



Национальный исследовательский
Томский политехнический университет

Механика 1.3

3.09.24;

Лектор - Козлов Виктор Николаевич,
доцент отделения машиностроения ИШНПТ

моб. тел. +7-913-812-58-34, kovn@tpu.ru

ВКС 380 440 5794, **Пароль:** 1DepTr

Лекции – 24 часа,

практические занятия – 32 часа,

88 часов самостоятельной работы,

расчётно-графические работы (РГР)

всего 144 ч., 4 кредита. **Экзамен**

3.6.8 Расчеты при растяжении (сжатии)

1. Расчеты на прочность

$$\sigma_{p(c)} = F/A \leq \sigma_{p(c)p} \cdot [\sigma_B] [\sigma_{-B}]$$

где $\sigma_{p(c)}$ – фактическое напряжение на растяжение или сжатие; $\sigma_{p(c)p}$ – допускаемое напряжение на растяжение или сжатие. Это неравенство называется **условием прочности**. С его помощью могут быть решены задачи следующих **трех типов**.

2. Определение предельной (допускаемой) нагрузки для детали с определенными размерами **поперечного сечения A** и **допускаемым** напряжением σ_p : $F_p \leq A \cdot \sigma_p$.

Группа сталей	Марка стали	Механические характеристики					
		σ_B , МПа	σ_T , МПа	σ_{-1p} , МПа	σ_{-1} , МПа	τ_{-1} , МПа	НВ
Углеродистые стали качественные	10	340-420	210	120-150	160-220	80-120	137
	20	420-500	250	120-160	170-220	100-130	156
	30	500-600	300	170-210	200-270	110-140	179
	40	580-700	340	180-240	230-320	140-190	187-217
	45	610-750	360	190-250	250-340	150-200	197-241
	50	640-800	380	200-260	270-350	160-210	207-241

$$A_1 = (\pi \cdot d_1^2) / 4 = (\pi \cdot 20^2) / 4 = 314 \text{ мм}^2; F_{1 \max} = \sigma_T \cdot A_1 = 360 \cdot 314 = 1130097 \text{ Н} = 113 \text{ кН.}$$

$$A_2 = (\pi \cdot d_2^2) / 4 = (\pi \cdot 30^2) / 4 = 707 \text{ мм}^2; F_{2 \max} = \sigma_T \cdot A_2 = 360 \cdot 707 = 254469 \text{ Н} = 254 \text{ кН.}$$

3.6.9 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении (продолжение 1)

Выбрав масштаб μ_F (Н/мм), строим эпюру продольных сил (рис. 2 б). При этом растягивающую продольную силу F_{RI} считаем положительной, сжимающую F_{RII} — отрицательной. В выбранном масштабе μ_F строим эпюру продольных сил (рис. 2 б).

Напряжения σ : а) в сечениях нижней части стержня: $\sigma_I = F_{RI}/A_1$ (растяжение);

б) в сечениях верхней части стержня: $\sigma_{II} = F_{RII}/A_2$ (сжатие);

В выбранном масштабе μ_σ (МПа/мм) строим эпюру напряжений (рис. 2 в).

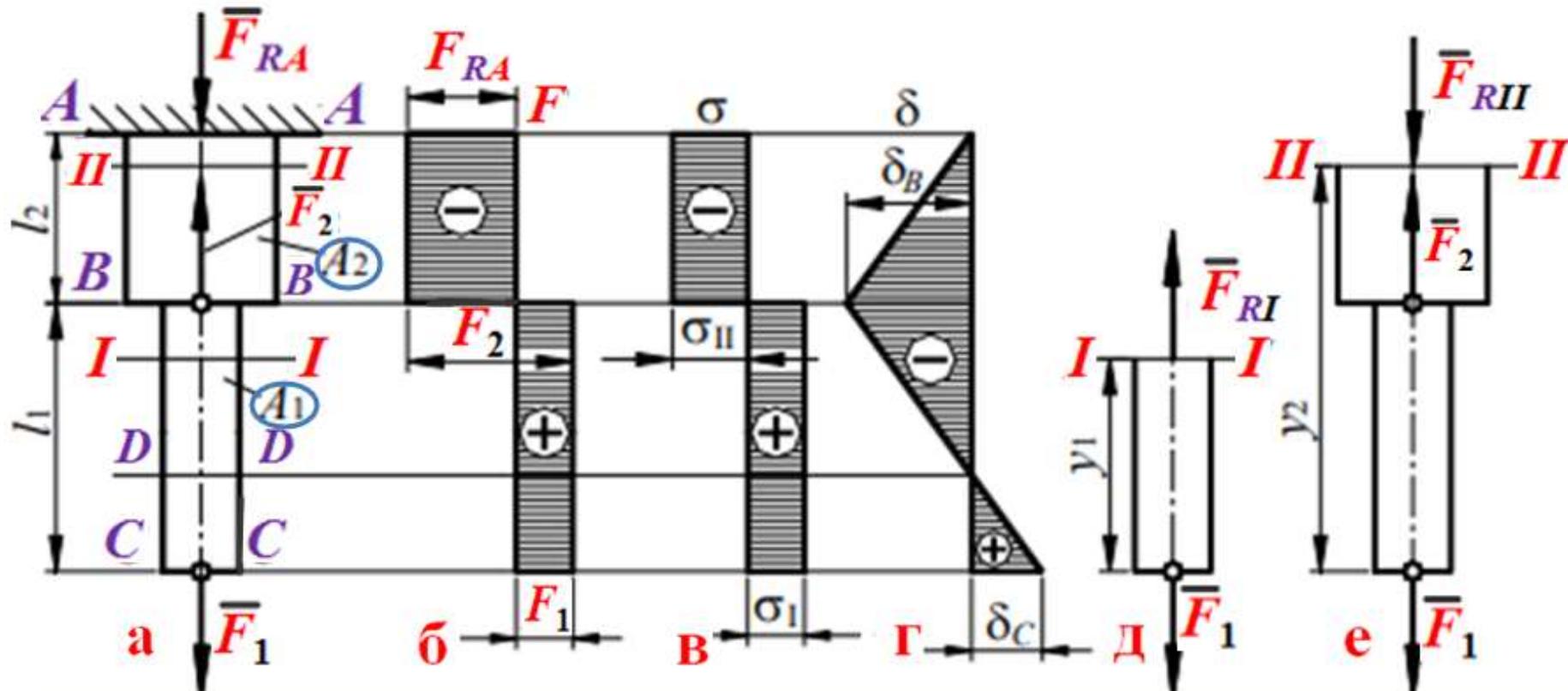


Рис. 2. Расчет ступенчатого бруса: $F_2 = 254$ кН; $F_1 = 114$ кН; $d_1 = 20$ мм; $d_2 = 30$ мм. $l_1 = 30$ мм; $l_2 = 20$ мм

3.6.9 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении (продолжение 3)

Построить эпюры напряжений (рис.4в) и вертикальных перемещений (деформаций) δ (рис.4 г),

3) эпюры напряжений σ : а) в сечениях **нижней** части стержня: $\sigma_I = F_{RI}/A_1$ (растяжение) (рис.4 в) ;

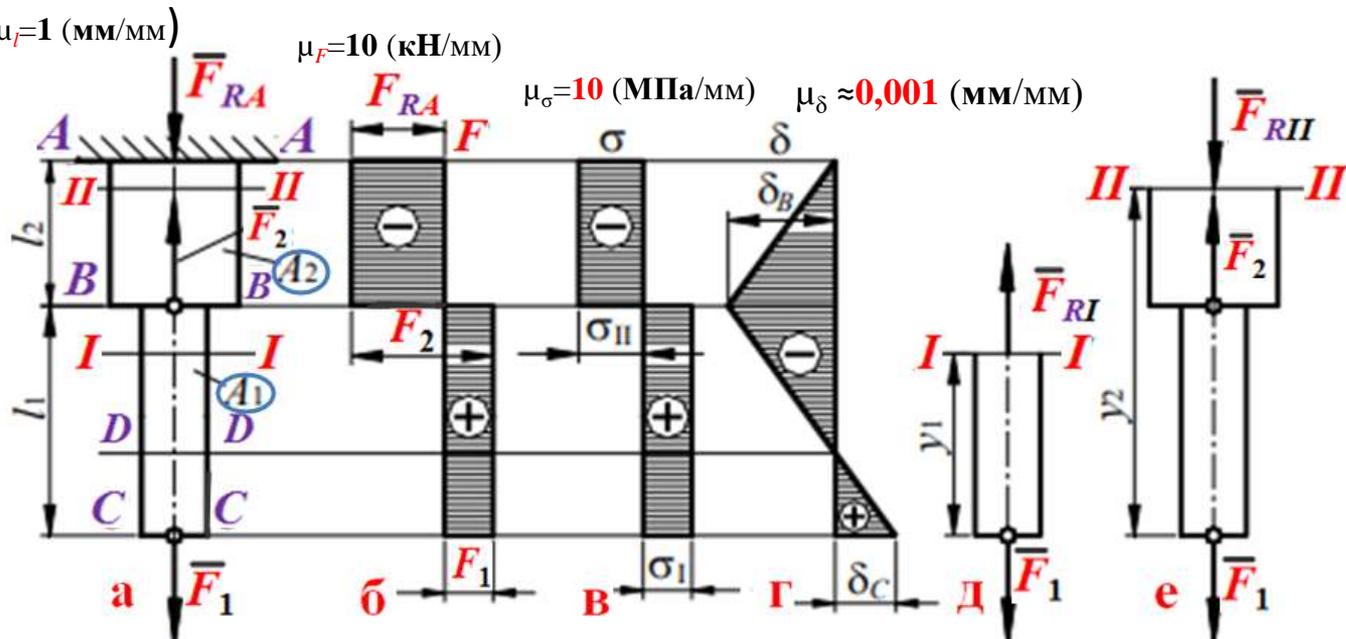
б) в сечениях **верхней** части стержня: $\sigma_{II} = F_{RII}/A_2$ (сжатие) (рис.4 в) ;

4) эпюры деформаций δ : а) Сечение **B-B** будет перемещаться **вверх**, поскольку **верхняя** часть стержня **сжимается**: $\delta_B = (\sigma_{II} \cdot l_2)/E$ (сжимается, знак «минус» «-») (рис. 4 г), т.е. $\delta_B = -(\sigma_{II} \cdot l_2)/E$.

Сталь: $E \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2 = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2 = 210 \text{ ГПа}$.

б) Перемещение сечения **C-C** является алгебраической суммой перемещения сечения **B-B** (δ_B) и удлинения части стержня длиной l_1 : $\delta_C = \delta_B + \Delta l = \delta_B + (\sigma_I \cdot l_1)/E = (-\sigma_{II} \cdot l_2)/E + (\sigma_I \cdot l_1)/E$.

