Национальный исследовательский
Томский политехнический университет

Механика 1.3

3.09 .24;

Лектор - Козлов Виктор Николаевич,
доцент отделения машиностроения ИШНПТ
моб. тел. +7-913-812-58-34, kovn@tpu.ru

ВКС 380 440 5794, Пароль: 1DepTr

Лекции – 24 часа,

практические занятия – 32 часа,

88 часов самостоятельной работы,

расчётно-графические работы (РГР)

всего 144 ч., 4 кредита. Экзамен

1. Расчеты на прочность

$$\sigma_{p(c)} = F/A \le \sigma_{p(c)p}.\ [\sigma_{в}]\ [\sigma_{-в}]$$

где $\sigma_{p(c)}$ – **фактическое** напряжение на **растяжение** или **сжатие**; $\sigma_{p(c)p}$ – **допускаемое напряжение** на растяжение или сжатие. Это неравенство называется **условием прочности**. С его помощью могут быть решены задачи следующих **трех типов**.

2. Определение предельной (допускаемой) **нагрузки** для детали с **определенными размерами поперечного сечения** A и **допускаемым** напряжением σ_p : $F_p \le A \cdot \sigma_p$.

Группа сталей	Марка стали	Механические характеристики					
		$\sigma_в$, МПа	$\sigma_т$, МПа	σ_{-1p}, МПа	σ_{-1}, МПа	τ_{-1}, МПа	HB
Углеродистые стали качественные	10	340-420	210	120-150	160-220	80-120	137
	20	420-500	250	120-160	170-220	100-130	156
	30	500-600	300	170-210	200-270	110-140	179
	40	580-700	340	180-240	230-320	140-190	187-217
	45	610-750	360	190-250	250-340	150-200	197-241
	50	640-800	380	200-260	270-350	160-210	207-241

$A_1 = (\pi \cdot d_1^2)/4 = (\pi \cdot 20^2)/4 = \mathbf{314}$ мм^2; $F_{1\,max} = \sigma_т \cdot A_1 = 360 \cdot \mathbf{314} = 1130097$ Н=113кН.

$A_2 = (\pi \cdot d_2^2)/4 = (\pi \cdot 30^2)/4 = \mathbf{707}$ мм^2; $F_{2\,max} = \sigma_т \cdot A_2 = 360 \cdot \mathbf{707} = 254469$ Н=254 кН.

2. Расчеты на жесткость

В некоторых случаях **работоспособность конструкции определяют** не величиной предельной нагрузки или предельного напряжения, а **величиной предельной деформации** Δl_p . В этом случае по уравнению находят фактическую деформацию и сопоставляют ее с предельной:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \le \Delta l_p .$$

Это **неравенство** называют **условием жесткости**, а расчеты, проводимые **по этому неравенству**, – **расчетами на жесткость.**

Пример **расчетов на прочность и жесткость** при растяжении (сжатии)

Рассмотрим **ступенчатый брус** (**рис.1 а**), нагруженный продольными силами F_1 и F_2, для которого следует **определить во всех поперечных сечениях бруса (стержня)** внутреннюю **продольную силу** F_R (**рис. 1 б**) и **напряжения σ** (**рис. 1 в**), **вертикальные перемещения δ** (**рис.1 г**). Результаты привести в **графическом виде**, построив **графики** (**эпюры**) F_R=f (l); **σ**=f (l) и **δ**=f (l).

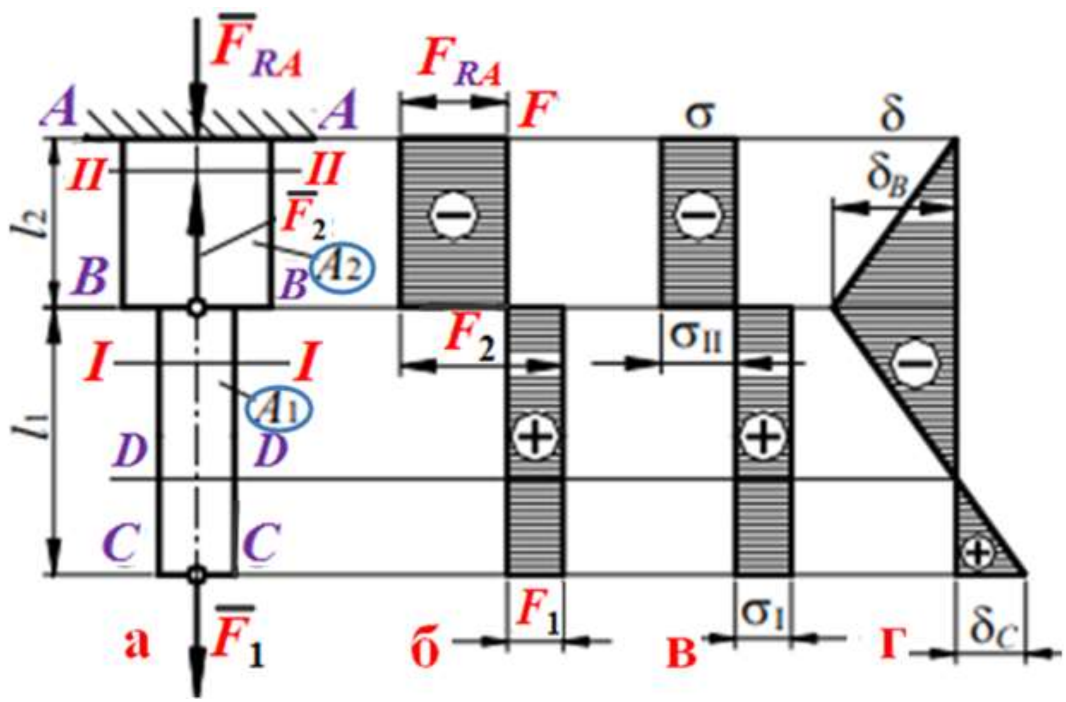


Рис. 1. Расчёт ступенчатого бруса

Решение. Для определения внутренних сил в поперечных сечениях бруса используем метод сечений. Мысленно **разрежем брус по сечениям *I-I* и *II-II* (рис. 2 а, д, г)**. Составим **уравнение равновесия части стержня**, расположенной **ниже сечения *I-I*** (**рис. 2 д**) : $\Sigma F_{y1} = F_{RI} - F_1 = 0$, откуда: $F_{RI} = F_1$. Эти уравнения будут справедливы при изменении текущей координаты y_1 в пределах от **0** до l_1 , то есть при: $0 \le y_1 \le l_1$.

Уравнение равновесия части стержня, расположенной **ниже сечения *II-II*** (**рис. 2 е**): $\Sigma F_{yII} = -F_{RII} + F_2 - F_1 = 0$, откуда: $F_{RII} = F_2 - F_1 = 0$. Эти уравнения будут справедливы при: $l_1 \le y_1 \le l_1 + l_2$.

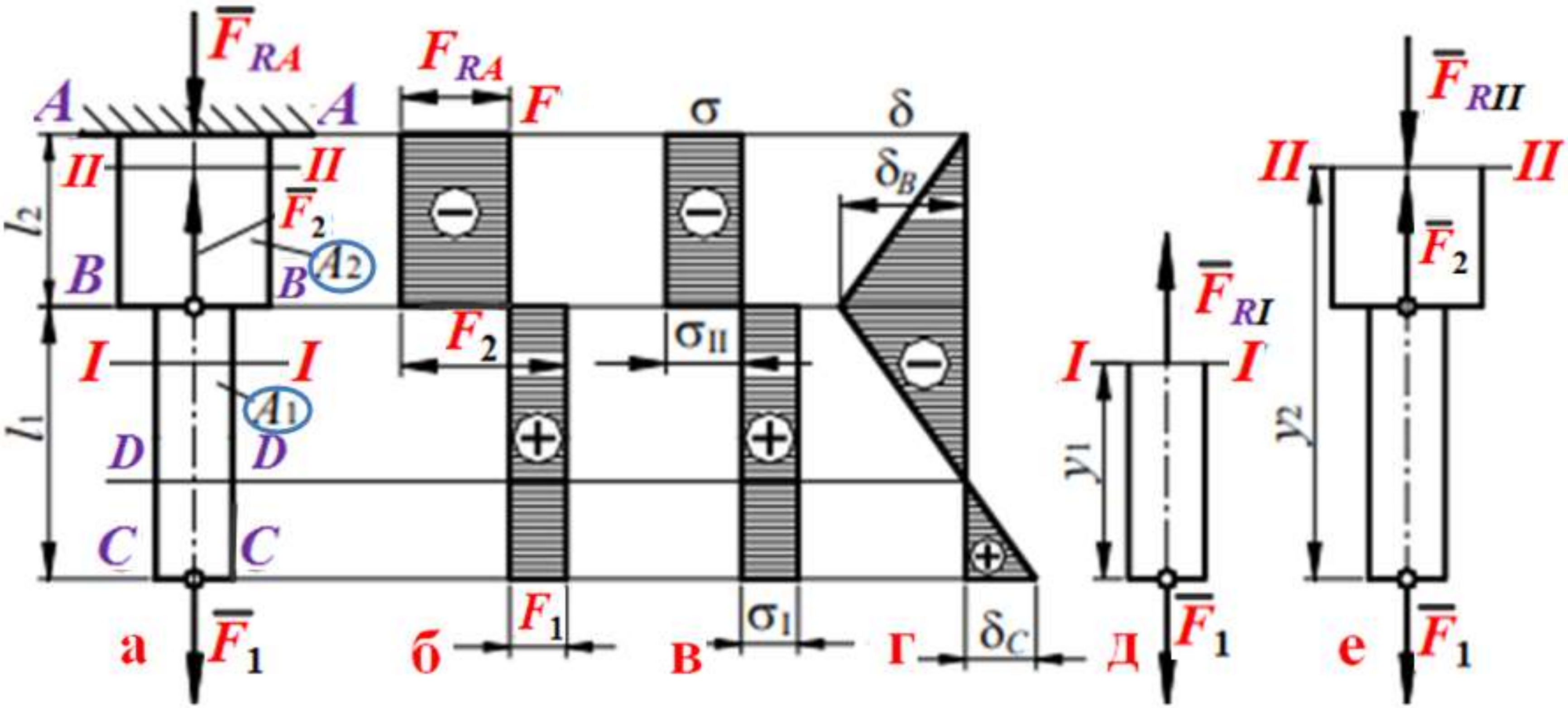


Рис. 2. Расчёт ступенчатого бруса: F_2= **254** кН; F_1 =**114** кН; d_1=**20** мм; d_2=**30** мм. l_1=**30** мм; l_2=**20 мм;** $A_1 = (\pi \cdot d_1^2)/4 = (\pi \cdot 20^2)/4 = 314$ мм^2; $F_{1\,max} = \sigma_т \cdot A_1 = 360 \cdot 314 = 1130097$ Н=113кН

3.6.9 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении (продолжение 1)

Выбрав **масштаб μ_F** (Н/мм), строим эпюру **продольных сил** (**рис.** 2 б). При этом **растягивающую** продольную силу F_{RI} считаем **положительной**, **сжимающую** F_{RII} – **отрицательной**. В выбранном масштабе μ_F строим эпюру продольных **сил** (**рис.** 2 б).

Напряжения σ: а) в сечениях **нижней** части стержня: $\sigma_I = F_{RI}/A_1$ (**растяжение**);

б) в сечениях **верхней** части стержня: $\sigma_{II} = F_{RII}/A_2$ (**сжатие**);

В выбранном **масштабе μ_σ** (МПа/мм) строим **эпюру напряжений** (**рис.** 2 в).

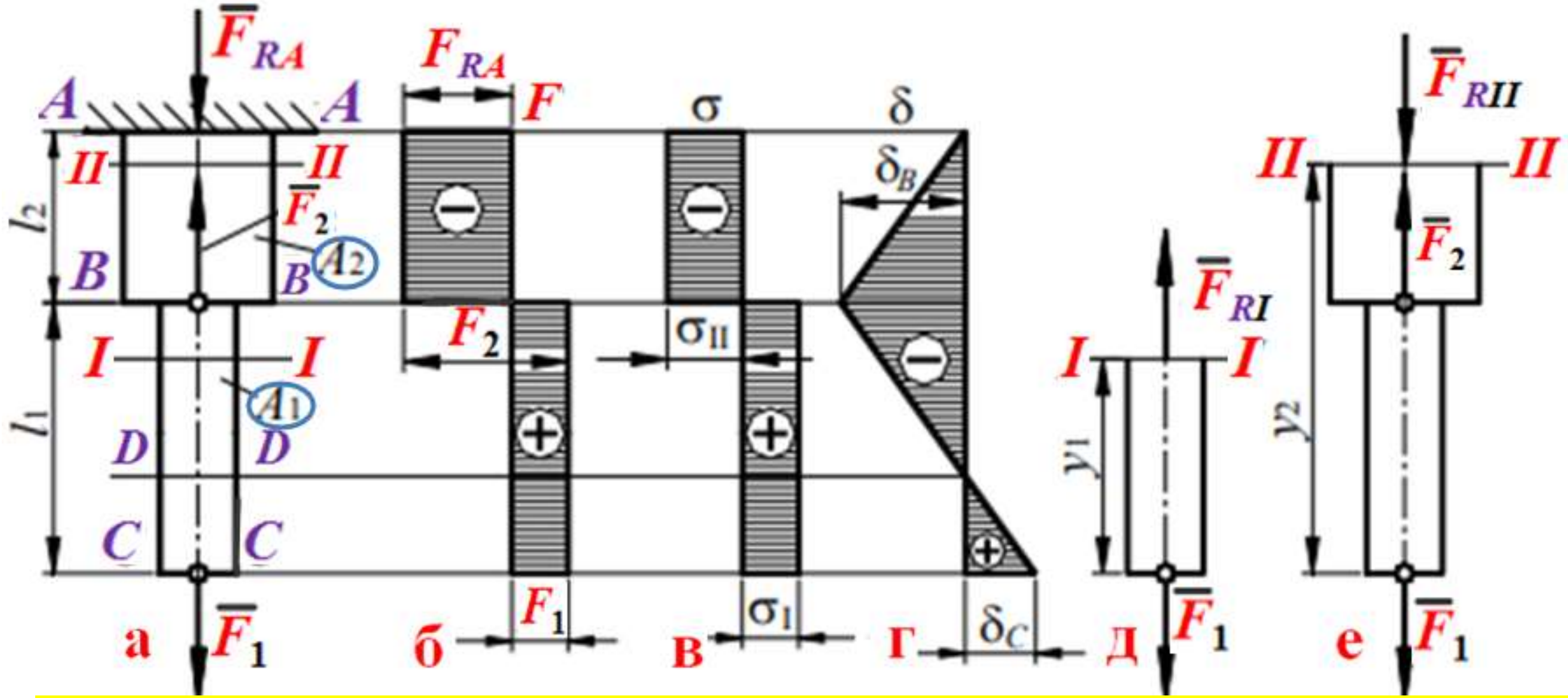


Рис. 2. Расчёт ступенчатого бруса: F_2= **254** кН; F_1 =**114** кН; d_1=**20** мм; d_2=**30** мм. l_1=**30** мм; l_2=**20 мм**

Для построения **эпюры вертикальных перемещений (деформаций)** δ **(рис. 2 г)** определяем **перемещения характерных сечений** *B-B* и *C-C* **(рис. 2 а)** (**перемещение** сечения *A-A* равно **нулю**). **Перемещение** сечения **вниз** считаем **положительным**, **вверх – отрицательным**.

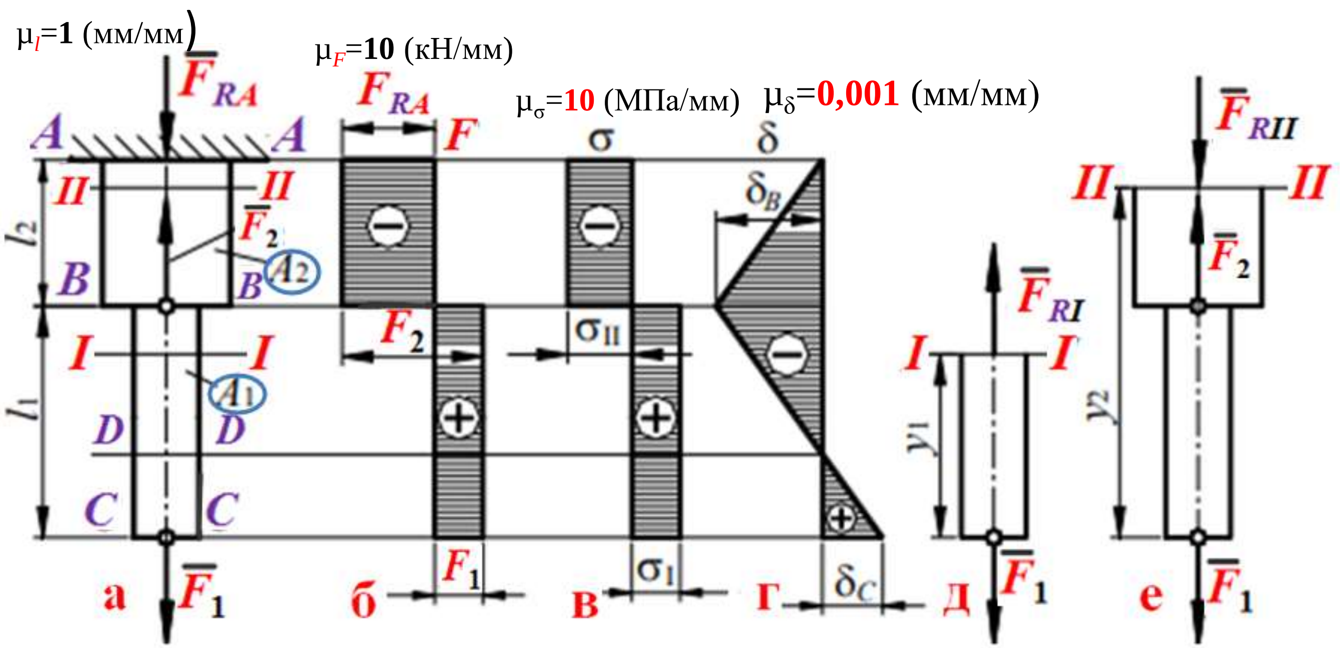
а) Сечение *B-B* будет перемещаться **вверх**, поскольку **верхняя** часть стержня **сжимается**:

$\delta_B = (\sigma_{II} \cdot l_2)/E$ **(вверх, знак минус –) (рис. 2 г)** (≈0,034 мм).

Сталь: $E \approx 2 \cdot 10^{11}$ Н/м² $= 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа $=$ **$2{,}1 \cdot 10^5$ Н/мм²** $= 210$ ГПа.

б) **Перемещение** сечения *C-C* является **алгебраической суммой перемещения** сечения *B-B* (δ_B) и **удлинения** части стержня **длиной** l_1 : $\delta_C = \delta_B + \Delta l = \delta_B + (\sigma_I \cdot l_1)/E$.

В выбранном масштабе μ_δ (мм/мм) откладываем на эпюре значения δ_C и δ_B **(рис. 2 г)**, **соединяем** полученные **точки прямыми** линиями, так как при действии сосредоточенных внешних сил **перемещения линейно зависят** от абсцисс сечений стержня, и получаем график (эпюру) перемещений.



Из **эпюры** δ видно, что **сечение** *D-D* **не перемещается**, **сечения, расположенные выше** сечения *D-D*, **перемещаются вверх**, **сечения, расположенные ниже сечения** *D-D*, **перемещаются вниз**.

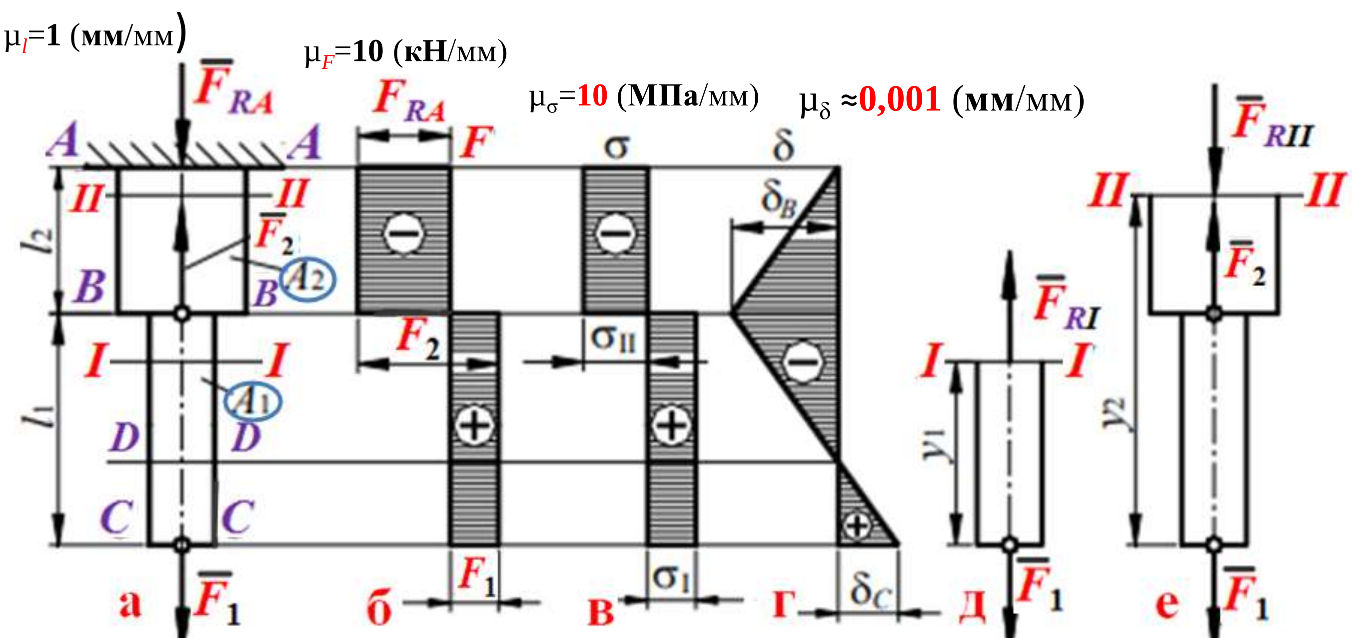
Рис. 2. Расчёт ступенчатого бруса $F_2 > F_1$; $F_2 = 254$ кН; $F_1 = 114$ кН; $d_1 = 20$ мм; $d_2 = 30$ мм. $l_1 = 30$ мм; $l_2 = 20$ мм

Построить эпюры напряжений (рис.4в) и вертикальных перемещений (деформаций) δ (рис.4 г),
3) эпюры напряжений σ: а) в сечениях **нижней** части стержня: $\sigma_I = F_{RI}/A_1$ **(растяжение) (рис.4 в) ;**
б) в сечениях **верхней** части стержня: $\sigma_{II} = F_{RII}/A_2$ **(сжатие) (рис.4 в) ;**

4) эпюры деформаций δ: а) Сечение *B-B* будет перемещаться **вверх**, поскольку **верхняя** часть стержня **сжимается**: $\delta_B = (\sigma_{II} \cdot l_2)/E$ **(сжимается, знак «минус» «–») (рис. 4 г),** т.е. $\delta_B = -(\sigma_{II} \cdot l_2)/E$.
Сталь: $E \approx 2 \cdot 10^{11}$ Н/м² $= \mathbf{2{,}1 \cdot 10^5}$ **МПа** $= \mathbf{2{,}1 \cdot 10^5}$ **Н/мм²**= 210 ГПа.

б) Перемещение сечения *C-C* является **алгебраической суммой перемещения** сечения *B-B* (δ_B) и **удлинения** части стержня **длиной** l_1: $\delta_C = \delta_B + \Delta l = \delta_B + (\sigma_I \cdot l_1)/E = (-\sigma_{II} \cdot l_2)/E + (\sigma_I \cdot l_1)/E$.

В выбранном **масштабе** μ_δ (мм/мм) откладываем на эпюре значения δ_C и δ_B **(рис. 4 г), соединяем** полученные **точки прямыми** линиями, так как при действии сосредоточенных внешних сил **перемещения линейно зависят** от абсцисс (площади) сечений стержня, и получаем график (эпюру) перемещений.



Из **эпюры δ** видно, что **сечение *D-D* не перемещается, сечения, расположенные выше сечения *D-D*, перемещаются вверх, сечения, расположенные ниже сечения *D-D*, перемещаются вниз.**

Рис. 4. Расчёт ступенчатого бруса: σ_I = **+250** МПа; σ_{II} =**-300** МПа; d_1=**20** мм; d_2=**30** мм. l_1=**40** мм; l_2=**30 мм**

ИДЗ-3 состоит из нескольких задач:

1. Растяжение-сжатие ступенчатого бруса;

2. Сдвиг;

3. Кручение;

4. Изгиб балки;

5. Сложное сопротивление;

6. Прочность материалов при переменных напряжениях.

1. Растяжение-сжатие ступенчатого бруса

Стальной стержень находится под действием продольных сил (**табл. 1**).

1) Построить **схему нагрузки бруса** μ_l =1 **мм**/мм;

2) **эпюры** внутренних продольных сил N (F) μ_N =____ **Н**/мм;

3) **эпюры** **нормальных напряжений σ** (МПа) μ_σ =____ **МПа**/мм;

4) **эпюры** **перемещений λ** (δ) μ_δ =____ **мм**/мм; (≈ 0,001 **мм**/мм).

Влиянием собственного веса стержня пренебречь. **Модуль упругости** стали E = 2,1· 10^5 МПа, **длина** l =1 м.

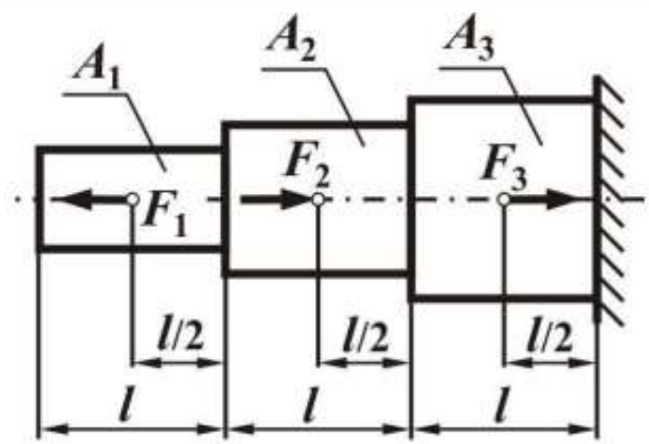
Таблица 1. Исходные данные к задаче **1** (**растяжение-сжатие ступенчатого бруса**) (по **предпоследней** **цифре зачётной книжки**)

Номер варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_1, кН	20	25	10	55	25	10	30	45	35	20
F_2, кН	25	15	50	15	45	35	10	25	50	30
F_3, кН	40	40	45	30	30	25	45	20	25	25

На схемах **0–9** **центрами маленьких окружностей** обозначены **точки приложения сил F_1, F_2, F_3.**

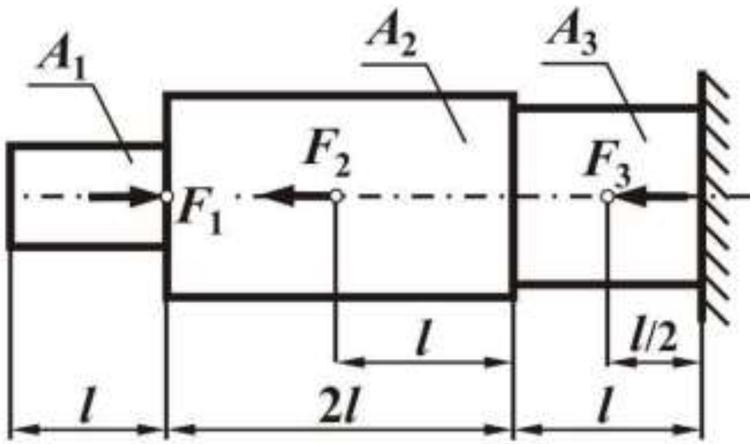
Схема **0**

(по **последней** **цифре зачётной книжки**)



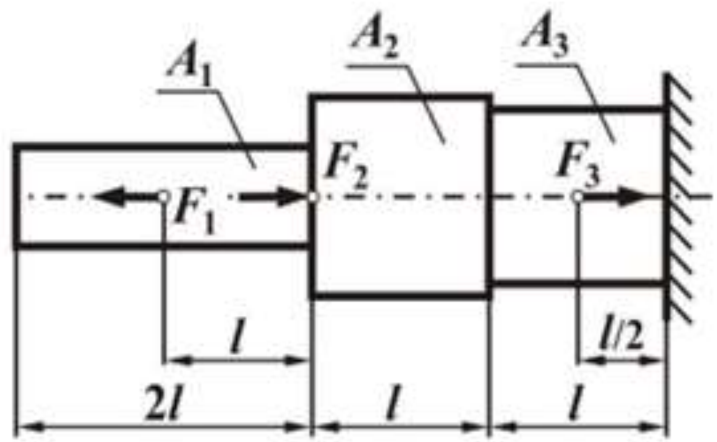
$A_1 = 100$ мм², $A_2 = 200$ мм², $A_3 = 300$ мм².

Расчеты ИДЗ - 3.1 (схема по последней цифре зачётной книжки) (продолжение 1)



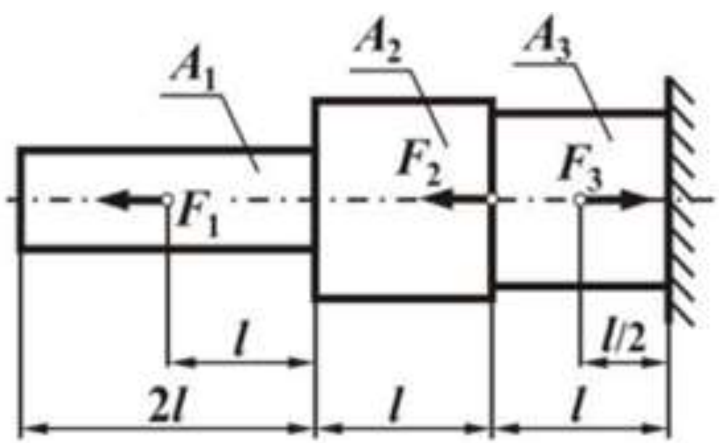
$A_1 = 100$ мм^2, $A_2 = 300$ мм^2, $A_3 = 250$ мм^2.

Схема 9



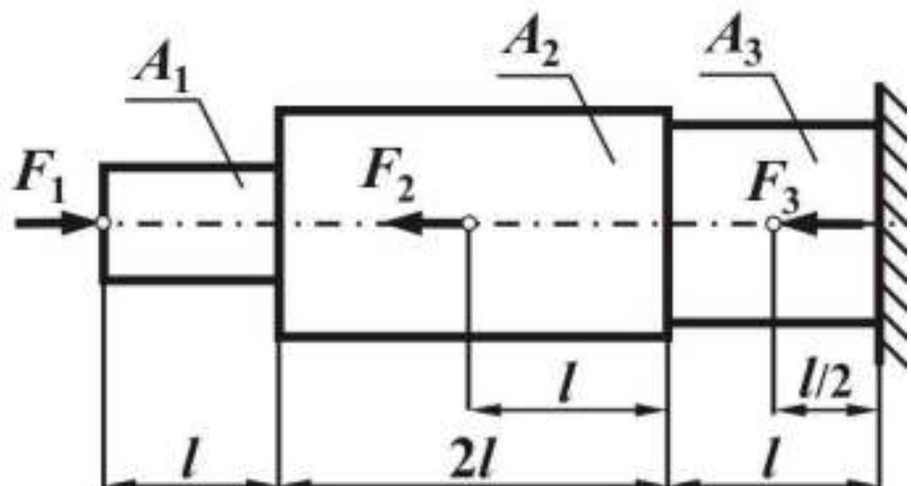
$A_1 = 100$ мм^2, $A_2 = 200$ мм^2, $A_3 = 150$ мм^2.

Схема 1



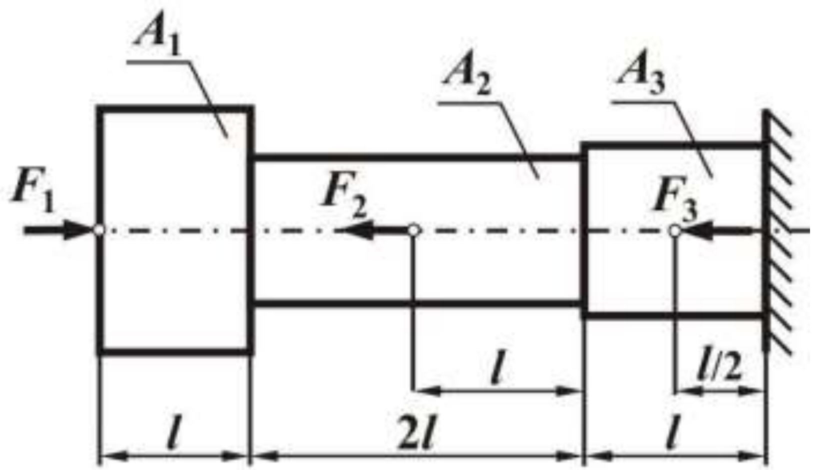
$A_1 = 100$ мм^2, $A_2 = 300$ мм^2, $A_3 = 250$ мм^2.

Схема 2



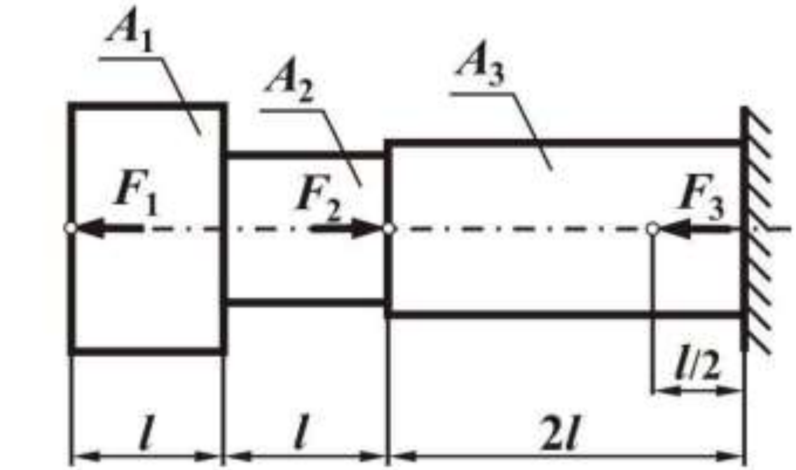
$A_1 = 100$ мм^2, $A_2 = 300$ мм^2, $A_3 = 250$ мм^2.

Схема 3



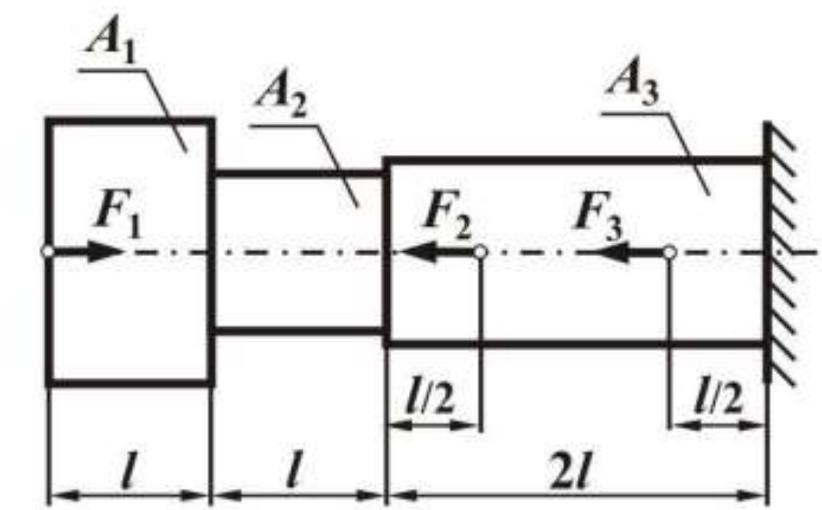
$A_1 = 250$ мм^2, $A_2 = 100$ мм^2, $A_3 = 150$ мм^2.

Схема 4



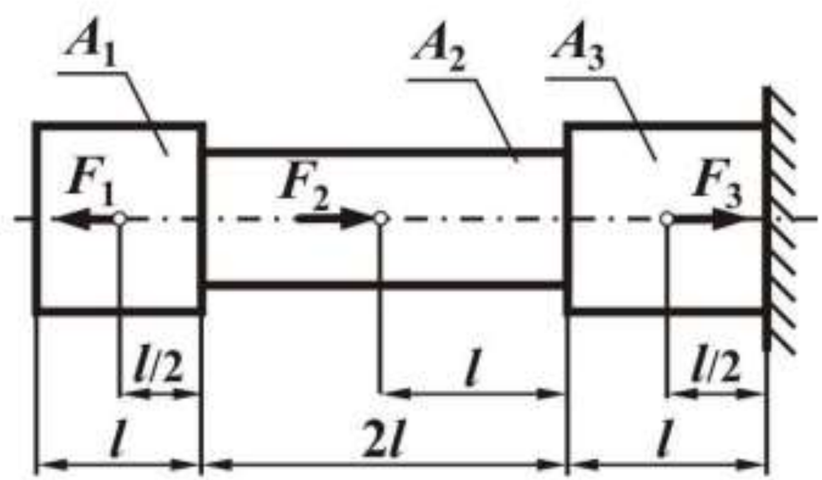
$A_1 = 300$ мм^2, $A_2 = 150$ мм^2, $A_3 = 200$ мм^2.

Схема 5



$A_1 = 300$ мм^2, $A_2 = 150$ мм^2, $A_3 = 200$ мм^2.

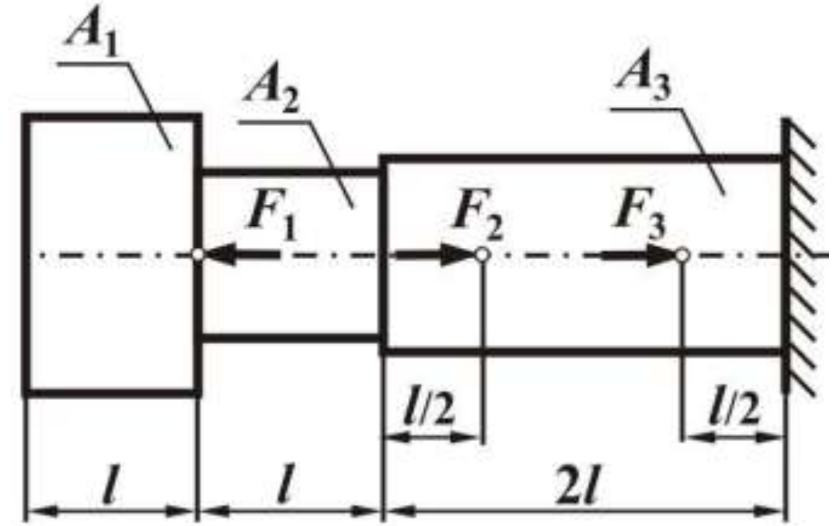
Схема 6



$A_1 = 200$ мм^2, $A_2 = 100$ мм^2, $A_3 = 200$ мм^2.

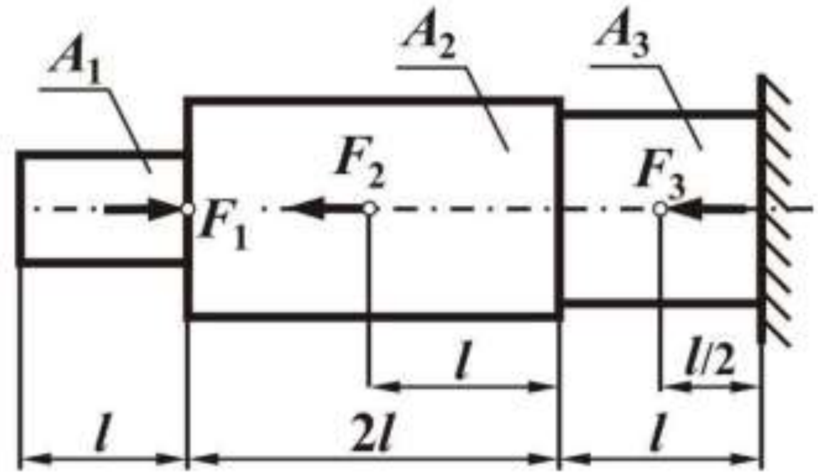
Схема 7

Расчеты ИДЗ - 3.1 (схема по последней цифре зачётной книжки) (продолжение 3)



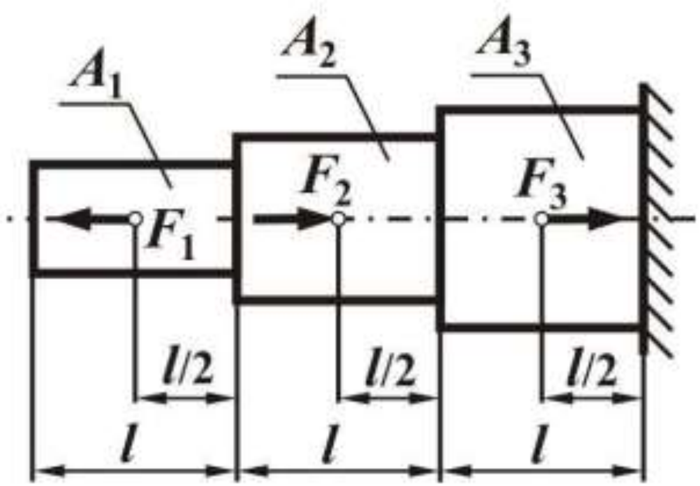
$A_1 = 250$ мм^2, $A_2 = 100$ мм^2, $A_3 = 150$ мм^2.

Схема 8



$A_1 = 100$ мм^2, $A_2 = 300$ мм^2, $A_3 = 250$ мм^2.

Схема 9



$A_1 = 100$ мм^2, $A_2 = 200$ мм^2, $A_3 = 300$ мм^2.

Схема 0

A_1 =100 мм^2;
A_2 =200 мм^2;
A_3 =300 мм^2.

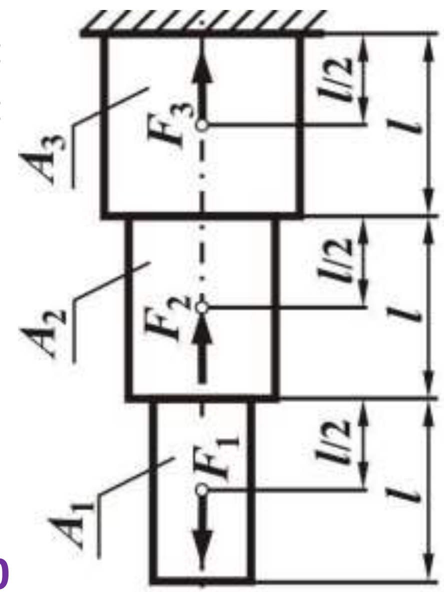


Схема 0

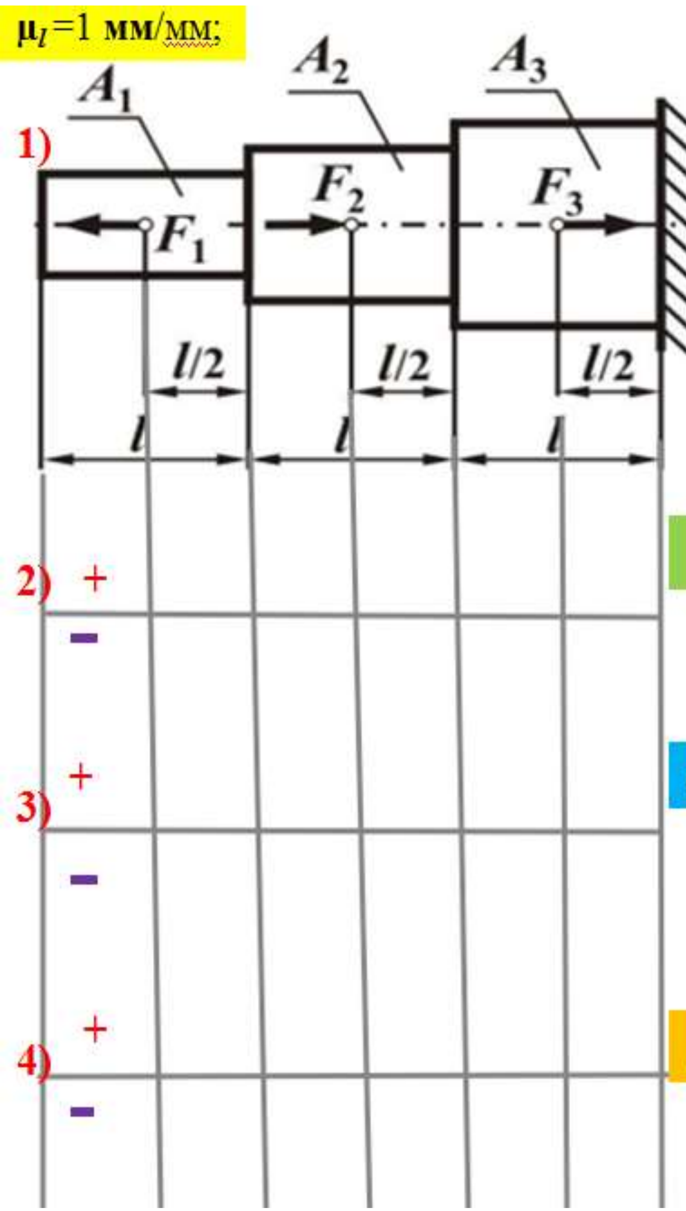


Схема 0

A_1 =100 мм^2;

A_2 =200 мм^2;

A_3 =300 мм^2

1) **схема нагрузки бруса** $\mu_l \approx 50$ **мм/мм;**

2) **эпюры** внутренних сил N (Н) $\mu_N \approx 1\ldots2$ кН/мм;

3) **эпюры напряжений** σ (МПа) μ_σ =__ МПа/мм;

4) **эпюры перемещений** δ (мм) μ_δ =___мм/мм;

($\mu_\delta \approx 0{,}001\ldots 0{,}02$ мм/мм).

μ_N =___ Н/мм;

μ_σ =__ МПа/мм;

μ_δ =___ мм/мм;

Схема 0

A_1 =100 мм^2;

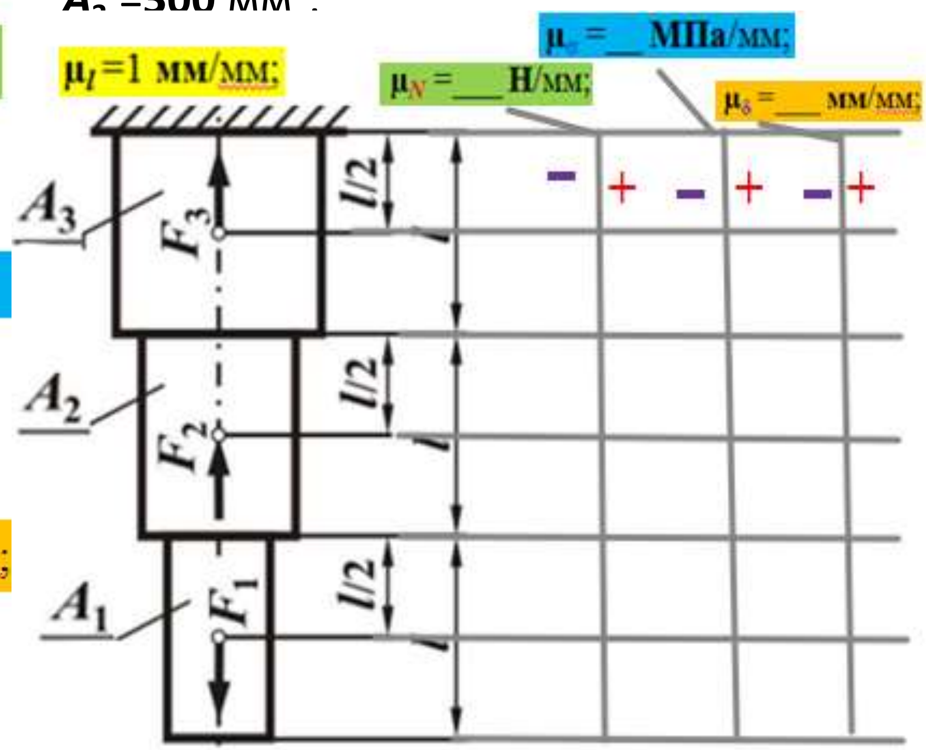
A_2 =200 мм^2;

A_3 =300 мм^2.

F_1=10…55 кН;

F_2=10…55 кН;

F_3=20…45 кН;



Изгиб

Значительное количество деталей в процессе работы подвергаются воздействию **нагрузки**, **перпендикулярной к продольной оси**, или **внешних пар**, действующих **в плоскости**, **проходящей через указанную ось** (**рис. 3.34**). При этом в поперечных сечениях деталей или их элементов возникают **изгибающие моменты**, то есть внутренние моменты, действующие **в плоскости, перпендикулярной к плоскости поперечного сечения**. Такой вид нагружения называют изгибом. При действии такой нагрузки **ось стержня искривляется**. **Стержни**, работающие в **основном на изгиб,** принято называть **балками.**

Изгиб называют **чистым**, если **изгибающий момент** является **единственным внутренним усилием**, возникающим в поперечном сечении стержня (в поперечном сечении отсутствуют поперечные силы). **Если** в **поперечных сечениях** стержня наряду с изгибающими моментами **возникают и поперечные силы**, то такой изгиб называют **поперечным**.

Если **плоскость действия изгибающего момента** (**силовая плоскость**) **проходит через одну из главных центральных осей поперечного сечения** стержня, **изгиб называют простым** или **плоским**. При этом **ось балки после деформации остается в силовой плоскости**.

Если **плоскость действия изгибающего момента** в сечении **не совпадает ни с одной из главных осей сечения**, **изгиб** называют **косым**. При **косом изгибе плоскость деформации не совпадает** с **силовой плоскостью**.

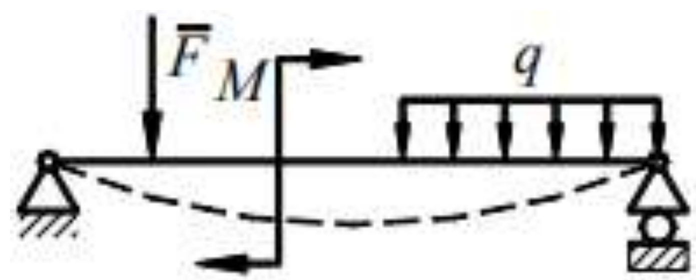


Рис. 3.34. Схема **балки при изгибе**

Деформацию изгиба легко проследить на **модели**, представляющей собой **прямолинейный призматический брус**, **длина** которого значительно **превышает его поперечные размеры**. На **боковые грани бруса** нанесены **равноотстоящие горизонтальные** и **вертикальные линии** (**рис.** 3.35, *а*). В **плоскости симметрии** *abcd* (**рис.** 3.35, *в*) к **концам бруса** приложены **два равных противоположно направленных момента** M, под действием которых **брус изгибается** (**рис.** 3.35, *б*).

Основные признаки чистого изгиба:

1. **Плоские поперечные сечения** бруса **остаются плоскими** и **поворачиваются на некоторый угол** α_i одно относительно другого (**рис.** 3.35, *г*).
2. **Плоские продольные** сечения **искривляются**, о чем можно судить по тому, что **продольные горизонтальные прямые**, нанесенные **на боковые грани**, становятся **кривыми линиями** (**рис.** 3.35, *б*).

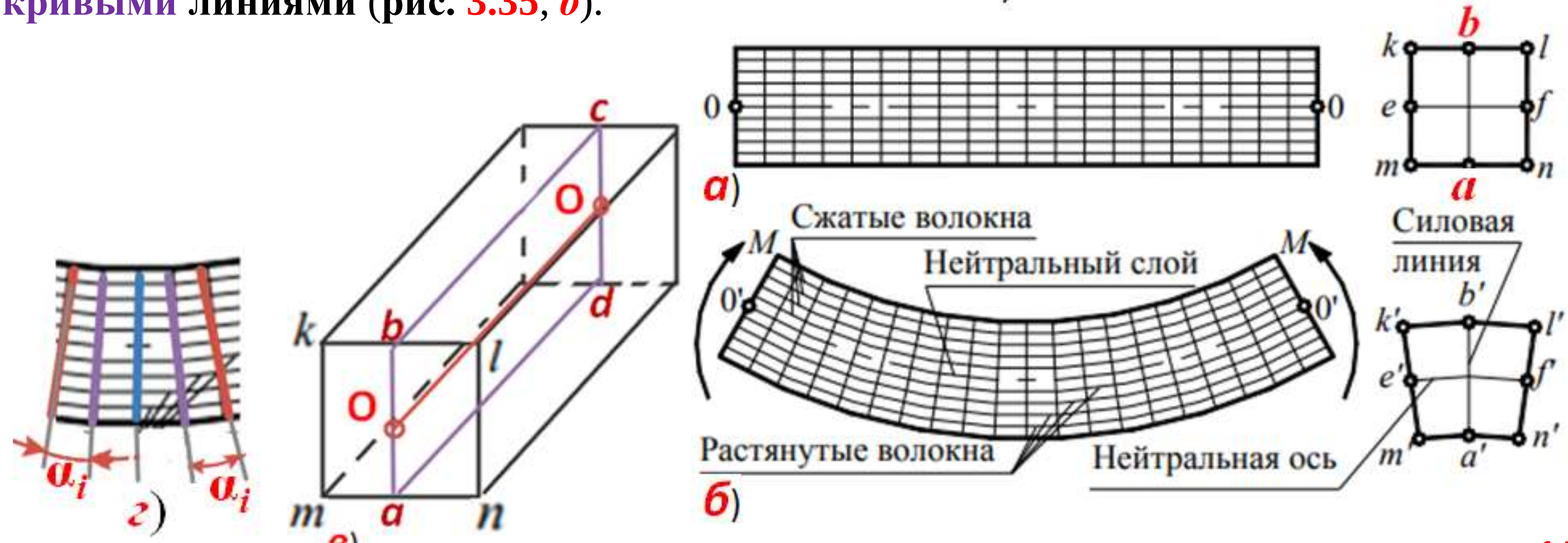


Рис. 3.35. **Схема балки при изгибе**

Основные признаки **чистого изгиба** (*продолжение*).

3. Волокна на **вогнутой стороне** бруса **укорачиваются**, что свидетельствует об их **сжатии**, а на **выпуклой стороне** – **удлиняются**, **растягиваются** (**рис.** 3.35, *б*).

4. Как показывает опыт, **одна из горизонталей** на **боковой грани (<u>поверхности</u>)** бруса **своей длины не изменяет** (линия **00** → **0'0'** на **рис. 3.35, *а*, *в*, *б***). Это позволяет сделать вывод о существовании у бруса **слоя**, которые **не испытывает ни растяжения**, **ни сжатия**. Такой слой называют **нейтральным слоем**.

5. След ***e′f′*** **нейтрального слоя** на **плоскости поперечного сечения** называют **нейтральной осью** (**рис.** 3.35, *б*). Нейтральная ось **00** при изгибе своей длины не изменяет (линия **00** на **рис. 3.35, *а*** → **0'0'** на **рис. 3.35, *б***).

6. След ***a′b′*** **силовой плоскости** на **поперечном сечении** балки называют **силовой линией**.

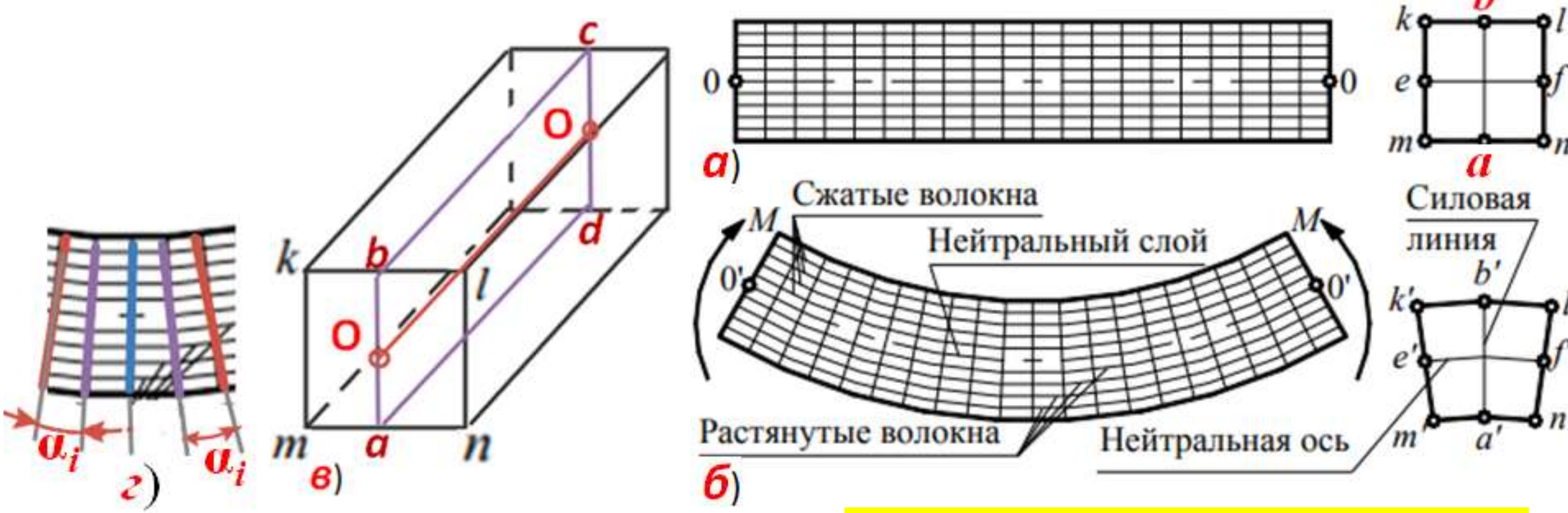


Рис. 3.35. Схема балки при изгибе

Вывод из основных признаков **чистого изгиба**.

При **изгибе** наблюдаются **те же явления**, что и при **простом растяжении и сжатии**, когда **знак поперечной деформации противоположен знаку продольной деформации**, **то есть продольное растяжение** сопровождается **поперечным сжатием** и **продольное сжатие** приводит к **поперечному растяжению** (**рис.** 3.36). Но **принцип сохранения объёма** действует только при **пластической деформации**.

Из **рис.** 3.35 следует, что **величина деформации волокон**, как **в продольном**, так **и в поперечном** направлении **тем больше**, **чем дальше они расположены от нейтрального слоя** или **нейтральной оси**.

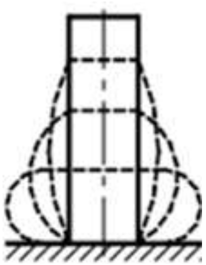


Рис. 3.36. При сжатии уменьшение продольного размера приводит к увеличению поперечного размера (действует даже при упругой деформации)

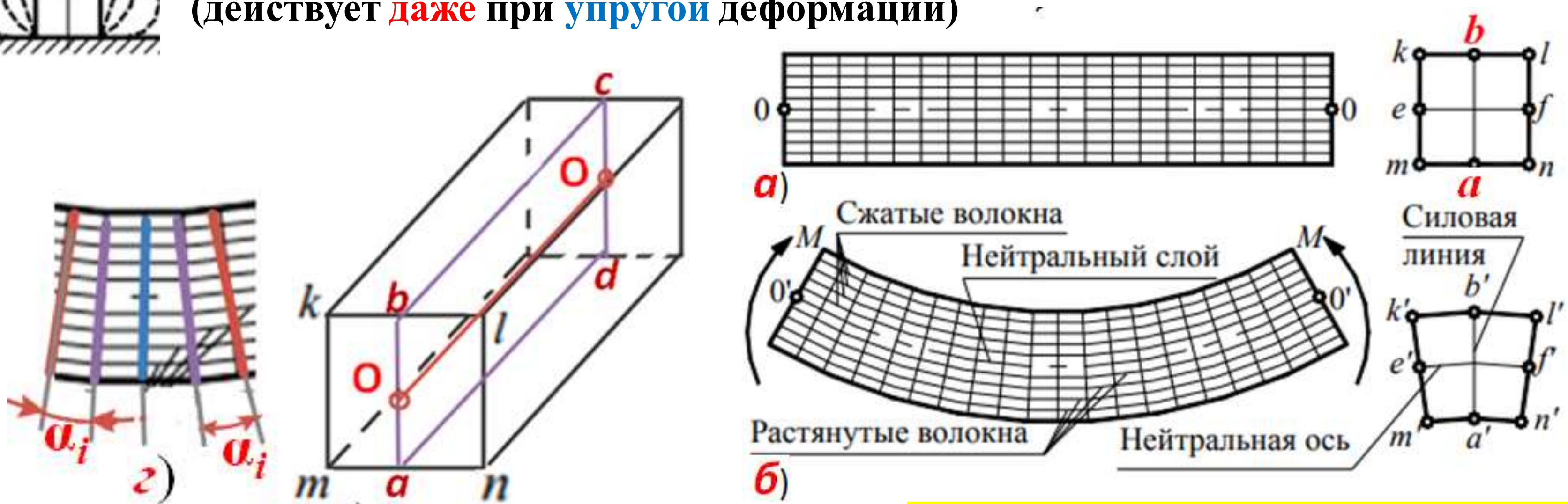


Рис. 3.35. Схема балки при изгибе

3.6.13 Типы опор балок

Опоры балок, рассматриваемых как **плоские системы**, бывают **трех основных типов**.

1. Подвижная шарнирная опора (рис. 3.37, *а*). Такая опора не препятствует вращению конца балки и его перемещению вдоль плоскости качения. В ней **может возникать только одна реакция**, которая **перпендикулярна плоскости качения** и проходит **через центр** катка. Подвижные опоры дают возможность балке беспрепятственно изменять свою длину **при изменении температуры** и тем самым устраняют возможность появления температурных напряжений.

2. Неподвижная шарнирная опора (рис. 3.37, *б*). Такая опора допускает **вращение конца балки**, но **устраняет поступательное перемещение** ее **в любом направлении**. Возникающую в ней **реакцию** можно разложить на **две составляющие** – **горизонтальную** и **вертикальную**.

3. Жесткая заделка, или **защемление (рис. 3.37, *в*)**. Такое закрепление **не допускает ни линейных, ни угловых перемещений** опорного сечения. В этой опоре может **в общем случае** возникать **реакция**, которую обычно раскладывают **на две составляющие** (**вертикальную** и **горизонтальную**) и **реактивный момент**.

Для того чтобы **балка** могла воспринимать **нагрузку** **в одной плоскости** и **оставалась бы при этом в целом неподвижной по отношению к основанию**, **наименьшее** число **связей**, налагаемых **опорами**, должно быть равно **трем**.

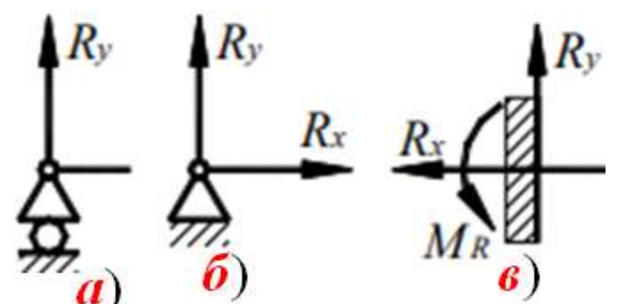


Рис. 3.37. Основных типы опор балок

3.6.13 Типы опор балок (продолжение 1)

Если **опорные реакции** могут быть **найдены только из уравнений статики**, то балки называют **статически определимыми**. Для таких балок возможны следующие варианты крепления:

1) **защемление** балки **одним концом** (балка с **одним заделанным концом** называется **консольной балкой** или просто **консолью**);

2) крепление **одного конца балки** при помощи **неподвижной шарнирной опоры**, а **другого конца** – при помощи **подвижной шарнирной опоры** (балки, имеющие **две опоры**, называют **двухопорными**). Такие опоры **исключают** возможность **возникновения продольных усилий** при **деформации**, вызванной **изменением температуры**.

Если же **число неизвестных опорных реакций больше**, чем **число уравнений статики**, возможных для данной задачи, то балки называют **статически неопределимыми**. Для определения реакций в таких балках необходимо составлять дополнительные уравнения – **уравнения перемещений**. В данном курсе статически неопределимые балки не рассматриваются.

Определение опорных реакций

Определение опорных реакций производят при **помощи уравнений статики**. **Рис. 2**

Реакцию заделки разложим на две составляющие силы $\overline{R_{Ax}}$ и $\overline{R_{Ay}}$, направленные вдоль осей *x* и *y*, и реактивный момент M_{Az},

Составим *уравнения равновесия балки.*

1. Приравняем нулю сумму проекций на ось *x* всех сил, действующих на балку:

$$\sum F_x = 0.$$

Получаем:

$$R_{Ax} = 0.$$

При отсутствии горизонтальной нагрузки горизонтальная составляющая реакции R_{Ax} равна нулю.

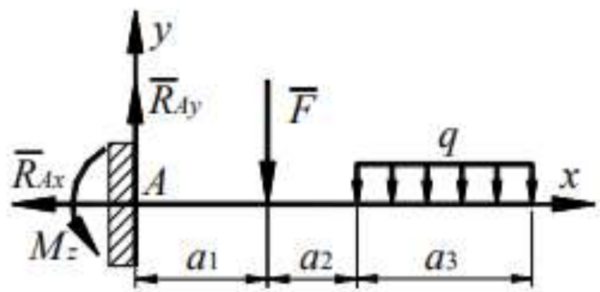


Рис. 1

2. Приравняем нулю сумму проекций на ось *y* всех сил, действующих на балку:

$$\sum F_y = 0.$$

Равномерно распределенную нагрузку *q* заменяем *равнодействующей* qa_3, приложенной в середине участка a_3:

$$R_{Ay} - F_1 - qa_3 = 0,$$

откуда:

$$R_{Ay} = F_1 + qa_3.$$

Вертикальная составляющая реакции в консольной балке равна сумме сил, приложенных к балке.

3.6.14 Определение опорных реакций (продолжение 1)

3. Составляем третье уравнение равновесия.

Приравняем нулю сумму моментов всех сил относительно какой-нибудь точки, например, относительно точки A:

$$\sum M_{Az} = 0;$$

$$-M_{Az} - F_1 a_1 - q a_3 \left(a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2} \right) = 0,$$

откуда:

$$M_{Az} = -F_1 a_1 - q a_3 \left(a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2} \right) = 0.$$

Знак «минус» показывает, что принятое вначале направление реактивного момента следует изменить на обратное.

Реактивный момент в заделке равен сумме моментов внешних сил относительно заделки.

Во *втором* примере рассмотрим определение опорных реакций *двухопорной* балки (рис. 2.6.5).

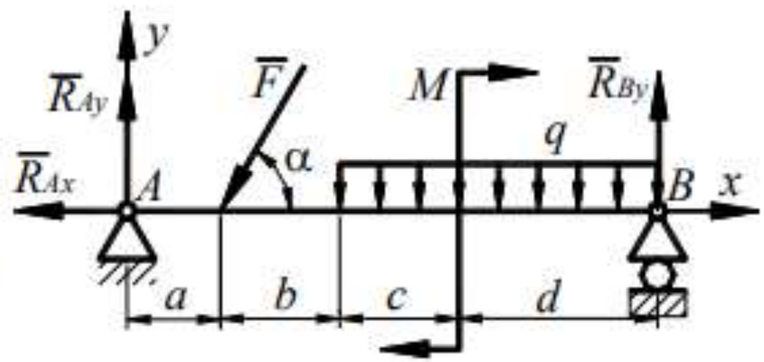


Рис. 2 *Рис. 2.*

1. $\Sigma F_{Ax} = -R_{Ax} - F\cos\alpha = 0;$

$R_{Ax} = -F\cos\alpha.$

2. $\sum M_{Bz} = -R_{Ay}(a+b+c+d)+(b+c+d)F\sin\alpha+$

$$+\frac{q(c+d)^2}{2}-M=0.$$

$$R_{Ay}=\frac{(b+c+d)F\sin\alpha+\dfrac{q(c+d)^2}{2}-M}{a+b+c+d}.$$

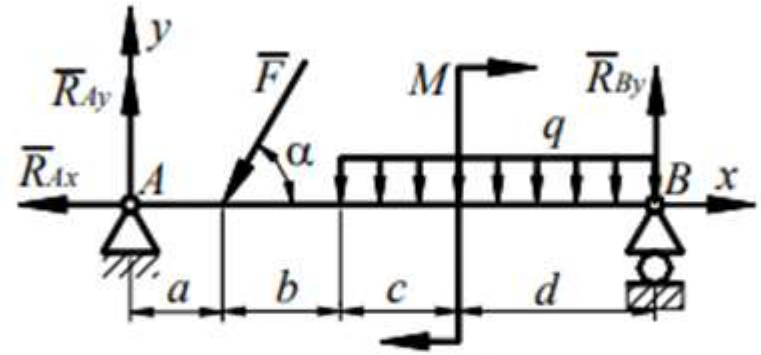


Рис. 2 (повтор)

3. $\Sigma F_y = R_{Ay} - F - q(c+d) + R_{By} = 0;$

$$R_{By} = -R_{Ay} + F + q(c+d).$$

a$_1$ ***R***$_{Ay}$ ***B F***$_2$

3.6.15 Изгиб расчёт. Определение внутренних усилий при изгибе

При **плоском поперечном изгибе** в поперечных сечениях балки возникают **два внутренних силовых фактора**: **изгибающий момент** M_x и **поперечная сила** $F_{R\tau}$ (F_{Rt})

Для их определения применим **метод сечений**. В рассматриваемом месте сделаем **мысленный разрез** балки, например, на расстоянии ***x*** от **левой** опоры (**рис. 3.38**, ***а***).

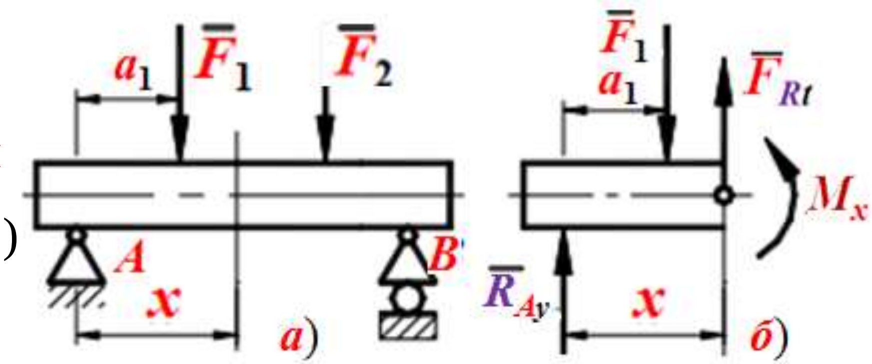


Рис. 3.38. Расчёт внутренних усилий в двухопорной балке

3.6.15 Изгиб расчёт

Для определения величин M_x и F_{Rt} используем **два** уравнения **равновесия**:

$$1.\ \sum M_0 = R_{A_y}x - F_1(x-a_1) - M_x = 0;$$
$$M_x = R_{A_y}x - F_1(x-a_1).$$
$$2.\ \sum F_y = R_{A_y} - F_1 + F_{Rt} = 0;$$
$$F_{Rt} = F_1 - R_{A_y}.$$

Следовательно: 1) **поперечная сила F_{Rt}** в поперечном сечении балки численно **равна алгебраической сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил**, действующих по **одну сторону** от сечения;

2) **изгибающий момент** в **поперечном сечении** балки численно **равен алгебраической сумме моментов** (вычисленных **относительно центра тяжести сечения**) **внешних сил**, действующих **по одну сторону от данного сечения**.

Правило знаков для **поперечных сил** и **изгибающих моментов:**

Поперечная сила F в сечении балки ***mn*** (**рис. 3.39, *а***) считают **положительной**, если **равнодействующая внешних сил слева от сечения (*mn*)** направлена **снизу вверх**, а **справа** – **сверху вниз**, и отрицательной – в противоположном случае (**рис. 3.39, *б***).

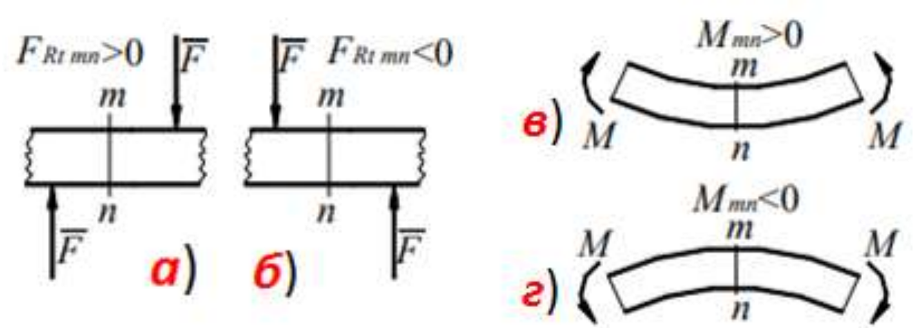


Рис. 3.39. Правило знаков для **поперечных сил** (***а, б***) и **изгибающих моментов** (***в, г***)

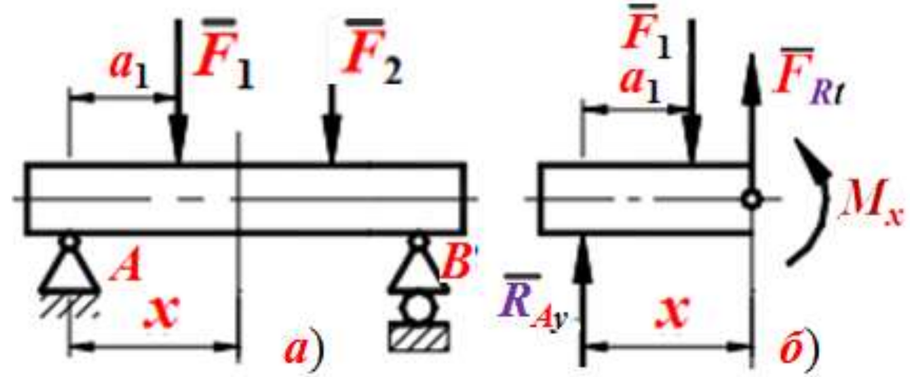


Рис. 3.38. Расчёт внутренних усилий в двухопорной балке

Поперечная сила F в сечении балки *mn* (**рис. 3.39, *а***) считают **положительной**, если **равнодействующая внешних сил слева от сечения (*mn*)** направлена **снизу вверх**, а **справа – сверху вниз**, и отрицательной – в противоположном случае (**рис. 3.39, *б***).

Изгибающий момент в сечении балки, например, в сечении *mn* (**рис. 3.39, *в***), **положителен**, если **равнодействующий момент внешних сил слева от сечения** направлен **по часовой стрелке**, а **справа – против** часовой стрелки, и **отрицателен** – в противоположном случае (**рис. 3.39, *г***).

Моменты, изображенные на **рис. 3.39, *в***, **изгибают** балку **выпуклостью вниз**, а моменты, изображенные на **рис. 3.39, *г***, изгибают балку **выпуклостью вверх**.

Отсюда: **изгибающий момент** считается **положительным**, если в **рассматриваемом сечении** балка **изгибается выпуклостью вниз**.

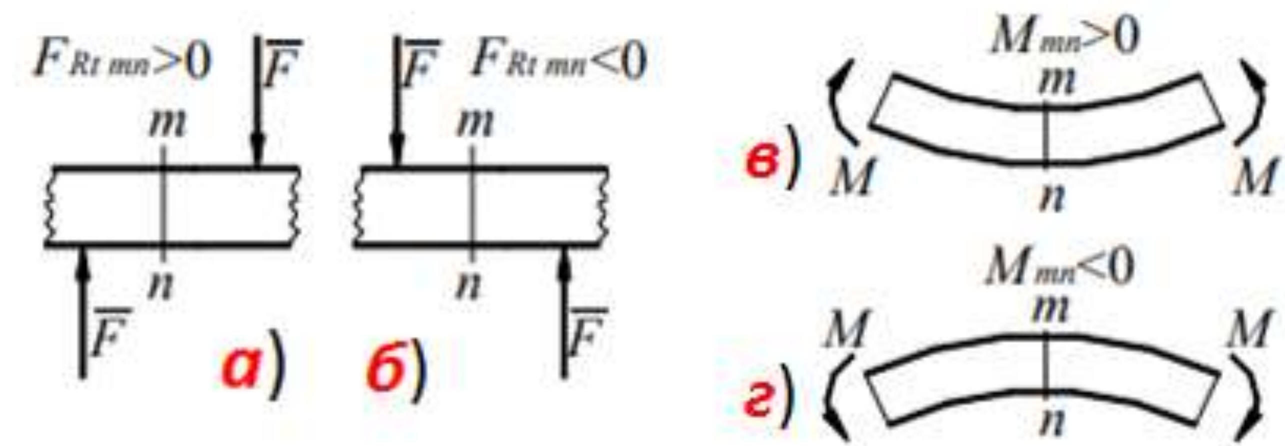


Рис. 3.39. Правило знаков для **поперечных сил** (*а, б*) и **изгибающих моментов** (*в, г*)

Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил

Для наглядного представления о **характере изменения изгибающего момента** M_x и **поперечной силы** F_{Rt} по **длине балки** и для нахождения **опасных сечений** строят **эпюры** M_x и F_{Rt}. В **первом** примере рассмотрим построение эпюр M_x и F_{Rt} для **консольной балки**, изображенной на рис. **3.40**, *а*.

Проводим **сечение справа** от **силы** F на расстоянии x_1 от **правого конца** балки (сечение **I-I**), x_1 – величина переменная, индекс «1» обозначает **номер участка**, на котором сделано **сечение**.

Изгибающий момент в **сечении I-I** проще всего определить, составив **уравнение суммы моментов внешних сил**, расположенных, в данном случае, **справа** от сечения:

$$M_{x1}=0;\ \text{при}\ 0 \le x_1 \le a_2.$$

Т.е. изгибающий момент в **любом поперечном сечении** балки на **участке** ***ВС*** **отсутствует**.

Изгибающий момент в **сечении II-II** на участке ***АВ*** так же вычислим, как **сумму моментов всех сил**, расположенных **справа** от сечения (в этом случае **нет необходимости в определении опорных реакций** в заделке):

$$M_{x1}=-F(x_2 - a_2);\ \text{при}\ a_2 \le x_2 \le (a_1+a_2).$$

Знак «минус» взят потому, что балка изгибается выпуклостью вверх.

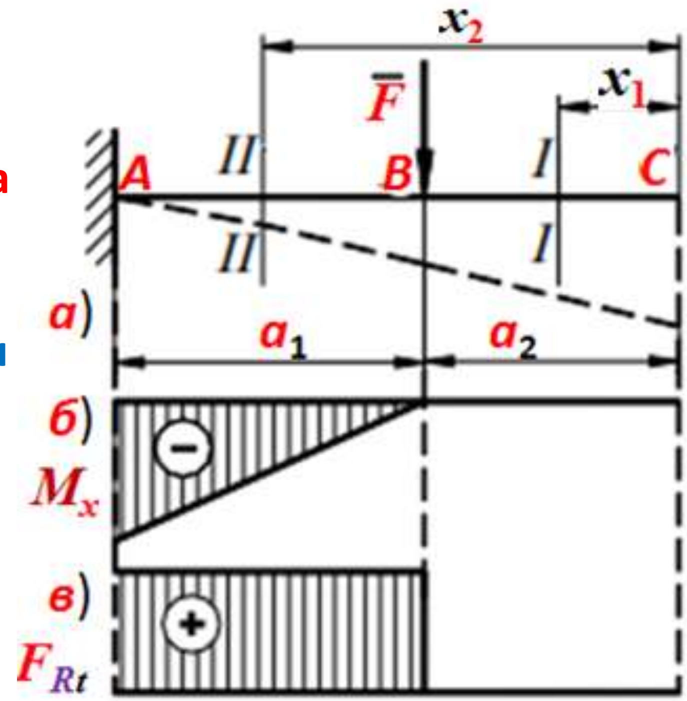


Рис. 3.40. Построение **эпюр поперечных** сил F_{Rt} и **изгибающих моментов** M_x **консольной балки**

Полученное уравнение M_{x1}=f(M_x) является **уравнением наклонной прямой линии**. Поэтому для построения эпюры на **участке *АВ*** достаточно вычислить **два значения** M_x:

$M_{x2=a2}=0$; и $M_{x2=(a1+a2)}=-F\cdot a_1$.

Величину $F\cdot a_1$ в выбранном масштабе откладываем **вниз** от **оси эпюры**. Эпюра M_x (Н·м) представлена на **рис.** 3.40, *б*.

Наибольший изгибающий момент возникает **в сечении** у **заделки**: $M_{xmax}=-F\cdot a_1$.

Вычислим теперь **поперечную силу** в **сечении I-I**.

Проектируя на **вертикальную ось силы**, расположенные **справа от сечения**, получаем, что:

$F_{Rt}=0$; при $0 \le x_1 \le a_2$.

Для **сечения II-II** тем же путем получим:

$F_{Rt\ x2}=F$; при $a_2 \le x_2 \le (a_1+a_2)$.

Знак «**плюс**» взят потому, что **внешняя сила справа от сечения** направлена сверху **вниз**. Эпюра F_{Rt} (Н) показана на рис. 3.40, *в*.

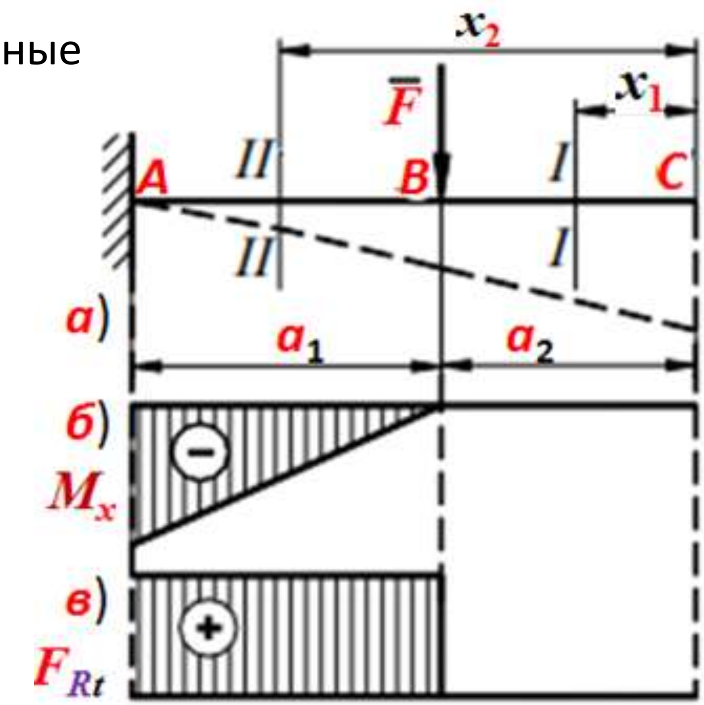


Рис. 3.40. Построение **эпюр поперечных сил** F_{Rt} и **изгибающих моментов** M_x **консольной балки**

M_x и *А В С в*) F_{Rt} *а*) *б*) *в*) a_1 a_2 :

Во **втором** примере рассмотрим построение эпюр M_x и F_{Rt} для **двухопорной балки**, изображенной на рис. **3.41**, ***а***. Используя уравнения равновесия, определим реакции R_{Ay} и R_{By} . **Изгибающий момент** в сечении с абсциссой x_1 определяем как сумму моментов от сил, расположенных слева от сечения при $0 \le x_1 \le l_1$:

$$M_{x_1} = -R_{Ay}x_1 - \frac{q_1 x_1^2}{2};$$

Уравнение момента M_{x1} описывает параболу. Поэтому **двух** фиксированных точек для построения эпюры недостаточно. Эпюру строим **по трем** точкам:

$x'_1 = 0$; $M_{x'1} = 0$;

$x''_1 = l_1/2$; $\quad M''_{x1} = -\frac{R_{Ay}l_1}{2} - \frac{q_1 l_1^2}{8};$

$x'''_1 = l_1$; $\quad M'''_{x1} = -R_{Ay}l_1 - \frac{q_1 l_1^2}{2}.$

По этим данным строим эпюру M_x на **участке *АЕ***.

Определяем **изгибающий момент в сечении** с абсциссой x_2 от всех нагрузок, действующих **слева от этого сечения**:

$$M_{x2} = -R_{Ay}x_2 - q_1 l_1\left(x_2 - \frac{l_1}{2}\right) + M;$$

$$l_1 \le x_2 \le (l_1 + l_2).$$

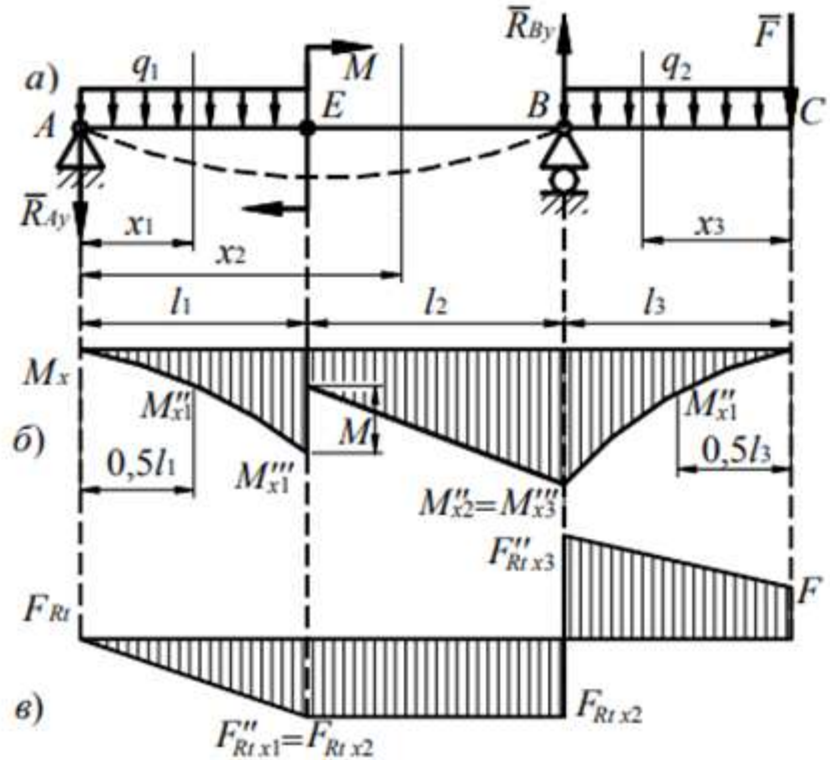


Рис. 3.41. Построение **эпюр поперечных сил** F_{Rt} и **изгибающих моментов** M_x **двухопорной балки**

Второй член этого выражения представляет собой **изгибающий момент** от **равнодействующей распределенной** нагрузки q_1, действующей на **участке** ***AE***. Уравнение M_{x2} описывает наклонную прямую линию. Поэтому для построения эпюры достаточно вычислить два значения M_{x2}:

$$M_{x2} = -R_{Ay}x_2 - q_1 l_1\left(x_2 - \frac{l_1}{2}\right) + M;$$

$x'_2 = l_1$; $\quad M'_{x2} = -R_{Ay}l_1 - \dfrac{q_1 l_1^2}{2} + M;$

$x''_2 = l_1 + l_2$; $\quad M''_{x2} = -R_{Ay}(l_1 + l_2) - q_1 l_1\left(\dfrac{l_1}{2} + l_2\right) + M$

По этим данным построим эпюру M_x на **участке** ***BE***. Определяем **изгибающий момент** в сечении, отстоящем на расстоянии x_3 от **правого** конца балки. Так как **справа** от указанного сечения **внешних силовых факторов меньше, чем слева**, то M_{x3} проще вычислить как сумму моментов от сил, расположенных **справа** от сечения:

$$M_{x3} = -Fx_3 - \frac{q_2 x_3^2}{2}; \; 0 \le x_3 \le l_3 .$$

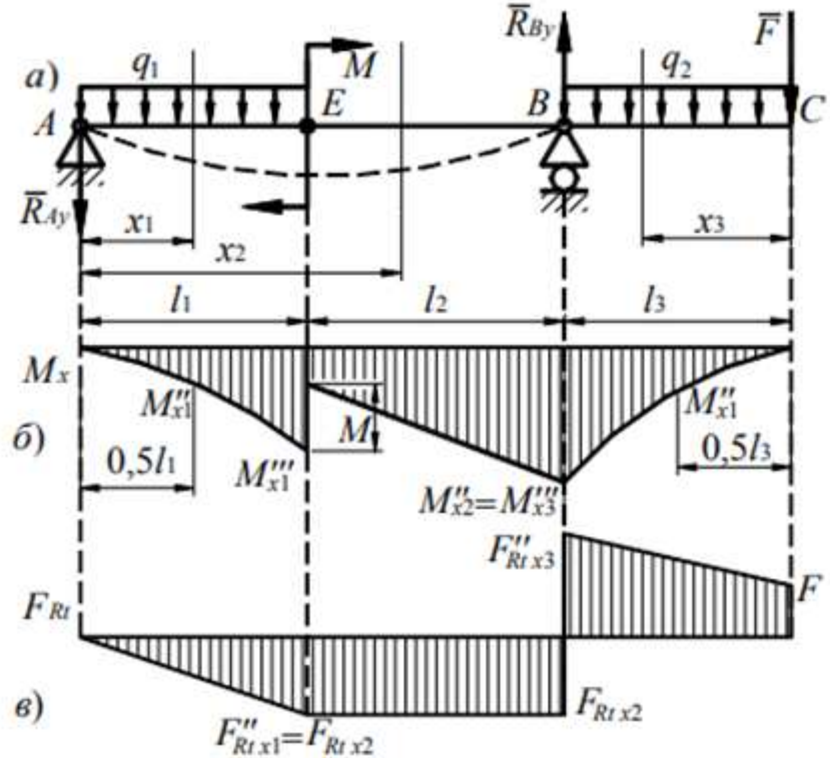


Рис. 3.41. Построение **эпюр поперечных сил** F_{Rt} и **изгибающих моментов** M_x **двухопорной балки**

Первый член в уравнении M_{x3} представляет собой **изгибающий момент** от силы F, а **второй** – **изгибающий момент** от **распределенной** нагрузки q_2, действующей **правее** рассматриваемого сечения. Уравнение момента M_{x3} описывает параболу. Эпюру строим по трем точкам:

$$M_{x3} = -Fx_3 - \frac{q_2 x_3^2}{2};\; 0 \le x_3 \le l_3.$$

$x'_3 = 0$; $M_{x'3} = 0$;

$x''_3 = l_3/2$; $M''_{x3} = -\frac{Fl_3}{2} - \frac{q_2 l_3^2}{8}$;

$x'''_3 = l_3$; $M'''_{x3} = -Fl_3 - \frac{q_2 l_3^2}{2}$.

По этим данным строим эпюру M_x на **участке** BC. Поперечную силу F_{Rt} определяем, **проектируя на вертикаль** силы, действующие на отсеченную часть:

$0 \le x_1 \le l_1$ $\quad F_{Rt\,x1} = -R_{Ay} - q_1 x_1;$

Уравнение $F_{Rt\;x1}$ является уравнением наклонной прямой линии.

$x'_1 = 0$; $F'_{Rt\;x1} = 0$;

$x''_1 = l_1$; $F''_{Rt\;x1} = -R_{Ay} - q_1 \cdot l_1$;

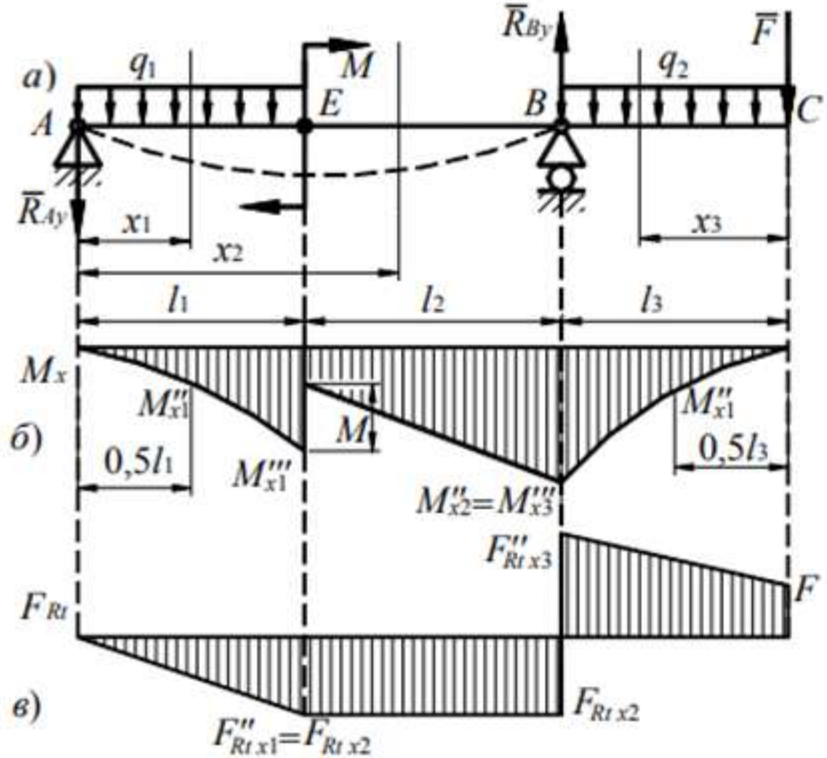


Рис. 3.41. Построение **эпюр поперечных сил** F_{Rt} и **изгибающих моментов** M_x **двухопорной балки**

3.6.15 Изгиб расчёт (продолжение 7)

Тогда **поперечная сила** в произвольном сечении **участка *EB***: $F_{Rt\ x2} = -R_{Ay} - q_1 \cdot l_1$.
Скачки в эпюре F_{Rt} равны по величине приложенным в соответствующих сечениях балки **сосредоточенным силам** R_{Ay}, R_{By}, F .

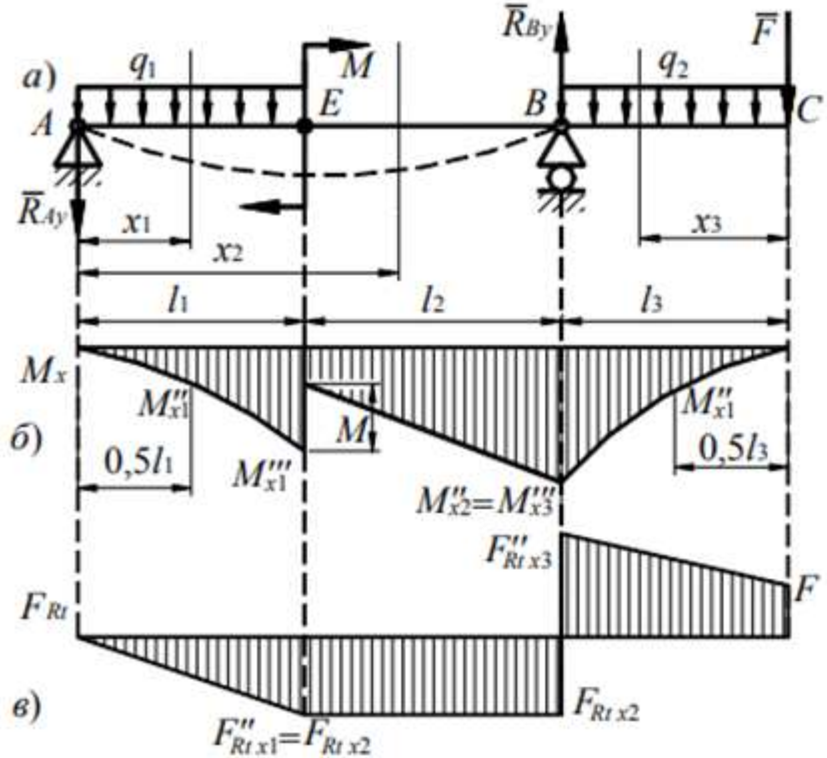


Рис. 3.41. Построение **эпюр поперечных сил** F_{Rt} и **изгибающих моментов** M_x **двухопорной балки**

Напряжения при изгибе. Расчеты на прочность

Наибольшую деформацию растяжения (или сжатия) претерпевают **периферийные** слои изгибаемой балки. Очевидно, что эти деформации тем больше, чем больше изгибающий момент. Следовательно, при **изгибе величина нормальных напряжений зависит от величины изгибающего момента**. Величина же **касательных напряжений** зависит от **величины поперечной силы**.

Изгибающий момент или поперечная сила в любом сечении балки могут быть определены с помощью **эпюр** рассмотренными выше методами.

При расчетах на прочность большое значение имеет распределение **нормальных** и **касательных** напряжений **по сечению**. Длительная практика эксплуатации **изогнутых балок** показывает, что **наиболее опасной**, определяющей работоспособность конструкции, является **точка**, расположенная **на крайних растянутых волокнах**. Лишь в некоторых специфических случаях **касательное напряжение** может оказаться решающим фактором, определяющим прочность изогнутой балки. Тогда производят полный **расчет балки по эквивалентным напряжениям**.

Необходимо установить зависимость между **изгибающим моментом**, действующим в **сечении**, и возникающими при этом **нормальными** напряжениями, а также определим **закон распределения** нормальных напряжений по сечению.

Пример 1: Для заданной схемы **стальной** балки **круглого постоянного сечения**, нагруженной **распределенной нагрузкой *q***, **сосредоточенной силой *P*** и **изгибающим моментом *M*** (***m***) , произвести следующие расчеты:

1) определить **реакции в опорах**;
2) построить эпюру **поперечных сил**;
3) построить эпюру **изгибающих моментов**.
4) указать **положение опасного сечения** (сечение балки с **максимальным моментом**);
5) определить **прогиб Δy** балки в **точке приложения силы *P***.

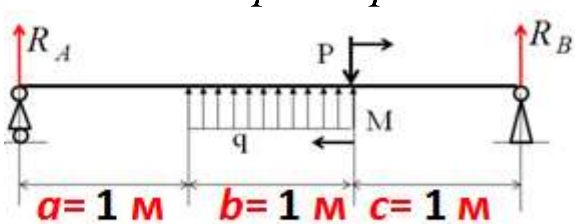
Таблица 1. № строки по последней цифре зачётки

Номер строки	Схема по рис.1	P, кН	m, кНм	q, кН/м
01	1	3	20	12
02	2	6	20	28
03	3	1	20	12
04	4	3	10	16
05	5	6	10	24
06	6	9	24	20
07	7	8	30	8
08	8	21	30	32
09	9	7	40	36
10	10	18	40	36
11	11	7	10	24
12	12	12	18	2
13	13	11	20	12
14	14	6	20	12
15	15	13	10	24
16	16	21	10	24
17	17	16	10	24
18	18	5	20	12
	б	в	а	г

Номер строки	Схема по рис.1	P, кН	m, кНм	q, кН/м
19	19	21	40	4
20	20	17	20	12
21	21	16	10	16
22	22	6	40	4
23	23	14	30	32
24	24	2	30	32
25	25	2	40	4
26	26	20	21	20
27	27	16	30	8
28	28	18	20	12
29	29	14	22	20
30	30	10	30	8
31	31	4	20	12
32	32	16	30	8
33	33	15	10	16
34	34	4	10	16
35	35	12	40	36
36	36	9	40	4
	б	в	а	г

Например, **Вариант 2 по последней цифре зачётки**

q=3 кН/м;
P=10 кН;
M (***m***) =25 кН·м;
b=1 м (***a* = *b* = *c* = 1 м**)
- *линейные размеры*



3.6.17 Изгиб. ИДЗ-3.3 (продолжение 1)

Определение внутренних усилий и перемещений **двухопорных балок**, работающих на поперечный изгиб. Для балки, изображенной на **рис.1**, требуется:

1. простроить **эпюры изгибающих моментов** и **поперечных сил *P***;
2. указать **положение опасного сечения** (сечение балки с **максимальным моментом**);
3. определить **прогиб Δy** балки в точке приложения силы ***P***.

Данные взять из табл.1

Рис. 1. Схема нагрузки балки (размеры по порядку слева направо: ***а, б, в***)

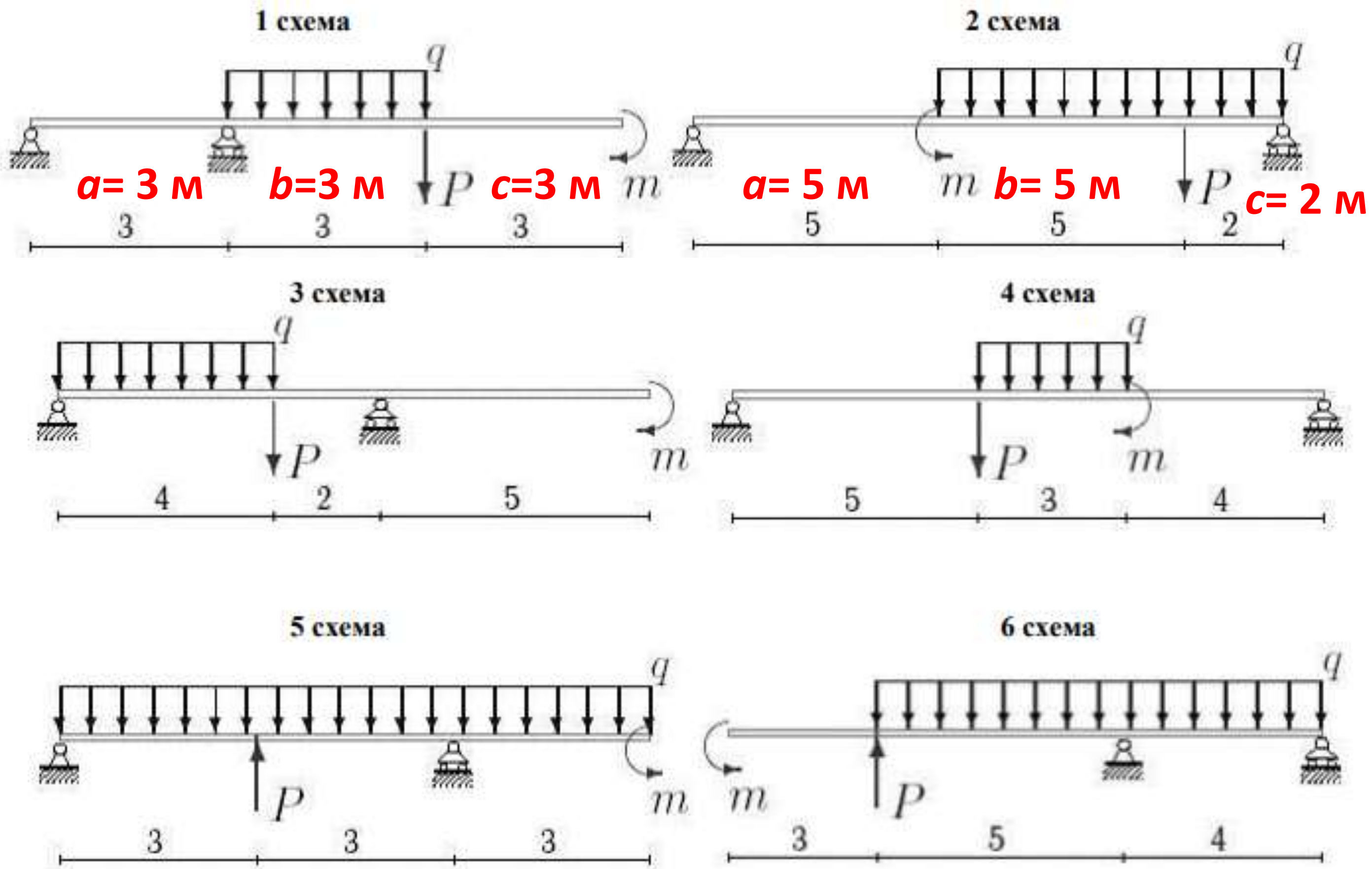
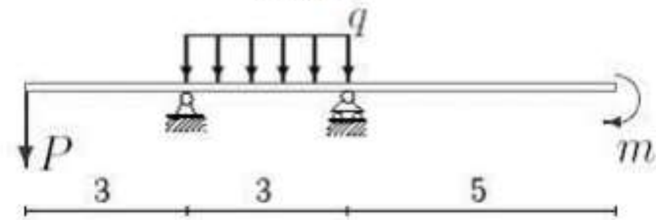
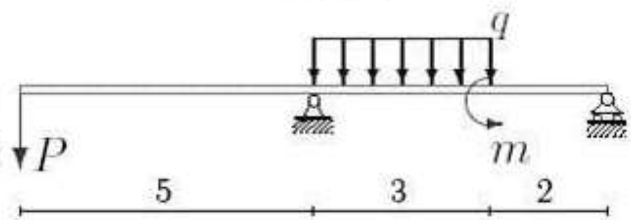


Рис. 1. Схема нагрузки балки (размеры по порядку слева направо: ***а, б, в***)

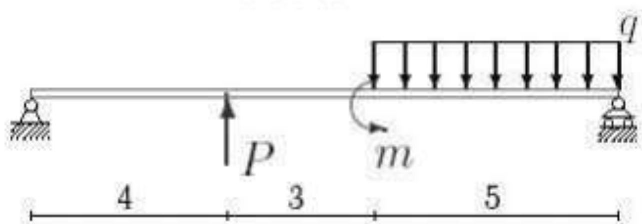
7 схема



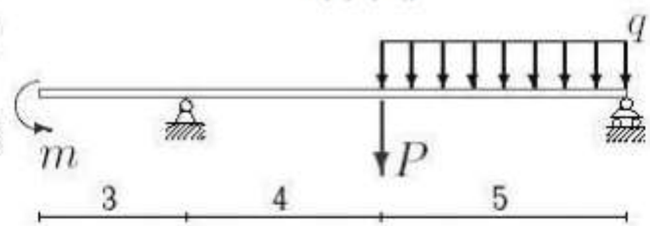
8 схема



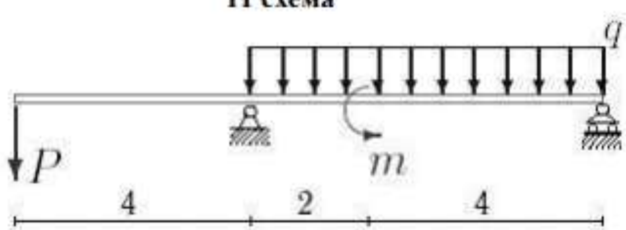
9 схема



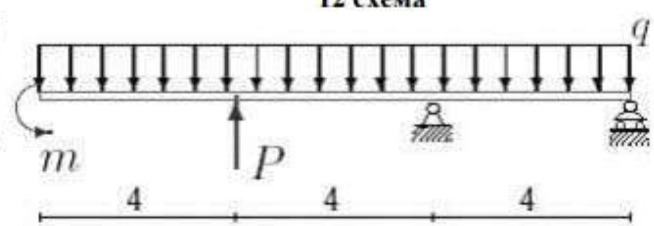
10 схема



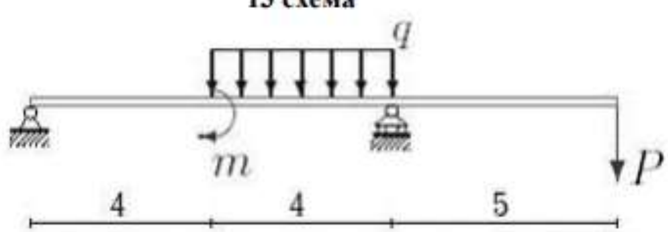
11 схема



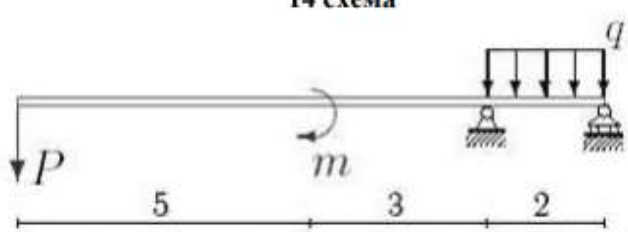
12 схема



13 схема



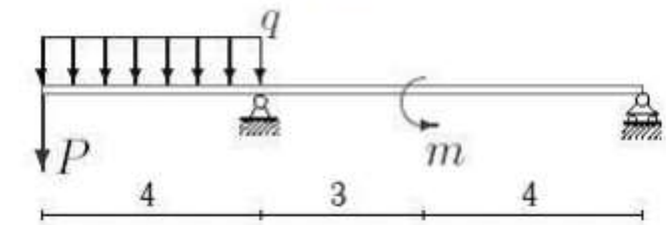
14 схема



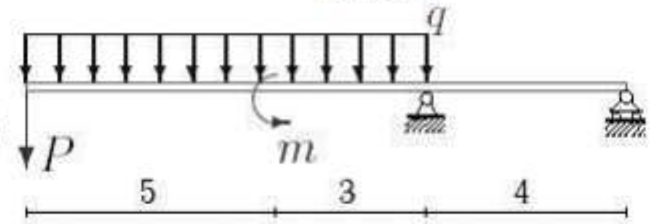
3.6.17 Изгиб. ИДЗ-3.3 (продолжение 3)

Рис. 1. Схема нагрузки балки (размеры по порядку слева направо: ***а, б, в***)

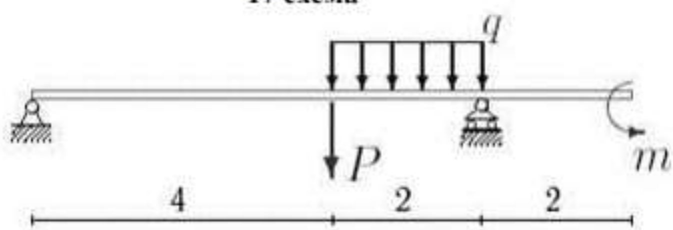
15 схема



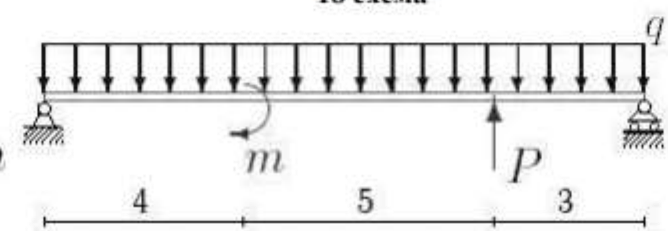
16 схема



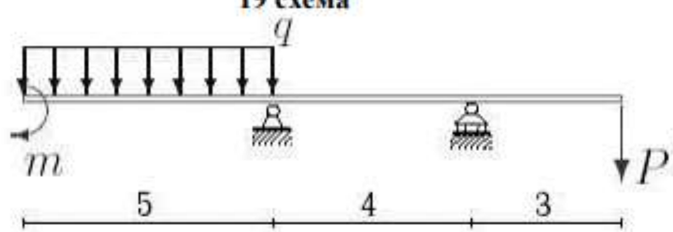
17 схема



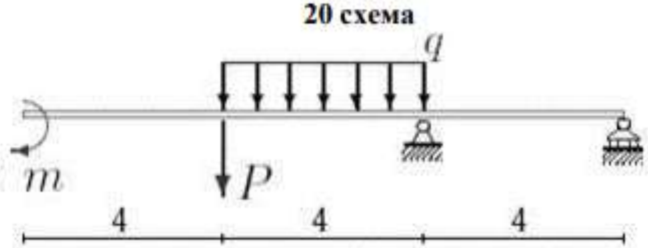
18 схема



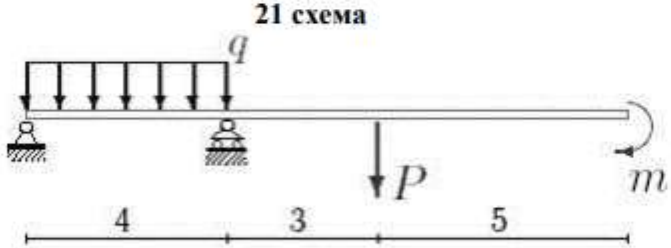
19 схема



20 схема



21 схема



22 схема

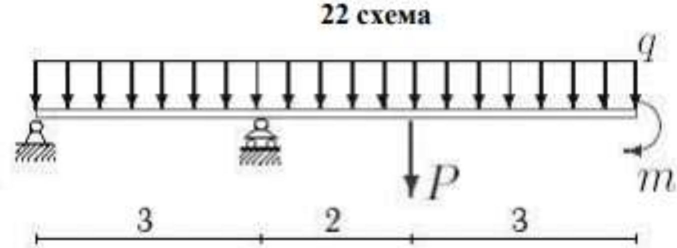
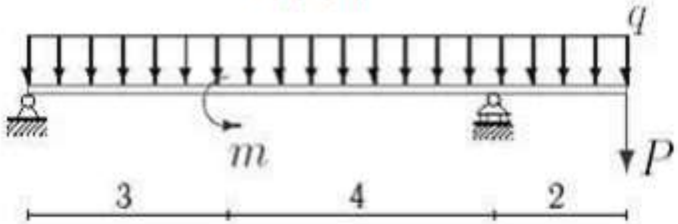
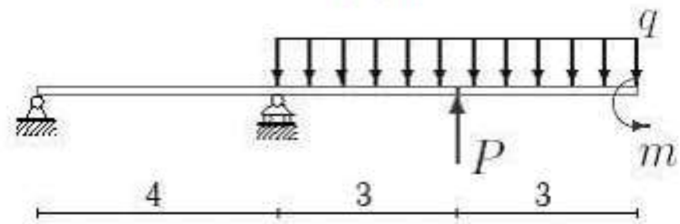


Рис. 1. Схема нагрузки балки (размеры по порядку слева направо: ***а, б, в***)

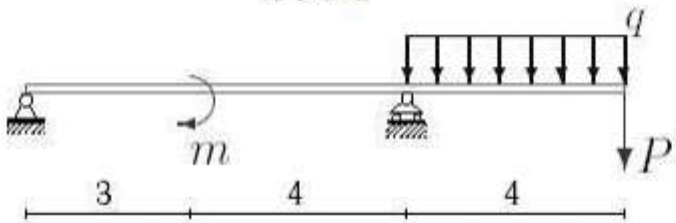
23 схема



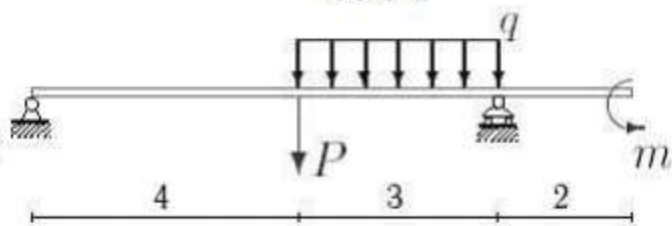
24 схема



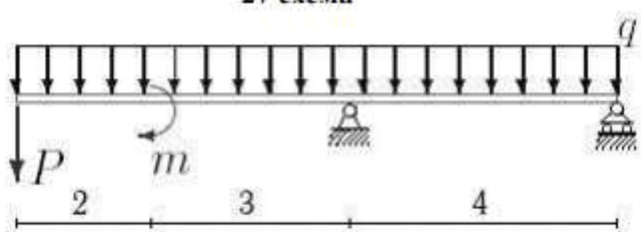
25 схема



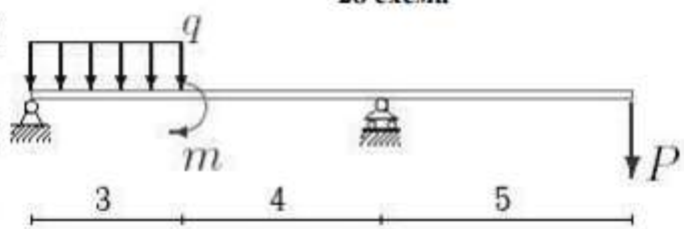
26 схема



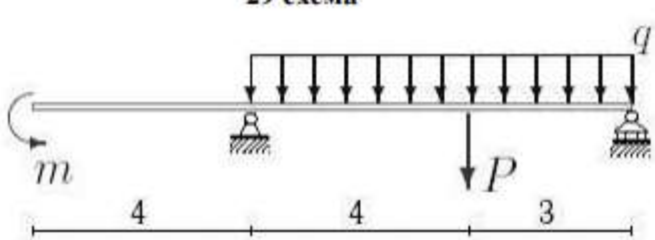
27 схема



28 схема



29 схема



30 схема

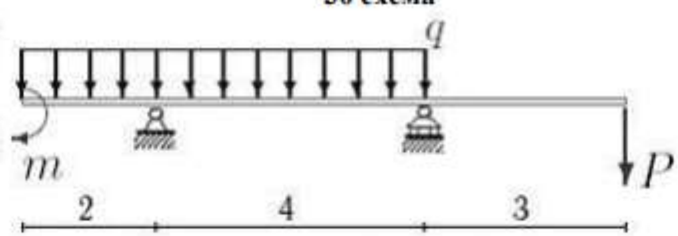


Рис. 1. Схема нагрузки балки (размеры по порядку слева направо: ***а, б, в***)

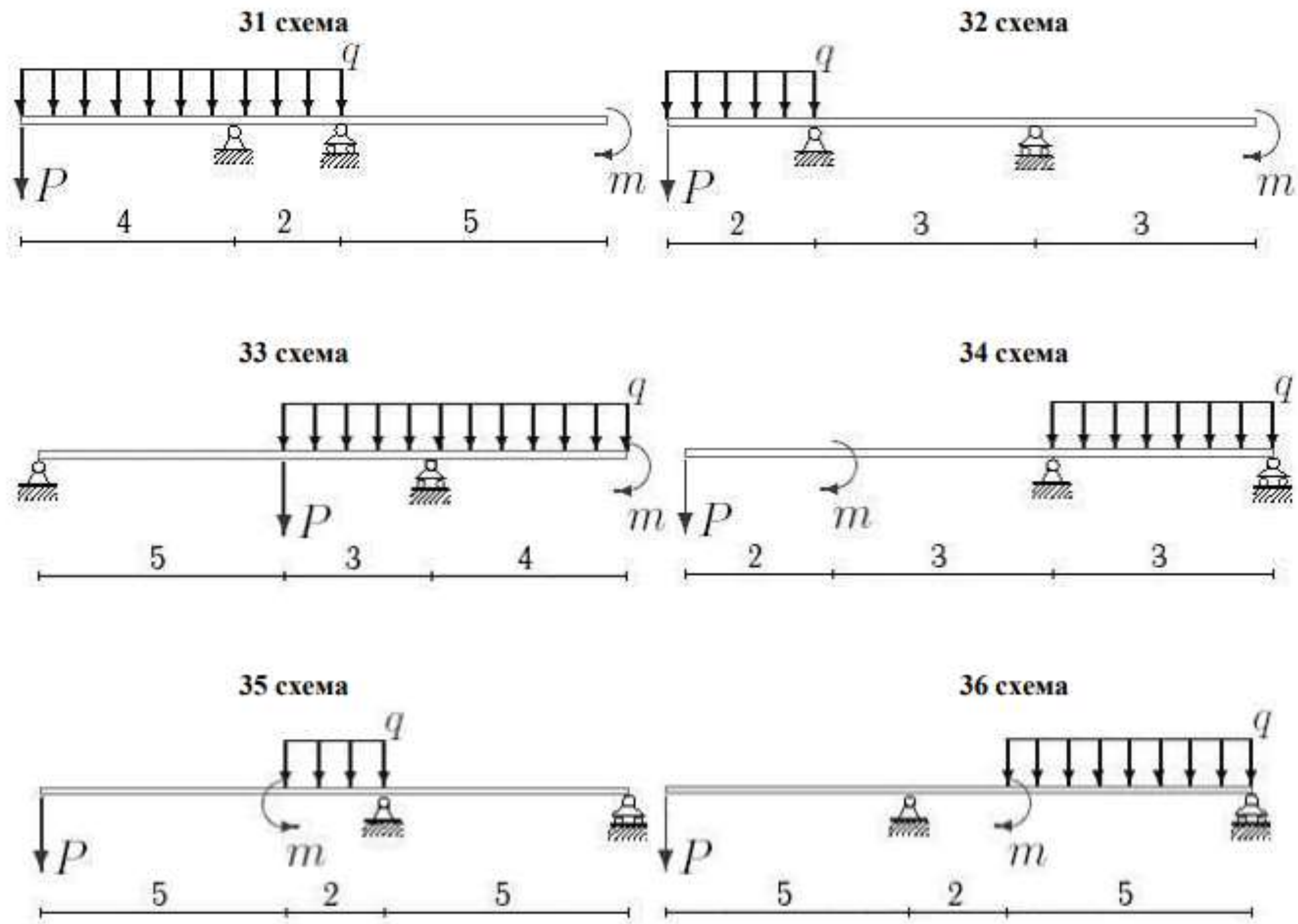


Рис.1

q=3 кН/м; P=10 кН; M (m) =25 кН·м; 2b=1 м ($a = b = c = 1$ м) - *линейные размеры* 3. **Второй участок**

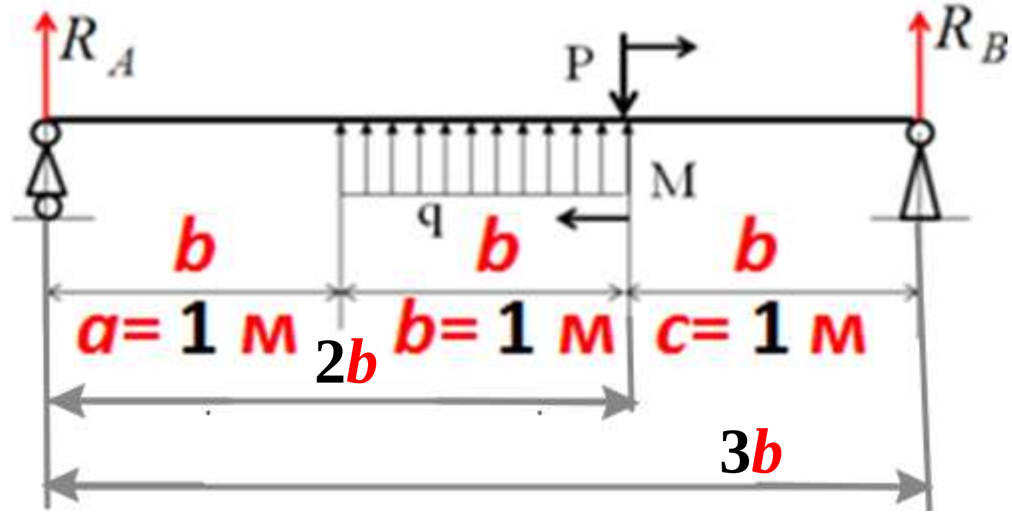


Рис. 3.42. Схема нагрузки двухопорной балки

1. Определение реакций опор:

$$\begin{cases} R_A + R_B - P + Q = 0 \\ Q \cdot \dfrac{3b}{2} - P \cdot 2b + R_B \cdot 3b - M = 0 \end{cases}$$

$$Q = q \cdot b = 3 \cdot 1 = 3 \ H; R_A = -6{,}5 \ кH; R_B = 13{,}5 \ кH.$$

2. Первый участок $0 \le x \le b$

$$\boxed{\begin{aligned} R_A + N_1 &= 0 \\ M_{1z} + N_1 x &= 0 \end{aligned}}$$

$$N_1 = -R_A = 6{,}5 кH$$

$$M_{1z} = -N_1 x;$$

$$M_{1z}(0) = 0; \ M_{1z}(b) = -N_1 b = -6{,}5 кHм$$

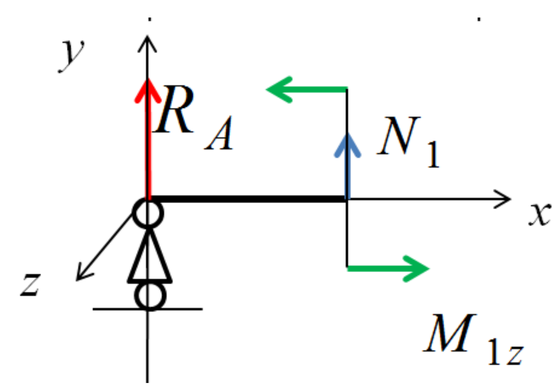


Рис. 3.43. Определение поперечных сил и изгибающих моментов двухопорной балки **на первом участке**

q=3 кН/м; P=10 кН; M (m) =25 кН·м; b=1 м ($a = b = c = 1$ м)

3. Второй участок $b \le x \le 2b$

$$\boxed{\begin{aligned} & R_A + N_2 + q(x-b) = 0 \\ & M_{2z} + q(x-b)\left(b + \frac{x-b}{2}\right) + N_2 x = 0 \end{aligned}}$$

$$N_2 = -R_A - q(x-b);$$

$\boxed{R_A = -6{,}5\ кН;}$ $\boxed{Q = q \cdot b = 3 \cdot 1 = 3\ Н;}$

$$N_2(b) = -R_A = 6{,}5кН;$$

$$N_2(2b) = -R_A - qb = 3{,}5кН$$

$$M_{2z} = -q(x-b)\left(b + \frac{x-b}{2}\right) - N_2 x;$$

$$M_{2z}(b) = -N_2(b)b = -6{,}5кНм$$

$$M_{2z}(2b) = -q\frac{3b^2}{2} - 2bN_2(2b) = -11{,}5кНм$$

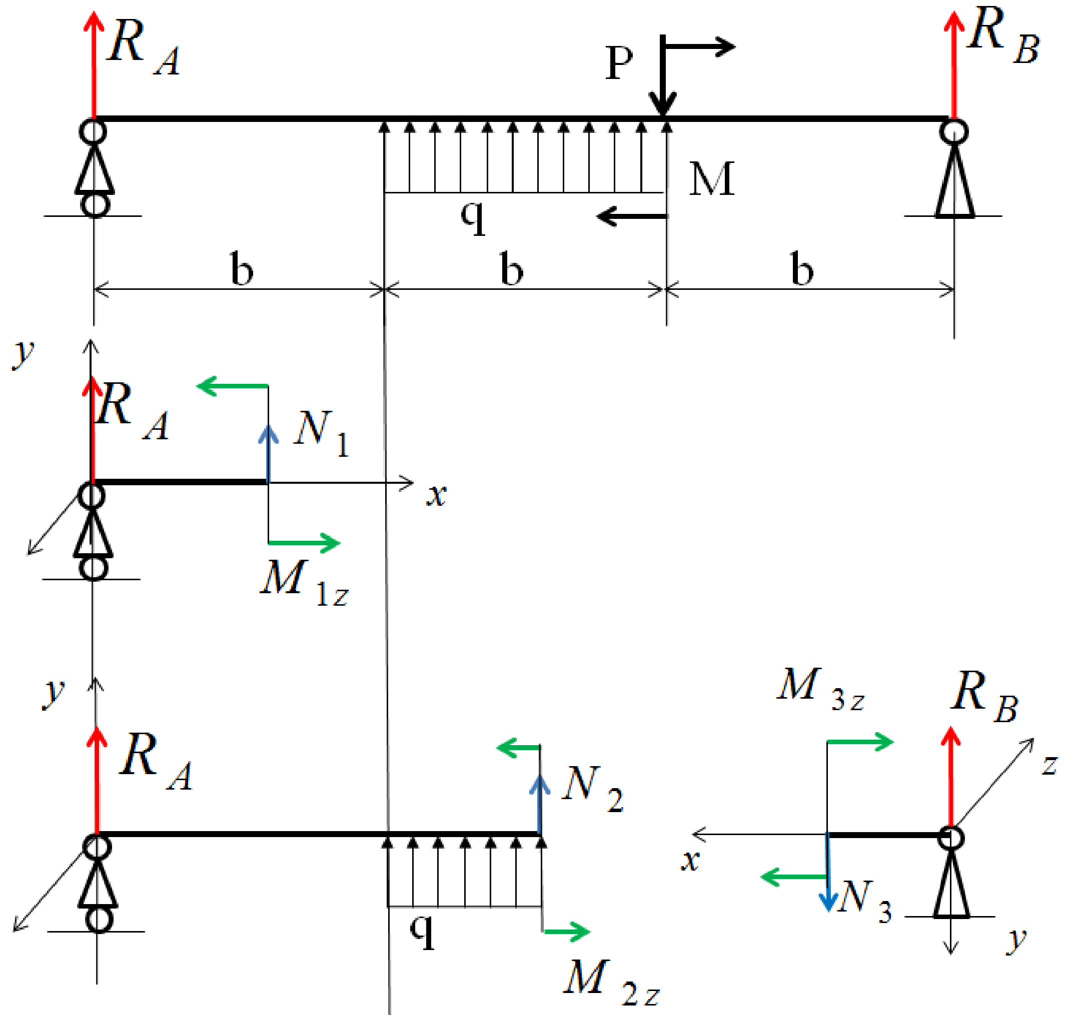


Рис. 3.44. Определение реакций двухопорной балки

q=3 кН/м; P=10 кН; M (m) =25 кН·м; b=1 м ($a = b= c = 1$ м)

4) Третий участок (правый):

$$0 \le x \le b$$

$$N_3 - R_B = 0;$$

$$\boxed{R_B = 13{,}5\ кН.}$$

$$N_3 = 13{,}5 кН$$

$$M_{3z} - N_3 x = 0;$$

$$M_{3z} = N_3 x;$$

$$M_{3z}(0) = 0;$$

$$M_{3z}(b) = R_B b = 13{,}5 кНм$$

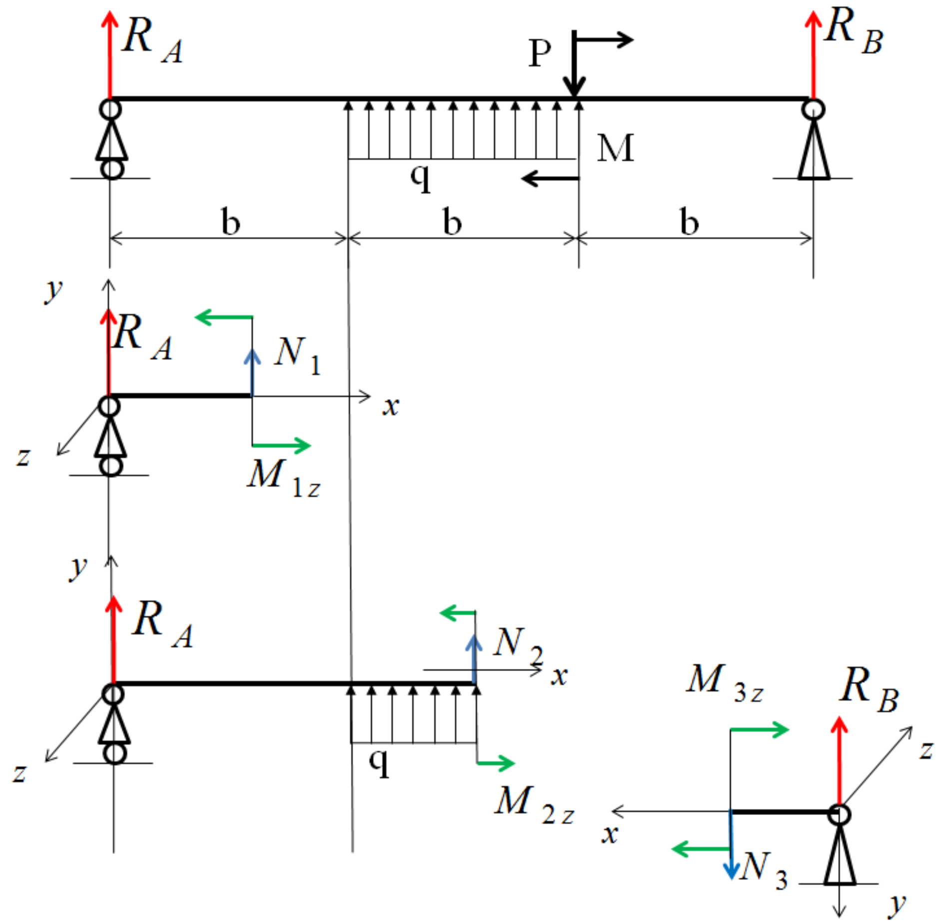
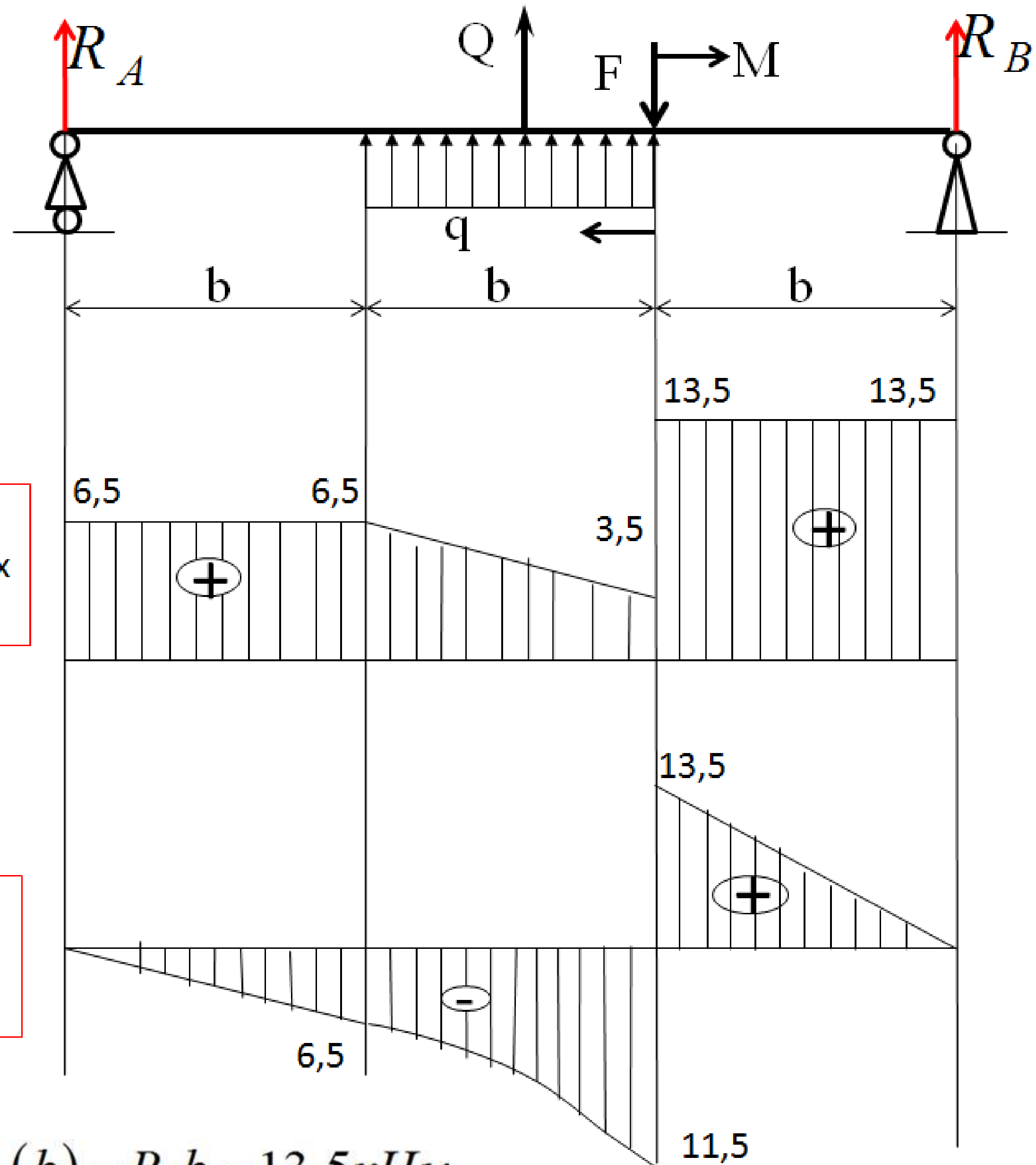


Рис. 3.45. Определение реакций двухопорной балки

q=3 кН/м; P=10 кН; M (m) =25 кН·м; b=1 м ($a = b = c = 1$ м)

Рис. 3.46. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов в двухопорной балке



$$N_1 = -R_A = 6{,}5кН$$

$$N_2(b) = -R_A = 6{,}5кН;$$

$$N_2(2b) = -R_A - qb = 3{,}5кН$$

Третий участок (**правый**):

$$N_3 = 13{,}5кН$$

$$M_{1z}(0) = 0;$$

$$M_{1z}(b) = -N_1 b = -6{,}5кНм$$

$$M_{2z}(2b) = -q\frac{3b^2}{2} - 2bN_2(2b) = -11{,}5кНм$$

Правый участок: $M_{3z}(0) = 0;\ M_{3z}(b) = R_B b = 13{,}5кНм$

Завершить самостоятельно:

2. указать **положение опасного сечения** (сечение балки с **максимальным моментом**);
3. определить **прогиб Δy** балки в точке приложения силы ***P*** (**диаметр** балки задать **самостоятельно**).
4. Определить **наибольшие напряжения** в опасном сечении и **оценить прочность** балки в этом месте.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Приведите технические примеры деформаций изгиба

2. Как рассчитать реакции опор составной балки?

3. Прокомментируйте суть метода сечений при изгибе.

4. Какие выводы можно сделать из эпюр поперечных сил и изгибающих моментов?

1. Гурин В.В., Замятин В.М., Попов А.М. Механика: учебник. – Томский политехнический университет. – Томск: Издательство ТПУ, 2012. – 669 с.
С. 176-187.

3.6.18 Сложное напряжённо-деформированное состояние