

Тема 11. МЕТОДЫ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ И КАЧЕСТВА МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ

1. Эквивалентирование в МСАР.

2. Системы с антисимметричными жесткими связями.

3. Метод декомпозиции для однотипных МОСАР.

Вопросы для самоподготовки.

Литература:

1. Морозовский В.Т. *Многосвязные системы автоматического регулирования*. М., Энергия, 1970. стр.49-68; 201-209; 216-219.
2. Соболев О.С. *Однотипные связанные системы регулирования*. М., Энергия, 1973. стр. 67-72.

1. ЭКВИВАЛЕНТИРОВАНИЕ В МСАР

При анализе МСАР обязательным этапом работы является *эквивалентирование*, то есть замена исходной многосвязной системы эквивалентной ей одномерной системой, которая и анализируется с помощью известных приемов классической автоматики. Однако получаемая при этом передаточная функция эквивалентной системы имеет высокий порядок уравнения, что затрудняет анализ.

Вместе с тем в теории управления известно, что в практических задачах переходный процесс для высокого порядка дифференциального уравнения достаточно точно можно заменить переходным процессом уравнения не выше третьего порядка. Аппроксимация

решения уравнения высокого порядка решением уравнения низкого порядка осуществляется на основе теории приближения функций. При этом предпочитают трудную задачу аппроксимации решения дифференциальных уравнений заменить более простой задачей аппроксимации изображений функций по Лапласу. Это правомочно, так как существует взаимно однозначное соответствие между процессами в пространстве оригиналов и их изображений.

При этом задача ставится так: *требуется аппроксимировать сложную передаточную функцию более простой дробно - рациональной функцией с полиномами числителя и знаменателя более низкого порядка.* При синтезе МСАР ставится обратная задача: имеется простая желаемая передаточная функция, к которой надо приблизить передаточную функцию синтезируемой системы, которая имеет высокий порядок.

Приемы приближения функций при анализе и синтезе одни и те же.

При аппроксимации передаточных функций происходит сравнение приближенных аналитических решений и результатов моделирования задачи на ЭВМ, что позволяет осуществлять контроль полученного решения в широком диапазоне изменения параметров. Во многих случаях этот перебор параметров можно не делать, а заменить его приближенным аналитическим решением, если в районе некоторых существенных частот системы обеспечить хорошее совпадение результатов моделирования и приближенного аналитического решения.

Рассмотрим два метода приближения функций:

- производится приближение изображений функций по Лапласу, при этом не накладывается никаких условий на точность воспроизведения самих оригиналов функций;
- находится наилучшее приближение изображений, соответствующее минимуму среднеквадратической ошибки воспроизведения оригиналов функций.

Допустим, что приближаемый процесс описывается изображением по Лапласу вида:

$$W(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{\sum_{i=0}^s c_i * p^i}{\sum_{j=0}^q d_j * p^j}$$

Коэффициенты C_i и d_j известны, а $s < q$.

А аппроксимирующий процесс описывается изображением:

$$W'(p) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i * p^i}{\sum_{j=0}^m b_j * p^j} = \frac{M(p)}{N(p)}$$

где $n < m$; $n < s$; $m < q$.

Число искомых параметров передаточной функции $W'(p)$ равно $n + m + 2$. Будем приближать частотные характеристики в районе нулевой частоты $p=0$. Тогда уравнения для нахождения коэффициентов a_i и b_j получаются приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях в выражении:

$$\left(\sum_{i=0}^s c_i * p^i \right) * \left(\sum_{j=0}^m b_j * p^j \right) = \left(\sum_{j=0}^q d_j * p^j \right) * \left(\sum_{i=0}^n a_i * p^i \right).$$

Обычно желаемая передаточная функция всегда может быть сформирована так, чтобы $(s+m)=(q+n)$ и тем самым разность порядков числителя и знаменателя сохранилась бы одинаковой. Тогда получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
 c_0 * d_0 - d_0 * a_0 &= 0; \\
 c_0 * b_1 + c_1 * b_0 - d_0 * a_1 - d_1 * a_0 &= 0 \\
 c_0 * b_2 + c_1 * b_1 + c_2 * b_0 - d_0 * a_2 - d_1 * a_1 - d_1 * a_0 &= 0; \\
 c_{s-1} * b_m + c_s * b_{m-1} - d_{q-1} * a_n - d_q * a_{n-1} &= 0; \\
 c_s * b_m - d_q * a_n &= 0.
 \end{aligned}$$

