна квадрату обратной матрицы для матрицы  $A$ ;

в) для любого натурального числа  $n$  справедливо равенство  $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ .

4.4. Создайте матрицу, элементами которой будут значения натуральных логарифмов соответствующих элементов другой матрицы.

4.5. Даны матрицы  $M1$  и  $M2$ . Получите другую из двух столбцов:

а) объединением второго столбца  $M1$  и третьего столбца  $M2$ .

б) из одного столбца, элементы которого есть сумма соответствующих элементов  $M1^{(1)}$  и  $M2^{(2)}$ .

4.6. Дан массив:  $3 \cdot \ln(5)$ ;  $\sin(1) + \cos(1)$ ;  $7$ ;  $2 \cdot 0,75^2$ ;  $18$ .

а) Получите значение максимального элемента.

б) Отсортируйте массив по возрастанию.

4.7. Найдите сумму чисел:  $1$ ;  $\sin(0,5)$ ;  $e^{0,5}$ ;  $\ln(2)$ ;  $12$ .

4.8. Используя функцию *matrix* и функции  $f(i, j) := 10 \cdot (i+1) + (j+1)$  и  $g(x, y) = x^2$ , получите матрицу  $M1$  с размером  $5 \times 5$  и вектор  $M2$  с размером 4.

4.99. Найдите сумму чётных элементов одномерного массива.

4.10. Найдите сумму чисел второго столбца и первой строки матрицы  $M1$ . Замените элементы третьего столбца матрицы  $M1$  на нули.

4.11. Даны два вектора. Найдите их скалярное произведение.