В выбранном масштабе μ_δ (мм/мм) откладываем на эпюре значения δ_C и δ_B (рис. 4 г), соединяем полученные точки **прямыми** линиями, так как при действии сосредоточенных внешних сил перемещения **линейно** зависят от абсцисс (площади) сечений стержня, и получаем график (эпюру) перемещений.



Из эпюры δ видно, что сечение **D-D** не перемещается, сечения, расположенные выше сечения **D-D**, перемещаются **вверх**, сечения, расположенные **ниже** сечения **D-D**, перемещаются **вниз**.

Рис. 4. Расчёт ступенчатого бруса: $\sigma_I = +250 \text{ МПа}$; $\sigma_{II} = -300 \text{ МПа}$; $d_1 = 20 \text{ мм}$; $d_2 = 30 \text{ мм}$. $l_1 = 40 \text{ мм}$; $l_2 = 30 \text{ мм}$

ИДЗ-3 состоит из нескольких задач:

- 1. Растяжение-сжатие ступенчатого бруса;**
- 2. Сдвиг;**
- 3. Кручение;**
- 4. Изгиб балки;**
- 5. Сложное сопротивление;**
- 6. Прочность материалов при переменных напряжениях.**

1. Растяжение-сжатие ступенчатого бруса

Стальной стержень находится под действием продольных сил (табл. 1).

- 1) Построить схему нагрузки бруса $\mu_l = 1$ мм/мм;
- 2) эпюры внутренних продольных сил $N (F)$ $\mu_N = \underline{\hspace{2cm}}$ Н/мм;
- 3) эпюры нормальных напряжений σ (МПа) $\mu_\sigma = \underline{\hspace{2cm}}$ МПа/мм;
- 4) эпюры перемещений $\lambda (\delta)$ $\mu_\delta = \underline{\hspace{2cm}}$ мм/мм; ($\approx 0,001$ мм/мм).

Влиянием собственного веса стержня пренебречь. Модуль упругости стали $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, длина $l = 1$ м.

Таблица 1. Исходные данные к задаче 1 (растяжение-сжатие ступенчатого бруса) (по предпоследней цифре зачётной книжки)

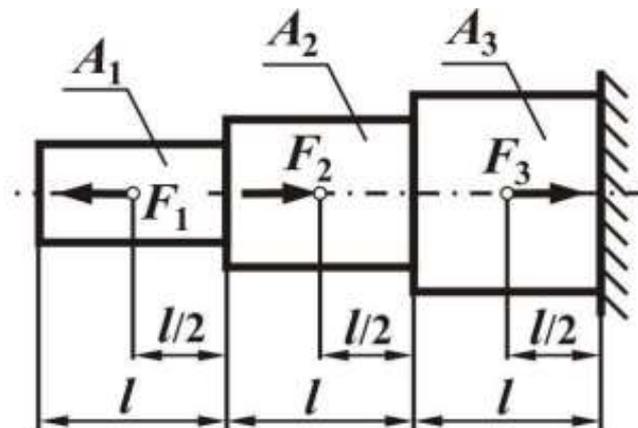
Номер варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_1 , кН	20	25	10	55	25	10	30	45	35	20
F_2 , кН	25	15	50	15	45	35	10	25	50	30
F_3 , кН	40	40	45	30	30	25	45	20	25	25

На схемах 0–9 центрами маленьких окружностей обозначены точки приложения

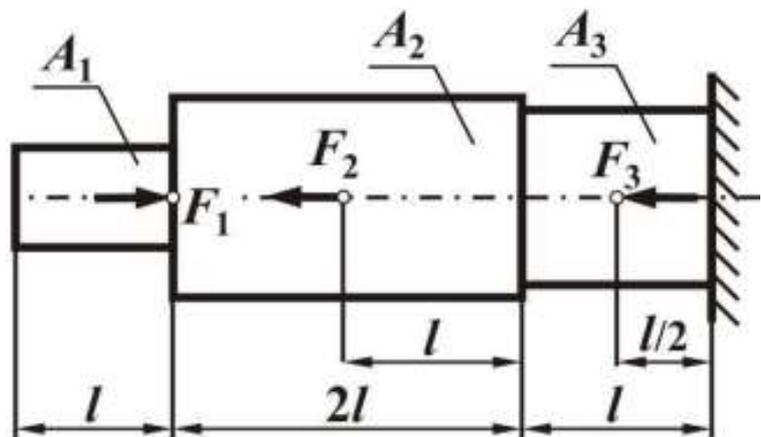
сил F_1, F_2, F_3 .

Схема 0

(по последней цифре зачётной книжки)

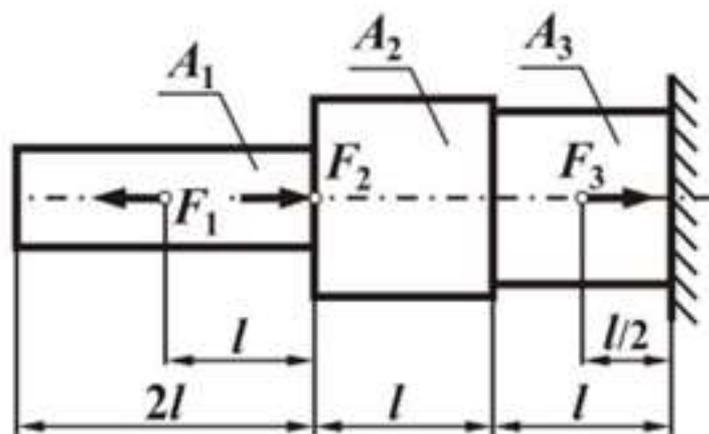


$$A_1 = 100 \text{ мм}^2, \quad A_2 = 200 \text{ мм}^2, \quad A_3 = 300 \text{ мм}^2.$$



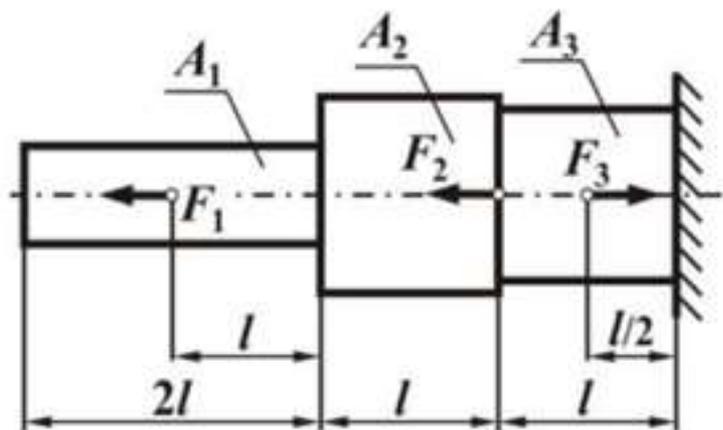
$$A_1 = 100 \text{ мм}^2, \quad A_2 = 300 \text{ мм}^2, \quad A_3 = 250 \text{ мм}^2.$$

Схема 9



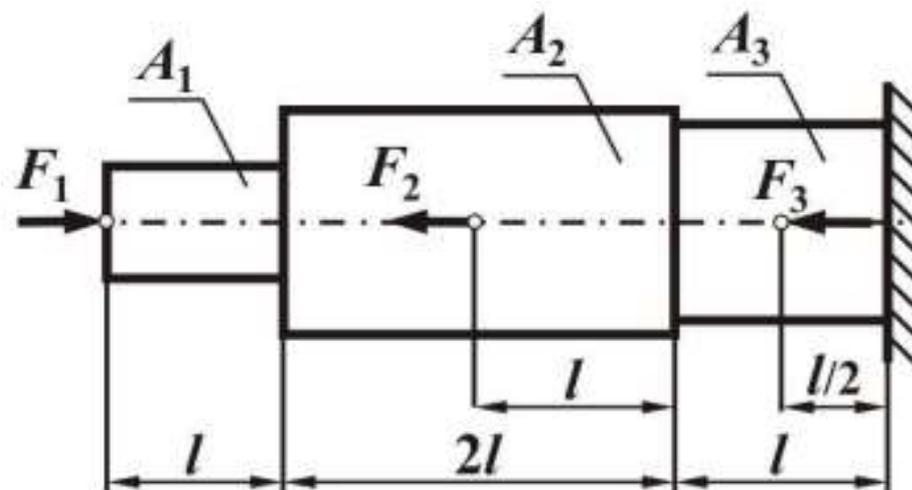
$$A_1 = 100 \text{ мм}^2, \quad A_2 = 200 \text{ мм}^2, \quad A_3 = 150 \text{ мм}^2.$$

Схема 1



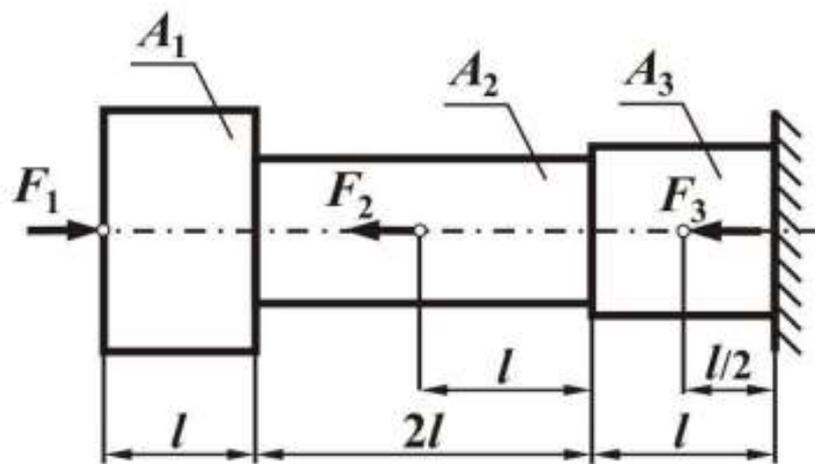
$$A_1 = 100 \text{ мм}^2, \quad A_2 = 300 \text{ мм}^2, \quad A_3 = 250 \text{ мм}^2.$$

Схема 2



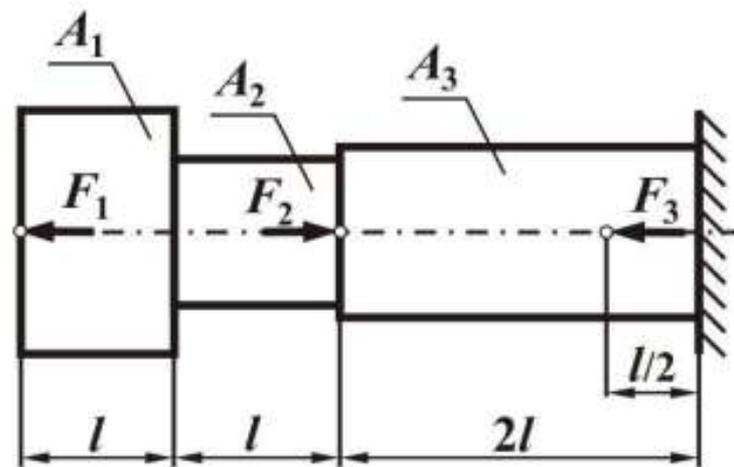
$$A_1 = 100 \text{ мм}^2, \quad A_2 = 300 \text{ мм}^2, \quad A_3 = 250 \text{ мм}^2.$$