Видим, что такой метод приближения функций равносильно требованию совпадения $(n + m + 2)$ производных функций в точке $p = 0$, включая и нулевую производную. Метод достаточно прост для инженерной практики и обеспечивает приближение оригиналов функций в районе t , стремящегося к бесконечности, то есть вблизи положения равновесия системы. Приближение в районе существенных частот здесь может быть крайне плохим.

Второй способ обеспечивает хорошее приближение в любом диапазоне частот, если приближать мнимые частотные характеристики функций, то есть значения передаточных функций вдоль положительной вещественной полуоси. Так как мнимые частотные характеристики всегда вещественны, то их легко построить для любого диапазона изменения $p = \delta$. Снова полагая, что разность порядков числителя и знаменателя остается неизменной, для нескольких значений $p = \delta$ получаем уравнения:

$$\sum_{i=0}^S c_i * \delta_i^i * \sum_{j=0}^m b_j * \delta_i^j - \sum_{j=0}^q d_j \delta_i^j * \sum_{i=0}^n a_i * \delta_i^i = 0$$

Если число уравнений $r = m + n + 2$, то решение этой системы линейных уравнений дает $n + m + 2$ неизвестных коэффициентов a_i и b_j . Если же, что бывает чаще всего, $r > m + n + 2$, то можно воспользоваться методом наименьших квадратов. При этом исходят из требования минимума выражения:

$$E = \sum_{i=1}^r \left[\sum_{i=0}^S c_i * \delta_i^i * \sum_{j=0}^m b_j * \delta_i^j - \sum_{j=0}^q d_j * \delta_i^j * \sum_{i=0}^n a_i * \delta_i^i \right]^2 .$$

Искомые уравнения получают после приравнивания нулю частных производных

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0; \frac{\partial E}{\partial b_j} = 0. \quad i=0,1,2 \dots n; \quad j=0,1,2 \dots m$$

2. СИСТЕМЫ С АНТИСИММЕТРИЧНЫМИ И ЖЕСТКИМИ ВЗАИМОСВЯЗЯМИ

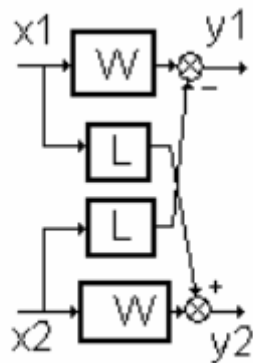
Для исследования устойчивости **МСАР** по его характеристическому уравнению $|\bar{I} + \bar{H} * \bar{R}| = 0$ могут быть использованы те же методы, что и для одномерных **САР**. Однако большой объем вычислительной работы, обусловленный высоким порядком характеристического уравнения, заставляет искать для **МСАР** свои критерии устойчивости.

Достаточно общего критерия, пригодного для любого типа **МСАР**, очевидно не существует, поэтому мы рассмотрим некоторые специальные методы анализа, справедливые для узкого класса **МСАР**. Все эти методы сводятся к представлению исходной **МСАР** эквивалентной одномерной схемой замещения, которая может исследоваться на устойчивость обычными методами одномерной автоматики. Затем результаты анализа пересчитываются на исходную многосвязную систему.

Рассмотрим некоторые приемы анализа, предложенные для однотипных многосвязных систем. Этот тип систем очень часто встречается в технических приложениях, так как используется для управления системами с распределенными параметрами. Однотипной многосвязной системой (**МОСАР**) будем называть систему, у которой передаточные

функции отдельных каналов регулирования одинаковы, а передаточные функции перекрестных связей могут отличаться только величиной коэффициента передачи.

Красовским А.А. [1] предложен метод анализа однотипных систем с антисимметричными связями. Рассмотрим метод на примере двумерного объекта с прямыми перекрестными связями, имеющими разные знаки.



Запишем уравнения движения:

$$\begin{cases} y_1 = W(p) * x_1 - L(p) * x_2 \\ y_2 = W(p) * x_2 + L(p) * x_1 \end{cases} \quad (1)$$

Умножим второе уравнение на j и сложим почленно:

$$\begin{aligned} (y_1 + jy_2) &= W(p) * (x_1 + jx_2) + L(p) * (jx_1 - x_2) = \\ &= W(p) * (x_1 + jx_2) + L(p) * \left(\frac{j^2 x_1 - jx_2}{j} \right) = \\ &= W(p) * (x_1 + x_2) + L(p) * \left(\frac{j^2 x_1 + j^2 jx_2}{j} \right) = \\ &= W(p) * (x_1 + jx_2) + j * L(p) * (x_1 + jx_2) \end{aligned}$$

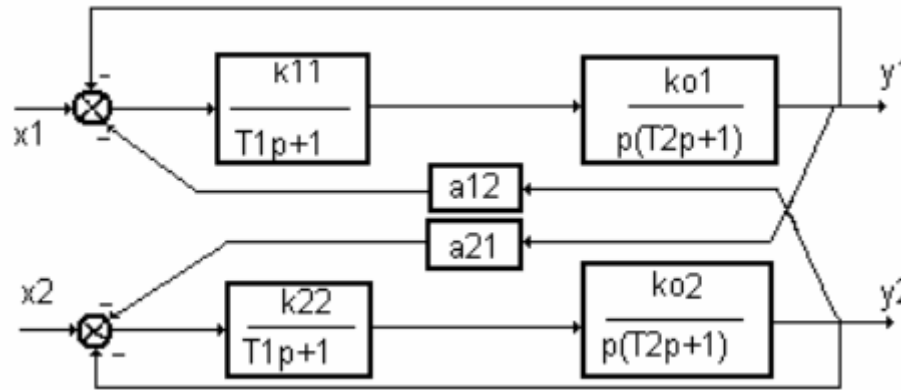
Вводим комплексные величины $\bar{Y} = y_1 + jy_2$ и $\bar{X} = x_1 + jx_2$.

Тогда получаем передаточную функцию двумерного комплекса в виде:

$$\overline{\Phi}_{зам}(p) = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}(p) = W(p) + j * L(p). \quad (2)$$

Уравнение (2) описывает одномерную систему, эквивалентную исходной двумерной системе, то есть является эквивалентной схемой замещения, анализ которой может быть

проведен обычными методами автоматике, а результат пересчитан на исходную связанную систему.



Второй прием эквивалентирования применяется только для МОСАР с жесткими перекрестными связями и позволяет воспользоваться для анализа таких систем методом *Найквиста*.

Передаточные функции каналов отличаются только

коэффициентами усиления, так что:

$$W(p) = \frac{1}{p(T_1p + 1)(T_2p + 1)}$$

обозначим: $W_1(p) = K_1W(p)$; $W_2(p) = K_2W(p)$. (3)

Найдем и проанализируем вид характеристического уравнения системы. Составим уравнения движения по-канально:

$$\begin{cases} y_1 = W_1(p)(x_1 - y_1) - a_{12}y_2; \\ y_2 = W_2(p)(x_2 - y_2) - a_{21}y_1; \end{cases}$$

Разрешаем их относительно регулируемых координат:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{(1+W_2(p))W_1 x_1 - a_{12}W_1(p)W_2(p)x_2}{(1+W(p))(1+W_2(p)) - a_{12}a_{21}W_1(p)W_2(p)} \\ y_2 = \frac{(1+W_1(p))W_2(p)x_2 - a_{21}W_1(p)W_2(p)x_1}{(1+W_1(p))(1+W_2(p)) - a_{12}a_{21}W_1(p)W_2(p)} \end{cases};$$

Отсюда находим характеристическое уравнение МСАР:

$$(1+W_1(p))(1+W_2(p)) - a_{12}a_{21}W_1(p)W_2(p) = 0 \quad (4)$$

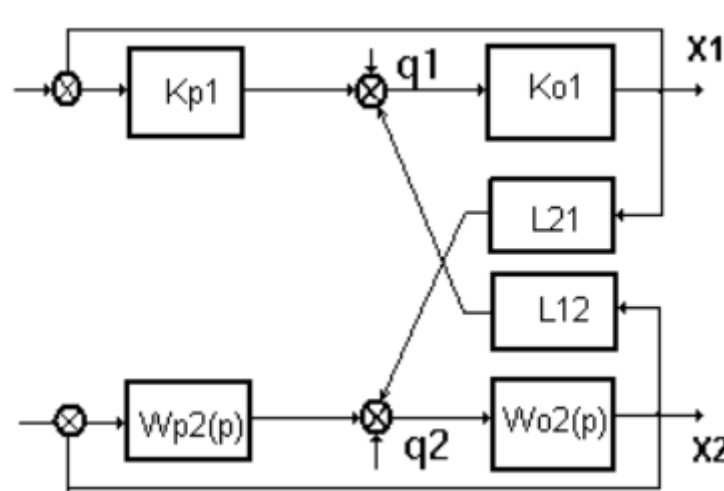
Подставляя (3) в (4), преобразуем (4) к виду:

$$K_1 K_2 (1 - a_{12} a_{21}) W^2(p) + (K_1 + K_2) W(p) + 1 = 0 \quad (5)$$

Уравнение (5) является уравнением второго порядка относительно комплексного параметра $W(p)$. Решая уравнение, находим его корни λ_1 и λ_2 . Теперь достаточно построить годограф Найквиста на этой же комплексной плоскости и убедиться, что он не охватывает точки λ_1 и λ_2 . В этом случае замкнутая МСАР будет устойчива [2].

Иногда прибегают к очень простому приему эквивалентирования, если быстродействия отдельных каналов МСАР сильно различаются, например, один из каналов регулирования имеет очень малую инерционность. Тогда во временной области он окажется развязанным с остальной частью системы, которая для него будет играть роль лишь источника возмущений. Например, в нижеследующей системе:

Первый канал регулирования имеет быстродействие намного больше, чем второй. Тогда передаточные функции ее регулятора и объекта можно принять равными постоянным коэффициентам, и всю систему свести к одномерной, в которой объект регулирования охвачен обратной связью с передаточной функцией:



$$W_{oc}(p) = L_{12} L_{21} * \frac{K_{o1}}{1 + K_{o1} K_{p1}}$$

а на его входе действует приведенное возмущение:

$$q_2^* = q_2 + L_{21} * \frac{K_{o1}}{1 + K_{o1} K_{p1}} q_1$$

Зная характер изменения координаты X_2 , можно легко найти изменения координаты X_1 . Если, например, связь каналов через объект – жесткая, то X_1 воспроизводит в сильно уменьшенном масштабе координату X_2 .

3. МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ ОДНОТИПНЫХ МОСАР

Оба рассмотренных метода являются приемами замещения исходной МСАР эквивалентной ей более простой одномерной системой. Оказывается для однотипных МСАР может быть предложен более общий метод анализа, из которого предыдущие вытекают как частные случаи.

Этот метод получил название *метода декомпозиции*. Он справедлив только для однотипных МСАР.

В общем виде передаточная матрица перекрестных связей в МОСАР имеет вид:

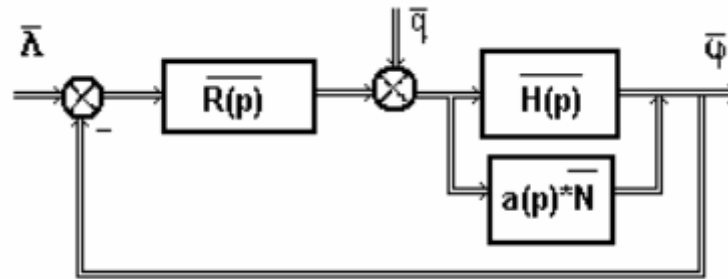
$$\bar{A} = a(p) * \bar{N} \quad (6)$$

где $a(p)$ – скалярная передаточная функция перекрестной связи, \bar{N} – числовая матрица коэффициентов усиления.

Матрица \bar{N} может быть принята для расчетов в любом из двух видов:

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} 0 & N_{12} & N_{13} \dots \\ N_{21} & 0 & N_{23} \dots \\ N_{31} & N_{32} & 0 \dots \dots \end{bmatrix} \quad \text{либо} \quad \bar{N} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \dots \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \dots \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \dots \end{bmatrix}$$

Допустим, что путем преобразования все перекрестные связи приведены к прямым, охватывающим объект:



где \bar{R} и \bar{H} – диагональные матрицы с одинаковыми диагональными элементами;
 $\bar{A} = a * \bar{N}$ – передаточная матрица перекрестных связей.

Тогда уравнение системы будет: $[I + (\bar{H} + \bar{A}) * \bar{R}] = (\bar{H} + \bar{A}) * (q + \bar{R} * \lambda)$; (7)

Введем новый базис координат: $\bar{\Phi} = \bar{C}^{-1} * \bar{\varphi}$; $\bar{Q} = \bar{C}^{-1} * \bar{q}$; $\bar{\Lambda} = \bar{C}^{-1} * \bar{\lambda}$ (8)

где \bar{C}^{-1} – неособая матрица произвольного вида.

Для того, чтобы матрицы системы не изменились, подвергнем их операции преобразования подобия.

Операция подобия матриц – это операция вида $\overline{N^*} = \overline{C}^{-1} * \overline{N} * \overline{C}$. Здесь $\overline{N^*}$ и \overline{N} называются подобными матрицами, их собственные числа совпадают. Среди всевозможных матриц \overline{C} всегда можно найти такие, которые преобразуют исходную матрицу \overline{N} к простейшему каноническому (диагональному) виду.

Тогда \overline{C} называют *матрицей канонического базиса*, а свойства полученной матрицы $\overline{N^*}$ таковы: на ее главной диагонали лежат собственные числа матрицы \overline{N} .

Итак, преобразуем:

$$\overline{C}^{-1} * [I + (\overline{H} + \overline{A}) * \overline{R}] * \overline{C} * \overline{\Phi} = \overline{C}^{-1} * (\overline{H} + \overline{A}) * \overline{C} * (\overline{Q} + \overline{C}^{-1} * \overline{R} * \overline{C} * \overline{\Lambda}) \quad (9)$$

Уравнение (9) уже является эквивалентным исходному уравнению (7), так как собственные числа матриц уравнений (7) и (9) будут одинаковы.

Введем обозначения:

$$\begin{cases} \overline{H^*} = \overline{C}^{-1} * \overline{H} * \overline{C}; & \overline{R^*} = \overline{C}^{-1} * \overline{R} * \overline{C}; \\ \overline{N^*} = \overline{C}^{-1} * \overline{N} * \overline{C}; & \overline{A} = \overline{C}^{-1} * \overline{A} * \overline{C} = a * \overline{C}^{-1} * \overline{N} * \overline{C}. \end{cases}$$

$$\text{Тогда: } [\overline{I} + (\overline{H^*} + \overline{A^*}) * \overline{R^*}] * \overline{\Phi} = (\overline{H} + \overline{A}) * (\overline{Q} + \overline{R} * \overline{\Lambda}); \quad (10)$$

Диагональные матрицы \overline{H} и \overline{R} перестановочны с матрицей \overline{C}^{-1} , поэтому преобразование подобия не меняет их вида: $\overline{H^*} = \overline{H}$; и $\overline{R^*} = \overline{R}$.

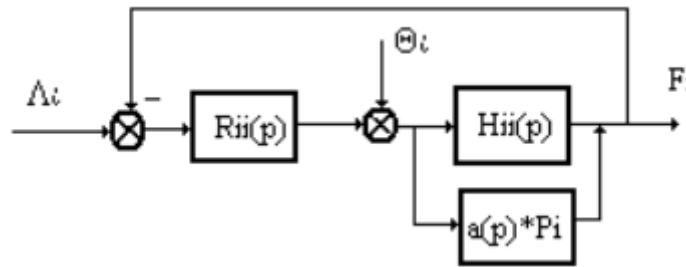
Теперь только недиагональная матрица $\overline{A} = a * \overline{C}^{-1} * \overline{N} * \overline{C}$ не позволяет матричному уравнению (9) распасться на систему несвязанных скалярных уравнений.

Если теперь в качестве матрицы преобразования подобия выбрать каноническую, то вместо матрицы \overline{N} мы получим ее каноническую простую матрицу $\overline{N^*}$

диагонального вида. И тогда (9) распадается на систему несвязанных между собой уравнений.

В этом и состоит способ перехода к эквивалентной МСАР – способ ее декомпозиции.

Структурная схема эквивалентного i -го канала МСАР после декомпозиции имеет вид:



где $\mathbf{R}_{ii}(p)$ и $\mathbf{H}_{ii}(p)$ – передаточные функции объекта и регулятора i -го отдельного (отдельного) канала регулирования, P_i – собственное число передаточной матрицы объекта, $\mathbf{a}(p)$ – передаточная функция перекрестной связи.

Рассмотрим на частном примере, для простой симметричной МОСАР, состоящей из двух каналов регулирования, нахождение матрицы канонического базиса. Матрица \bar{N} имеет вид:

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}; \det|\bar{N} - p\bar{I}| = \begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{vmatrix} = -p^2 - \alpha^2 = 0$$

т.е. определитель матрицы имеет два собственных числа: $+\alpha$ и $-\alpha$. Для матрицы n -мерной МОСАР характеристические числа будут:

$$p_1 = (n-1)\alpha \text{ и } p_2 = p_3 = \dots p_n = -\alpha.$$

Каноническая форма матрицы будет иметь вид: $\bar{N} = \begin{bmatrix} (n-1)\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$.

Для перехода от \bar{N} к \bar{N}^* имеется множество матриц перехода \bar{C} . Одной из них

является, например, матрица $\bar{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. (11)

Так как матрица \bar{C} является ортонормированной, то ее обращение сводится к транспонированию.

Нетрудно видеть, что после применения декомпозиции мы получаем эквивалентную систему, состоящую из n несвязанных (*сепаратных*) каналов, анализ которых нетрудно провести обычными методами автоматики.

Если все сепаратные каналы эквивалентной МСАР устойчивы, то и исходная МСАР будет устойчива. Если качество переходных процессов в эквивалентной системе известно, то качество регулирования в каналах исходной системы определяют как наихудшее из сепаратных каналов эквивалентной системы.

Особенно упрощается анализ МОСАР для симметричных систем, где матрица взаимной

связи каналов имеет симметричный вид: $\bar{N} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$.

Ее каноническая форма будет: $\bar{N} = \begin{bmatrix} (n-1)\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$.

Видим, что эквивалентная система в этом случае состоит из одного сепаратного канала с характеристическим числом $(n-1)\alpha$ и одинаковых сепаратных каналов с характеристическим числом $-\alpha$. Число таких одинаковых каналов будет очевидно $(N-1)$.

Первый сепаратный канал называют *каналом усредненного движения*, а остальные, одинаковые каналы – *каналами относительного эквивалентного движения*.

Смысл этих названий будет понятен, если определить эквивалентные регулируемые координаты через матрицу перехода \overline{C}^{-1} :

$$\overline{\Phi} = \overline{C}^{-1} * \overline{\varphi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 - \varphi_2 \\ \varphi_1 + \varphi_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

т.е. одна из эквивалентных координат Φ_2 представляет собой среднее значение $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{\sqrt{2}}$, а другая (Φ_1) – разность двух исходных координат.

В симметричных МОСАР анализ эквивалентной системы сводится к анализу всего двух сепаратных каналов: усредненного и относительного. Для этого надо только найти передаточные функции объекта по усредненному и относительному движениям.

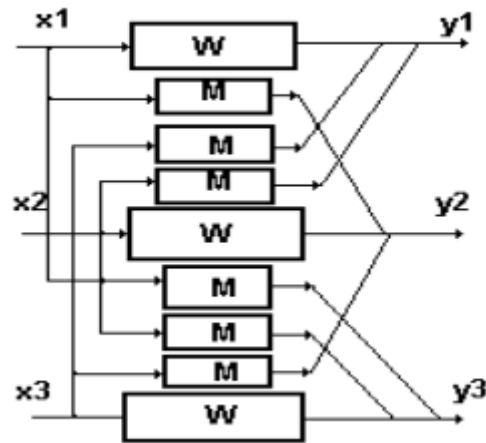
Выполним это на примере 3-х канальной МОСАР. Усредненное и относительные движения определим

следующим образом:

$$Y_{уср} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k; \quad X_{уср} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k. \quad (13)$$

$$Y_{отн} = y_1 - y_2; \quad Y_{отн} = y_1 - y_3. \quad (14)$$

Тогда после проведения анализа мы можем вернуться в начальный базис координат:



$$y_k = Y_{\text{уср}} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{kj_{\text{отн}}} ; (15)$$

или для нашей системы:

$$y_1 = \frac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3) + \frac{1}{3} [(y_1 - y_2) + (y_1 - y_3)];$$

Записываем уравнения движения для каждой выходной координаты объекта и суммируем почленно:

$$\begin{aligned} y_1 &= W(p)x_1 + M(p)(x_1 + x_3); \\ y_2 &= W(p)x_2 + M(p)(x_1 + x_3); \\ y_3 &= W(p)x_3 + M(p)(x_1 + x_2); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\sum_{k=1}^3 y_k = W(p) \sum_{k=1}^3 x_k + M(p) \left[3 \sum_{k=1}^3 x_k - \sum_{k=1}^3 x_k \right]$$

Исходя из определения (13), находим передаточную функцию объекта по усредненному движению:

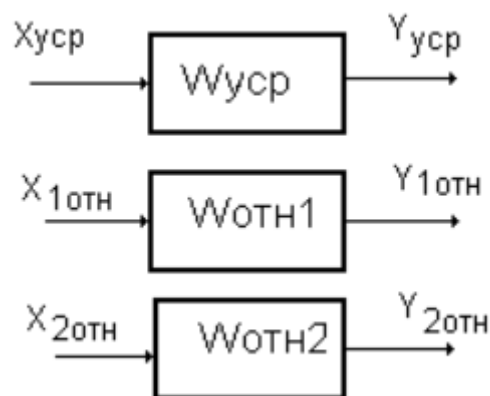
$$W_{\text{уср}}(p) = \frac{Y_{\text{уср}}}{X_{\text{уср}}}(p) = [W(p) + (n-1)M(p)] ; (17)$$

Аналогично поступаем для определения передаточной функции по относительным движениям, только уже не суммируем выходные координаты объекта, а вычитаем из y_1 :

$$y_1 - y_2 = W(p) * (x_1 - x_2) + M(p) * (x_2 - x_1) ; (18)$$

Поэтому искомая передаточная функция объекта по относительным движениям записывается так:

$$W_{отн}(p) = \frac{Y_{отн}}{X_{отн}}(p) = [W(p) - M(p)] \quad (19)$$



В результате декомпозиции исходной МСАР мы получаем эквивалентную систему, состоящую из трех несвязанных между собой "сепаратных" объектов. Замыкая эти объекты через отдельные каналы регулирования, проводим анализ устойчивости и качества обычными методами классической автоматики. Результаты анализа, используя (15), переносим на реальные координаты нашей системы.

Вопросы для самоподготовки:

1. Оцените сравнительную трудоемкость анализа МСАР с помощью цифрового моделирования на ЭВМ и аналитический расчет по приближенным моделям, полученным в результате эквивалентирования МСАР.
2. Назовите примеры промышленных производств, в управлении которыми требуются однотипные МСАР.
3. Можно ли использовать методы эквивалентирования, в частности метод декомпозиции, не только для анализа, но и для синтеза МОСАР?
4. Как можно провести анализ и настройку МСАР, не используя методы эквивалентирования?