Тема 7. АБСОЛЮТНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ В ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

1. РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА ИНВАРИАНТНОСТИ В ОДНОМЕРНЫХ САУ

Рассмотрим выполнение условий абсолютной инвариантности в самом обширном классе систем управления: в одномерных системах, работающих по принципу обратной связи. В качестве примера возьмем простую систему третьего порядка, которая сохраняет все общие черты систем данного класса.

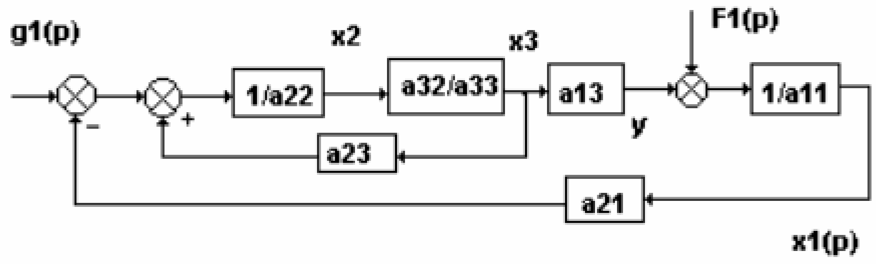
$$\begin{array}{cccc} a_{11}(p)X_1 & +0 & -a_{13}X_3 & =F_1(p); \\ a_{21}X_1 & +a_{22}X_2 & -a_{23}X_3 & =g(p); \\ 0 & -a_{32}X_2 & +a_{33}X_3 & =0. \end{array}$$

Разрешим уравнение (1) относительно переменных и построим структурную схему:

$$X_1 = \frac{1}{a_{11}}(F_1 + a_{13}X_3);$$

$$X_2 = \frac{1}{a_{22}}(g - a_{21}X_1 + a_{23}X_3); \quad (2)$$

$$X_3 = \frac{1}{a_{33}}a_{32}X_2;$$



Запишем выражение для передаточной функции контура местной обратной связи:

$$W_{oc}(p) = \frac{\dfrac{a_{32}}{a_{22}a_{33}}}{1 - \dfrac{a_{23}a_{32}}{a_{22}a_{23}}} = \frac{a_{32}}{a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}} \qquad (3)$$

Если выполнить условие абсолютной инвариантности:

$$A_{11}(p) = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} \equiv 0; \quad (4)$$

то знаменатель (3) обратится в нуль, а $W_{oc}(p) \to \infty$.

Таким образом, убеждаемся, что требования инвариантности противоречат требованиям устойчивости. И это справедливо не только для данной конкретной системы.

Вторым препятствием к реализации принципа инвариантности в этом классе систем является требование использовать идеальные дифференциаторы. Действительно, из условия (4) следует выражение для синтезирующего элемента, например, $\boldsymbol{a_{23}(p)}$:

$$a_{23}(p)=\frac{a_0p^4+a_1p^3+\ldots+a_4}{b_0p^2+b_1p+b_2}=c_0p^2+c_1p+c_2.$$

Выполнить идеальное дифференцирующее звено второго порядка невозможно, поэтому абсолютная инвариантность в системах данного класса недостижима (не выполняется достаточный признак реализации абсолютно- инвариантных систем).

2. СИСТЕМЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ ДО e

Инвариантность до **e** - это приближенное выполнение условий абсолютной инвариантности с точностью до малой величины .

Системы, инвариантные до **e** , позволяют значительно ослабить влияние внешних возмущений в одномерных системах, работающих по принципу обратной связи. Недостатком этих систем является снижение степени устойчивости, что сказывается на характере переходных процессов. Зато в них не требуется решать сложную, а чаще всего невыполнимую задачу измерения внешних воздействий, как в комбинированных системах.