## 5. Действия с матрицами

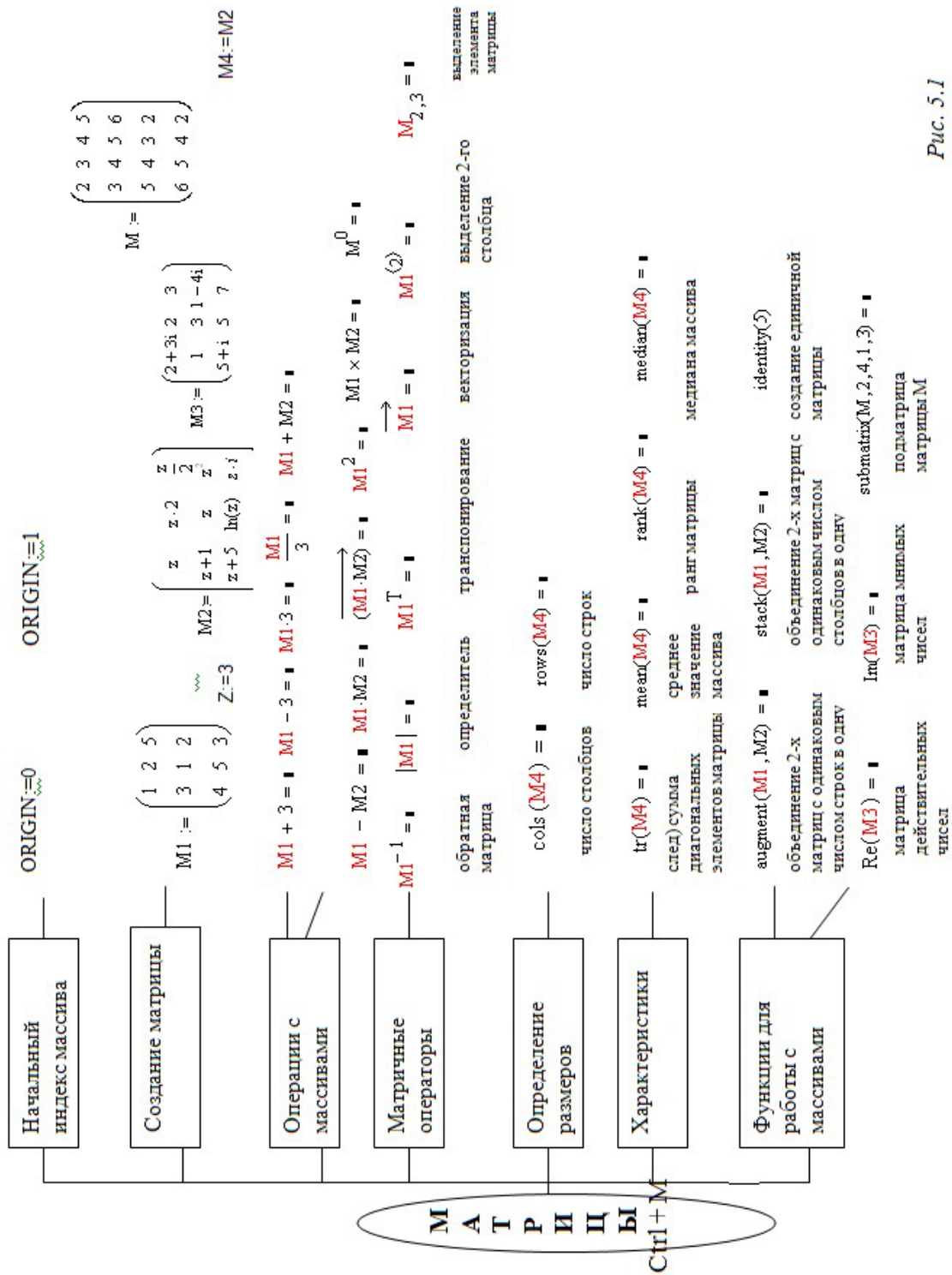


Рис. 5.1

## 9. Действия с векторами

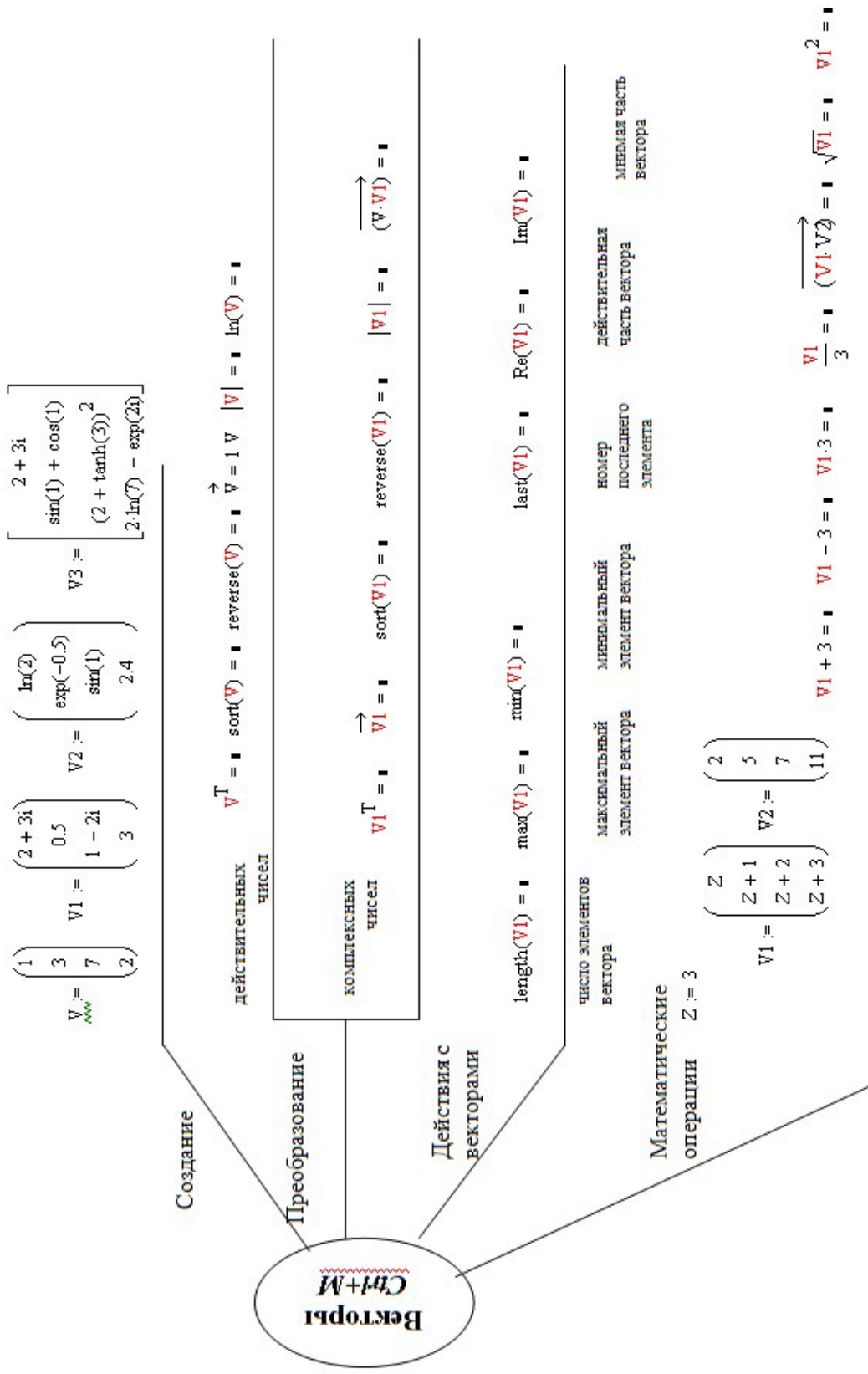


Рис. 6.1

## 7. Векторизация различных операций

После применения процедуры векторизации над соответствующим выражением появляется символ вектора. По символу вектора определяется, к какой части команды была применена векторизация.

### Инициализация массивов

$$\underline{\underline{A}} := \frac{\pi}{12} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{F}} := \frac{12}{\pi} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B := (1 \ -2 \ 3 \ -4 \ 5) \quad \underline{\underline{C}} := (1 \ 2 \ 3) \quad D := (3 \ 2 \ 1)$$

### Примеры векторизации операций

$$\overrightarrow{\sin(A)} = \begin{pmatrix} 0.259 & 0.5 & 0.707 \\ 0.866 & 0.966 & 1 \end{pmatrix} \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{l} \text{Аргументом синуса является} \\ \text{матрица. В результате} \\ \text{вычисляется матрица, элементы} \\ \text{которой равны синусам элементов} \\ \text{исходной матрицы.} \end{array}$$

$$\overrightarrow{(A \cdot F)} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 12 \\ 12 & 10 & 6 \end{pmatrix} \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{l} \text{Результатом операции является} \\ \text{матрица, элементы которой} \\ \text{получаются умножением} \\ \text{соответствующих элементов} \\ \text{исходных матриц.} \end{array}$$

$$\sum B = 3 \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{l} \text{Сумма элементов} \\ \text{вектора. Векторизация} \\ \text{не применялась} \end{array} \quad \sum |\underline{\underline{B}}| = 15 \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{l} \text{Сумма модулей} \\ \text{элементов} \\ \text{вектора} \end{array}$$

$$\sqrt{\sum \underline{\underline{B}}^2} = 7.416 \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{l} \text{Корень квадратный из} \\ \text{суммы квадратов} \\ \text{элементов вектора} \\ \text{(модуль вектора)} \end{array} \quad D^T \cdot C^T = 10 \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{l} \text{Скалярное} \\ \text{произведение} \\ \text{векторов} \end{array}$$

$$\overrightarrow{(D \cdot C)} = (3 \ 4 \ 3) \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{l} \text{Результатом операции является вектор-строка,} \\ \text{элементы которого равны произведению} \\ \text{соответствующих элементов исходных векторов} \end{array}$$

$$\overrightarrow{(D^T \cdot C^T)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{l} \text{Результатом операции является вектор-столбец,} \\ \text{элементы которого равны произведению} \\ \text{соответствующих элементов исходных} \end{array}$$

$$\overrightarrow{F^A} = \begin{pmatrix} 2.27 & 4.685 & 8.511 \\ 12.857 & 14.319 & 8.208 \end{pmatrix} \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{l} \text{Результатом операции является матрица,} \\ \text{элементы которой равны элементам} \\ \text{матрицы } F, \text{ возведённым в степень,} \\ \text{определяемую элементами матрицы } \underline{\underline{A}} \end{array}$$

$$\overrightarrow{A^{F^A}} = \begin{pmatrix} 0.048 & 0.048 & 0.128 \\ 1.809 & 47.26 & 40.72 \end{pmatrix} \quad \Leftarrow \quad \begin{array}{l} \text{Результатом операции является матрица, элементы} \\ \text{которой равны элементам матрицы } A, \text{ возведённым} \\ \text{в степень, определяемую элементами матрицы } F, \\ \text{возведёнными в степень, определяемую в свою} \\ \text{очередь, элементами матрицы } A. \end{array}$$

## 8. Символьные операции с матрицами

Основными операциями символьных преобразований при работе с матрицами являются транспонирование, нахождение обратной матрицы и вычисление определителя (детерминанта).

### Инициализация и транспонирование

$$X := \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \Leftarrow \text{Инициализация матрицы в символьном виде}$$

$$X^T \rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} \Leftarrow \text{Транспонированная матрица}$$

### Вычисление обратной матрицы

$$X^{-1} \rightarrow \frac{1}{x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}} \cdot \begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{pmatrix} \Leftarrow \text{Обратная матрица}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftarrow \text{Вычисление обратной матрицы}$$

### Вычисление детерминанта матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftarrow \text{Матрица} \qquad \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \Leftarrow \text{Матрица}$$

$$-2 \Leftarrow \text{Детерминант} \qquad |X| \rightarrow x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} \Leftarrow \text{Детерминант}$$

## 9. Вычисление пределов числовых последовательностей и функций

Символьное вычисление пределов числовых последовательностей и функций в Mathcad выполняется с помощью трёх кнопок оператора предела с палитры *Calculus* (Исчисление) и символа  $\leftrightarrow$  (рассчитать) с палитры *Evaluation* (Расчёт) или также с помощью трёх кнопок оператора предела с палитры *Calculus* (Исчисление) и использования команды *Evaluate/ Evaluation Style* (Расчёт/ Символически) меню *Symbolic* (Символика) (табл. 9.1).

Кнопка  $\lim_{\rightarrow a}$  позволяет вычислить пределы функции или последовательности при стремлении аргумента к некоторому конечному числу  $a$  или к бесконечности. Кнопки  $\lim_{\rightarrow a^+}$  и  $\lim_{\rightarrow a^-}$  используются для вычисления односторонних пределов справа и слева.

Таблица 9.1. Примеры вычисления пределов

<p><b>Пример 9.1.</b> Вычисление предела с использованием различных способов</p>	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$ <p>ИЛИ</p> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
<p><b>Пример 9.2.</b> Определить предел выражения</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 4 + 6 + \dots + 2 \cdot n}{7 \cdot n^2}$	<p>Решение: В числителе находится сумма <math>n</math> слагаемых. Запишем условие этого примера в другом виде. Результат:</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^n (2 \cdot m)}{7 \cdot n^2} \rightarrow \frac{1}{7}$
<p><b>Пример 9.3.</b> Вычисления пределов</p>	$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(a^x + b^x)}{2} \right]^{\frac{1}{x}} \rightarrow a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 4)}{\sqrt{4 \cdot x^4 + 2}} \rightarrow \frac{3}{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + x + 1)}{2 \cdot x + 5} \rightarrow \infty$
<p><b>Пример 9.4.</b> Предел разрывной функции</p>	<p>Решение: 1. Инициализация функции. 2. Вычисление первого предела (в точке разрыва). 3. Вычисление пределов слева и справа. 4. Вычисление значений функции в окрестностях точки. Результат:</p> $f(x) := \frac{2}{1-x} - \frac{5}{1-x^3} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \text{undefined}$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \rightarrow \infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow -\infty$ $f(0) = -3 \quad f(0.000001) = -3 \quad f(-0.000001) = -3$

**Задача 9.1.** Найти односторонние пределы функции  $\frac{x}{\sqrt{1-\cos(x)}}$  для  $x \rightarrow 0$ . (Ответы:  $+\sqrt{2}$  и  $-\sqrt{2}$ ). Для подтверждения полученных результатов найдите значения функции  $f(x)$  в точках близких к нулю, т. е.  $f(-0.000001)$  и  $f(0.000001)$ .)