Схема 3



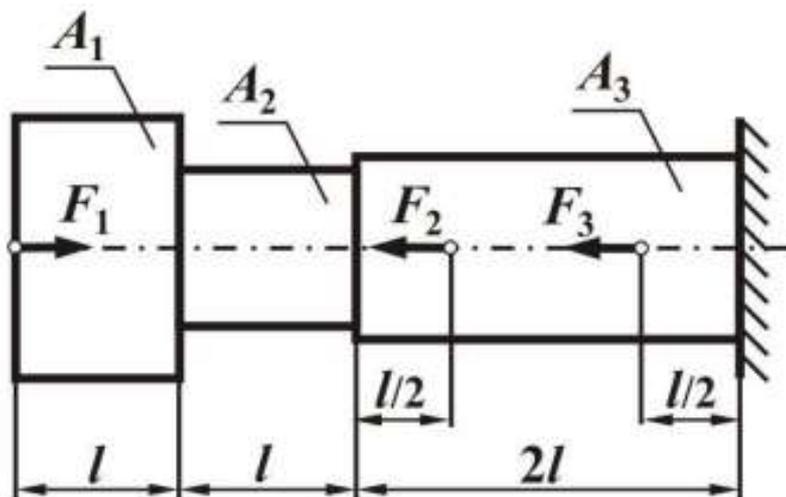
$$A_1 = 250 \text{ мм}^2, \quad A_2 = 100 \text{ мм}^2, \quad A_3 = 150 \text{ мм}^2.$$

Схема 4



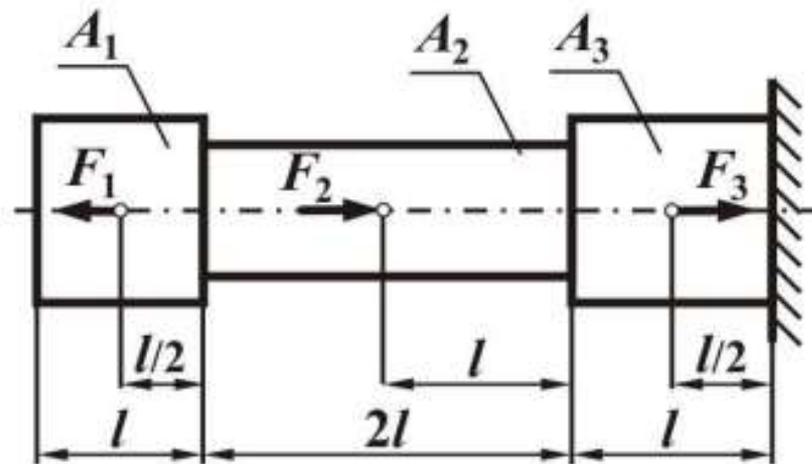
$$A_1 = 300 \text{ мм}^2, \quad A_2 = 150 \text{ мм}^2, \quad A_3 = 200 \text{ мм}^2.$$

Схема 5



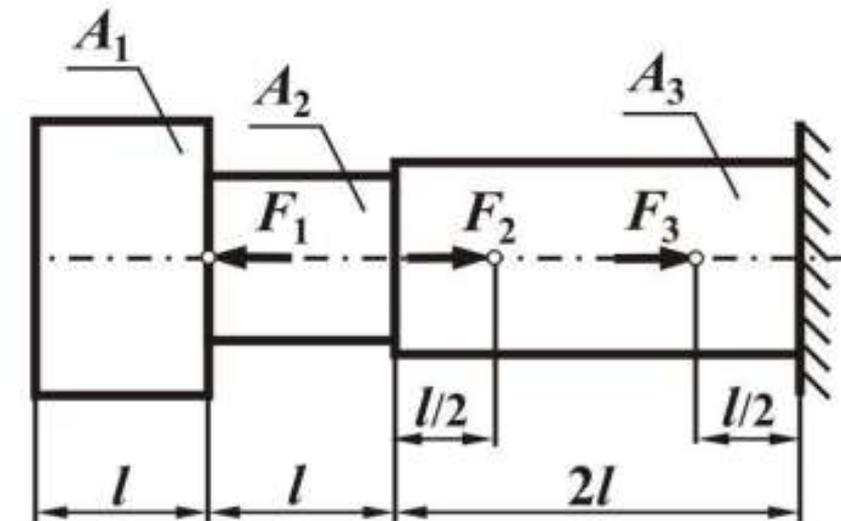
$$A_1 = 300 \text{ мм}^2, \quad A_2 = 150 \text{ мм}^2, \quad A_3 = 200 \text{ мм}^2.$$

Схема 6



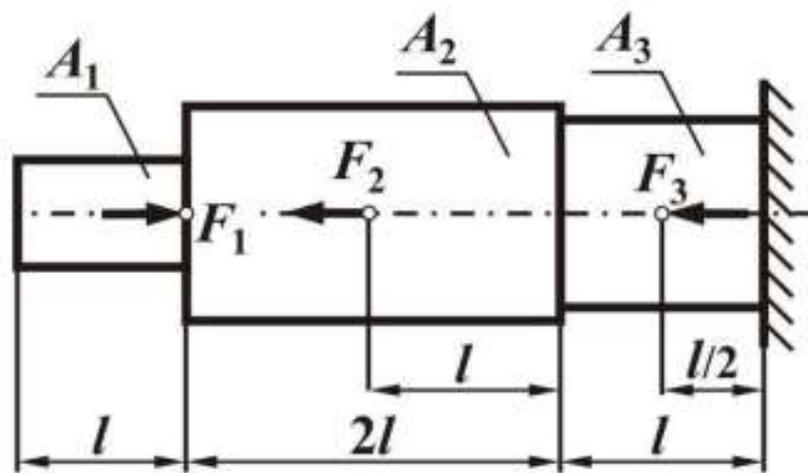
$$A_1 = 200 \text{ мм}^2, \quad A_2 = 100 \text{ мм}^2, \quad A_3 = 200 \text{ мм}^2.$$

Схема 7



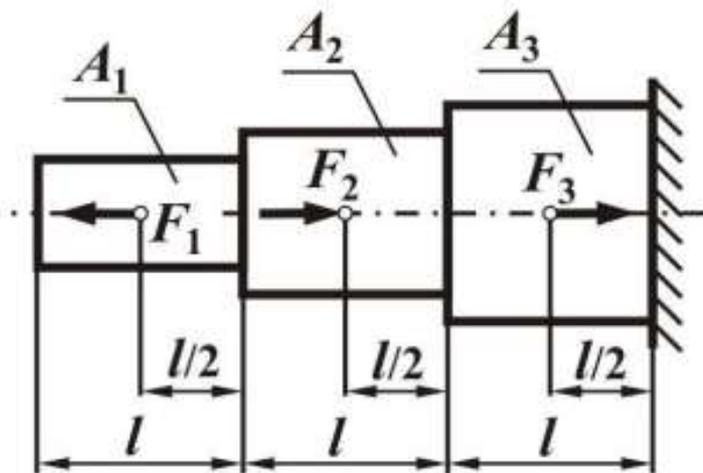
$A_1 = 250 \text{ мм}^2, A_2 = 100 \text{ мм}^2, A_3 = 150 \text{ мм}^2.$

Схема 8



$A_1 = 100 \text{ мм}^2, A_2 = 300 \text{ мм}^2, A_3 = 250 \text{ мм}^2.$

Схема 9



$A_1 = 100 \text{ мм}^2, A_2 = 200 \text{ мм}^2, A_3 = 300 \text{ мм}^2.$

Схема 0

$A_1 = 100 \text{ мм}^2;$
 $A_2 = 200 \text{ мм}^2;$
 $A_3 = 300 \text{ мм}^2.$

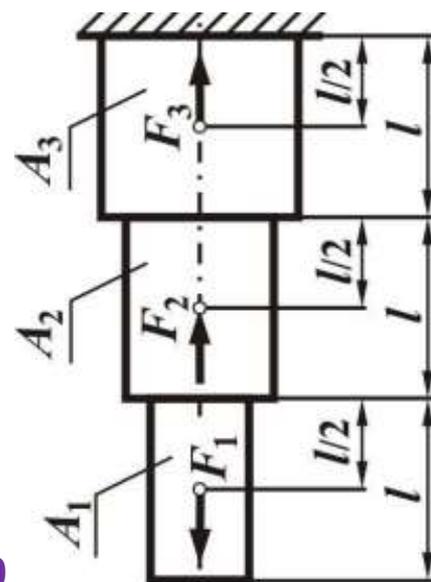


Схема 0

$\mu_l = 1 \text{ мм/мм};$

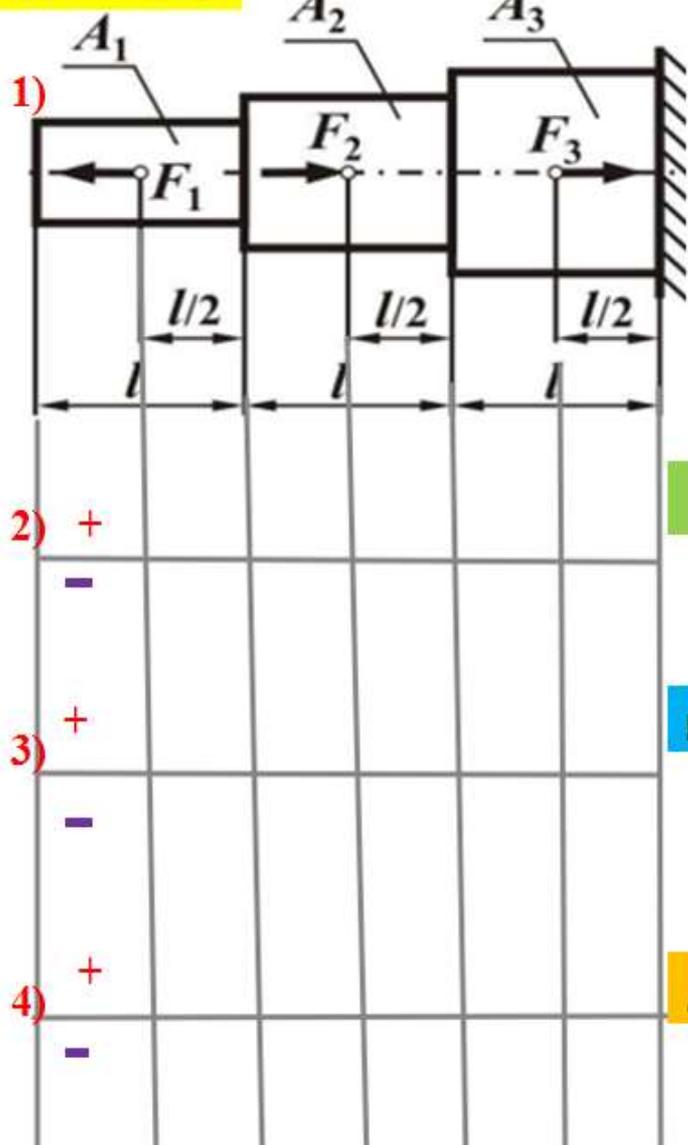


Схема 0

$A_1 = 100 \text{ мм}^2;$
 $A_2 = 200 \text{ мм}^2;$
 $A_3 = 300 \text{ мм}^2$

- 1) схема нагрузки бруса $\mu_l \approx 50 \text{ мм/мм};$
- 2) эпюры внутренних сил N (Н) $\mu_N \approx 1 \dots 2 \text{ кН/мм};$
- 3) эпюры напряжений σ (МПа) $\mu_\sigma = __\text{ МПа/мм};$
- 4) эпюры перемещений δ (мм) $\mu_\delta = __\text{ мм/мм};$
 $(\mu_\delta \approx 0,001 \dots 0,02 \text{ мм/мм}).$

