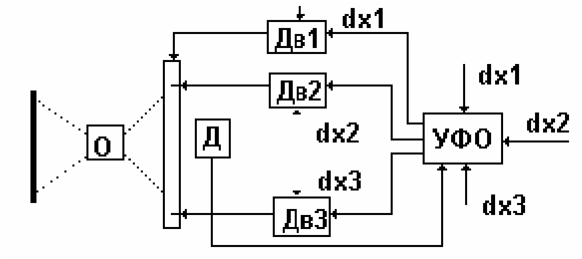
Тема 3. АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ЛИНЕЙНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

1. ПОСТРОЕНИЕ СТРУКТУРНОЙ СХЕМЫ СИСТЕМЫ

Построение уравнения движения и структурной схемы СЭР определяется примененным способом поиска экстремума. Рассмотрим этот вопрос на примере многомерной системы совмещения изображений.



На пленке имеется негативное изображение местности или объекта. На эту же пленку объективом **О** проектируется сама эта местность или объект. Необходимо установить положение пленки, в котором совпадение изображений максимально. Поиск ведется по трем координатам: продольному, боковому перемещению пленки и ее вращению вокруг оси, перпендикулярной ее плоскости. Сигнал с датчика **Д** (фотоэлемента) поступает на устройство формирования отклонений **УФО** , собранное на синхронных детекторах, на вторые входы которых поступают сигналы поиска. Эти же сигналы поступают на двигатели, управляющие п оложением пленки. В результате сложного колебательного движения пленка устанавливается в требуемом положении экстремума.

Здесь световой поток на фотоэлемент $\boldsymbol{F(x_1, x_2, x_3)}$ является функцией трех координат и, кроме главного экстремума, будет иметь множество экстремумов меньшей величины. Поэтому на практике здесь п рименяют сложную систему поиска: сканируют значения $\boldsymbol{F}$ от каждой координаты и запоминают значения экстремумов, затем регуляторы настраивают так, чтобы система вышла в область главного экстремума, и здесь используют метод градиента в его непрерывной форме.

Считая, что система уже находится в окрестности главного экстремума, найдем ее уравнение движения и построим структурную схему.

Начнем с объекта управления. Для поиска составляющих градиента будем использовать метод синхронного детектирования с запоминанием экстремума. Тогда:

$$F - F_{экс} \cong \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} * \Delta x_i \Delta x_k \qquad (1)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{iэ}$; **и** $\Delta x_k = x_k - x_{kэ}$.

Дифференцируя (1) по $\boldsymbol{x_i}$, получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \cong \sum_{i,k}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} * \Delta x_k.$$

Следовательно, на выходе синхронных детекторов имеем сигналы $\frac{\partial F}{\partial x_i}$,, а после фильтрации на выходе фильтров получим напряжения:

$$U_i = \frac{K_d}{T_d p + 1} * \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + f_i\right) \approx \frac{K_d}{T_d p + 1} * \left(\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} * \Delta x_k + f_i\right); \qquad (3);$$

где T_d, K_d - параметры настройки фильтра; f_i - возмущающие воздействия.

Уравнение (3) можно назвать уравнением сложного объекта, включающего собственно объект, синхронные детекторы и фильтры.

Далее, напряжения U_i подаются на входы исполнительных сервоприводов. Так как для организации движения к точке экстремума используется метод градиента, то скорость изменения каждой координаты xi должна быть пропорциональна $\frac{\partial F}{\partial x_i}$: $px_i = \pm a \frac{\partial F}{\partial x_i}$

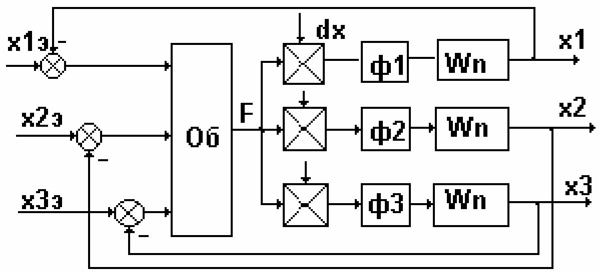
значит коэффициенты усиления всех каналов – должны быть одинаковыми. Передаточная функция сервопривода принимается в виде:

$$W_n(p) = \frac{K_n}{p(T_n p + 1)}$$

поэтому уравнение движения для *i*-го канала будет иметь вид:

$$x_i^* = \frac{K_n}{p(T_n p+1)} * \frac{K_d}{T_d p + 1} * [\sum_k^3 \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}(x_k - x_{kэ}) + f_i] \quad (4);$$

Структурная схема СЭР примет вид:



Таким образом структурная схема многомерной системы экстремального регулирования, работающая по методу градиента, состоит из трех астатических каналов с одинаковыми коэффициентами усиления.

Здесь объект регулирования вместе с синхронными детекторами описывается *передаточной матрицей* вида:

$$[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{где } a_{ik} = (\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}) \quad (5)$$

Понятия и свойства передаточных матриц будут подробнее рассмотрены в третьем разделе курса.

Задающие воздействия **($x_{1э}$, $x_{2э}$, $x_{3э}$)** на входах объекта показываются условно, так как они неизвестны.

2. АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ЛИНЕЙНЫХ СЭР

Поставим задачу анализа устойчивости достижения экстремума и качества регулирования, то есть времени достижения экстремума.

Кроме этих обычных показателей качества экстремальные системы оценива ю тся еще по одному показателю: *потерям на поиск (рысканье)* . Так как регулируе мая величина F в экстремальных системах колеблется около экстремального значения, совершая колебания поиска, необходимые для определения градиента, то потерей на поиск называется среднее по времени значение разности **(F–$F_э$)** . Для максимума **(F–$F_э$)** < $F_э$, для минимума **(F–$F_э$)** > $F_э$. Текущее значение этой разности мы уже определили:

$$F - F_{экс} = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k .$$

Так как регулярные колебания поиска имеют разные частоты, то:

$$\Delta \overline{x_i \Delta x_k} = \begin{cases} 0 & при\_i \neq k \\ \Delta x_i^2 & при\_i = k \end{cases}$$

Поэтому для каждого канала системы среднее значение потерь на поиск будет:

$$\overline{F - F_{экс}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} \Delta x^2 \qquad (6).$$

Значение потерь на поиск как показателя качества зависит от типа системы. Для систем экстремального регулирования мощности, энергии, экономических показателей они имеют важное значение.

Как уже отмечалось, метод градиента в идеальном виде $px_i = \pm a \frac{\partial F}{\partial x_i}$ обеспечивает устойчивость достижения экстремума “в большом”. Поэтому при любых начальных условиях система должна быть устойчива. Однако при его реализации необходима проверка на устойчивость “в малом”, так как практически он реализуется в виде:

$$px_i = \pm W(p) \frac{\partial F}{\partial x_i} .$$

Запаздывание в исполнительных устройствах и в самом объекте может не обеспечить устойчивость нахождения экстремума.

Для оценки устойчивости “в малом” обратимся сначала к уравнениям объекта, и примем без доказательства несколько постулатов из теории поверхностей 2-го порядка.

В n-мерном пространстве координат поверхность (7) называется *квадрикой.*

$$2(F - F_{экс}) = \sum_{i,k}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k = const \qquad (7)$$

Уравнение вида (8), составленное из элементов матрицы объекта (5), называется *вековым уравнением.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

где λ – комплексный параметр.

В частности квадриками описывается движение планет в солнечной системе по своим орбитам. Корни уравнения (8) определяют устойчивость этого движения.

Доказано в теории поверхностей 2-го порядка, что если функция ***F*** имеет экстремум, то квадрика для нее является эллипсоидом. Центр эллипсоида совпадает с началом координат, а его полуоси повернуты относительно осей координат.

Если функция ***F*** имеет экстремум – максимум, то все корни векового уравнения по знаку отрицательны, а по величине обратно пропорциональны квадратам полуосей определяющего эллипсоида:

$$\sum_{i,k}^{n} a_{ik}{}^{*} \Delta x_i \Delta x_k = -1.$$

Если функция ***F*** имеет экстремум-минимум, то все корни векового уравнения положительны, а по величине обратно пропорциональны квадратам полуосей определяющего эллипсоида $\sum_{i,k}^{n} a_{ik} * \Delta x_i \Delta x_k = 1.$

Составим теперь характеристическое уравнение системы, работающей по методу градиента, и сравним его с вековым уравнением (8). Уравнение объекта составим для упрощенного случая, когда передаточную матрицу объекта можно считать симметричной. В этом случае резко уменьшится объем вычислений, так как в симметричной матрице $\boldsymbol{a_{ik} = a_{ki}}$. Тогда, дифференцируя (7) получаем :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} * \Delta x_k , \qquad \text{где} \quad \Delta x_k = x_k - x_{kэ} .$$

Если коэффициент усиления канала регулирования взять $\boldsymbol{a}$ – const , то из определения метода градиента следует, что:

$$px_i = \pm a \frac{\partial F}{\partial x_i} = \pm a * \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} * \Delta x_k + f_i \right) \qquad (9)$$

$$\text{но} \quad x_i = \Delta x_i + x_{iэ} \quad \text{и} \quad px_i = p\Delta x_i + px_{iэ} \qquad (10)$$

Поэтому, подставляя (10) в (9) , получаем уравнение системы в виде:

$$\pm \frac{1}{a} p\Delta x_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \Delta x_k = f_1 \pm \frac{1}{a} px_{iэ} \qquad (11)$$

Распишем полученное уравнение системы по каждому каналу :

$$\begin{cases} (a_{11} \pm \frac{p}{a}) & +a_{12} + \ldots + a_{1n} = & -f_1 & \pm \frac{1}{a} p x_{1э} \\ a_{21} & +(a_{22} \pm \frac{p}{a}) + \ldots + a_{2n} = & -f_2 & \pm \frac{1}{a} p x_{2э} \\ --- & --- & --- & --- \\ a_{n1} & +a_{n2} + \ldots + (a_{nn} \pm \frac{p}{a}) = & -f_n & +\frac{1}{a} p x_{nэ} \end{cases} \qquad (12)$$

В общем случае (12) есть уравнение нелинейное, с переменными коэффициентами. Но в квазистационарном режиме возмущениями ***f*** можно пренебречь ввиду их малости и сильного подавления в инерционных звеньях системы. Характеристическое уравнение нашей системы, судя по (12) будет:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \pm \frac{p}{a} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \pm \frac{p}{a} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \pm \frac{p}{a} \end{vmatrix} = 0 \qquad (13)$$

то есть с точностью до множителя ***p/a*** оно совпадает с вековым уравнением (8).

Для случая экстремума-максимума все корни уравнения (13) будут отрицательны, а величина **a>0**. Для случая экстремума-минимума все корни (13) положительны, а величина **a<0**. То есть условие устойчивости можно записать так:

если все корни характеристического уравнения замкнутой СЭР в квазистационарном режиме при F-const вещественны и отрицательны, то экстремальное положение системы ***устойчиво “в малом”****.*

Определив корни уравнения (13), можно оценить и максимальное время установления экстремума по степени устойчивости. Из классической теории автоматического управления известно, что

$$t_{рег} \approx (3-4)\frac{1}{|\lambda_{\min}|}.$$

Зная минимальное по модулю значение корня системы, легко найти примерное время установления экстремума.

Мы рассмотрели идеальную систему, в которой передаточный коэффициент каждого канала равен **a** – *const*. Если же не пренебрегать запаздыванием в каналах регулирования СЭР, то характеристическое уравнение СЭР будет совпадать с вековым уравнением с точностью не до **1/a** , а до **1/*W*(*p*)**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \pm \frac{p}{W(p)} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \pm \frac{p}{W(p)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \pm \frac{p}{W(p)} \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

В этом случае можно предложить для анализа устойчивости более простое правило. Получим его. Как известно, корни характеристического уравнения для квадрик обратно пропорциональны квадрату полуоси определяющего эллипсоида:

$$\frac{p}{W(p)} = \pm \frac{1}{C_i^2};$$

знак плюс соответствует экстремуму-минимуму; знак минус соответствует экстремуму-максимуму. Коэффициент же усиления каналов выбирается отрицательным для минимума и положительный для максимума. Поэтому в любом случае будет:

$$\frac{p}{W(p)} = -\frac{1}{C_i^2}$$

Преобразуем:

$$\frac{W(p)}{p} * \frac{1}{C_i^2} + 1 = 0\,; \qquad (15)$$

Теперь посмотрим на структурную схему системы. Если вместо объекта регулирования поставить в каждом канале усилительные звенья с коэффициентами передачи $\frac{1}{C_i^2}$, то характеристические уравнения каналов будут описываться уравнением (15) .

Таким образом можно сформулировать правило:

что непрерывная СЭР, основанная на методе градиента в квазистационарном режиме ***будет устойчива*** *только тогда, когда будут устойчивы N изолированных каналов, в которых вместо объекта регулирования стоят передаточные звенья с коэффициентами усиления, обратно пропорциональные квадратам полуосей определяющих эллипсоидов.*

Анализ же устойчивости по уравнению (15) легко провести обычным способом из теории линейных систем управления.