**Задача 9.1.** Найдите значения пределов:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-1)}{2n+3}$  ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^2 - 6)}{4n^2 + 1} \quad (\text{Отв.: } 2 \text{ и } 3/4.)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3^n + 2^n)}{5 + 2 \cdot 3^n} ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{6n^2 + 2n - 1}{3n^2 - n + 7} \right) \quad (\text{Отв.: } 1/2. \text{ и } \infty)$$

## 10. Ряды. Исследование сходимости. Вычисление суммы. Разложение функции в ряд


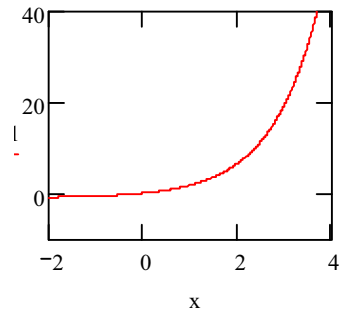
Символьное вычисление конечных сумм и сходящихся числовых рядов в Mathcad выполняется с помощью кнопки оператора суммирования с палитры *Calculus* (Исчисление)  и символа  $\langle \rightarrow \rangle$  (рассчитать) с палитры *Evaluation* (Расчёт). Вычисление значения суммы сходящегося ряда производится с использованием знака равенства. Исследование сходимости ряда производится с использованием пределов и символьного вычисления. Для разложения функции по степеням используются команда «разложить функцию в ряд Маклорена по степеням  $x$ ». В таблице 10.1 рассмотрены различные случаи вычисления рядов.

Таблица 10.1. Вычисление рядов

<p><b>Пример 10.1.</b> Сумма сходящегося ряда</p> $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots$	<p>Решение:</p> <p>1) Известно, что общий член данного ряда <math>a_n = \frac{2 \cdot n - 1}{2^n}</math></p> <p>2) Для вычисления суммы ряда можно использовать следующую последовательность нажатия клавиш: Ctrl+Shift+4, (2*n-1)/2^n-1, Tab, n, Tab, 1, Tab, Ctrl+Shift+z, Ctrl+., Enter)</p> <p>Результат:</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{2^n} \rightarrow 3$
<p><b>Пример 10.2.</b> Сумма расходящегося ряда</p>	<p>Решение:</p> <p>1) Если для данного ряда выполнить символьное вычисление суммы ряда, то в результате получится, что ответ похож на условие, т. е. Mathcad не находит сумму ряда.</p> <p>2) Возможно, что ряд расходится. Следует произвести</p>

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	<p>исследование сходимости ряда. Предел общего члена ряда покажет сходимость или расходимость данного ряда.</p> <p>3) Решение показывает, что данный ряд расходится. Поэтому сумму ряда следует определить как функцию для суммы первых слагаемых.</p> <p>Результат:</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $a(n) := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a(n) \rightarrow e$ $S(n) := \sum_{n=1}^N a(n)$ $S(100) = 266.036 \quad S(1000) = 2.709 \times 10^3 \quad S(100000) = 2.718 \times 10^6$
<p><b>Пример 10.3.</b> Исследование сходимости ряда</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$	<p>Решение: Известно, что сходимость ряда можно определить, если в результате символьного вычисления получится более простое выражение. Для получения простого выражения используется команда <i>simplify</i> (упростить) с палитры <i>Symbolic</i> (Символика).</p> <p>Результат:</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \text{ simplify } \rightarrow e - 2$
<p><b>Пример 10.4.</b> Нахождение интервала сходимости степенного ряда и построение графика функции на найденном интервале</p> $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	<p>Решение: Будем исследовать сходимость ряда по признаку Даламбера. Если предел отношения предыдущего и последующего членов ряда будет стремиться к нулю, то ряд будет сходящимся на всей числовой оси. Графиком функции будет упрощенное значение суммы ряда.</p> <p>Результат:</p> $a(n, x) := \frac{x^n}{n!} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n+1, x)}{a(n, x)} \rightarrow 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightarrow e^x \cdot (1 - e^{-x})$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightarrow e^x \cdot (1 - e^{-x}) \text{ simplify } \rightarrow e^x - 1$ 

<p><b>Пример 10.5.</b> Разложение в ряд Тейлора функции</p> $f(x) := \frac{x-2}{x^2+4x+8}$ <p>по степеням <math>(x+2)</math>.</p>	<p>Решение:</p> <p>1) Для заданной функции сделаем замену переменных: <math>t = x+2</math>. Для этого после ввода выражения функции нужно ввести команду <i>substitute</i> (замена) на палитре <i>Symbolic</i> (Символика), в первой помеченной позиции команды ввести имя переменной <math>x</math>, а во второй <math>t-2</math>.</p> <p>2) Для упрощения выражения нажать кнопку команды <i>simplify</i> (упростить).</p> <p>3) Скопировать полученную функцию и нажать кнопку команды <i>series</i>, в первой помеченной позиции введём имя переменной <math>t</math>, по которой необходимо разложить функцию в ряд Тейлора, а во вторую зададим количество членов разложения – 6.</p> <p>Результат:</p> $\frac{x-2}{x^2+4x+8} \text{ substitute , } x = t-2 \rightarrow \frac{t-4}{(t-2)^2+4t} \text{ simplify } \rightarrow \frac{t-4}{t^2+4}$ $\frac{t-4}{t^2+4} \text{ series , } t, 6 \rightarrow (-1) + \frac{1}{4} \cdot t + \frac{1}{4} \cdot t^2 - \frac{1}{16} \cdot t^3 - \frac{1}{16} \cdot t^4 + \frac{1}{64} \cdot t^5$
<p><b>Пример 10.6.</b> Разложение в ряд Маклорена функции</p> $\frac{1}{x^2-3x+2}$	<p>Решение:</p> <p>Вводим функцию и нажимаем кнопку команды <i>series</i> палитры <i>Symbolic</i> (Символика). В помеченных позициях вводим <math>x</math> и 7. Получим первые семь членов в разложении функции в ряд Маклорена.</p> <p>Результат:</p> $\frac{1}{x^2-3x+2} \text{ series , } x, 7 \rightarrow$ $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot x + \frac{7}{8} \cdot x^2 + \frac{15}{16} \cdot x^3 + \frac{31}{32} \cdot x^4 + \frac{63}{64} \cdot x^5 + \frac{127}{128} \cdot x^6$

**Задача 10.1.** Общий член арифметической прогрессии задан формулой  $a_n = 5n + 3$ . Найдите  $a_1, a_{13}$ .

**Задача 10.2.** Найдите сумму:

$$\begin{aligned}
 & 1 + 3 + 5 + 6 + \dots + 99 && 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 100 \\
 & \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} && \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{100} \\
 & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 101} && \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 101 \cdot 102} \\
 & 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + k \cdot k!
 \end{aligned}$$

**Задача 10.3.** Вычислите произведение  $(1+2) \cdot (3+4) \cdot (5+6) \cdot \dots$ , состоящее из 50 множителей.



## 11. Вычисление сумм, произведений

Для нахождения суммы, произведения элементов ряда используется палитра *Calculus* (Исчисление), для суммирования элементов матрицы – палитра *Matrix* (матрицы).

Нахождение суммы и произведения ряда имеют назначения:

- 1) символьное вычисление;
- 2) вычисление значения суммы.

Оператор суммирования ряда может использоваться в различных вариантах (таблица 11.1):

- 1) слагаемые имеют общий вид, в котором отражается связь с индексной переменной;
- 2) индексная переменная принимает значения:
  - нижняя и верхняя границы диапазона;
  - с шагом, отличным от единицы.