Поставим на исследование две задачи:

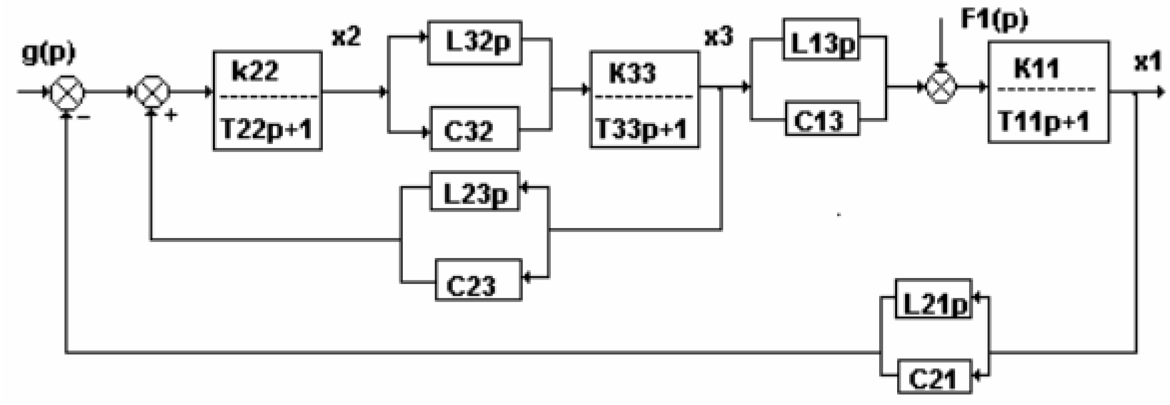
- выясним, насколько ослабляется влияние внешних возмущений на динамику системы;
- определим методы исследования таких систем на устойчивость.

Для того, чтобы ответить на первый вопрос, вернемся снова к системе, предыдущего раздела. Уравнения системы возьмем в виде:

$$\begin{array}{llll} a_{11}(p)X_1 & +0 & -a_{13}X_3 & =F_1(p); \\ a_{21}X_1 & +a_{22}X_2 & -a_{23}X_3 & =g(p); \\ 0 & -a_{32}X_2 & +a_{33}X_3 & =0. \end{array}$$

но для простоты расчетов примем, что все операторы $\boldsymbol{a_{ij}(p)}$ являются операторами первого порядка. Это допущение не повлияет на качество выводов, но резко упростит запись.

Структурную схему системы изобразим в виде:



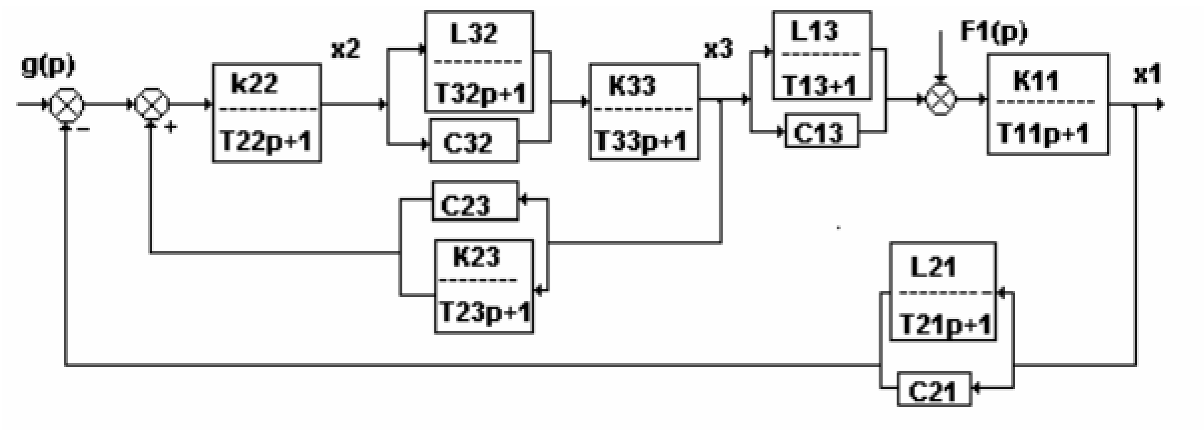
Поясним схему. Операторы типа $\dfrac{1}{a_{11}(p)}$ является апериодическими звеньями:

$$\frac{1}{a_{11}}=\frac{1}{l_{11}p+c_{11}}=\frac{\frac{1}{c_{11}}}{\frac{l_{11}}{c_{11}}p+1};$$

а операторы типа $a_{23}=l_{23}p+c_{23}$ представляют собой параллельное соединение идеального дифференциатора и усилительного элемента.

Из схемы видно, что в таком виде, как она описана, система существовать не может, так как она включает в себя большое количество идеальных дифференцирующих звеньев: $l_{32}p; l_{13}p; l_{23}p; l_{21}p.$.

Перепишем схему в реальном исполнении, то есть вместо идеальных дифференциаторов введем реальные дифференцирующие звенья:



Если составить по этой схеме уравнения движения системы, то они принимают другой вид:

$$\left(l_{11}p + c_{11}\right)X_1 + 0 - \left(\frac{l_{13}p}{\tau_{13}p+1} + c_{13}\right)X_3 = F(p);$$

$$\left(\frac{l_{21}p}{\tau_{21}p+1}\right)X_1 + \left(l_{22}p + c_{22}\right)X_2 - \left(\frac{l_{23}p}{\tau_{23}p+1} + c_{23}\right)X_3 = g(p); \quad (5)$$

$$0 - \left(\frac{l_{32}p}{\tau_{32}p + c_{32}}\right)X_2 + \left(l_{33}p + c_{33}\right)X_3 = 0.$$

Здесь ***l*** - постоянные времени реальных дифференциаторов.

Запишем теперь для обеих систем, идеальной и реальной, условие абсолютной инвариантности $\boldsymbol{X_1}$ от $\boldsymbol{F_1}$ и сравним их выражения. Условия инвариантности будем записывать в виде:

$$\varepsilon_0 p^4 + \varepsilon_1 p^3 + \varepsilon_2 p^2 + \varepsilon_3 p + \varepsilon_4 \equiv 0$$

Для реальной системы они будут:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0 = l_{22} l_{33} \tau_{23} \tau_{32} \equiv 0;\\
&\varepsilon_1 = l_{22} l_{33} (\tau_{23} + \tau_{32}) + (c_{22} l_{33} + l_{22} c_{33}) \tau_{23} \tau_{32} \equiv 0;\\
&\varepsilon_2 = l_{22} l_{33} - l_{23} l_{32} + c_{32} l_{23} \tau_{23} + c_{23} l_{32} \tau_{32} \equiv 0;\\
&\varepsilon_3 = c_{22} l_{33} - c_{32} l_{23} + l_{22} c_{33} - c_{23} l_{32} \equiv 0;\\
&\varepsilon_4 = c_{22} c_{33} - c_{23} c_{32} \equiv 0;
\end{aligned} \tag{7}$$

Для идеальной системы эти же равенства выглядят так:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0 \equiv 0;\\
&\varepsilon_1 \equiv 0;\\
&\varepsilon_2 = l_{22} l_{33} - l_{23} l_{32} \equiv 0;\\
&\varepsilon_3 = c_{22} l_{33} - c_{32} l_{23} + l_{22} c_{33} - c_{23} l_{32} \equiv 0;\\
&\varepsilon_4 = c_{22} c_{33} - c_{23} c_{32} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Сравнивая (7) и (8), видим, что последние два условия совпадают. Это значит, что в реальной системе можно полностью скомпенсировать влияние на процесс возмущения $\boldsymbol{F_1(t)}$ и его первой производной. Можно улучшить точность регулирования, и подбором параметров, входящих в выражение для $\varepsilon_2 \equiv 0$, , добиться компенсации второй производной от возмущения. Но высшие производные от $\boldsymbol{F_1(t)}$ скомпенсировать в реальной системе нельзя, так как в выражения для ε_1 **и** ε_0 входят только положительные члены.

Итак, в системах с реальными дифференциаторами, инвариантных до e , можно достичь абсолютной инвариантности X1 от F1 и его первых производных. Старшие производные от F1 остаются нескомпенсированными.

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ, ИНВАРИАНТНЫХ ДО e

Рассмотрим вопросы анализа устойчивости систем, инвариантных до **e** . Если из уравнения (5) для системы с реальными дифференциаторами определить характеристическое уравнение системы, и принять, что все постоянные времени реальных дифференциаторов одного порядка малости, то есть $\tau_{21} \approx \tau_{23} \approx \tau_{32} \approx \tau$, то получим уравнение вида:

$$\tau\left(B_0 p^4 + B_1 p^3 + B_2 p^2 + B_3 p + B_4\right) + \left(A_0 p^3 + A_1 p^2 + A_2 p + A_3\right) = 0;$$

или в общем виде:

$$\tau\left(B_0 p^{N2} + B_1 p^{N2-1} + B_2 p^{N2-2} + \ldots + B_{N2}\right) + \left(A_0 p^{N1} + A_1 p^{N1-1} + \ldots + A_{N1}\right) = 0; (9)$$

Как видим, характеристическое уравнение состоит из двух частей: полиномов ***B*(*p*)** и ***A*(*p*).** Корни полинома ***B*(*p*)** зависят от ***t*** – малой постоянной времени реальных дифференциаторов, а корни полинома ***A*(*p*)** не зависят.

В "идеальной" системе ***t* = 0** , что соответствует условиям абсолютной инвариантности, и характеристическое уравнение вырождается в форму:

$$A_0 p^{N2} + A_1 p^{N2-1} + \ldots + A_{N2} = 0 \quad (10)$$

которую называют вырожденным характеристическим уравнением.

Если же условие $A_{11} \equiv 0$ выполнено не полностью, то появляются малые по модулю невязки $\varepsilon_0 \approx \varepsilon_1 \approx \varepsilon$, пропорциональные величине ***t*** **.**

Возникает вопрос: как малость этих величин (или что то же самое – малость ***t***) влияет на устойчивость? Что это влияние существует- мы знаем, так как в одномерных САУ с обратной связью при $A_{11} \equiv 0$ (или ***t* = 0**) коэффициент усиления системы уходит в бесконечность, и система теряет устойчивость.

При малых значениях ***t*** возможны два случая:

- порядки полиномов $A(p)$ и $B(p)$ совпадают;
- порядок полинома $B(p)$ больше порядка полинома $A(p)$.

В первом случае малость величины не влияет на устойчивость, но, к сожалению, в одномерных системах с обратной связью всегда имеет место вторая ситуация. В этом случае из уравнения (9) следует, что:

$$\tau B_0 p^4 + (\tau B_1 + A_0)p^3 + (\tau B_2 + A_1)p^2 + (\tau B_3 + A_2)p + (\tau B_4 + A_3) = 0$$

то есть один из коэффициентов при p^4 становится малым по модулю при $\tau \to 0$ и при его дальнейшем уменьшении станет правым, а система – неустойчивой.

Поэтому при определенной величине t всегда надо делать проверку на устойчивость, определяя корни характеристического уравнения (9). При большом порядке уравнения можно разбить эту задачу на две меньших по сложности:

- определить, удовлетворяют ли условиям устойчивости корни вырожденного уравнения (10);

- определить устойчивость корней вспомогательного уравнения степени $(N_2 – N_1)$ полученного делением уравнения (9) на (10).

Для практических целей всегда важно знать критическое значение $\tau_{крит}$, до которого можно уменьшать постоянные времени реальных дифференциаторов без нарушения устойчивости. Этот вопрос был решен Мееровым М.В. с помощью ***метода малого параметра***. Рассмотрим его на примере уравнения (9).

Придадим уравнению (9) более удобную форму, с этой целью поделим его на t и введем новую переменную:

$$p = \frac{\beta}{\dfrac{1}{\tau^{N_2 - N_1}}} \quad (11)$$

Получаем:

$$B_0 \frac{q^{N2}}{\tau^{\frac{N2}{N2-N1}}} + B_1 \frac{q^{N2-1}}{\tau^{\frac{N2-1}{N2-N1}}} + B_2 \frac{q^{N2-2}}{\tau^{\frac{N2-2}{N2-N1}}} + \ldots + A_0 \frac{q^{N1}}{\tau^{\frac{N2}{N2-N1}}} + A_1 \frac{q^{N1-1}}{\tau^{\frac{N2-1}{N2-N1}}} + \ldots = 0$$

Умножаем уравнение почленно на $\tau^{\frac{N2}{N2-N1}}$:

$$B_0 q^{N2} + B_1 \tau^{\frac{1}{N2-N1}} q^{N2-1} + B_2 \tau^{\frac{2}{N2-N1}} q^{N2-2} + \ldots.$$
$$. + A_0 q^{N1} + A_1 \tau^{\frac{1}{N2-N1}} q^{N1-1} + A_2 \tau^{\frac{2}{N2-N1}} q^{N1-2} + \ldots = 0; \qquad (12)$$

С помощью уравнения (12) уже легче выявить влияние $\boldsymbol{t}$ на устойчивость. Влияние на большие по модулю корни вырожденного уравнения будет незначительным. Следовательно, нужно определить устойчивость **(N_2–N_1)** корней в зависимости от величины $\boldsymbol{t}$. Критическое значение $\boldsymbol{t}$можно определить, не решая уравнения (12). Для этого достаточно найти общий вид вспомогательного уравнения степени **(N_2–N_1)**и из него в общем виде определить величину $\tau_{крит}$. Выполним это для простейшего случая, когда **(N_2–N_1)=1.**

Записываем уравнение (12), пренебрегая в виду малости всеми членами, содержащими **t** в степени, выше первой:

$$B_0 q^{N2} + B_1 \tau q^{N2-1} + A_0 q^{N1} + A_1 \tau q^{N1-1} = 0.$$

Теперь поделим полином этого уравнения на полином вырожденного уравнения:

$$A_0 q^{N1} + A_1 \tau q^{N1-1} = 0.$$

Получаем вспомогательное уравнение степени **(N_2–N_1):**

$$\frac{B_0}{A_0} q^{N2-N1} + \frac{\tau}{A_0}\left(B_1 - \frac{B_0 A_1}{A_0}\right) q^{N2-N1-1} + 1 = 0$$

Для нашего случая **$(N_2 – N_1) = 1$** это будет:

$$\frac{B_0}{A_0} q + \frac{\tau}{A_0}(B_1 - \frac{B_0 A_1}{A_0}) + 1 = 0; \quad (13)$$

Из следствия к теореме Гурвица известно, что для устойчивости этого уравнения достаточно, чтобы его коэффициенты были положительны.

$$\left[\frac{\tau}{A_0}\left(B_0 - \frac{B_0 A_1}{A_0}\right) + 1\right] \succ 0$$

из этого неравенства и находим:

$$\tau_{крит} \geq \frac{A_0^2}{A_1 B_0 - A_0 B_1}. \quad (14)$$

Если разрешить уравнение (13) относительно ***t*** , то, полагая $q = jw$,

получим:

$$\tau = \frac{A_0^2}{A_1 B_0 - A_0 B_1} + j \frac{A_0^2 B_0}{A_1 B_0 - A_0 B_1} w,$$

Изменяя ***w*** от "– бесконечности" до "+ бесконечности", строим на комплексной плоскости кривую D-разбиения. Оказывается, что в диапазон устойчивых значений входит и ***t* =0** . То есть при **$(N_2 – N_1) = 1$** система является структурно-устойчивой относительно ***t*** .

При значениях $(N_2 – N_1) >= 2$ этот вывод не получается, поэтому без вывода примем к сведению, что для обеспечения устойчивости системы необходимо дополнительно к выбору величины ***t*** изменить структуру системы. В частности Мееров М. В. показал, что для обеспечения устойчивости в систему надо ввести $(N_2 – N_1) – 2$ дифференцирующих звена.

Вопросы для самоподготовки:

1. Почему легче построить систему инвариантной до е, чем строить ее как систему комбинированного управления?

2. Почему нельзя каждую одномерную систему сделать абсолютно инвариантной?

3. Для построения инвариантной до системы нужно определить минимально возможную постоянную времени реальных дифференциаторов системы. Как это сделать?