Схема 0

$A_1 = 100 \text{ мм}^2;$
 $A_2 = 200 \text{ мм}^2;$
 $A_3 = 300 \text{ мм}^2.$

$F_1 = 10 \dots 55 \text{ кН};$
 $F_2 = 10 \dots 55 \text{ кН};$
 $F_3 = 20 \dots 45 \text{ кН};$

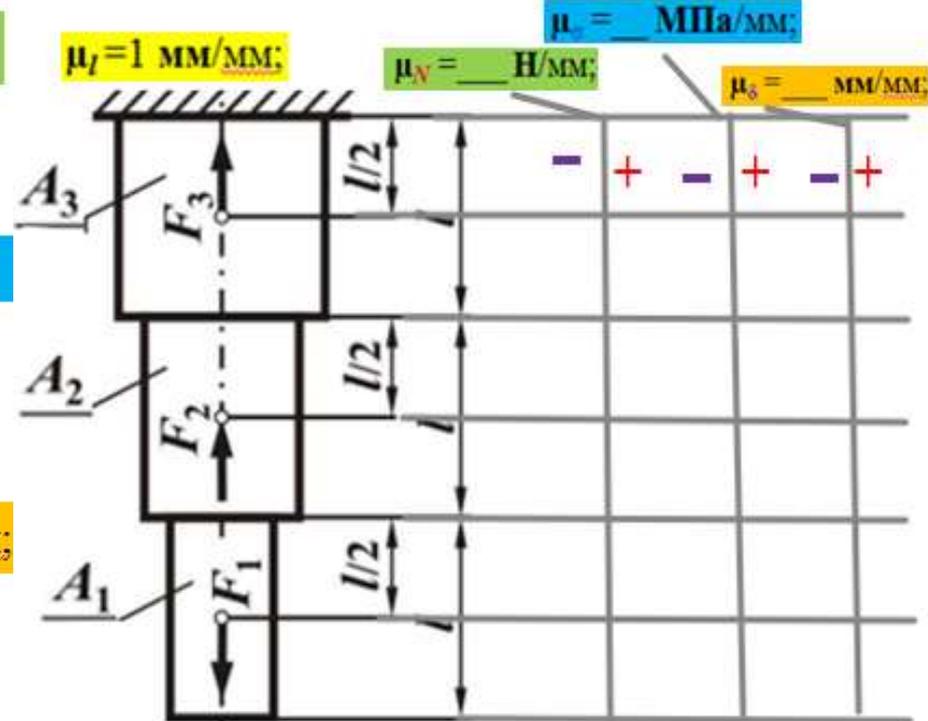
$\mu_N = __\text{ Н/мм};$

$\mu_l = 1 \text{ мм/мм};$

$\mu_\sigma = __\text{ МПа/мм};$

$\mu_N = __\text{ Н/мм};$

$\mu_\delta = __\text{ мм/мм};$



Кручение. Практика 12. Сопромат 3

В конце презентации ИДЗ-3.2

3.6.11 Кручение. Практика 12

1. Для определения **крутящих моментов** T_k в сечениях вала (возникающих под действием внешних **скручивающих моментов** или **поперечной нагрузки**) применяют **метод сечений**. Сделаем мысленный разрез стержня (рис. 3.26 а), например по ***a-a***, ***отбросим*** одну часть стержня (в данном случае – ***левую***) и рассмотрим **равновесие оставшейся правой части** (рис. 3.26 д). Взаимодействие частей стержня заменим **крутящим моментом** T_k , уравнивающим **внешний момент** T . Для **равновесия** отсеченной части необходимо, чтобы алгебраическая сумма всех моментов, действующих на нее, была равна **нулю**. Отсюда в рассматриваемом случае получим, что: $T_k = T$.

Если на отсеченную часть будет действовать несколько **внешних моментов**, то **крутящий момент** в сечении численно равен алгебраической сумме **внешних скручивающих моментов**, действующих **по одну сторону** от сечения. Для наглядного представления о **характере распределения** и величине **крутящих моментов** по длине стержня строят **эпюры (графики)** **этих моментов** (аналогично построению эпюр продольных сил при растяжении или сжатии). **Общепринятого правила знаков для крутящих моментов не существует**. Может быть принято любое правило знаков, но **это принятое правило выдержать на всем протяжении эпюры**. Примем следующее правило знаков. Крутящий момент в сечении ***a-a*** считается **положительным**, когда **внешний момент** вращает **отсеченную часть против часовой стрелки**, если смотреть на **отсеченную часть со стороны сечения** (рис. 3.27 а). Если же внешний момент вращает отсеченную часть **по часовой стрелке** (при взгляде **со стороны сечения**), то крутящий момент в сечении будем считать **отрицательным** (рис. 3.27 б).

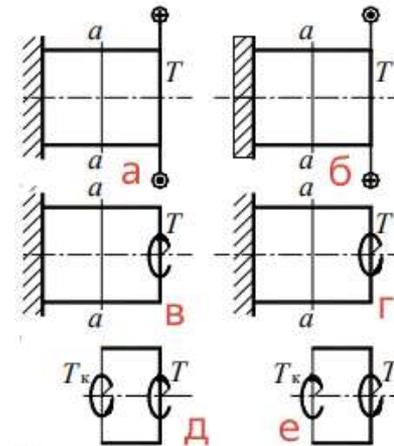


Рис. 3.26. Обозначение крутящих моментов

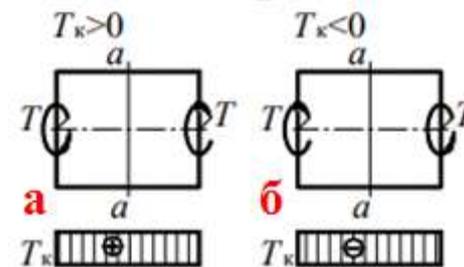


Рис. 3.27. Эпюры крутящих моментов 12

3.6.11 Кручение Практика12 (продолжение 1)

Вал CD опирается на подшипники **B** и **A** и находится в равновесии под действием приложенных к нему в сечениях **E**, **K** и **L** **крутящих моментов** (рис. 3.28).

Сделав сечение **a-a** где-либо на участке **DL** и рассмотрев равновесие **правой** отсеченной части, убедимся, что $T_K=0$. Если мы сделаем затем сечение **b-b** в любом месте участка **LK**, то из условия равновесия **правой от сечения** части получим $T_K=2$ кН·м. Момент считаем **положительным** в соответствии с принятым правилом знаков. В сечение **c-c** на участке **KE** из условия равновесия **правой** части, получаем: $2 - 3 - T_K=0$, откуда: $T_K=1$ кН·м. Получившаяся эпюра имеет форму двух прямоугольников.

Важно заметить, что в местах приложения **внешних моментов** ординаты **эпюры скачкообразно** изменяются на величину **приложенного здесь внешнего момента**. Если заданы **поперечные нагрузки**, вызывающие **кручение** стержня (рис. 3.25 б), то **предварительно** вычисляют **внешние скручивающие моменты**, создаваемые этими силами.

При наличии **внешнего крутящего момента** от силы **F** предварительно рассчитывают его величину: $T_K = F \cdot r$ (рис. 3.25 б).

После их определения **определяют внутренние крутящие моменты** и строят **эпюры**.

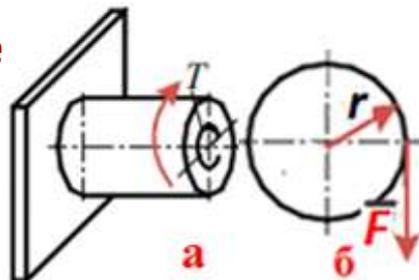


Рис. 3.25. Крутящие моменты

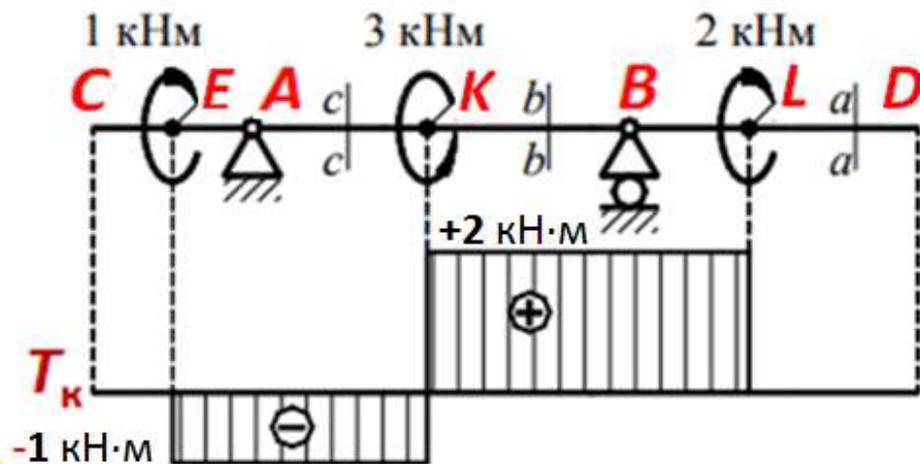


Рис. 3.28. Построение **эпюр** крутящих моментов

3.6.11 Кручение Практика12 (продолжение 2)

2. Определение напряжений в стержнях круглого сечения

Крутящие моменты представляют лишь **равнодействующие** внутренние **усилия**. Фактически в **поперечном сечении** скручиваемого стержня действуют **непрерывно распределенные** внутренние **касательные напряжения**. Если на поверхности стержня **круглого сечения** нанести **прямоугольную сетку** (рис. 3.29, а), то после деформации (рис. 3.29, б) произойдет следующее:

1) прямоугольная сетка превратится в **сетку**, состоящую из **параллелограммов**, что свидетельствует о наличии **касательных напряжений** в **поперечных сечениях** бруса, а **по закону парности касательных напряжений** – и в **продольных** его **сечениях**;

2) расстояния между **окружностями**, например между **I** и **II**, **не изменятся**. **Не изменится** длина стержня и его диаметр.