Таблица 11.1. Вычисление суммы, произведения

<b>Пример 11.1.</b> Нахождение суммы элементов прогрессии	$y := 1, 3.. 10 \quad \sum_y y = 25$ $y := 1, 3.. 10 \quad \sum_x x = 55$
<b>Пример 11.2.</b> Нахождение суммы ряда, элементы которого заданы функцией	$i := 1.. 10 \quad \sum_i \sin(i \cdot 0.1) = 5.014$
<b>Пример 11.3.</b> Нахождение суммы элементов вектора	$x := (3 \quad -5 \quad 2 \quad 1) \quad \sum x = 1$
<b>Пример 11.4.</b> Нахождение суммы элементов вектора	$x := \left( \frac{2}{5} \quad \sin(4) \quad \ln(6) \quad -6 \right) \quad x := x^T \quad \sum_{i=0}^3 x_i = -4.565$
<b>Пример 11.5.</b> Нахождение суммы ряда функции	$\sum_{n=1}^n n \rightarrow \frac{1}{2} \cdot (n+1)^2 - \frac{1}{2} \cdot n - \frac{1}{2}$ $\sum_{n=1}^n n^3 \rightarrow \frac{1}{4} \cdot (n+1)^4 - \frac{1}{2} \cdot (n+1)^3 + \frac{1}{4} \cdot (n+1)^2$

**Задача 11.1.** Вычислите суммы следующих чисел:

- 3; 5; 9; 11; 21;
- 1;  $\sin(0,5)$ ;  $e^{0.5}$ ;  $\ln(2)$ ; 12;
- $3 \cdot \ln(5)$ ;  $\sin(1) + \cos(1)$ ; 7; 2.0;  $7.5^2$ ; 18.

**Задача 11.2.** Найдите суммы следующих функций:

$$\sum_{x=0}^{\infty} e^{-x}; \quad \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^i}{i!}; \quad \sum_{n=1}^{100} n; \quad \sum_{n=1}^{100} n!; \quad \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n}; \quad \sum_{n=1}^n n; \quad \sum_{n=1}^n n^2; \quad \sum_{n=1}^n n^3.$$

**Задача 11.3.** Вычислите произведение ряда следующих чисел:

- x от 1 до 20 с шагом 0,2;
- 2,5; e<sup>3</sup>; ln(5); 3; sin(0,5);
- e<sup>x</sup> при x от 0 до 5;
- x+ln(x)+sin(x) при x=от 1 до 100;
- n! при n от 1 до 10

$$\prod_{x=0}^5 \exp(x)$$

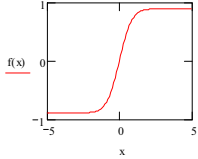
- заданной функции

## 12. Интегрирование функции одной переменной

Символьное вычисление интегралов в Mathcad выполняется с помощью кнопок интегралов определённого и неопределённого с палитры *Calculus* (Исчисление) и символа  $\longleftrightarrow$  (рассчитать) с палитры *Evaluation* (Расчёт). Вычисление значения определённого интеграла производится с использованием знака равенства. В таблице 12.1 приведены примеры расчёта различных интегралов.

Таблица 12.1. Вычисление интеграла

Вычисление определённого интеграла	
<b>Пример 12.1.</b> Определённые интегралы	$\int_0^1 x^{20} dx = 0.048$ $\int_0^1 x dx = 0.5$ $p := 0.5$ $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = 2$
	$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = 0.5$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx = 0.347$
	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = 2.221$ $\int_0^4 \frac{4}{x^2 + 5 \cdot x + 7} dx = 0.928$
	$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.747$

<p><b>Пример 12.2.</b> Определённые интегралы с переменными пределами</p>	<p>Интегралы можно использовать как функции. Например, построим график функции</p> $f(x) := \int_0^x e^{-t^2} dt \quad x := -5, -4.9.. 5$ 
<p><b>Вычисление интегралов в символьном виде</b></p>	
<p><b>Пример 12.3</b> (Первый способ)</p>	<p>“Ctrl+I” x^4П*”Ctrl+” 1-3x^5 Tab x Tab 4 “Ctrl+.” Enter</p> $\int x^4 \cdot \sqrt[4]{1-3 \cdot x^5} dx \rightarrow \frac{-4}{75} \cdot (1-3 \cdot x^5)^{\frac{5}{4}} \quad \int \frac{x^2}{7 \cdot x^3 + 1} dx \rightarrow \frac{1}{21} \cdot \ln(7 \cdot x^3 + 1)$
<p><b>Пример 12.4</b> (Второй способ)</p>	<p>1) Ввести выражение. 2) Выделить переменную, по которой вычисляется интеграл. 3) Выбрать команду <i>Symbolics</i> (Символика)   <i>Variable</i> (Переменная)   <i>Integrate</i> (Интегрировать)</p> $x^4 \cdot \sqrt[4]{1-3 \cdot x^5}$ $\frac{-4}{75} \cdot (1-3 \cdot x^5)^{\frac{5}{4}}$
<p><b>Пример 12.5</b></p>	$\int \frac{x^2}{(x^2 + 4) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)} dx \rightarrow \cdot$ $\cdot \frac{-1}{10} \cdot \ln(x + 2) + \frac{9}{65} \cdot \ln(x - 3) - \frac{1}{52} \cdot \ln(x^2 + 4) + \frac{5}{26} \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$
<p><b>Пример 12.6</b></p>	$\int_0^1 x^{20} dx \rightarrow \frac{1}{21} \quad \int_0^1 t dx \rightarrow t \quad p := 0.5 \quad \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \rightarrow 2. \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \rightarrow 1$ $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx \rightarrow \infty \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \ln(2) \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^4} dx \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^{\frac{1}{2}}$ $\int_0^4 \frac{4}{x^2 + 5 \cdot x + 7} dx \rightarrow \frac{8}{3} \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{13}{3} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{8}{3} \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{5}{3} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \frac{1}{3^2}$

	$\int_0^1 e^{-x^2} dx \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erf}(1) \cdot \pi^{\frac{1}{2}}$
--	--

**Задача 12.1.** Вычислите значение определённого интеграла:

$$\int_a^{2 \cdot a} (x^2 + 2 \cdot a \cdot x) dx \quad \int_a^{2 \cdot x} (x^2 + 2 \cdot a \cdot x) da \quad \int_{\log(3,2)}^2 2^x dx \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sin(x)^2} dx$$

**Задача 12.2.** Для заданного значения  $a$  найдите интеграл:

$$\int_3^a |x| + |x - a| dx \quad \int_0^a (|x| + x - a) dx$$



**Задача 12.3.** Вычислите интеграл:

$$\int_{-2}^{-1} |x| + |x - 3| dx \quad \int_3^4 (|x| + x - 2) dx$$

### 13. Дифференцирование функции одной переменной

Вычисление дифференциалов в Mathcad выполняется с помощью кнопок оператора дифференцирования первого порядка и дифференцирования высокого порядка с палитры *Calculus* (Исчисление) и символа равенства. Символьное вычисление дифференциалов выполняется с помощью кнопок оператора дифференцирования и символа  $\leftrightarrow$  (рассчитать) с палитры *Evaluation* (Расчёт).

Таблица 13.1. Дифференцирование функции одной переменной

Ввод оператора вычисления производной	
Производная первого порядка	Комбинация клавиш <Schift> + </> или пиктограмма палитры Calculus  .
Производная высокого порядка	Комбинация клавиш <Ctrl> + <Schift> + </> или пиктограмма палитры Calculus  .
<b>Вычисление производной</b>	

<b>Пример 13.1.</b> Вычисление производной	$f(x) := x \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{5}\right) \quad x := 2.5$ $\frac{d}{dx} f(x) = 1 \quad \frac{d}{dx} (x^2 + x + 1) = 6$		
<b>Пример 13.2.</b> Вычисление производных различных порядков	$f(x) := x \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{5}\right) \quad x := 2.5$ $\frac{d^4}{dx^4} f(x) = 0,39 \quad \frac{d^2}{dx^2} (x^2 + x + 1) = 2$		
<b>Пример 13.3.</b> Вычисление производных для диапазона значений	$f(x) := x \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{5}\right) \quad x := 0, 1 .. 10$ $\frac{d}{dx} f(x) = \quad \frac{d}{dx} (x^2 + x + 1) =$		
<b>Символьное вычисление производной</b>			
<b>Пример 13.4.</b> Производная от выражения с использованием команд меню <i>Symbolics</i> .	Дана функция $x^2$ . Решение: <table border="1" style="float: right; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>x^2</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>2x</math></td> </tr> </table> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) Ввести выражение <math>x^2</math>.</li> <li>2) Выполнить команды: <i>Symbolics</i> (Символика)/ <i>Variable</i> (Переменная)/ <i>Differentiate</i> (Дифференцировать)</li> <li>3) Выделить переменную дифференцирования – <math>x</math>.</li> </ol>	$x^2$	$2x$
$x^2$			
$2x$			
<b>Пример 13.5.</b> Производная от выражения с использованием оператора вычисления $\frac{d}{dx}$ и команд меню <i>Symbolics</i> .	Дана показательно-степенная функция $y = \sin(x)^{\cos(x)}$ . Решение: $\frac{d}{dx} \sin(x)^{\cos(x)} \rightarrow \sin(x)^{\cos(x)} \cdot \left[ (-\sin(x)) \cdot \ln(\sin(x)) + \frac{\cos(x)^2}{\sin(x)} \right]$		
<b>Пример 13.6.</b> Производная от выражения с использованием оператора вычисления $\frac{d}{dx}$ и команды <i>Symbolics</i> .	Дана показательно-степенная функция $y = \sin(x)^{\cos(x)}$ . Решение: $\frac{d}{dx} \sin(x)^{\cos(x)} \rightarrow \sin(x)^{\cos(x)} \cdot \left[ (-\sin(x)) \cdot \ln(\sin(x)) + \frac{\cos(x)^2}{\sin(x)} \right]$		

