Тема 2. СПОСОБЫ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА

1. СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАДИЕНТА ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В СЭР

Условием экстремума целевой функции $\boldsymbol{F(x_1, x_2 \ldots, x_n)}$ является равенство нулю в точке экстремума всех частных производных. Градиент функции в точке экстремума также обращается в нуль:

$$grad\,F = k_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + k_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

Задача поиска экстремума состоит из **двух этапов**:

- определения градиента ***F*** , то есть отклонения от положения экстремума;
- организации движения системы к положению экстремума.

Рассмотрим способы решения этих задач. В технических приложениях применяют в основном три способа определения градиента регулируемой функции:

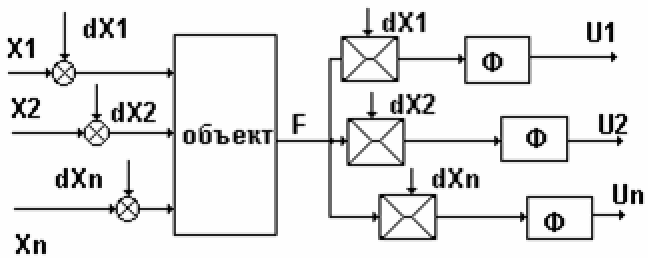
- способ синхронного детектирования;
- способ дифференцирования ***F*** во времени;
- способ запоминания экстремума.

Способ синхронного детектирования

является наиболее универсальным, так как может использоваться и при регулярном и при случайном поиске. Для регулярных сигналов поиска способ заключается в том, что к основным, медленно изменяющимся сигналам $(x_1, x_2, ..., x_n)$ добавляются небольшие по амплитуде гармонические составляющие, имеющие разные частоты. Тогда:

$$x_1 = x_1^* + x_{10} Sinw_1 t; \qquad x_2 = x_2^* + x_{20} Sinw_2 t; \text{ и т.д.} \qquad (1)$$

Структурная схема сложного объекта принимает указанный вид:



Выходная координата объекта ***F*** поступает на синхронные детекторы, ко вторым входам которых подводятся те же гармонические составляющие. Синхронные детекторы умножают ***F*** на эти гармонические составляющие и затем усредняют по времени результат, то есть на их выходах мы имеем напряжения постоянного тока:

$$U_1 = x_{10} * F * Sinw_i t; \ldots U_n = x_{n0} * F * Sinw_n t \qquad (2)$$

Назовем режим, когда рабочие составляющие x_i* меняются медленно по сравнению с поисковыми dx_i , а время усреднения велико по сравнению с периодом, соответствующим наименьшей частоте поиска, *квазистационарным режимом.*

Теперь покажем, что если создать в системе условия квазистационарного режима, то выходные напряжения сложного объекта U_1, U_2,…, U_n будут пропорциональны частным производным ***F*** в точке **($x_1 = x_1^*$, $x_2 = x_2^*$,… $x_n = x_n^*$)**, то есть определяют градиент функции ***F*** в указанной точке.

Представим целевую функцию ***F*** в окрестности точки **(x_1, x_2, …, x_n)** степенным рядом:

$$F = F(x_1^* + \delta x_1, x_2^* + \delta x_2, \ldots x_n^* + \delta x_n) = F(x_1^*, x_2^* \ldots x_n^*) + \\ + \sum_i^n \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{1}{2!}\sum_{i,k}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}\delta x_i \delta x_k + \ldots$$

Подставим это значение ***F*** в выражения (2):

$$U_q = x_{q0}\overline{FSinw_q t} = x_{q0}\overline{F(x_1^*, x_2^* \ldots x_n^*)Sinw_q t} + \\ + x_{q0}\sum_i^n x_{i0}\overline{\frac{\partial F}{\partial x_0} * Sinw_i t Sinw_q t} + \qquad (3) \\ + \frac{1}{2!}x_{q0}\sum_{i,k}^n \overline{\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} * Sinw_i t Sinw_k t Sinw_q t} + \ldots$$

Так как в квазистационарном режиме координаты **(x_1^*, x_2^*,…, x_n^*)** постоянны или меняются во времени медленнее, чем период самой низкочастотной составляющей, то получаем:

$$U_q = x_{q0}\overline{F Sinw_q t} = x_{q0}F(x_1^*, x_2^* \ldots x_n^*) * \overline{Sinw_q t} +$$

$$+ x_{q0}\sum_i^n x_{i0}\frac{\partial F}{\partial x_i}\overline{* Sinw_i t Sinw_q t} +$$

$$+ \frac{1}{2!}x_{q0}\sum_{i,k}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}\overline{* Sinw_i t Sinw_k t Sinw_q t} + \ldots$$

Так как усреднение идет по достаточно большому интервалу времени, то

при $i = q;$ $\quad \overline{Sinw_q t} \approx 0$ **и** $\overline{Sinw_i t * Sinw_q t} \approx \frac{1}{2}$

при $i \neq q$ $\quad \overline{Sinw_i t * Sinw_q t} \approx 0$

На входах синхронного детектора $\boldsymbol{i = q}$, поэтому получаем:

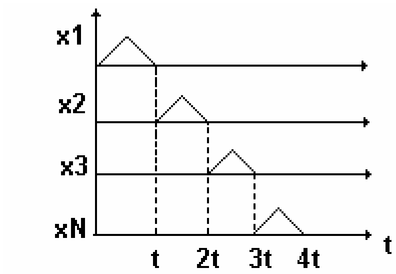
$$U_q = \frac{1}{2}x_{q0}^2 * \frac{\partial F}{\partial x_q} + \Delta U; \qquad (4)$$

где $\boldsymbol{\Delta U}$ **–** члены разложения высших порядков, амплитуда которых пренебрежимо мала.

Способ дифференцирования F во времени.

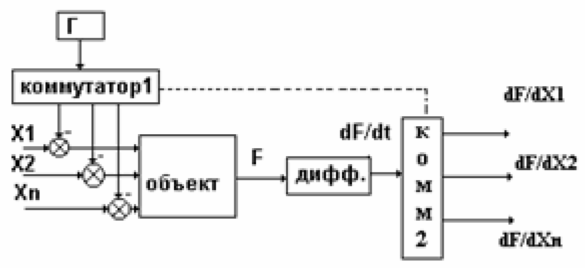
Здесь выходная координата объекта дифференцируется по времени:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_1} * \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_2} * \frac{\partial x_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_n} * \frac{\partial x_n}{\partial t};$$



Если задавать каким-либо образом скорость изменения координат и измерять производную изменения ***F*** по координате, то можно определять компоненты градиента целевой функции.

Возможно большое число вариантов этого способа. Например, можно поочередно, последовательно во времени задавать изменение регулируемых координат системы, как это сделано в СЭР шагового типа. Работа системы будет циклична. В каждом такте цикла задается конечная скорость изменения лишь одной координаты, а скорости изменения остальных координат равны нулю. Чтобы не нарушать нормального режима эксплуатации объекта, можно первую половину такта увеличивать скорость изменения выбранной координаты с постоянной скоростью, а во вторую половину такта – уменьшать с той же скоростью. В результате средняя за такт скорость изменения координаты будет равна нулю. Последовательность рабочих шагов ясна из рисунка. Схема измерения градиента целевой функции по этому способу имеет вид:



Генератор посылает треугольные импульсы через коммутатор во входные цепи объекта. Выходная величина F дифференцируется во времени на дифференциаторе и поступает в выходной коммутатор, на выходе которого последовательно снимаются на регуляторы сигналы, пропорциональные составляющим градиента. Недостаток данного способа - высокий уровень высокочастотных помех на выходе дифференциатора.

Способ запоминания экстремума

Этот способ используется только в окрестности экстремума, куда система выводится другими средствами. С помощью вынужденного или автоколебательного движения система перемещается в окрестности экстремума. Всякий раз, когда достигается $F=F_э$, положение экстремума запоминается запоминающим устройством. Градиент целевой функции определяется по разности $F–F_э$. Покажем, что эта разность текущего и экстремального значений функции ***F*** может служить мерой градиента. Снова разложим в степенной ряд значение функции ***F*** в окрестности экстремума.

$$F(x_1^* + \delta x_1; x_2^* + \delta x_2 ...) = F_{экс}(x_1^*, x_2^* ...) + \sum_i^n \frac{\partial F}{\partial x_i}\Delta x_i + \frac{1}{2}\sum_{i,k}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}\Delta x_i \Delta x_k + ... \quad (5)$$

Здесь полагаем, что $\Delta x_i = x_i - x_i^{экс}$ и $\Delta x_k = x_k - x_k^{экс}$, то есть при поисковом колебании целевая функция обязательно проходит точку экстремума.

Так как первые производные в точке экстремума равны нулю, то:

$$F - F_{экс} \approx \frac{1}{2}\sum_{i,k}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} * \Delta x_i \Delta x_k; \quad (6)$$

Очевидно, текущее значение производной ***F*** равно дифференциалу от разности (6):

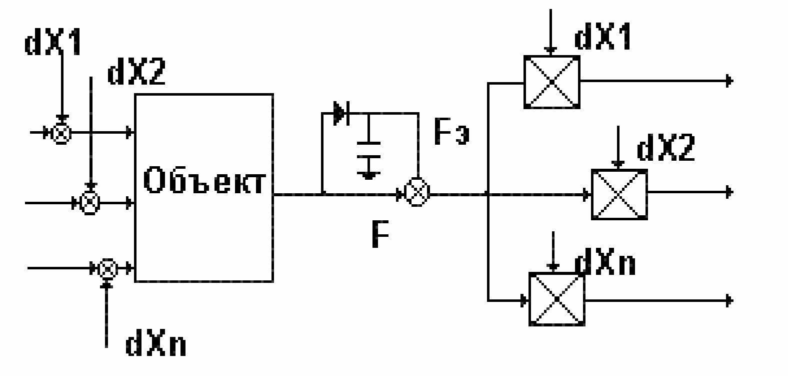
$$\frac{\partial(F - F_э)}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} * \Delta x_k.$$

Или иначе можно записать разность (**F-Fэ**) таким образом:

$$F - F_{экс} = 2\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} * \Delta x_i.$$

То есть, задавая отклонение $\boldsymbol{\Delta x_i}$ и измеряя разность $\boldsymbol{(F – F_э)}$, можно определять текущие значения составляющих градиента.

Компоненты градиента ***F*** можно выделять из (7) по-разному. Например, с использованием синхронных детекторов схема измерительной части системы имеет вид:



2. МЕТОДЫ ОРГАНИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ К СОСТОЯНИЮ ЭКСТРЕМУМА

Рассмотрим наиболее часто применяемые способы движения систем к точке экстремума.

Метод Гаусса-Зейделя.

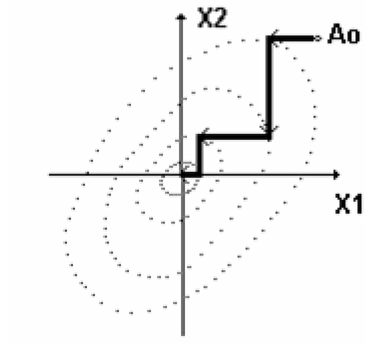
Этот метод относится к многочисленным методам координатного спуска. Заключается в поочередном изменении координат и определении частных экстремумов вида:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0.$$

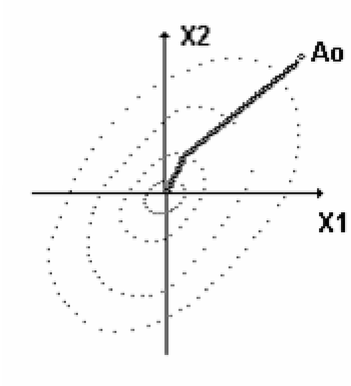
Сначала изменяется, например, первая координата в направлении уменьшения $\frac{\partial F}{\partial x_1}$.

После обращения в нуль этой составляющей градиента начинается изменение второй координаты и т.д. Процесс поиска заканчивается, когда

все составляющие градиента становятся меньше некоторого порога чувствительности системы. На фазовой плоскости этот процесс можно представить, как показано на рисунке . Путь движения по этому методу из начальной точки Ao в точку экстремума (начало координат) не является кратчайшим, поэтому быстродействие установления



экстремума здесь наихудшее. Зато при координатном поиске мы не можем “проскочить” состояние экстремума, поэтому точность поиска экстремума является высокой.



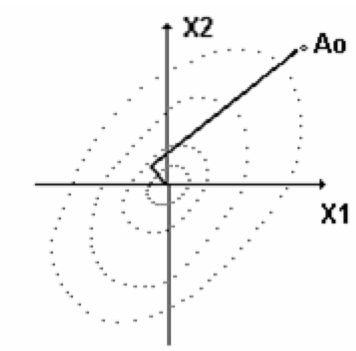
Метод градиента. При градиентном спуске в начале движения определяются все компоненты градиента, то есть находится направление вектора градиента, и обеспечивается движение системы в этом направлении, изменяя одновременно все координаты. Движение может быть непрерывным или шаговым. При непрерывном движении в линейных системах скорости изменения координат устанавливаются пропорциональными соответствующим составляющим градиента:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \pm a * \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Здесь знак плюс берется для экстремума-максимума, а минус – для экстремума-минимума. При шаговом поиске после измерения градиента делается рабочий шаг, составляющие которого по осям координат пропорциональны соответствующим компонентам градиента ***F***:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta x_i = \pm a * \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Далее вновь определяется градиент, происходит следующий шаг в новом направлении вектора градиента и т.д. Для дискретной системы аждый шаг является пробным для следующего. При непрерывном движении системы по этому методу траектория движения точки на фазовой плоскости всегда должна быть перпендикулярна к линиям равных значений ***F***, как показано на рисунке . Достоинством метода является плавный характер движения и хорошая точность достижения экстремума. Необходимо также отметить, что метод градиентного спуска абсолютно устойчив, то есть из начального состояния мы начинаем движение сразу в направлении экстремума, чего нельзя сказать про метод Гаусса-Зейделя.



Метод наискорейшего спуска. Здесь вначале также определяется направление вектора градиента, и происходит движение системы в этом направлении. Но, в отличие от метода градиента, при следующем рабочем шаге новое направление вектора градиента не определяется . С истема продолжает двигаться в первоначальном направлении до тех пор, пока частная производная ***F*** в этом направлении не обратится в нуль. Здесь снова определяется направление вектора градиента ***F*** и снова система движется по нему, пока не обратится в нуль производная ***F***, взятая по новому направлению. Изменение направления движения происходит в точках касания линии движения и линии равного значения ***F*=const**. Последовательные участки движения взаимно перпендикулярны. Преимуществом метода является малое время выхода в точку экстремума при крупных шагах движения в начале поиска. Однако точность нахождения экстремума, особенно при больших коэффициентах усиления регуляторов очень плохая.

Обычно в начале поиска используют этот метод, а в конце поиска – метод градиента или Гаусса-Зейделя.