Естественно допустить, что **каждое поперечное сечение поворачивается** в своей плоскости на **некоторый угол**, как жесткое целое (гипотеза **плоских** и жестких сечений). На основании этой гипотезы можно считать, что **радиусы окружностей KL** (сечение **I**), **MN** (сечение **II**) (рис. 3.29, а) **всех поперечных сечений** будут поворачиваться на **разные углы**, **оставаясь прямолинейными** (рис. 3.29, б и б: **MN** → **M'N'**).

Поэтому можно сделать **вывод** о том, что **при кручении** в **поперечных сечениях** стержня **действуют** только **касательные напряжения**, то есть **напряженное состояние** в **точках скручиваемого стержня** представляет собой **чистый сдвиг**.

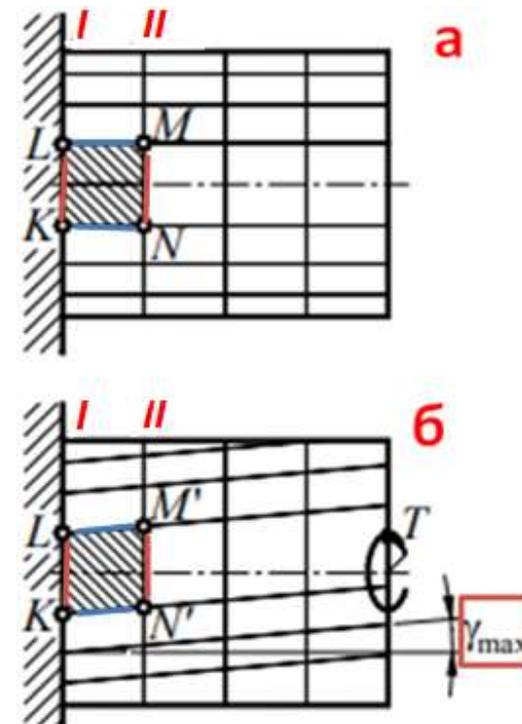


Рис. 3.29. Деформации при кручении

3.6.11 Кручение Практика12 (продолжение 3)

Формулы, полученные на основе этого допущения, подтверждаются опытами. Точка D переместится по дуге DD' , точка C – по меньшей дуге CC' (рис. 3.30). Для установления закона **распределения касательных напряжений** по **поперечному сечению** скручиваемого стержня рассмотрим более детально **деформации стержня** (рис. 3.29 и рис. 3.31). На рис. 3.31 в более крупном масштабе изображена часть стержня между сечениями I и II и показана **одна сторона KN** элемента $KLMN$ (рис. 3.29). **Угол сдвига γ** для элемента $KLMN$, лежащего на поверхности стержня, равен **отношению** отрезка NN' к длине элемента dx (рис. 3.31):

$$\gamma_{\max} = \frac{rd\varphi}{dx} \quad (7)$$

Выделяя мысленно из рассматриваемой части бруса цилиндр произвольного **радиуса ρ** и повторяя те же рассуждения, получим угол сдвига для элемента, отстоящего на **расстоянии ρ** от оси стержня:

На основании **закона Гука** $\gamma = \frac{\rho d\varphi}{dx}$ (8) при **сдвиге** имеем:

$$\tau = G\gamma = G\mu \frac{d\varphi}{dx} \quad (9)$$

При **кручении деформации сдвига** и **касательные напряжения прямо пропорциональны** расстоянию ρ от **центра тяжести** сечения.



Рис. 3.30. Эпюра τ при кручении

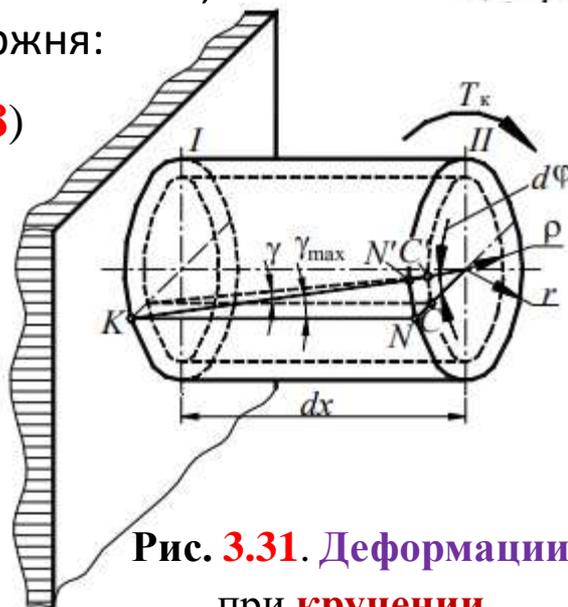


Рис. 3.31. Деформации при кручении

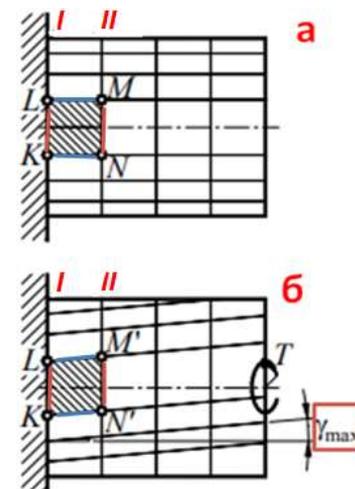


Рис. 3.29. Деформации при кручении

3.6.11 Кручение Практика12 (продолжение 4)

Эпюра касательных напряжений по поперечному сечению стержня представлена на рис. 3.30. В центре тяжести круглого сечения касательные напряжения равны нулю. Наибольшие касательные напряжения будут в точках сечения, расположенных у поверхности стержня. Зная закон распределения касательных напряжений, можно определить их величину из условия, что крутящий момент в сечении представляет собой равнодействующий момент касательных напряжений в сечении:

$$T_k = \int_A \tau \rho dA, \quad (10)$$

где $\tau \cdot \rho$ – элементарный крутящий момент внутренних сил, действующих по площадке dA . Подставив в (10) значение напряжений из формулы (9), получим:

$$T_k = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA. \quad (11)$$

Величина $\int \rho^2 \cdot dA$ называется полярным моментом инерции сечения и обозначается J_p .

Для круглого сплошного сечения: $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$. (12)

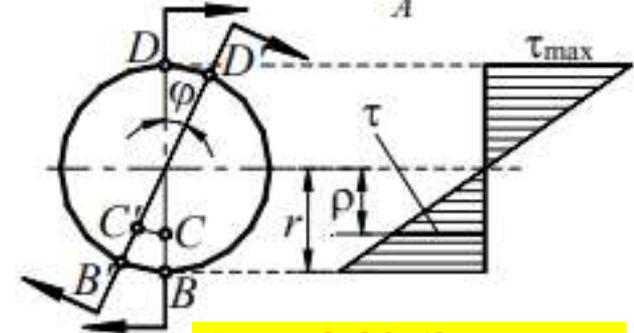


Рис. 3.30. Эпюра τ при кручении

В частном случае, когда на стержень действует один внешний скручивающий (крутящий) момент T (рис. 2.5.9), из условия равновесия отсеченной части стержня

$$\text{Тогда: } \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T_k}{GJ_p}. \quad (13)$$

получим: $T_k = T$. Окончательная формула для определения касательных напряжений при кручении имеет вид:

$$\tau = \frac{T_k \rho}{J_p}$$

в точках, одинаково удаленных от центра сечения, напряжения τ одинаковы.

$$\tau = G\gamma = G\mu \frac{d\varphi}{dx}. \quad (9)$$

3.6.11 Кручение Практика12 (продолжение 5)

Наибольшие напряжения в точках у контура сечения равны:

где $W_p = \frac{J_p}{r}$ называется **полярным моментом сопротивления** (W_p) или **моментом сопротивления при кручении**.

$$\tau_{\max} = \frac{T_k r}{J_p} = \frac{T_k}{W_p},$$

Для круглого сплошного сечения: $W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi d^4}{32d} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3.$

Для кольцевого сечения: $W_p = \frac{2J_p}{D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi D^3}{16}(1 - c^4) \approx 0,2D^3(1 - c^4)$
где $c = \frac{d}{D}.$

Условие **статической прочности вала при кручении** имеет вид: $\tau_{\max} = \frac{T_k}{W_p} \leq \tau_p,$
где τ_p – **допускаемое касательное напряжение**.

При действии **статической нагрузки** принимают (без учета концентрации напряжений и других факторов, **снижающих прочность**) $\tau_p = (0,5 - 0,6) \sigma_{pp}.$

Кроме проверки прочности, по этой формуле можно также **подбирать диаметр вала** или **определять допускаемый крутящий момент** при известных остальных величинах. Так как для круглого сплошного сечения: $W_p \approx 0,2 \cdot d^3$, отсюда $d = \sqrt[3]{\frac{T_k}{0,2\tau_p}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{T_k}{\tau_p}}$

Допускаемый из условия прочности **крутящий момент**: $T_{кр} = W_p \cdot \tau_p.$

Деформации и перемещения при кручении валов

Для вычисления деформаций вала при кручении воспользуемся формулой: $d\varphi = \frac{T_k dx}{GJ_p}$

Деформация вала на длине x (взаимный угол поворота сечений) равна: $\varphi = \int_0^x \frac{T_k dx}{GJ_p}$

Если крутящий момент T_k и величина GJ_p , называемая жесткостью вала при кручении, постоянны на всем участке интегрирования, то угол поворота сечений: $\varphi = \frac{T_k x}{GJ_p}$

Аналогично, для вала длиной l получим: $\varphi = \frac{T_k l}{GJ_p}$

Эта формула по своей структуре аналогична формуле для определения деформаций при растяжении-сжатии. Угол закручивания, приходящийся на единицу длины, называют относительным углом закручивания. Он равен:

$$\psi = \frac{\varphi}{l} = \frac{T_k}{GJ_p}$$

Для обеспечения требуемой жесткости вала необходимо, чтобы наибольший относительный угол закручивания θ не превосходил допустимого значения ψ_p :

ψ_p – допустимый относительный угол закручивания в радианах на единицу длины вала.

$$\psi = \frac{\varphi}{l} = \frac{T_k}{GJ_p} \leq \psi_p$$

Эта формула выражает условие жесткости вала при кручении. В большинстве случаев допустимый относительный угол закручивания задают в градусах на 1 м длины, тогда получим

$$\psi = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{T_k}{GJ_p} \leq \psi_p$$

3.6.11 Кручение Практика12 (продолжение 7)

Угол ψ_p выбирают в зависимости от назначения вала и его размеров. Для валов средних размеров рекомендуется принимать **допускаемый относительный угол закручивания** ψ_p равным $0,5^\circ$ на 1 м длины. Можно определить **диаметр вала** по **заданной жесткости**. Учитывая, что: $J_p \approx 0,1 \cdot d^4$, получим:

$$d = \sqrt[4]{\frac{180^\circ T_k}{\pi G 0,1 \psi_p}}$$

Построение **эпюр** **угловых перемещений** при кручении

Строим эпюру **крутящих моментов** T в масштабе μ_T (Н·м/мм) (рис. 3.32, б). Если имеется вал, у которого нет неподвижных сечений, то для построения **эпюры угловых перемещений** принимают какое-либо сечение за **условно неподвижное**. Примем **сечение** в точке A за **условно неподвижное**. Определим угол поворота **сечения** B по отношению к **сечению** A . Из формулы **угла поворота сечений** φ :

$$\varphi = \frac{T_k l}{G J_p}$$

где T_{BA} – крутящий момент на участке BA (Н·м);

l_{AB} – длина участка AB (м); G – модуль сдвига (МПа) (модуль упругости второго рода, модуль жёсткости). Для **стали** $G = 8 \cdot 10^4$ МПа = 80 ГПа;

J_p – **полярный момент инерции сечения** (м⁴).