<p><b>Пример 13.7.</b> Использование оператора <math>\frac{d}{dx}</math> и операции <i>simplify</i> для преобразования полученного результата к более простому выражению. (Первый способ)</p>	<p>Дана функция <math>y = \arccos^5 \cos(2 - 4x)</math>.</p> <p>Решение:</p> <p>1) <math>\frac{d}{dx} (\arccos(\cos(2 - 4x)))^5 \rightarrow 20 \cdot \arccos[\cos[(-2) + 4x]]^4 \cdot \frac{\sin[(-2) + 4x]}{[1 - \cos[(-2) + 4x]^2]^2}</math></p> <p>2) Копируем полученный результат и подаём команду <i>simplify</i>.</p> <p><math>20 \arccos[\cos[(-2) + 4x]]^4 \cdot \frac{\sin[(-2) + 4x]}{[1 - \cos[(-2) + 4x]^2]^2} \text{ simplify} \rightarrow 20 \arccos[\cos[(-2) + 4x]]^4 \cdot \frac{1}{[1 - \cos[(-2) + 4x]^2]^2}</math></p> <p>(<i>csgn(x)</i> – функция, возвращающая знак своего аргумента).</p>
<p><b>Пример 13.8.</b> Использование оператора <math>\frac{d}{dx}</math> и операции <i>simplify</i> для преобразования полученного результата к более простому выражению. (Второй способ)</p>	<p>Решение:</p> <p><math>y(x) := \frac{x}{\sqrt{x+1}}</math></p> <p><math>\frac{d}{dx} y(x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{x+2}{(x+1)^2}</math></p> <p><math>y = \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \frac{d}{dx} \left( \operatorname{acot}\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \text{ simplify} \rightarrow 2 \cdot \frac{x}{x^4 + 1}</math></p>
<p><b>Пример 13.9.</b> Производная от функции, заданной в неявном виде.</p>	<p>Дана функция <math>F(x, y) = x^3 + x^2 \cdot y + y^2 = 0</math>.</p> <p>Решение:</p> <p>Будем использовать математическую формулу для вычисления производной функции, заданной в неявном виде <math>F(x, y) = 0</math>:</p> $y' = \frac{\frac{dF(x, y)}{dx}}{\frac{dF(x, y)}{dy}}$ <p>1) Вводим функцию: <math>F(x, y) := x^3 + x^2 \cdot y + y^2</math>.</p> $\frac{dF(x, y)}{dx} \rightarrow 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y$ <p>3) Вычисляем <math>y'</math>:</p> $\left( \frac{dF(x, y)}{dy} \right) \rightarrow x^2 + 2 \cdot y$

<p><b>Пример 13.10.</b> Вычисление <math>x'_y</math>.</p>	<p>Дана функция <math>y = 2 \cdot x - x^3</math>. Для нахождения <math>x'_y</math> будем использовать математическую формулу <math>x'_y = 1/y'_x</math>.</p> <p>Решение:</p> <p>1) Определяем функцию: <math>y(x) := 2 \cdot x - x^3</math>.</p> <p>2) Вводим оператор <math>\frac{d}{dx}</math>, заполняем маркеры и нажимаем кнопку символического расчёта</p> $\frac{1}{\left(\frac{d}{dx}y(x)\right)} \rightarrow \frac{1}{2 - 3 \cdot x^2}$
<p><b>Пример 13.11.</b> Вычисление <math>x'_y</math> от функции, заданной в параметрическом виде.</p>	<p>Дана функция <math>\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}</math>.</p> <p>Решение:</p> <p>1) Определяем функции <math>x(t) := t - \sin(t)</math> и <math>y(t) := 1 - \cos(t)</math></p> <p>2) Используя математическую формулу <math>y'_x = y'_t / x'_t</math>, вычисляем:</p> $\frac{\frac{d}{dt}y(t)}{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)} \rightarrow \frac{\sin(t)}{1 - \cos(t)}$
<p><b>Пример 13.12.</b> Вычисление <math>y''</math>.</p>	<p>Дана функция <math>y = (\arccos(x))^2</math>.</p> <p>Решение:</p> $\frac{d^2}{dx^2}(\arccos(x))^2 \text{ simplify} \rightarrow 2 \cdot \frac{\arccos(x) \cdot x - (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1 - x^2)^2 \cdot [(-1) + x^2]}$

**Задача 13.1.** Найдите производную заданной функции:

$$y(x) := x \cdot \cos(x) \quad y(x) := \frac{x-2}{x-3} \quad y(x) := \cos(3 \cdot x)$$

**Задача 13.2.** Дана функция  $y(x) := e^{k \cdot x}$ .

Найдите  $y''' - 10 \cdot y'' + 9 \cdot y' - 2 \cdot y$  для  $x = 2$  и  $k = 0, 1$ .

## 14. Решение уравнений и систем

В Mathcad корни уравнений ищутся численными методами с точностью, определяемой константой  $TOL$ . По умолчанию  $TOL = 0.001$ . Значение  $TOL$  на другое значение пользователь может переопределить оператором присваивания, например  $TOL:=0.000001$ .

Одни ключевые слова для решения систем уравнений вводятся с палитры *Symbolic* (символьные ключевые слова), другие – с клавиатуры.

**Пример 14.1.** Решить кубическое уравнение:  $x^3 - 3x^2 + 2x$  (это  $x(x-1)(x-2)$ ).

### Первый метод решения

### Комментарий

$f(x):= x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x$        $\Leftarrow$  Инициализация функции  
 $x:= 4$        $\Leftarrow$  Начальное значение переменной  
 $root(f(x), x) = 2$        $\Leftarrow$  Решение уравнения. Это решение зависит от начального значения переменной  
 $x:= -1$        $\Leftarrow$  Изменение начального значения приводит к тому, что найдено другое решение. В пределах точности вычислений найден корень  $x=0$ .  
 $root(f(x), x) = -9.644 \times 10^{-11}$        $\Leftarrow$  Поиск решения уравнения в диапазоне значений переменной  
 $root(f(x), x, 0.5, 1.2) = 1$

### Второй метод решения

Используется метод «Поиск корней полинома»  $x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x$ .

$polyroots\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$        $\Leftarrow$  Корни полинома определяются по вектору коэффициентов.

**Пример 14.2.** Решить систему уравнений  $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

**Решение:**

$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$        $\Leftarrow$  Определение матрицы коэффициентов системы.  
 $b := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$        $\Leftarrow$  Определение вектора правых частей уравнений системы.  
 $lsolve(A, b) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$        $\Leftarrow$  Решение системы.



**Пример 14.3.** Решить нелинейную систему  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 3 \cdot x - 4 \cdot y = 0 \end{cases}$

**Первый вариант решения:**

$x := 1 \quad y := 0$   $\Leftarrow$  Начальные значения переменных.

Given

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \Leftarrow \text{Система уравнений.}$$

$$3 \cdot x - 4 \cdot y = 0 \quad \text{Внимание! Равенство – логическое, Булево.}$$

$$\text{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix} \quad \Leftarrow \text{Решение системы уравнений.}$$

**P.S.** Это пример решения системы уравнений с использованием функции *Find()*. *Given* – ключевое слово. Число уравнений должно равняться числу переменных.

