Тема 10. МНОГОСВЯЗНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

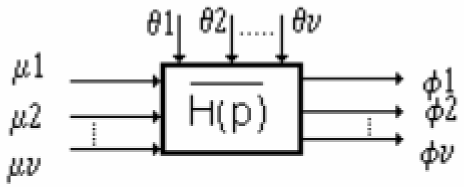
Литература :

1. Шатихин Л.Г. *Структурные матрицы и их применение для исследования систем*. М., "Машиностроение", 1974.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ

Многосвязными системами автоматического регулирования **(МСАР)** называют системы, состоящие из большого количества замкнутых каналов регулирования, взаимосвязанных через объект управления. Практически каналы регулирования любой АСУ ТП представляют собой МСАР той или иной сложности.

В настоящее время можно привести множество примеров реализации МСАР на промышленных объектах, однако не для каждой автоматизированной системы они рассматриваются в полном объеме взаимосвязей. Можно найти примеры в системах автоматизации тепловых, химических объектов, когда управляющий комплекс, состоящий из большого числа систем регулирования, проектируется без учета взаимных связей регулируемых величин через объект управления. Причиной этого является стремление удешевить предпроектное обследование процесса либо отсутствие жестких требований к качеству управления. Однако уже сегодня можно указать на ряд процессов, управление которыми невозможно без оценки взаимных связей регулируемых координат друг с другом. Чаще всего это относится к системам управления распределенными параметрами. Это системы управления тепловыми полями и полями расходов продуктов в тепловой энергетике, нейтронными полями в ядерных реакторах, полями силовых усилий в металлургии, полями электрической мощности в энергосистемах и т. п. [1].



Анализ работы таких систем, содержащих десятки и сотни каналов регулирования, невозможен без широкого привлечения матричной формы записи уравнений системы. Рассмотрим объект управления в МСАР, регулируемый по множеству выходных координат. Запишем уравнения движения объекта в операторном виде при нулевых началь ных у словиях.

$$\varphi_1(p) = h_{11}(p)\mu_1 + h_{12}(p)\mu_2 + \ldots + f_{11}(p)q_1 + f_{12}(p)q_2 + \ldots$$
$$\varphi_2(p) = h_{21}(p)\mu_1 + h_{22}(p)\mu_2 + \ldots + f_{21}(p)q_1 + f_{22}(p)q_2 + \ldots и..т.д.$$

где $h_{ij}(p)..и..f_{ij}(p)$ – *передаточные функции объекта по управляющим и возмущающим воздействиям*.

Нетрудно видеть, что матричная запись этих уравнений гораздо компактнее и нагляднее:

$$\overline{\varphi} = \overline{H}(p)\overline{\mu} + \overline{F}(p)\overline{q};$$

где:

$\overline{\varphi}$ – *вектор регулируемых координат*,

$\overline{\mu}$ – *вектор регулирующих воздействий*,

$\overline{q}$ – *вектор возмущений*,

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} h_{11}(p) & h_{12}(p) & \dots h_{1m}(p) \\ h_{21}(p) & h_{22}(p) & \dots h_{2m}(p) \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$ *– передаточная матрица объекта по управляющим воздействиям,*

$$\overline{F} = \begin{bmatrix} f_{11}(p) & f_{12}(p) & \dots f_{1m}(p) \\ f_{21}(p) & f_{22}(p) & \dots f_{2m}(p) \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$ *– передаточная матрица объекта по возмущающим воздействиям.*

Аналогично для уравнений регулятора в матричном виде имеем:

$$\overline{\mu} = \overline{R}(p)(\overline{\lambda} - \overline{\varphi});$$

где:

$\overline{\lambda}$ – *вектор задающих воздействий,*

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} r_{11}(p) & r_{12}(p) & \dots r_{1m}(p) \\ r_{21}(p) & r_{22}(p) & \dots r_{2m}(p) \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$ *– передаточная матрица регулятора.*

Элементы передаточных матриц регулятора и объекта имеют определенный физический смысл. Элементы, лежащие на главной диагонали являются передаточными функциями звеньев в прямом направлении прохождения входного сигнала (в однотипных МСАР – это так называемые передаточные функции зон управления объекта). Недиагональные элементы являются передаточными функциями взаимных связей регулируемых координат.