Для сплошного вала $J_p = (\pi \cdot d^4) / 32$.

Строим эпюру **углов закручивания** φ (рис. 3.32, в).

Примем правило знаков для углов поворота **сечений** φ : углы φ **положительные**, когда

сечение поворачивается (если смотреть вдоль оси **слева направо**) **против часовой стрелки**. В данном случае угол φ_{BA} будет **положительным** {смотреть от a }.

Получим:
$$\varphi_{BA} = \frac{T_{BA} l_{AB}}{G J_p}$$

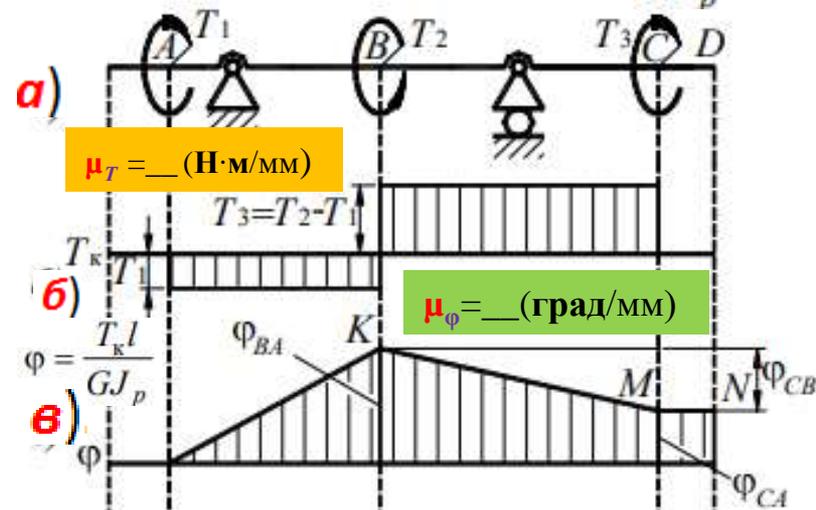


Рис. 3.32. Эпюры при кручении

3.6.11 Кручение Практика12 (продолжение 8)

В принятом **масштабе μ_φ** (град/мм) отложим ординату φ_{BA} (рис. 3.32, в). Полученную точку K , соединяем прямой с точкой E , так как на участке AB **углы** изменяются по **закону прямой линии**, в которую абсцисса сечения i (z) входит в первой степени). Вычислим теперь **угол поворота сечения C по отношению к сечению B** . Учитывая принятое **правило знаков** для углов закручивания, получаем φ_{CB} со знаком **минус**:
$$\varphi_{CB} = -\frac{T_{BC}l_{BC}}{GJ_p}$$
.

Так как сечение B **не неподвижное**, то **угол поворота сечения C по отношению к сечению A** равен:

$$\varphi_{CA} = \varphi_{CB} + \varphi_{BA} = -\frac{T_{BC}l_{BC}}{GJ_p} + \varphi_{BA}.$$

Угол закручивания φ_{CA} может получиться **положительным**, **отрицательным** и, в **частном случае**, равным **нулю**. **Предположим**, что в данном случае угол φ_{CA} получился **положительным**.

Тогда, **отложив эту величину** в принятом масштабе μ_φ **вверх** от оси эпюры φ , получим **точку M** . **Соединяя** точку M с **точкой K** , получим график углов закручивания φ на участке BC .

На участке CD скручивания **не происходит**, так как **крутящие моменты** на этом участке равны **нулю**, поэтому там **все сечения поворачиваются на столько же**, на сколько **поворачивается сечение C** .

Поэтому участок MN эпюры φ здесь **горизонтален**.

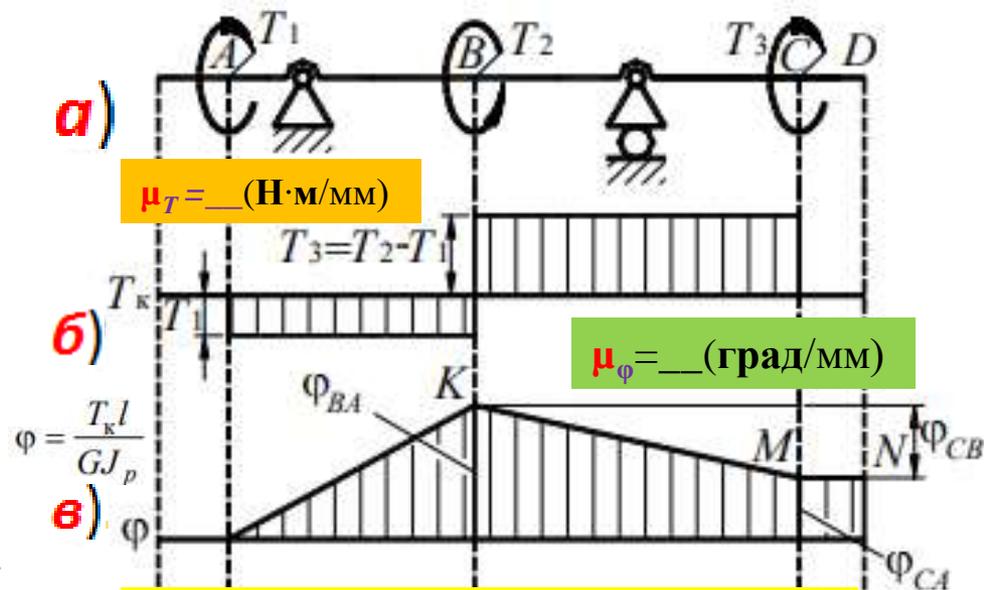


Рис. 3.32. Эпюры при кручении

3.6.11 Кручение Практика12 (продолжение 9)

Если за **неподвижное** принять сечение **B**, то эпюра **углов закручивания** будет иметь **другой** вид, представленный на **рис. 3.33, з)**.

Пример определения **требуемого** диаметра **стального** вала **длиной** l (м), вращающегося с **угловой скоростью** ω (рад/с), и передающего **мощность** P (Вт) ($1\text{Вт}=1[\text{Н}\cdot\text{м}]/\text{с}$). Допускаемое напряжение τ_p (Н/мм²). Допускаемый **угол закручивания** равен ψ_p (град). ($\varphi_{\max} < \psi_p$). **Модуль сдвига** материала вала равен G (МПа).

Крутящий момент T_k , передаваемый валом, определим по формуле: $T_k = P/\omega$.

Диаметр **сплошного** вала по **прочности на кручение** определяем по формуле:

$$d = \sqrt[3]{\frac{T_k}{0,2\tau_p}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{T_k}{\tau_p}}$$

Диаметр вала из условия **жесткости** определяем по формуле:

$$d = \sqrt[4]{\frac{180^\circ T_k}{\pi G 0,1 \psi_p}}$$

Для дальнейшего **проектирования** вала принимается **больший** из этих **двух** значений диаметра (**округленный** в **большую** сторону до стандартной величины).

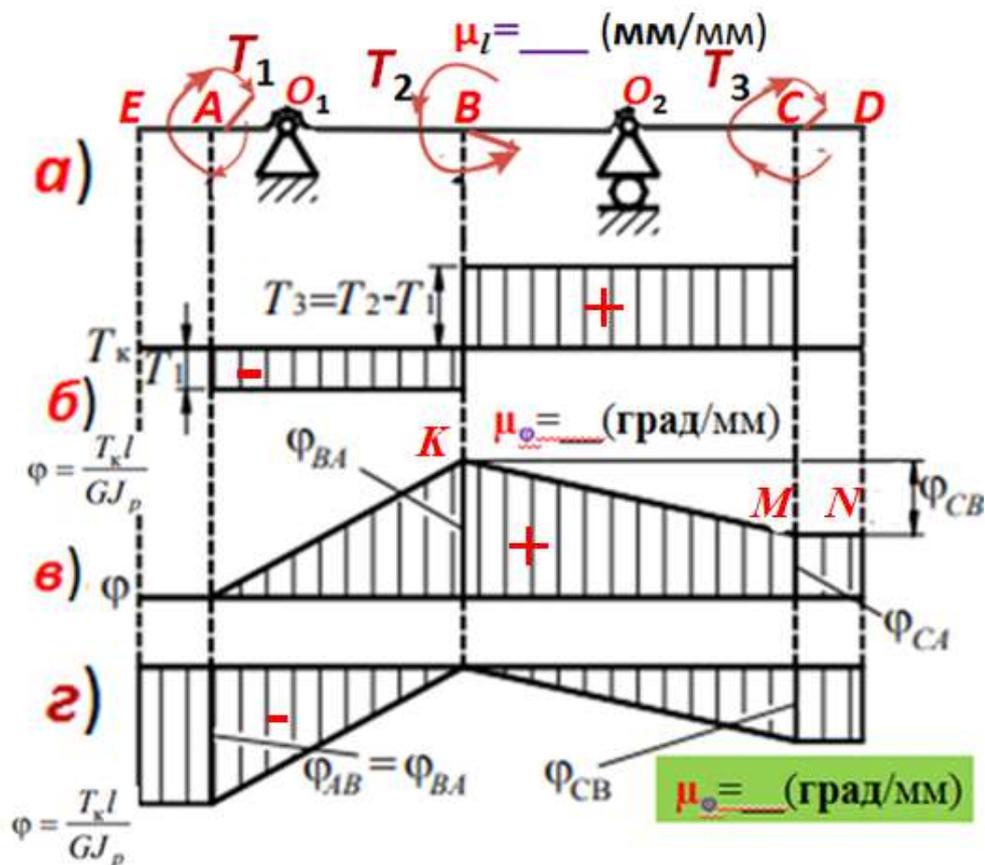


Рис. 3.33. Эпюры при кручении

3.6.11 Кручение Практика 12 (продолжение 10) (дубль продолжения 9)

Пример определения **требуемого** диаметра **стального** вала **длиной** l (м), вращающегося с **угловой скоростью** ω (рад/с), или n (об/мин), и передающего **мощность** P (Вт), или N (1Вт=1[Н·м]/с). Допускаемое напряжение τ_p (Н/мм²). Допускаемый **угол закручивания** равен ψ_p (град). ($\phi_{\max} < \psi_p$). **Модуль сдвига** материала вала равен G (МПа). Для стали $G=8 \cdot 10^4$ МПа=80 Гпа.