**Второй вариант решения:**

$x := 1 \quad y := 0$

Given

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$3 \cdot x - 4 \cdot y = 0$$

$r := \text{Find}(x, y)$

$$r = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

$$r^T = (0.8 \quad 0.6)$$

**Пример 14.4.** Решить систему уравнений  $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ y = 2 \cdot x^2 - 4. \end{cases}$

**Решение:**

1) Для определения количества корней и приближённых значений корней уравнений будем строить графики данных функций. Для этого будем представлять первую функцию в явном виде как две функции  $h1(x)$  – верхняя часть эллипса и  $-h1(x)$  – нижняя часть эллипса. А графиком третьей функции будет парабола.

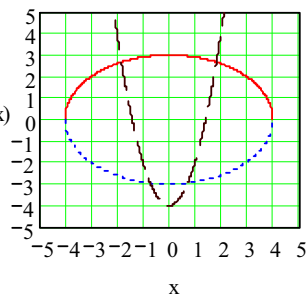


Рис. 14.1

$$h1(x) := 3 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} \quad h2(x) := 2 \cdot x^2 - 4$$

2) Если построить график (см. рис. 14.1), из него видно, что данная система имеет четыре решения, находящихся в разных четвертях декартовой системы координат. Приближённые значения решений будут: (2; 3), (-2; 3), (-1; -3), (1; -3).

3) Будем вводить две функции  $g2(x,y)$  и  $h2(x,y)$ . Результаты решения будем сохранять в векторах  $r1$ ,  $r2$ ,  $r3$  и  $r4$ .

$$g2(x,y) := \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1 \quad h2(x,y) := y - 2 \cdot x^2 + 4$$

**P.S.** Текст программы на Mathcad сопровождается комментариями, помещёнными в рамки.

Начало программы на Mathcad:

Введём две функции

$$g2(x,y) := \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1 \quad h2(x,y) := y - 2 \cdot x^2 + 4$$

Теперь получим все четыре решения. Результаты будем помещать в векторах  $r1$ ,  $r2$ ,  $r3$  и  $r4$ .

1)  $x := 2 \quad y := 3$

Given  $g2(x,y) = 0 \quad h2(x,y) = 0 \quad r1 := \text{Find}(x,y)$

Ответ:  $r2^T = (-1.826 \quad 2.669)$

:

Проверка. Вычислим значение функций на решении:

$$g2(r1_0, r1_1) = -2.233 \times 10^{-8} \quad h2(r1_0, r1_1) = 9.295 \times 10^{-9}$$

Обе функции принимают значения, близкие к нулю, что подтверждает правильность полученного решения.

2)  $x := -2 \quad y := 3$

Given  $g2(x,y) = 0 \quad h2(x,y) = 0 \quad r2 := \text{Find}(x,y)$

Ответ:  $r2^T = (-1.826 \quad 2.669)$

$$g2(r2_0, r2_1) = -2.233 \times 10^{-8} \quad h2(r2_0, r2_1) = 9.295 \times 10^{-9}$$

3]

$x := -2$   $y := -3$

Given  $g2(x, y) = 0$   $h2(x, y) = 0$   $r3 := \text{Find}(x, y)$

Ответ:  $r3^T = (-0.724 \ -2.95)$   $g2(r4_0, r4_1) = -1.691 \times 10^{-7}$

$h2(r4_0, r4_1) = 5.412 \times 10^{-6}$

4]

$x := 2$   $y := -3$

Given  $g2(x, y) = 0$   $h2(x, y) = 0$   $r4 := \text{Find}(x, y)$

Ответ:  $r4^T = (0.724 \ -2.95)$

$g2(r3_0, r3_1) = -1.691 \times 10^{-7}$   $h2(r3_0, r3_1) = 5.412 \times 10^{-6}$

Конец программы

**Пример 14.5.** Решить кубическое уравнение  $x^3 + 5x^2 - 16x - 80 = 0$ .

Решение:

1) Вставим команду *solve* с палитры *Symbolic* (Символика) и вводим в помеченные позиции слева и справа от команды выражение и переменную, нажимаем *Enter*.

2) Увидим, что заданное уравнение имеет три действительных корня:  $x_1 = -5$ ,  $x_2 = -4$ ,  $x_3 = 4$ .

Результат:


$$t^3 + 5 \cdot t^2 - 16 \cdot t - 80 \text{ solve } , t \rightarrow \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

## 15. Построение графиков функций

**Пример 15.1.** Построить график функции  $f(x) = x \cdot \sin(x)$  на отрезке  $[0; 2\pi]$

Решение:

1) Вводим функцию

2) Вызываем мастер построения графиков в декартовой системе координат через меню или «горячей клавишей» «*Shift+2*». Появится прямоугольник с квадратом.  План X-Y

3) Подводим курсор к маркерам для ввода  $f(x)$ ,  $x$ . Диапазон изменения аргумента по умолчанию будет  $[-10, 10]$ .

4) Существует два варианта изменения границ диапазона аргумента:

- а) Подводим курсор мыши к полям границ диапазона и изменяем левую границу диапазона на 0, правую границу – на  $2 \cdot \pi$ .
- б) Зададим команду изменения аргумента  $x := 0, 0.1 \dots 6$ .
- 5) Для форматирования графика вызовем контекстно-зависимое меню для поля графика. В закладке *X-Y Axes Lines* устанавливаем флажки линии сетки и указываем число ячеек сетки. В закладке *Traces* устанавливаем параметры каждой из шестнадцати возможных графиков. В нашем примере 1 – график *trace1*. Установим для него параметры *Color=blk* (чёрный) и параметр *Weight =3* (толщина линии). Каждую линию графиков можно подписать. Для этого необходимо убрать флажок *Hide Legend* (скрыть легенды) и поле *Legend label* (метки легенд), вместо *trace 1* внести название первой линии (рис. 15.1 – 15.4).

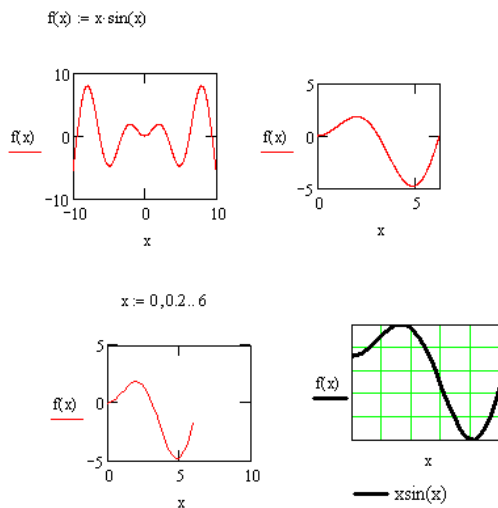


Рис. 15.1

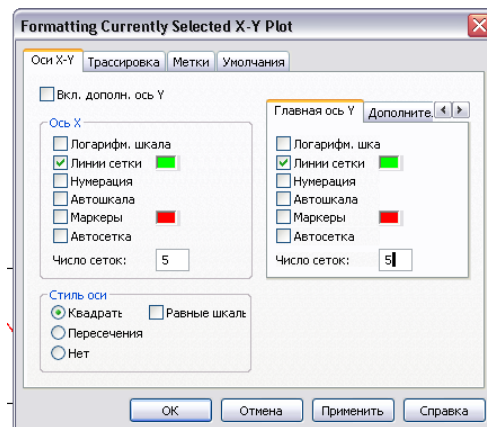


Рис. 15.2

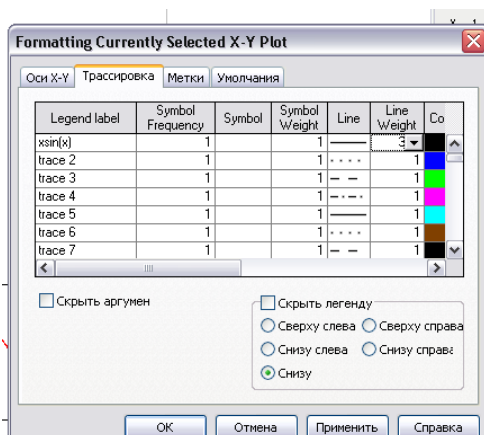


Рис. 15.3

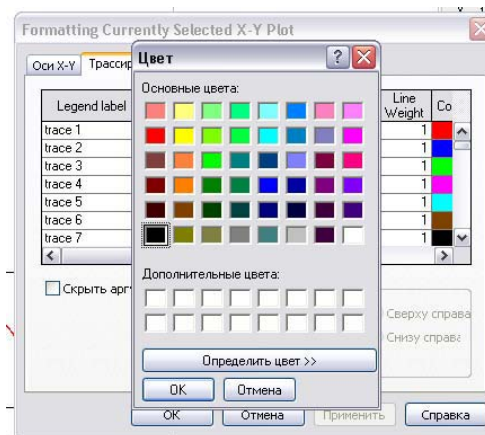


Рис. 15.4

**Пример 15.2.** Построить графики трёх функций:

$$F1(x) := e^x \quad F2(x) := \sqrt{x^4 + 3 \cdot x + 2} \quad F3 := x^2 \cdot \log(x^2 + 1) \quad x \in [0; 3].$$

**Решение.**

1) Вызовем мастер построения графиков в декартовой системе координат через меню или «горячей клавишей» «Shift+2». Появится прямоугольник с квадратом.

