Тема8. ИНВАРИАНТНОСТЬ В СИСТЕМАХ, ДОПУСКАЮЩИХ УВЕЛИЧЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ ДО БЕСКОНЕЧНОСТИ БЕЗ НАРУШЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Литература :

1. Мееров М.В. *Синтез систем автоматического регулирования высокой точности*. М., Наука, 1967.

2. Емельянов С.В., Коровин С.К. *Новые типы обратной связи*. М., Наука, 1997.

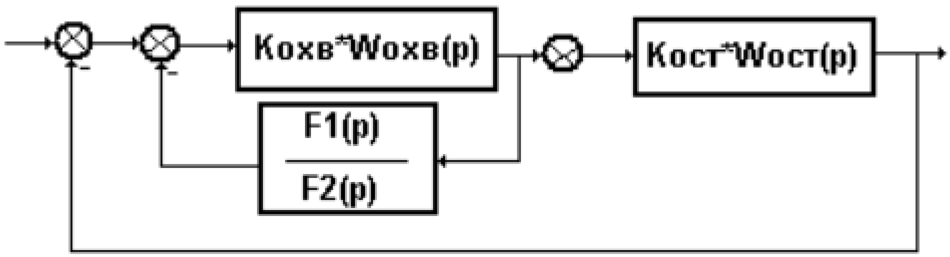
1. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ПРИ БЕСКОНЕЧНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ УСИЛЕНИЯ

Из классической автоматики известно, что увеличение коэффициента усиления САУ неминуемо приводит к нарушению устойчивости. На самом же деле это справедливо только для одноконтурных систем.

Мы знаем, что в одномерных САР с обратной связью выполнение условий инвариантности противоречит требованиям устойчивости. Если каким-то образом снять это ограничение, то есть научиться создавать системы, устойчивые при бесконечном коэффициенте усиления, то абсолютная инвариантность в таких системах может быть выполнена. Конечно, это надо понимать только как ***необходимую*** возможность, так как технически реализовать бесконечный коэффициент усиления так же невозможно , как и идеальный дифференциатор. Фактически мы будем иметь ту же систему, инвариантную до **έ**, но реализованную другими техническими средствами.

Поставим задачу так: изменить структуру одноконтурной САУ, чтобы получить принципиальную возможность увеличивать коэффициент усиления без нарушения устойчивости.

Структурную схему системы выберем в виде:



Тогда передаточная функция разомкнутой системы будет:

$$W_{\mathbf{p}аз}(p)=\frac{\dfrac{K_{охв}K_{ост}}{D_1D_2}}{1+\dfrac{K_{охв}F_1}{D_1F_2}}=\frac{F_2K_{охв}K_{ост}}{D_1D_2F_2+K_{охв}F_1D_2}$$

Отсюда характеристическое уравнение системы:

$$D_1(p)D_2(p)F_2(p)+D_2(p)K_{охв}F_1(p)+K_{охв}K_{ост}F_2(p)=0;\quad(1)$$

Обозначим:

$m = \dfrac{1}{K_{oxв}}$ и делим (1) на $\boldsymbol{K_{oxв}}$:

$$mD_1(p)D_2(p)F_2(p) + D_2(p)F_1(p) + K_{ocm}F_2(p) = 0; \quad (2)$$

Обозначим степени полиномов так:

$$\begin{aligned} &для\, D_1(p) -> n \\ &для\, D_2(p) -> \mu \\ &для\, F_1(p) -> n_1 \\ &для\, F_2(p) -> n_2 \end{aligned}$$

Тогда, раскрывая полиномы, получаем:

$$m(B_0 p^{n+\mu+n_2} + B_1 p^{n+\mu+n_2-1} + \ldots) + (M_0 p^{\mu+n_1} + M_1 p^{\mu+n_1-1} + ..) +$$
$$+ K_{ocm}(C_0 p^{n_2} + C_1 p^{n_2-1} + \ldots) = 0;$$