Крутящий момент T_k , передаваемый валом: $T_k = P/\omega$ (Н·м).

$$M_k(\text{Н}\cdot\text{м}) = \frac{30}{\pi} \frac{N(\text{Вт})}{n(\text{об}/\text{мин})} = 9,55 \frac{N}{n}$$

$$1 \text{ л.с.} = 75 \frac{\text{кГМ}}{\text{сек}} \approx 750 \frac{\text{НМ}}{\text{сек}} = 750 \text{ Вт}$$

Диаметр **сплошного** вала на **кручение** определяем по формуле:

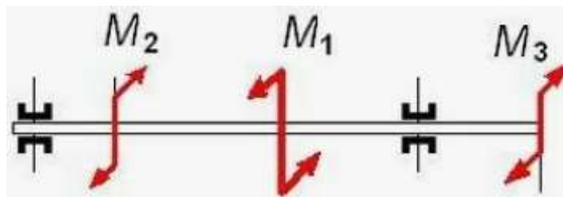
$$1 \text{ л.с.} = 75 \frac{\text{кГМ}}{\text{сек}} \approx 750 \frac{\text{НМ}}{\text{сек}} = 750 \text{ Вт} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{T_k}{\tau_p}}$$

Диаметр вала из условия **жесткости** определяем по формуле:

$$d = 4 \sqrt[4]{\frac{180^\circ T_k}{\pi G 0,1 \psi_p}}$$

Для дальнейшего **проектирования** вала принимается **больший** из этих **двух** значений диаметра (**округленный** в **большую** сторону до **стандартной** величины).

$$\text{Мощность } N = \frac{A}{t} \left[\frac{\text{работа}}{\text{время}} \right]$$



Пример 1. К стальному валу постоянного поперечного сечения приложены **четыре внешних скручивающих момента M_i** (рис. 11.1):

$$G = 0,8 \cdot 10^4 \text{ кН} / \text{см}^2$$

Длины участков стержня:

$$M_1 = 1,5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2 = 5,5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad a = 1,5 \text{ м}; \quad b = 1,5 \text{ м}; \quad c = 1,5 \text{ м}; \quad d = 1,5 \text{ м}.$$

$$M_3 = 3,2 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_4 = 1,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Требуется: построить эпюру крутящих моментов, определить диаметр вала при $\tau_p = [\tau] = 8 \text{ кН} / \text{см}^2$ ($0,08 \text{ кН} / \text{мм}^2 = 80 \text{ Н} / \text{мм}^2 = 80 \text{ МПа}$) и построить **эпюру углов закручивания** поперечных сечений вала.

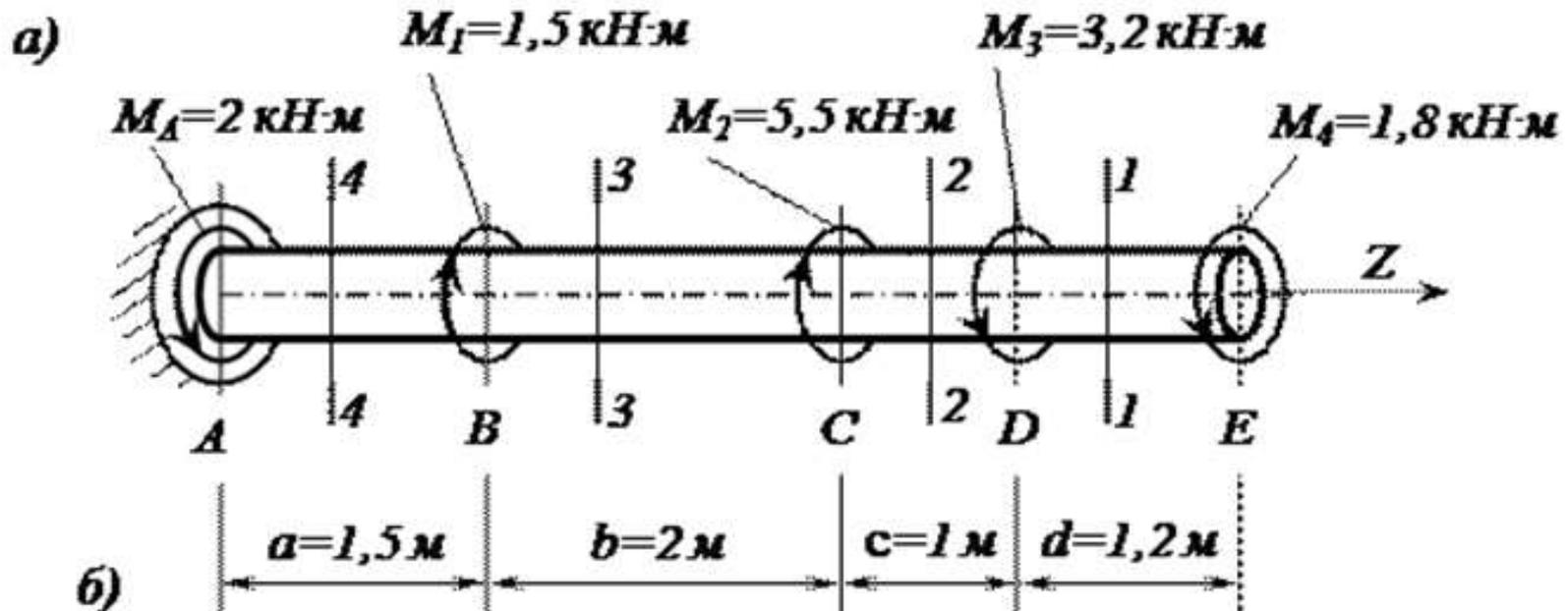


Рис. 11.1. Схема нагрузки стального вала

3.6.11 Кручение Практика 12 (продолжение 12)

Крутящий момент в сечении (в точке A это M_A , в точке D это $M_D = M_3$) считается **положительным**, когда **внешний момент** вращает **отсеченную часть против часовой стрелки**, если смотреть на отсеченную часть **со стороны сечения**

1) Определяем момент сил в заделке: $M_A - M_1 - M_2 + M_3 + M_4 = 0$.

$$M_A = M_1 + M_2 - M_3 - M_4 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

2) Сечение 1-1: $T_1 + M_4 = 0$ $T_1 = -M_4 = -1,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$

3) Сечение 2-2:

$$T_2 + M_4 + M_3 = 0 \quad T_2 = -M_4 - M_3 = -5,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

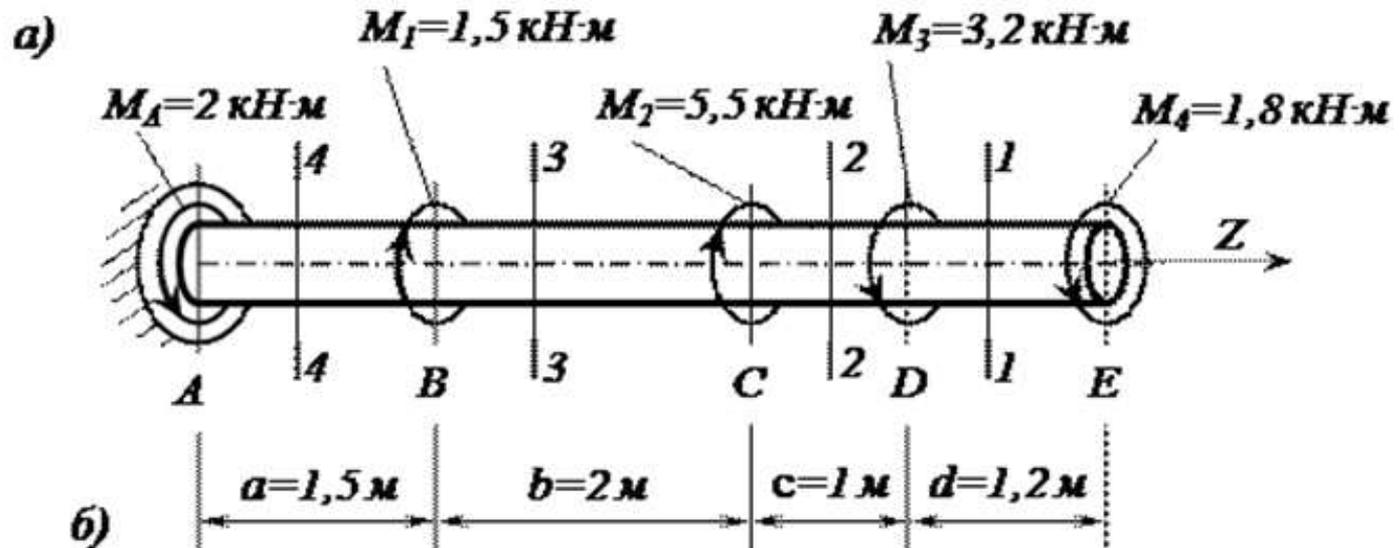


Рис. 11.1. Схема нагрузки стального вала

4) Сечение 3-3 : $T_3 + M_4 + M_3 - M_2 = 0$
 $T_3 = -M_4 - M_3 + M_2 = 0,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$

5) Сечение 4-4 (рассматриваем *левую* часть): $T_4 - M_A = 0$
 $T_4 = M_A = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$