2) В поле ввода имени функции введём через запятую все три функции.

3) В поле определения диапазонов изменения аргументов, установим значение  $x \in [0, 3]$  и значение функции  $[0, 20]$ .

4) Форматируем график. Для каждой из трёх линий устанавливаем цвет, толщину, тип линии и другие данные (см. рис. 15.5).

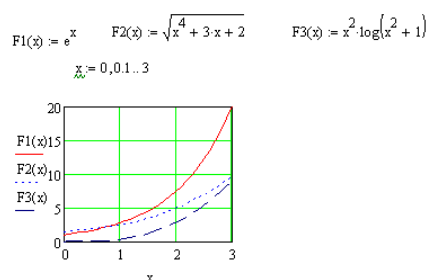


Рис. 15.5

**Пример 15.3.** Построить график функции, заданной в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = 4 \sin 2t \\ y = 9 \sin 3t \end{cases}$$

**Решение.**

1) Определяем две функции  $x(t)$  и  $y(t)$ , задающие параметрическую кривую.

2) Вызовем мастер построения графиков в декартовой системе координат.

3) В поле имени функции введём  $y(t)$ , а в поле имени аргумента введём функцию  $x(t)$ .

4) Мышкой щёлкаем вне поля графика. В результате получаем график функции, заданной в параметрическом виде (см. рис. 15.6).

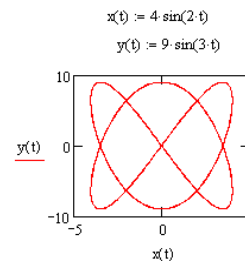



Рис. 15.6

**Пример 15.4.** Построить график кривой, заданной в полярной системе координат:  $r = 2 \cdot \sin 2\varphi$ .

**Решение.**

1) Вводим формулу заданной функции.

2) Вызываем мастер построения графиков в полярной системе координат:  Полярный план . Устанавливаем параметры графика.

3) На графике будет четыре лепестка, а должно быть два. Разработчики MathCad решили отрицательные значения аргумента  $r$  отображать на

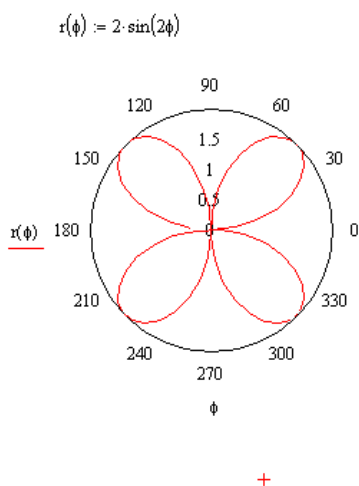


Рис. 15.7

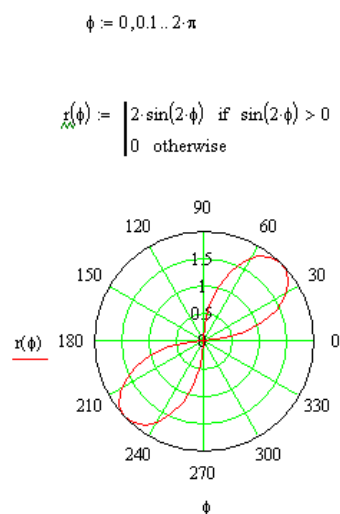


Рис. 15.8

графике в противоположную сторону полюса. Мы отобразим все отрицательные значения функции в полюс, тем самым уберём из графика все мнимые кривые. Для этого с использованием элементов программирования изменяем функцию следующим образом:

Для ввода этой программы необходимо использовать панель программирования. Вертикальная линия вводится при помощи команды *Add Line*.

4) Далее строим график функции (см. рис. 15.7 – 15.8).

**Пример 15.5.** Построить график функции

$$F(x) := \frac{2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 3}{x - 2}$$

**Решение.** Данная функция имеет разрыв второго рода при  $x=2$ . Для построения графика функции, имеющей вертикальную асимптоту, необходимо ограничить интервал изменения функции в наиболее удобном диапазоне. Для представленного графика наиболее подходящим интервалом является  $x \in [-5; 9]$ ,  $F(x) \in [-20; 20]$ . Для отображения вертикальной асимптоты построим прямую линию  $y=10000 \cdot (x - 2)$ , проходящую через точку  $(2, 0)$  и имеющую очень большой угол наклона. Прямая  $y = 2 \cdot x$  является наклонной асимптотой для данного графика (см. рис. 15.9).

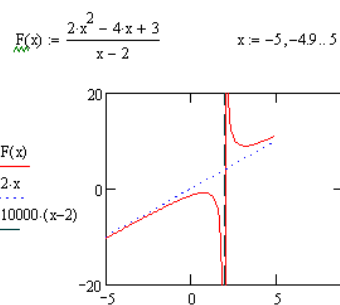


Рис. 15.9

**Пример 15.6.** Для построения точечного графика затабулировать функцию  $f(x) := x^2 \cos(2x)$ ;  $x$  с шагом  $h=0,1 \cdot \pi$ .

**Решение.** 1) Зададим диапазон изменения индекса  $i$ . Это будет ранжированный вектор.  
 2) Вычислим вектор абсцисс узлов табуляции  $x_i$ .  
 3) Вывести вектор  $x$  (см. рис. 15.10).

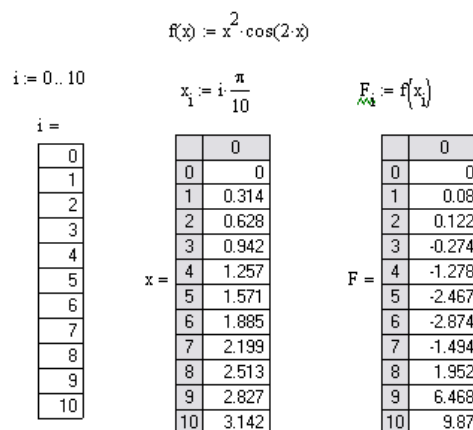



Рис. 15.10

**Пример 15.7.** Построить график функции двух переменных  $z = 9 - x^2 - y^2$ .

**Указание.** Чтобы построить график поверхности, необходимо на панели графиков нажать на кнопку . В возникшем поле графика в помеченной позиции (внизу слева) необходимо ввести имя таблицы  $z$  со значениями функции в узлах сетки. После выхода из поля графика возникает изображение поверхности.

Находясь в поле графика, можно вызвать контекстное меню, нажав на правую клавишу мыши. В возникшем меню можно войти в диалоговое окно *Формат* и произвести форматирование графика поверхности. Здесь можно вывести один из шести типов графика: поверхность, контур, точки данных, область векторов, диаграмма, путь. при нажатии на кнопку *Применить* график перерисовывается.