Если обозначить:

$$N_2 = n + \mu + n_2$$
$$N_1 = \mu + n_1$$

то получаем:

$$m\left(B_0 p^{N_2} + \ldots + B_{N_2}\right) + \left(A_0 p^{N_1} + \ldots + A_{N_1}\right) = 0; \quad (4)$$

где

$$A_i = M_i + K_{ocm} C_{i - n_1 - n_2 - \mu};$$

Вырожденное уравнение при ***m*** , стремящемся к нулю, будет:

$$\bar{A}_0 p^{N_1} + \bar{\bar{A}}_1 p^{N_1 - 1} + \ldots + \bar{A}_0 = 0 \quad (5)$$

Пусть корни уравнения (5) удовлетворяют условиям устойчивости. Тогда остальные **(N_2–N_1)** корней при ***m*** **,** стремящемся к нулю, стремятся к бесконечности. Найдем условия, при которых эти корни будут оставаться слева от мнимой оси, а система в целом будет устойчивой при **m ,** стремящемся к нулю. Используем метод малого параметра Меерова М.В. (1). Производим замену переменной

$$p = \frac{q}{\dfrac{1}{m^{N_2 - N_1}}};$$

Делим (4) на ***m*** и, подставляя новую переменную, имеем:

$$B_0 \frac{q^{N_2}}{\dfrac{N_2}{m^{N_2 - N_1}}} + B_1 \frac{q^{N_2 - 1}}{\dfrac{N_2 - 1}{m^{N_2 - N_1}}} + \ldots + A_0 \frac{q^{N_1}}{\dfrac{N_2}{m^{N_2 - N_1}}} + \ldots A_{N_1} = 0 \quad (6)$$

....

Умножая почленно на $\dfrac{N_2}{m^{N_2 - N_1}}$ и полагая ***m*** , стремящимся к нулю, получим:

$$B_0 q^{N_2 - N_1} + A_0 = 0 \quad (7)$$

отсюда:

$$q = \sqrt[N_2 - N_1]{-\frac{A_0}{B_0}};$$

Допустим (N$_2$–N$_1$)=1.

Тогда $q = -\dfrac{A_0}{B_0}$, то есть единственный корень при ***m***, стремящемся к нулю, будет левым, если выполнить условие : $\dfrac{A_0}{B_0} > 0$ (8).

Пусть (N$_2$–N$_1$)=2.

Тогда $q = \sqrt{\dfrac{-A_0}{B_0}}$. Ясно, что условие (7) и здесь должно выполняться, иначе при ***m***, стремящемся к нулю, один из корней будет правым, а система неустойчивой. Но при $\dfrac{A_0}{B_0} > 0$ получаем то есть два чисто мнимых корня, и система находится на границе устойчивости.

Устойчивость здесь будет зависеть от того, с какой стороны, справа или слева от мнимой оси, стремятся корни в бесконечность при ***m*** **,** стремящемся к нулю.

Чтобы это установить, надо учесть первое приближение от малого числа ***m***.

Умножая (6) на $\dfrac{N_2}{N_2 - N_1}$, и полагая равными нулю все ***m***, начиная с m^2 , получим:

$$B_0 q^{N_2} + B_1 m^{\frac{1}{2}} q^{N_2 - 1} + A_0 q^{N_1} + A_1 m^{\frac{1}{2}} q^{N_1 - 1} = 0; \quad (9)$$

Делим (9) на $q^{N_1 - 1}$ и, учитывая, что $(N_2 – N_1) = 2$, получим:

$$B_0 q^3 + B_1 m^{\frac{1}{2}} q^2 + A_0 q + A_1 m^{\frac{1}{2}} = 0; \quad (10)$$

Условиями устойчивости для (10) будут:

$$B_1 m^{\frac{1}{2}} A_0 - A_1 m^{\frac{1}{2}} B_0 > 0; \quad \textbf{или} \quad \frac{B_1}{B_0} - \frac{A_1}{A_0} > 0 \quad (11)$$

То есть при $(N_2 – N_1) = 2$, если вырожденное уравнение устойчиво и выполнено условие (11), то система будет устойчива при m , стремящемся к нулю.

Допустим $(N_2 – N_1) = 3$**.**

Из (7) при $(N_2 – N_1) = 3$ имеем: $q = \sqrt[3]{\frac{-A_0}{B_0}}$ то есть хотя бы один из трех корней должен быть правым и система не будет устойчивой.

Остается предположить, что условием устойчивости систем при бесконечно большом коэффициенте усиления является:

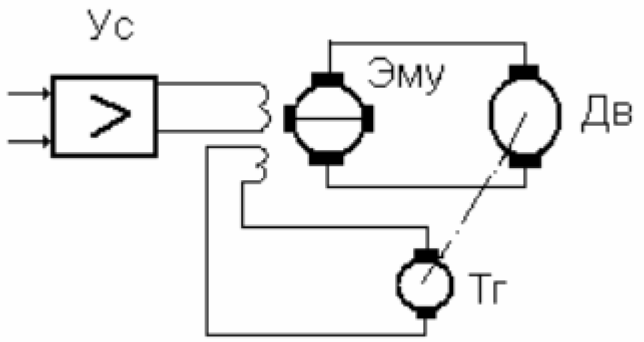
$$(N_2 – N_1) \le 2 \quad .(12)$$

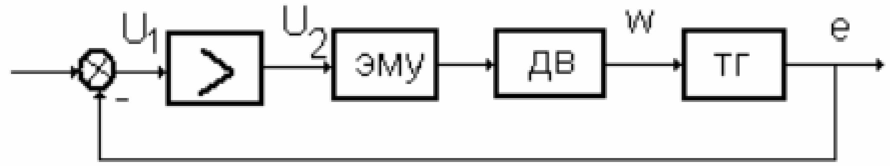
или через порядки исходных полиномов:

$$n \le (n_1 – n_2) + 2. \quad (13)$$

2. ПРИМЕР СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ ДВИГАТЕЛЯ С $K \to \infty$

В качестве примера рассмотрим систему регулирования двигателя постоянного тока с независимым возбуждением. Скорость вращения требуется поддерживатьс высокой точностью - **0.12%.** Кроме того, надо обеспечить возможность изменения скорости вращения в широких пределах. Для этого регулирование скорости осуществляем по напряжению якоря.





Передаточные функции системы следующие:

1. усилитель: $\boldsymbol{K_y}$;

2. электромашинный усилитель: $\dfrac{K_{эму}}{(1+T_1p)(1+T_2p)}$;

3. двигатель: $\dfrac{K_{дв}}{(1+T_3p)(1+T_4p)}$;

4. тахогенератор: $\boldsymbol{K_{тг}}$.

Передаточная функция всей системы будет:

$$\Phi(p) = \frac{K_y * K_{эму} * K_{дв} * K_{тг}}{(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)(1+T_4p)+K_yK_{эму}K_{дв}K_{тг}} . (14)$$

и характеристическое уравнение:

$$(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)(1+T_4p)+K_yK_{эму}K_{дв}K_{тг}=0\ .(15)$$

Пусть численные значения параметров будут:

$$T_1=0.1c; T_2=0.1c; T_3=0.5c; T_4=0.01c; K_{эму}=10; K_{дв}=1.$$

Тогда по условиям заданной точности регулирования коэффициент усиления системы должен быть равен:

$$K_yK_{эму}K_{дв}K_{тг}=\frac{1}{0.0012}=800.$$

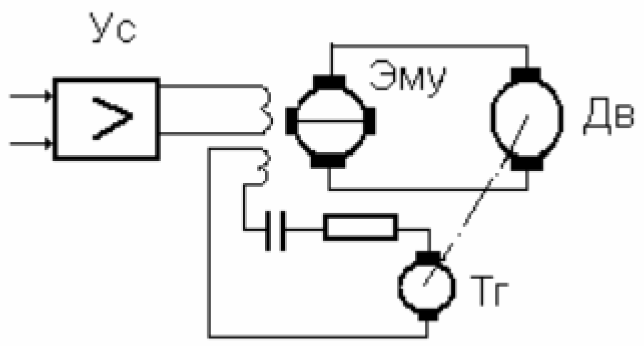
Поэтому характеристическое уравнение будет:

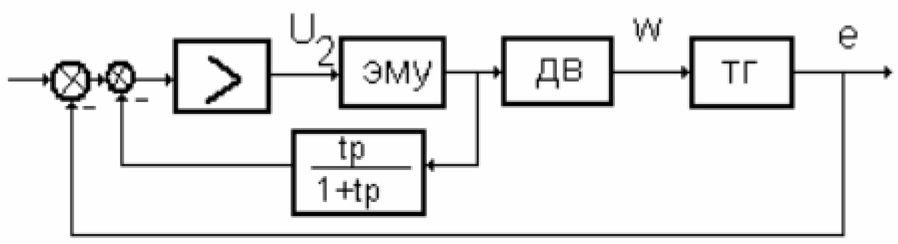
$$0.00005p^4+0.0061p^3+0.117p^2+0.71p+801=0$$

Находим корни и видим, что система будет неустойчива.

Введем в систему стабилизирующее устройство с передаточной функцией $\frac{\tau p}{1+\tau p}$ так, чтобы полученная система была устойчивой при бесконечно большом коэффициенте усиления $\boldsymbol{K_{общ}}$.

Устройство данного типа $(\boldsymbol{n_1=n_2})$ надо включить так, чтобы охваченный им контур был полиномом 2-го порядка.





Тогда: $\Phi(p) = \dfrac{K_{общ}(1+\tau p)}{(1+T_1 p)(1+T_2 p)(1+T_3 p)(1+T_4 p)+K_{эму}K_y \tau p(1+T_3 p)+K_{общ}(1+\tau p)}$

характеристическое уравнение:

$$(1+T_1 p)(1+T_2 p)(1+T_3 p)(1+T_4 p)+K_y K_{эму} \tau p(1+T_3 p)+K_{общ}(1+\tau p)=0\,. \quad (16)$$

Будем увеличивать коэффициент $\boldsymbol{K_{общ}}$ за счет увеличения коэффициента усиления регулятора $\boldsymbol{K_y}$.

Поделим характеристическое уравнение на $\boldsymbol{K_{эму}} \cdot \boldsymbol{K_y}$ и обозначим $m = \dfrac{1}{K_y K_{эму}}$.

Тогда:

$$m(1+T_1 p)(1+T_2 p)(1+T_3 p)(1+T_4 p)(1+\tau p)+\tau p(1+T_3 p)(1+T_4 p)+K_{дв}K_{тг}(1+\tau p)=0\,.$$

.(17)

Видно, что разность степеней полиномов полного и вырожденного равна $(N_2–N_1) = 2$. В этом случае, чтобы система была устойчива при m, стремящемся к нулю, надо, чтобы было устойчиво вырожденное уравнение и, кроме того, чтобы:

$$\frac{B_1}{B_0} - \frac{A_1}{A_0} > 0 \quad .(18)$$

Вырожденное уравнение здесь: $\tau p(1+T_3 p)(1+T_4 p) + K_{дв} K_{тг}(1+\tau p) = 0 \cdot$

Из условия Гурвица получаем: $\tau > \dfrac{T_3 T_4}{T_3 + T_4} \cong 0.01c$ (для любых $K_{дв} \cdot K_{тг}$).

Можно убедиться, что и второе условие (18) также выполняется.

Остается выбрать коэффициенты усиления системы так, чтобы наряду с устойчивостью обеспечить и необходимое качество регулирования.

Вопросы для самоподготовки:

1. В одномерных системах с обратной связью нельзя выполнить условия инвариантности абсолютно из-за невозможности выполнить идеально-дифференцирующие звенья. Не противоречат ли этому общему правилу одномерные системы с бесконечным коэффициентом усиления регулятора?

2. Как можно выполнить усилитель с бесконечным коэффициентом усиления? Какими техническими средствами?

3. Что такое скользящий режим?