Решая совместно матричные уравнения объекта и регулятора, получим обобщенное матричное уравнение всей системы:

$$(\overline{I} + \overline{H} * \overline{R})\overline{\overline{\varphi}} = \overline{H} * \overline{R} * \overline{\lambda} + \overline{F} * \overline{q}; \quad (1)$$

где $\overline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ – *единичная матрица*.

Нетрудно увидеть аналогию уравнения (1) и уравнения движения одномерной системы, произведение матриц ***H*** и ***R*** представляет передаточную матрицу разомкнутой системы, а определитель :

$$\left|\overline{I + H * R}\right| = 0 \quad (2)$$

представляет собой характеристическое уравнение многосвязной системы. Если все корни этого уравнения лежат в левой полуплоскости, то это является необходимым и достаточным условием устойчивости работы МСАР.

Продолжая эту аналогию дальше, можно получить передаточные матричные функции системы. Так как воздействий на систему два, то система характеризуется двумя передаточными функциями, получаемыми из уравнения (1), передаточной матричной функцией по управляющим воздействиям:

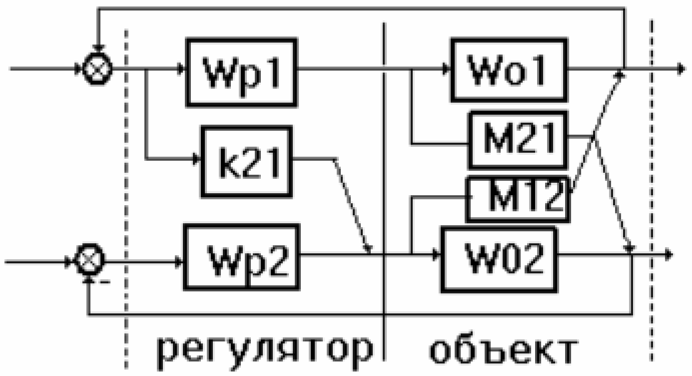
$$\overline{G_{\lambda}}(p) = \frac{\overline{\varphi}}{\overline{\lambda}}(p) = \left[I + \overline{H} * \overline{R}\right]^{-1} * \overline{H} * \overline{R}; \quad (3)$$

и передаточной матричной функцией по возмущающим воздействиям:

$$\overline{G}_{q}(p) = \frac{\overline{\varphi}}{\overline{q}}(p) = \left[I + \overline{H} * \overline{R}\right]^{-1} * \overline{F}; \quad (4)$$

Рассмотрим некоторые преобразования матричных структурных схем, необходимые для дальнейшего понимания материала.

Передаточную матричную функцию системы в разомкнутом состоянии можно найти без первоначальной записи уравнений системы в операторном виде. Для этого структурную схему системы разбивают на четырехполюсники одноименных звеньев и берут произведение их передаточных матриц в обратном порядке. Например:



1) Находим передаточные матрицы объекта и регулятора:

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} W_{p1} & 0 \\ K_{21} & W_{p2} \end{bmatrix} \qquad \overline{H} = \begin{bmatrix} W_{o1} & M_{12} \\ M_{21} & W_{o2} \end{bmatrix}$$

2) Находим передаточную матрицу разомкнутой системы:

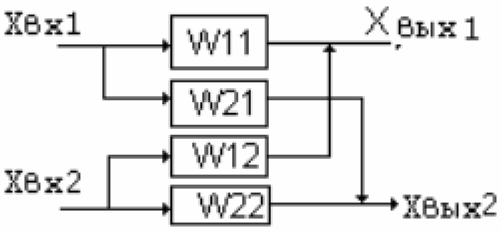
$$\overline{H} * \overline{R} \ .$$

После этого уже легко определить передаточные матрицы системы в замкнутом состоянии $\overline{G_{\lambda}}(p)$ и $\overline{G_{q}}(p)$.

Этот метод предполагает уже известными структуру объекта и регулятора, поэтому необходимо уметь определять их передаточные матрицы.

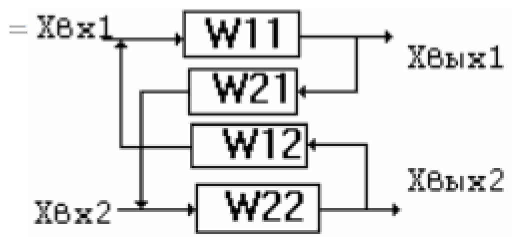
В зависимости от направления взаимных связей все объекты управления в многосвязных системах можно отнести к двум классам: объекты с прямыми и с обратными связями.

Объекты с прямыми связями удобны в математическом описании и в экспериментальных исследованиях:



У этих объектов изменение параметров взаимосвязи воздействует только на тот выход, к которому эта связь направлена. Составим матричное уравнение для данной структуры: $\overline{X}_{вых} = \overline{A} * \overline{X}_{вх}$; где $\overline{A} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$; $\overline{X}_{вых} = \begin{bmatrix} X_{вых1} \\ X_{вых2} \end{bmatrix}$; $\overline{X}_{вх} = \begin{bmatrix} X_{вх1} \\ X_{вх2} \end{bmatrix}$ – *структурные матрицы*.

Составим такое же уравнение для объектов с обратными взаимными связями. Здесь изменение параметров взаимной связи воздействует на всю систему. Можно показать, что объекты подобного типа можно привести к канонической форме с прямыми взаимосвязями. Выведем выражение для передаточной матрицы преобразования структуры объекта к каноническому виду.



$$\begin{cases} X_{вых1} = W_{11}X_{вх1} + W_{11}W_{12}X_{вых2} \\ X_{вых2} = W_{22}X_{вх2} + W_{22}W_{21}X_{вых1} \end{cases};$$

или в матричном виде:

$$\overline{X_{вых}} = \overline{W_0} * \overline{X_{вх}} + \overline{W_0} * \overline{W_{св}} * \overline{X_{вых}}, \quad \text{где} \quad \overline{W_0} = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{bmatrix}; \quad \overline{W_{св}} = \begin{bmatrix} 0 & W_{12} \\ W_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

, *структурные матрицы* [1].

Разрешая матричное уравнение объекта явно относительно $\overline{X_{вых}}$, получим:

$$\overline{X_{вых}} = \overline{(I - W_0 * W_{св})^{-1}} * \overline{W_0} * \overline{X_{вх}}.$$

Таким образом матрицей преобразования структуры объекта к каноническому виду является матрица:

$$\overline{A} = \overline{(I - W_0 W_{св})^{-1}} * \overline{W_0}.$$

Например, для двухканального объекта она имеет вид:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{W_{11}}{1 - W_{11}W_{22}W_{21}W_{12}} & \dfrac{W_{11}W_{22}W_{12}}{1 - W_{11}W_{22}W_{21}W_{12}} \\ \dfrac{W_{11}W_{22}W_{21}}{1 - W_{11}W_{22}W_{21}W_{12}} & \dfrac{W_{22}}{1 - W_{11}W_{22}W_{21}W_{12}} \end{bmatrix}.$$

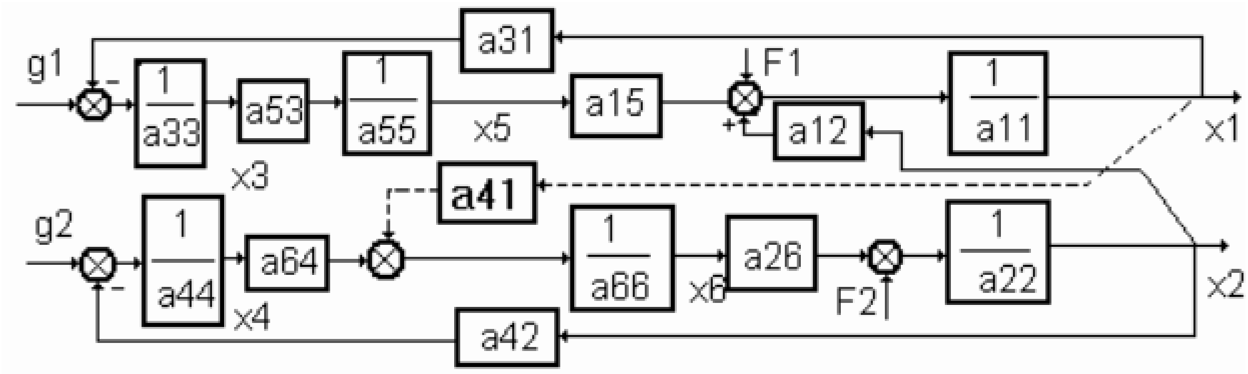
Любые другие случаи, когда прямые перекрестные связи заключены внутри обратных и наоборот, сводятся к рассмотренным структурам при помощи правил преобразования матричных структурных схем:

1. если переносится вход звена $\overline{W(p)}$ через звено $\overline{R(p)}$, то при переносе вперед $\overline{W(p)}$ умножается справа на $\overline{R^{-1}}$, а при переносе назад $\overline{W(p)}$ умножается справа на $\overline{R(p)}$.

2. если переносится выход звена $\overline{W(p)}$ через звено $\overline{R(p)}$, то при переносе его вперед $\overline{W(p)}$ умножается слева на $\overline{R(p)}$, а при переносе назад $\overline{W(p)}$ умножается слева на $\overline{R^{-1}}$.

2. ИНВАРИАНТНОСТЬ В МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМАХ

Проверим возможность создания инвариантности в многосвязных системах. Рассмотрим систему этого класса, управляющую объектом по двум координатам.



Согласно структурной схемы запишем уравнения системы по прежней методике, принятой нами при изучении инвариантных систем.

Уравнения собственно объекта управления будут:

$$a_{11}(p)X_1 + a_{12}(p)X_2 + a_{15}(p)X_5 = F_1(p);$$
$$a_{22}(p)X_2 + a_{26}(p)X_6 = F_2(p);$$

Уравнения измерительной части системы (регулятора):

$$a_{31}(p)X_1 + a_{33}(p)X_3 = g_1(p);$$
$$a_{41}(p)X_1 + a_{42}(p)X_2 + a_{44}(p)X_4 = g_2(p);$$

Уравнения исполнительной части системы:

$$a_{53}(p)X_3 + a_{55}(p)X_5 = 0;$$
$$a_{61}(p)X_1 + a_{64}(p)X_4 + a_{66}(p)X_6 = 0;$$

Найдем условия абсолютной инвариантности координаты, например, $\boldsymbol{X_2(p)}$ от возмущения $\boldsymbol{F_1(p)}$. Запишем решение системы относительно $\boldsymbol{X_2(p)}$:

$$X_2(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta};$$

Условием абсолютной инвариантности $\boldsymbol{X_2(p)}$ от $\boldsymbol{F_1(p)}$ будет тождественное обращение в нуль минора $\boldsymbol{A_{12}(p)}$. Раскрывая определитель $\boldsymbol{A_{12}(p)}$, имеем:

$$A_{12}(p) = a_{26}(p) * a_{33}(p) * a_{55}(p) * \begin{vmatrix} a_{41} & a_{44} \\ a_{61} & a_{64} \end{vmatrix} \equiv 0; \ (5)$$

Из условия (5) видим, что $\boldsymbol{X_2(p)}$ не будет зависеть от $\boldsymbol{F_1(p)}$ **,** если

$$\begin{vmatrix} a_{41} & a_{44} \\ a_{61} & a_{64} \end{vmatrix} = a_{41}a_{64} - a_{44}a_{61} = 0; \ (6)$$

Учитывая, что синтезируемый элемент будет $\boldsymbol{a_{41}(p)}$ **,** находим его значение из (6):

$$a_{41} = \frac{a_{44}a_{61}}{a_{64}}; \ (7)$$

Проверка необходимого и достаточного признаков реализуемости инвариантности показывает, что в данном классе систем можно создать абсолютно инвариантные системы. Если же строить систему инвариантной до **e** , то противоречие между инвариантностью и устойчивостью не существует.

Отметим, что достижение условий абсолютной инвариантности в **МСАР**, также как и в комбинированных системах становится возможным потому, что здесь также имеется два канала передачи одного и того же возмущения. Первый канал образуется звеном $\boldsymbol{a_{41}(p)}$, а второй – $\boldsymbol{a_{61}(p)}$.

Этот факт позволил академику Б.Н.Петрову сформулировать фундаментальный признак, позволяющий по структуре системы выяснить принципиальную возможность создания инвариантной системы. Этот признак получил название ***принципа двухканальности*** и г оворит о том, что

для реализуемости инвариантности регулируемой величины от возмущения должно существовать не менее двух каналов распространения воздействия между точкой приложения возмущения и точкой измерения регулируемой величины.

Этот признак является ***необходимым*** признаком выполнения абсолютной инвариантности и широко используется при синтезе МСАР. Правило, с помощью которого находится передаточная функция синтезируемого элемента, просто и понятно: нужно составить передаточные функции обеих каналов передачи общего возмущения и приравнять их с обратными знаками. Из этого равенства и находится выражение для синтезируемого элемента. Например, в рассмотренной системе получаем, используя принцип двухканальности,

$$a_{61}(p) = a_{41}(p)a_{64}(p) * \frac{1}{a_{44}(p)};$$

отсюда

$$a_{41}a_{64} - a_{44}a_{61} = 0;$$

3. АВТОНОМНОСТЬ И ИНВАРИАНТНОСТЬ

Взаимосвязь регулируемых координат в МСАР определяется действием двух факторов. Первый род связей обусловлен физическими свойствами управляемого процесса, это естественные перекрестные связи (ЕПС). Второй род связей организуется проектировщиком для придания системе определенных динамических свойств, например, свойства инвариантности, это искусственные перекрестные связи (ИПС). В предыдущем разделе уже рассматривался вопрос об определении такой ИПС $\boldsymbol{a_{41}(p)}$ с целью придания системе свойства селективной инвариантности $\boldsymbol{X_2}$ от $\boldsymbol{F_1}$.

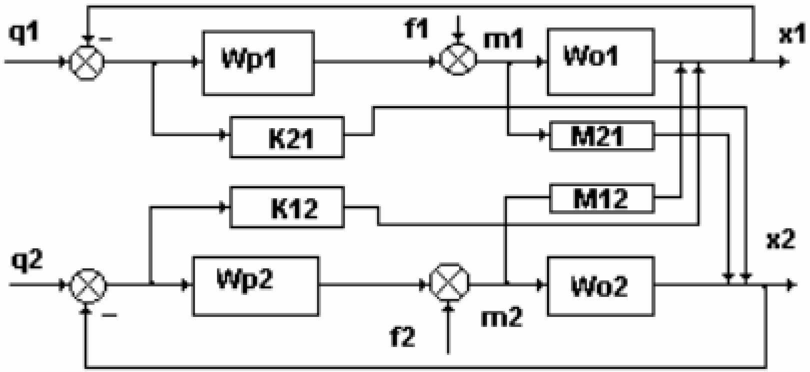
В МСАР может быть поставлена задача управления, не имеющая аналогов в одномерной автоматике. Очень часто по условиям работы необходимо, чтобы изменение одной регулируемой координаты не вызывало изменения другой регулируемой координаты. В этом случае системе стремятся придать свойство ***автономности*****.**

Этот термин впервые введен в практику *Вознесенским И.Н.*, рассмотревш им задачу автономного регулирования электрогенераторов, работающих на общую нагрузку. Автономными системами Вознесенский назвал такие системы, в которых изменение каждой $\boldsymbol{i}$-й регулируемой координаты не сказывается на состоянии соседних регулируемых координат. Так как регулируемые величины связаны между собой через объект управления, то для компенсации этих связей между каналами регулирования также вводятся **ИПС**.

Таким образом, в узком смысле слова автономность – это инвариантность регулируемых величин по отношению друг к другу. Автономность можно рассматривать как частный случай инвариантности. Рассмотрим, например, МСАР, состоящую из двух каналов регулирования. Структура системы имеет вид:

Объект управления с прямыми перекрестными связями $\mathbf{M}(\boldsymbol{p})$ управляется по двум каналам регуляторами $\boldsymbol{Wp(p)}$**.** Для придания системе свойства автономности каналов управления введены искусственные перекрестные связи $\boldsymbol{K(p)}$**.**

Уравнения системы имеют вид:



$$\begin{aligned}
&X_1(p) = m_1 W_{o1}(p) + m_2 M_{12}(p) + (q_2 - X_2) K_{12}(p) - f_2 W_{o2}(p) K_{12}(p);\\
&X_2(p) = m_2 W_{o2}(p) + m_1 M_{21}(p) + (q_1 - X_1) K_{21}(p) - f_1 W_{o1}(p) K_{21}(p);\\
&m_1 = (q_1 - X_1) W_{p1}(p) + f_1;\\
&m_2 = (q_2 - X_2) W_{p2}(p) + f_2;
\end{aligned} \qquad (8)$$

Исключая промежуточные переменные, получаем:

$$\begin{aligned}
&(1 + W_{o1} W_{p1}) X_1(p) + (M_{12} W_{p2} + K_{12}) X_2(p) = W_{o1} W_{p1} q_1(p) + (M_{12} W_{p2} + K_{12}) q_2(p) +\\
&W_{o1} f_1 + (M_{12} - W_{o2} K_{12}) f_2;\\
&(M_{21} W_{p1} + K_{21}) X_1(p) + (1 + W_{o2} W_{p2}) X_2(p) = (M_{21} W_{p1} + K_{21}) q_1(p) + W_{o2} W_{p2} q_2(p) +\\
&(M_{21} - W_{o1} K_{21}) f_1 + W_{o2} f_2;
\end{aligned}$$

(9)

Из уравнения (9) видно, что система будет автономна, если выполнить условия:

$$\begin{aligned}
&M_{12}(p) W_{p2}(p) + K_{12}(p) \equiv 0;\\
&M_{21}(p) W_{p1}(p) + K_{21}(p) \equiv 0;
\end{aligned} \qquad (10)$$

Для этого необходимо реализовать передаточные функции искусственных перекрестных связей в виде:

$$\begin{aligned} K_{12}(p) &= -M_{12}(p)W_{p2}(p); \\ K_{21}(p) &= -M_{21}(p)W_{p1}(p); \end{aligned} \qquad (11)$$

Условие (10) и называется условием автономности по *Боксенбому-Худу*. Как видно из правой части выражения (9), фактически это означает автономность относительно “чужих” управляющих воздействий. Условия автономности в виде (10) называют также развязкой каналов по собственным движениям, так как по возмущающим воздействиям каналы системы остаются связанными.

При желании можно устранить взаимную связь каналов относительно “чужих” возмущающих воздействий. Условия автономности по возмущениям (*автономность по Вознесенскому*) легко находятся из правой части уравнений (9):

$$\begin{aligned} K_{12}(p) &= \frac{M_{12}}{W_{o2}}; \\ K_{21}(p) &= \frac{M_{21}}{W_{o1}}; \end{aligned} \qquad (12)$$

Как видим условия (11) и (12) не совпадают в общем случае, но в частных случаях могут быть получены системы абсолютно автономные, то есть автономные и по управляющим и по возмущающим воздействиям.

Не так давно существовало стремление сделать автономными все многосвязные системы, однако оказалось, что для большинства производственных процессов этот режим нежизнеспособен. Это видно уже по выражениям (11) и (12), куда входят параметры объекта управления. На разных режимах работы эти параметры имеют обычно разные значения. Поэтому, удовлетворив условия автономности для одного рабочего режима, нельзя гарантировать, что они будут выполняться и для других режимов работы. Выходом из этого положения может быть введение специальных измерительных и вычислительных устройств, определяющих параметры объекта в процессе работы системы и производящих настройку ИПС для выполнения условий автономности. Но это недопустимо усложняет систему. Поэтому при проектировании МСАР гораздо важнее установить оптимальный характер взаимодействия регулируемых координат, а не стремиться к их полной развязке.

Вопросы для самоподготовки:

1. В чем отличие матричной передаточной функции от передаточной функции?

2. Как найти передаточную матричную функцию МСАР в разомкнутом состоянии, если известны передаточные матрицы объекта управления и регуляторов системы?

3. Как найти характеристическое уравнение МСАР, определяющее ее устойчивость?

4. Какое понятие является более общим – инвариантность или автономность?