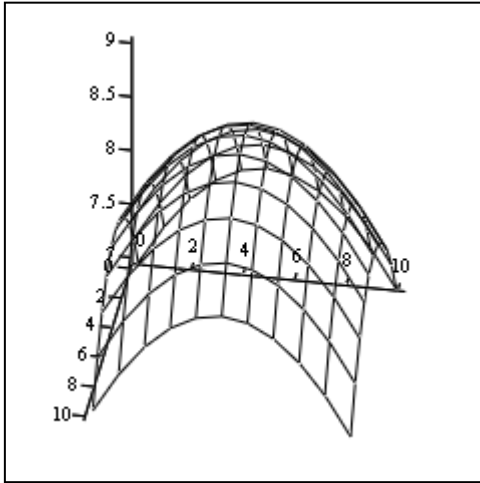
Здесь приведён фрагмент рабочего документа Mathcad с необходимыми командами для построения графиков функции двух переменных  $z = 9 - x^2 - y^2$ , а также график поверхности (рис. 15.11) и график изолиний (рис. 15.12).

**Решение:**

$$f(x, y) := 9 - x^2 - y^2 \quad N := 10 \quad M := 10 \quad a := -1 \quad b := 1 \quad c := -1$$

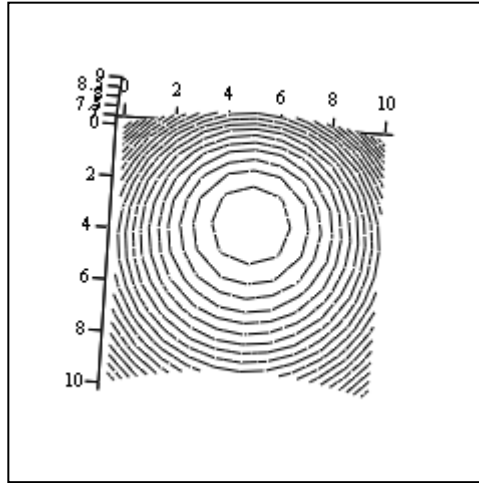
$$d := 1 \quad h_x := \frac{b - a}{N} \quad h_y := \frac{d - c}{M} \quad i := 0..N \quad j := 0..M$$

$$x_i := a + h_x \cdot i \quad y_j := c + h_y \cdot j \quad z_{i,j} := f(x_i, y_j)$$



z

Рис. 15.11



z

Рис. 15.12

**Пример 15.8.** Построение диаграммы на основе данных, взятых из таблицы.

**Решение:**

1) Для создания таблицы выбрать команду *Insert/ Data/ Table* и заполнить ячейки таблицы. Для изменения размеров таблицы она выделяется, и с помощью мыши её границы перемещаются до нужного размера. В структурный заполнитель вводится название таблицы.

2) Вставить график *3-D Plot Format*  План 3D-полос .

Результат изображён на рисунках 15.13, 15.14.

$A :=$

	0	1
1	16	9
2	12	10
3	20	12
4		

$M := \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

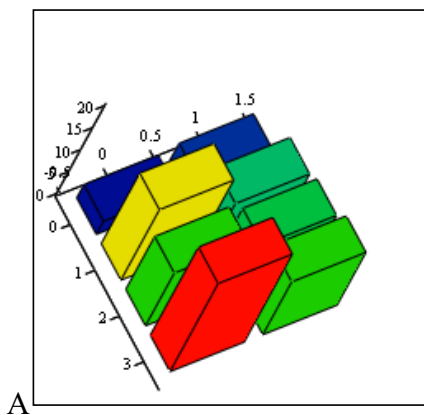


Рис. 15.13

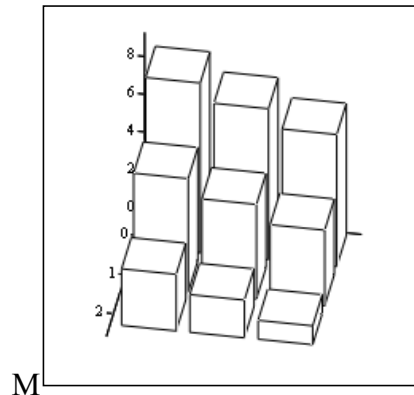


Рис. 15.14



## Пример 15.9. Создание анимации

### Алгоритм:

- 1) Построить график функции.
- 2) Выполнить команду *Tools / Animation / Record* (Инструменты / Анимация / Запись), заполнить поля диалогового окна.
- 3) Выделить рабочую область графика, нажать кнопку Анимация. Анимацию можно сохранить.
- 4) В окне просмотра анимации есть полоса прокрутки кадров анимации и две кнопки: кнопку начала просмотра и кнопку открытия файлов анимации (см. рисунки 15.15 – 15.17).

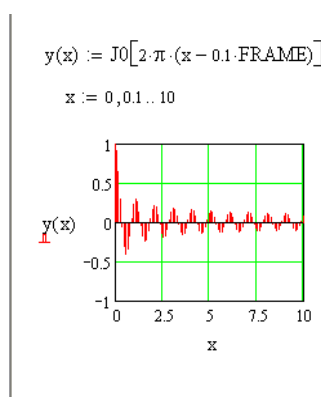


Рис. 15.15

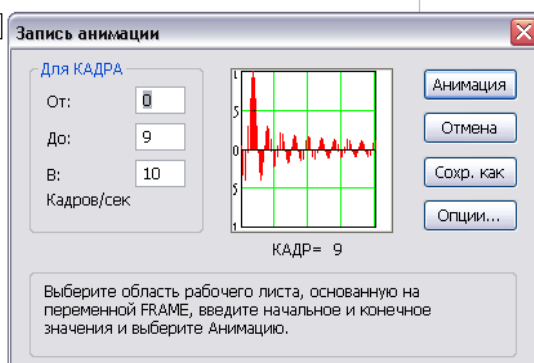


Рис. 15.16

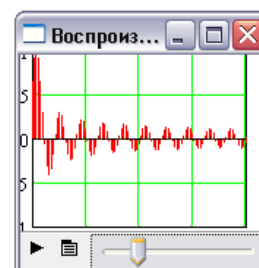


Рис. 15.17

### Задача 15.1. Постройте графики следующих функций:

$$y := \frac{2 - 3\sqrt{4x+8}}{2} \quad y := 2 - \sqrt{3-x} \quad y := \left| \frac{1}{2x+1} - 1 \right| \quad y := 1 - \frac{2}{|x|+4}$$

$$y := \frac{2x+3}{x+1} \quad y := |\cos(x)| - 3\cos(x) \quad y := 2 - \sqrt{3-x}$$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^{2-3}} & \text{if } x < 0 \\ \frac{2 \cdot x}{9 - x^2} & \text{otherwise} \end{cases} \quad f(x) := \begin{cases} \sqrt{5-x} & \text{if } x < 3 \\ \arccos\left(\frac{x}{5}\right) & \text{if } 3 \leq x < 3 \\ \frac{3 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3 + 5x - 1} & \text{otherwise} \end{cases}$$

## **Заключение**

Целью данного сборника методических материалов была помощь студенту укрепить свои знания и умения по освоению математического пакета Mathcad. В дальнейшем пособие поможет студенту:

1. Найти элементарную информацию для решения математической задачи.
2. Повторить соответствующий материал при подготовке расчётов с помощью пакета Mathcad.
3. Вспомнить, как решаются типовые математические задачи.
4. Решить прикладные задачи с использованием элементов линейного программирования пакета Mathcad.
5. Осуществить визуализацию расчётов.

## ***Литература***

1. Берков Н. А., Елисеев Н. Н. Применение пакета Mathcad: Практикум. – М.: МГИУ, 2006 – 132 с.
2. Купцов А. М. МАТНСАД с примерами по электротехнике. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 52 с.: илл.
3. Васильев А. Mathcad 13 на примерах. СПб.: БХБ-Петербург, 2006. – 528 с: илл.
4. Серебряков А. С.. МАТНСАД и решение задач электротехники: учебное пособие. – М.: Маршрут, 2005. – 240 с.: ил.
5. Очков В. Ф. Mathcad 12 для студентов и инженеров – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 457 с.: илл.

Учебное издание

ТУНДА Елена Александровна

## ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА Mathcad

*Сборник учебно-методических материалов  
к лабораторным работам по информатике*

**Издано в авторской редакции**


*Дизайн обложки А.И. Сидоренко*

Подписано к печати 30.11.2010. Формат 60x84/8. Бумага «Снегурочка».  
Печать XEROX. Усл. печ. л. 5,11. Уч.-изд. л. 4,62.  
Заказ 2079-10. Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет  
Система менеджмента качества  
Томского политехнического университета сертифицирована  
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ . 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30  
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru