Тема 6. ПРИНЦИП АБСОЛЮТНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИНВАРИАНТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Теория инвариантности - это теория синтеза систем, не зависящих от внешнего воздействия. Из классической автоматики известно, что переходный процесс в системе определяется суммой свободных и вынужденных движений. Если уравнения движения системы представить в виде:

$$A(p)x = B(p)g + C(p)f \qquad (1)$$

где **x** – регулируемая величина, ***g*** – управляющее воздействие, ***f*** – возмущающее воздействие, ***A*(*p*)**, ***B*(*p*)**, ***C*(*p*)** – полиномы от ***p*** , то переходный процесс есть:

$$x(t) = x_{св}(t) + (x^{g}_{вын} + x^{f}_{вын}) \qquad (2)$$

Свободная составляющая $x_{св}(t)$ определяется начальными условиями на координаты системы. Она является общим решением однородного уравнения (1) с правой частью, равной нулю.

Вынужденная составляющая $\boldsymbol{x_{вын}(t)}$ определяется как частное решение неоднородного уравнения (1) с ненулевой правой частью и зависит от одного или обоих воздействий на систему.

По первой теореме А. М. Ляпунова вынужденное движение системы, вызванное единичным возмущением, можно рассматривать как свободное движение около будущего положения равновесия. Вынужденное движение устойчиво, если корни характеристического уравнения для (1) являются отрицательными.

Однако, если на систему действует не единичное, а воздействие произвольной формы, то встает вопрос об оценке качества регулирования, то есть оценке вида $\boldsymbol{x_{вын}(t)}$. При этом уравнение (1) должно решаться уже с правой частью. Правая часть уравнения здесь уже рассматривается не как единичная или вообще известная функция времени, а как произвольная дифференцируемая функция, ограниченная по модулю, чтобы систему можно было рассматривать в линейном представлении.

Основной задачей теории инвариантности является задача синтеза системы при минимальной информации относительно внешних возмущений, чтобы влияние этих возмущений на отклонение регулируемой величины было наименьшим.

Основоположником теории инвариантности является русский ученый Г. В. Щипанов. В 1939г. вокруг его работы развернулась шумная дискуссия, результатом которой было отрицание решения задачи о полной компенсации внешних возмущений, или, как теперь говорят, об абсолютной инвариантности. Только в 1944г. уже после смерти автора выяснилось, что расхождение во взглядах Щипанова и его оппонентов вызвано непониманием задачи. Щипанов говорил о компенсации вынужденной составляющей, обусловленной внешним возмущением, а ему приписали стремление к компенсации и вынужденной и собственной составляющих переходного процесса. Это явилось отчасти следствием ошибочной записи Щипановым уравнений движения системы через передаточные функции. Кроме того оказалось, что в то время просто не существовало класса систем, в которых возможна абсолютная инвариантность. Понадобились работы академиков Б. Н. Петрова, В. С. Кулебакина, чтобы найти структуры систем, в которых возможно выполнение условий абсолютной инвариантности.

В этом разделе нашего курса будет рассмотрена возможность выполнения условий инвариантности в трех классах автоматических систем:

- одномерных системах с обратной связью;
- комбинированных системах;
- многосвязных системах.

Рассмотрим систему третьего порядка:

$$\begin{aligned} &a_{11}(D)X_1 + a_{12}(D)X_2 + a_{13}(D)X_3 = F_1(t); \\ &a_{21}(D)X_1 + a_{22}(D)X_2 + a_{33}(D)X_3 = 0; \\ &a_{31}(D)X_1 + a_{32}(D)X_2 + a_{33}(D)X_3 = 0; \end{aligned} \qquad (3)$$

Считаем, что $\boldsymbol{X_1}$ – регулируемая величина, $\boldsymbol{F_1}$ – суммарное возмущение, действующее на входе объекта, управляющее воздействие принято равным нулю.

Таким образом, первое уравнение есть уравнение движения объекта, второе – измерительной части системы (регулятора) и третье – уравнение сервопривода. Операторы $\boldsymbol{a_{ij}(D)}$ являются операторами от $D \equiv \frac{d}{dt}$ и могут иметь порядок не выше второго:

$$a_{ij}(D) = M_{ij}D^2 + L_{ij}D + C_{ij};$$

Поэтому уравнения (3) являются алгебраической (символической) формой записи дифференциальных уравнений линейной модели системы.

Перепишем уравнения (3) в операторной форме, перейдем к преобразованию Лапласа.

$$a_{11}(p)X_1+a_{12}(p)X_2+a_{13}(p)X_3=F_1(p)+r_1(p);$$
$$a_{21}(p)X_1+a_{22}(p)X_2+a_{23}(p)X_3=r_2(p);\qquad(4)$$
$$a_{31}(p)X_1+a_{32}(p)X_2+a_{33}(p)X_3=r_3(p);$$

где $a_{ij}(p)=M_{ij}p^2+L_{ij}p+C_{ij}$;

$r_i\,(t)$ – преобразованные по Лапласу начальные значения координат системы.

Напомним, что по условию дифференцирования оригинала:

$$L\left\{\frac{d^nX}{dt^n}\right\}=p^nX(p)-p^{n-1}X(0)-p^{n-2}X(0)\ldots-X^{n-1}(0);$$

Найдем решение алгебраической системы уравнений (4) через формулы Крамера:

$$X_1(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta};$$

Присоединенный определитель Δ_1 определяется как:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}F_1(p)+r_1(p) & a_{12} & a_{13}\\ r_2(p) & a_{22} & a_{23}\\ r_3(p) & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

находим :

$$X_1(p)=\frac{1}{\Delta}\left[\left(F_1+r_1\right)A_{11}+r_2A_{21}+r_3A_{31}\right]$$

где A_{11}, A_{21}, A_{31} – соответствующие алгебраические дополнения.

Итак, общий вид решения:

$$X_1(p)=\frac{1}{\Delta}[(F_1+r_1)*\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-r_2*\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+r_3*\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}] \quad (5)$$

Если определитель $A_{11}\equiv 0$ (6), то $X_1(p)$ не будет зависеть от внешнего возмущения F_1. Это условие и называется *условием абсолютной инвариантности* или условием Щипанова. Оно получено нами для случая одномерной системы с обратной связью.

Применяют и другую форму записи этого условия. Учитывая, что все операторы $A_{ij}(p)$ есть операторы максимум второго порядка от p, раскрывают определитель $A_{11}(p)$, перемножают операторы, приводят подобные и определитель $A_{11}(p)$ записывают в виде матричного полинома:

$$A_{11}(p)=\varepsilon_0 p^4+\varepsilon_1 p^3+\varepsilon_2 p^2+\varepsilon_3 p+\varepsilon_4\equiv 0;$$

тогда условие Щипанова будет:

$$\varepsilon_0=\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4\equiv 0 \quad (7)$$

Выполнение условия инвариантности не означает, что обращается в нуль и собственная составляющая переходного процесса. При выполнении условия (6) получим из (5) решение уравнения в виде:

$$X_1(p)=\frac{r_2(p)A_{21}+r_3(p)A_{31}}{a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}};$$

Видим, что собственная составляющая решения остается и определяется начальными условиями $r_2(p)$ и $r_3(p)$. Правда она при этом изменяется, так как частично вырождается характеристический полином системы $\Delta(p)$.

2. ПОЛИИНВАРИАНТНАЯ ЗАДАЧА

Возможна и несколько другая постановка задачи о полной инвариантности, когда учитывается действие внешних возмущений не только на объект, но и на локальные элементы регулятора. В этом случае уравнения системы будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
&a_{11}(D)X_1 + a_{12}(D)X_2 + a_{13}(D)X_3 = F_1(t);\\
&a_{21}(D)X_1 + a_{22}(D)X_2 + a_{33}(D)X_3 = F_2(t);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{31}(D)X_1 + a_{32}(D)X_2 + a_{33}(D)X_3 = F_n(t);
\end{aligned} \qquad (8)$$

Задача ставится так: достичь независимости одной из координат, например, $\boldsymbol{X_1}$ относительно всех возмущений. И можно поставить обратную задачу: достичь независимости всех координат системы от одного какого-то возмущения. Оказывается, что в общем случае, когда все операторы $\boldsymbol{A_{ij} \neq 0}$, эта задача решается не полностью, а лишь частично. Эта задача называется *задачей полиинвариантности.*

Можно показать, что абсолютной инвариантности любой одной координаты можно достичь не более, чем для (n–2) возмущений. Или, наоборот, абсолютной инвариантности относительно всех возмущений можно достичь лишь для (n–2) координат системы.

Доказательство строится от противного. Находим характеристическое уравнение системы.

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} - a_{21}A_{21} + \dots - a_{i1}A_{i1} + \dots \_ a_{n1}A_{n1} = 0;$$

Пусть в системе выполнены условия абсолютной инвариантности координаты $\boldsymbol{X_1}$ от всех возмущений, кроме $\boldsymbol{F_i}$, то есть скомпенсированы не (n – 2) возмущения, а (n – 1).

Тогда характеристическое уравнение принимает вид: a **i1** $A_{i1} = 0$. Но $a_{i1} \neq 0$, как условились, значит необходимо, чтобы и $A_{i1} \neq 0$, а это невозможно, так как в этом случае характеристическое уравнение вырождается в тождественный нуль, и система либо не имеет решения, либо имеет бесконечное множество решений.

Остается принять, что *полиинвариантная задача в одномерных системах решается с точностью до* **(*n* –2)** *возмущений.*

3. ФИЗИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ УСЛОВИЙ ИНВАРИАНТНОСТИ

Все вышесказанное имеет практическую ценность, если условия абсолютной инвариантности не противоречат другим требованиям, предъявляемым к САР. В связи с этим большое значение имеют признаки, по которым можно до начала синтеза определить - можно ли в данной системе выполнить условие Щипанова абсолютно. Такие признаки были найдены и сформулированы академиком В.С. Кулебакиным.

Необходимый признак: решение системы уравнений при выполнении условия абсолютной инвариантности для координаты $X_1(t)$ относительно возмущения $F_1(t)$ и решение этой же системы уравнений, описывающих поведение системы с разомкнутым по координате X_1 выходом ,должны совпадать при отсутствии других внешних воздействий и при нулевых начальных условиях на все координаты системы.

Математически представим это так. Уравнения системы запишем для нулевых начальных условий и при отсутствии всех других возмущений, кроме $F_1(t)$:

$$\begin{cases} a_{11}(p)X_1 + a_{21}(p)X_2 + \ldots + a_{1n}(p)Xn = F_1(p); \\ a_{21}(p)X_1 + a_{22}(p)X_2 + \ldots + a_{2n}(p) = 0; \\ \ldots \\ a_{n1}(p)X_1 + a_{n2}(p)X_2 + \ldots + a_{nn}(p)X_n = 0; \end{cases} \qquad (9)$$

Уравнения этой же системы, разомкнутой по выходу X_1,будут иметь вид:

$$\begin{cases} a_{11}(p)X_1 + & a_{21}(p)X_2 + & \ldots + & a_{1n}(p)Xn = F_1(p); \\ 0 + & a_{22}(p)X_2 + & \ldots + & a_{2n}(p) = 0; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 + & a_{n2}(p)X_2 + & \ldots + & a_{nn}(p)X_n = 0; \end{cases} \qquad (10)$$

Для обеспечения абсолютной инвариантности X_1 от F_1 надо, чтобы решения у равнений (9) и (10) совпадали и имели вид: $X_1(t)=0$. Проверим.

Для замкнутой САУ:

$$X_1(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{A_{11}F_1}{a_{11}(p)A_{11} + a_{21}(p)A_{21} + \ldots + a_{n1}(p)A_{n1}};$$

Для разомкнутой САУ:

$$X_1(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{A_{11}F_1}{a_{11}(p)A_{11}};$$

Учитывая **условие инвариантности** X_1 от F_1, имеем:

для замкнутой САУ:

$$X_1(t) \equiv 0,$$

для разомкнутой САУ:

$$X_1(t) \neq 0 \text{ , так как здесь } \Delta_{\text{раз}}=0.$$

Таким образом необходимый признак здесь не выполняется, условия абсолютной инвариантности в этой системе не могут быть выполнены технически.

Можно для этой же системы получить противоположный вывод. Проверим возможность инвариантности этой же координаты $\boldsymbol{X_1}$ от другого возмущения $\boldsymbol{F_i}$:

Для замкнутой системы: $$X_1(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{A_{i1}F_1}{a_{11}(p)A_{11} + a_{21}(p)A_{21} + \ldots + a_{n1}(p)A_{n1}};$$

для разомкнутой системы: $$X_1(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{A_{i1} * F_1}{\Delta_{раз}(p)}$$

Учтем условие инвариантности: чтобы $\boldsymbol{X_1}$ не зависела от $\boldsymbol{F_i}$, нужно чтобы $\boldsymbol{A_{i1} \equiv 0}$, значит для разомкнутой САУ , а также и для замкнутой $\boldsymbol{X_1(t) \equiv 0}$; так как здесь уже $\Delta_{раз} \neq 0$.

На основании изложенного, формулировку необходимого признака реализации можно свести к очень простому для практического использования правилу:

в системе можно выполнить условия абсолютной инвариантности, если определитель системы, разомкнутой по данной координате не равен нулю: $\Delta_{раз} \neq 0$.

Достаточный признак базируется на применении теоремы о существовании изображения: если переменная $\boldsymbol{p} \to \infty$, то всякое изображение по Лапласу стремится к нулю. Для проверки этого признака надо проанализировать вид решения $\boldsymbol{X_1(p)}$ или вид выражения для синтезируемого элемента, с помощью которого создаются условия инвариантности.

Оба эти выражения имеют вид дроби:

$$\frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \ldots + b_n}.$$

Если порядок полинома числителя синтезируемого элемента или решения системы меньше порядка полинома знаменателя, то достаточный признак выполняется

$$\lim X_1(p) = \lim \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \ldots + b_n} \to 0$$

(при ***p***→∞ *) ,т.е. этот синтезируемый элемент можно технически реализовать как устойчивое звено.*