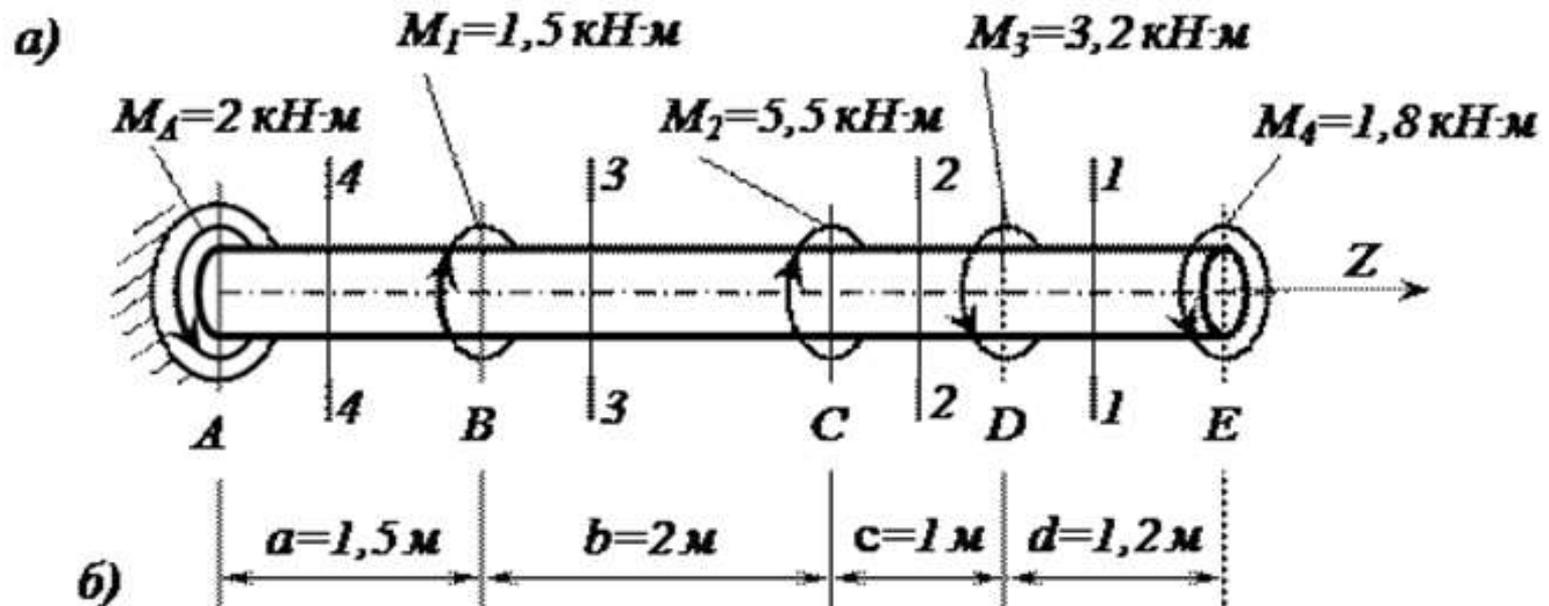


Рис. 11.1. Схема нагрузки стального вала

б) Построение **эпюр крутящих моментов** в поперечных сечениях вала. Крутящий момент в сечении *a-a* считается **положительным**, когда **внешний момент** вращает **отсеченную часть против часовой стрелки**, если смотреть на отсеченную часть **со стороны сечения**

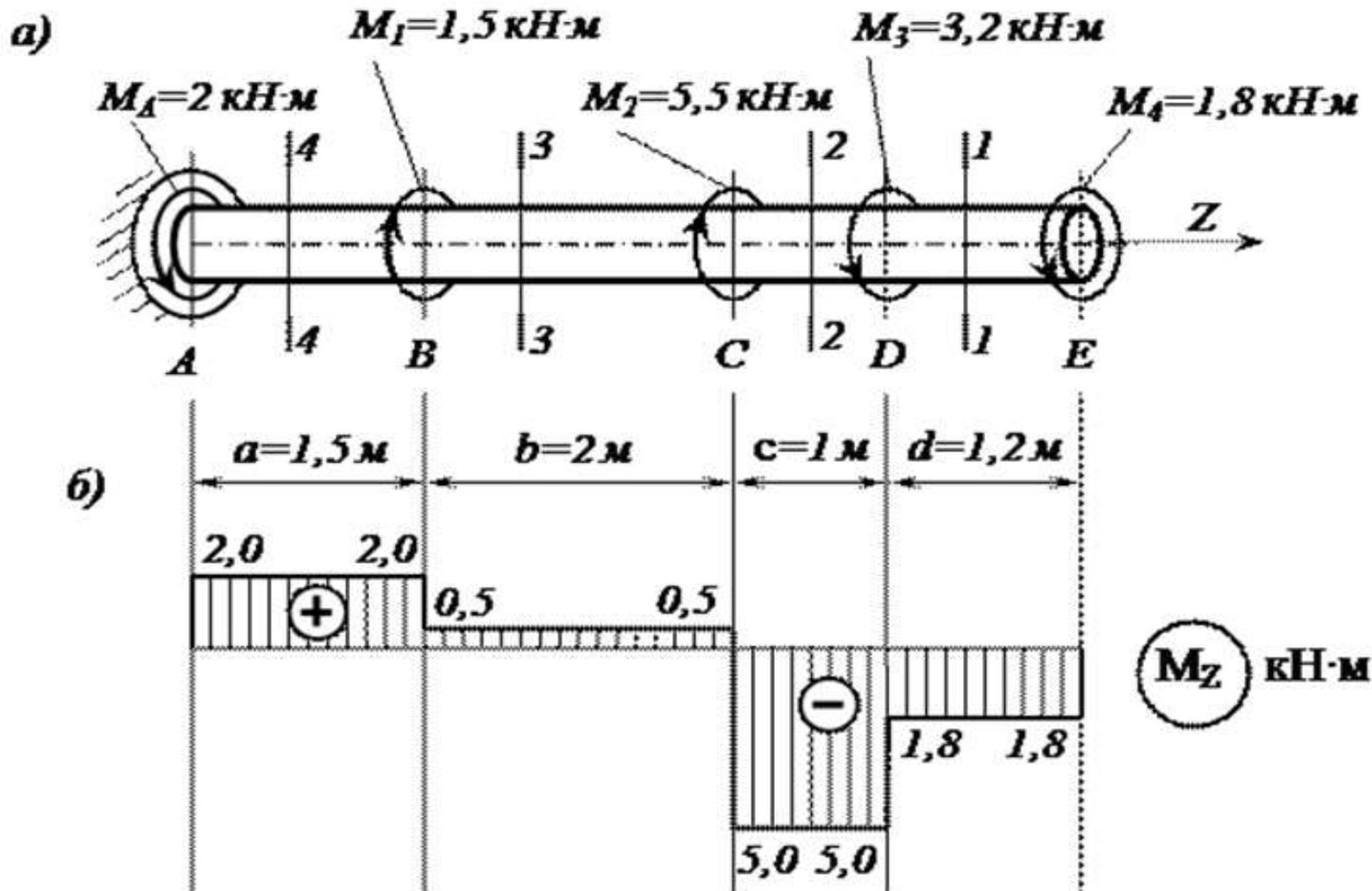


Рис. 11.2. Эпюры крутящих моментов в поперечных сечениях вала

7) Определим диаметр вала из условия прочности: $\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau]$

8) Полярный момент сопротивления: $W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3$

9) Наибольший крутящий момент в примере: $T_{\max} = T_2 = 500 \text{ кН} \cdot \text{см}$

10) Требуемый диаметр вала: $d_{\text{треб}} \geq \sqrt[3]{\frac{T_2}{0,2[\tau]}} = 6,79 \text{ см}$

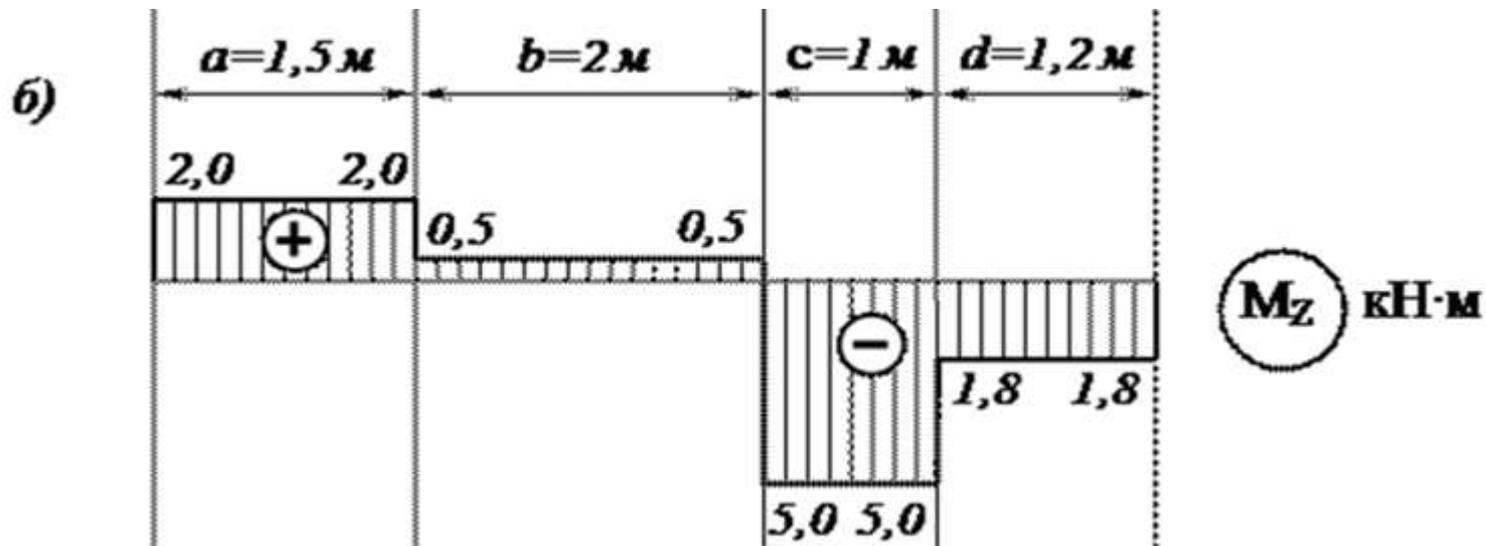


Рис. 11.2. Эпюры крутящих моментов в поперечных сечениях вала

3.6.11 Кручение Практика 12 (продолжение 16)

11) Стандартные диаметры валов: 6...8, 8...10, 10...12, 12...17, 17...22, 22...30, 30...38, 38...44, 44...50, 50...58, 58...65, 65...75, 75...85, 85...95, 95...110 мм.

12) Округляем **требуемый** диаметр вала $d_{\text{треб}} = 67,9$ мм. до стандартного значения: $d_{\text{прин}} = 75$ мм.

Определение углов закручивания:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4$$

13) Полярный момент инерции для круглого сечения:

14) Расчёт крутильной жесткости (с учётом, что во всех сечениях **диаметр одинаков**):

$$GJ_p = 192 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{см}^2$$

15) Расчёт углов закручивания на участках:

15.1) на **участке AB**

$$\varphi_{AB} = \frac{T_4 a}{GJ_p} = \frac{200 \cdot 150}{192 \cdot 10^4} = 0,0156 \text{ рад}$$

15.2) на **участке BC**

$$\varphi_{BC} = \frac{T_3 b}{GJ_p} = \frac{50 \cdot 200}{192 \cdot 10^4} = 0,0052 \text{ рад}$$

15.3) на **участке CD**

$$\varphi_{CD} = \frac{T_2 c}{GJ_p} = \frac{-500 \cdot 100}{192 \cdot 10^4} = -0,0260 \text{ рад}$$

15.4) на **участке DE**

$$\varphi_{DE} = \frac{T_1 d}{GJ_p} = \frac{-180 \cdot 120}{192 \cdot 10^4} = -0,0113 \text{ рад}$$

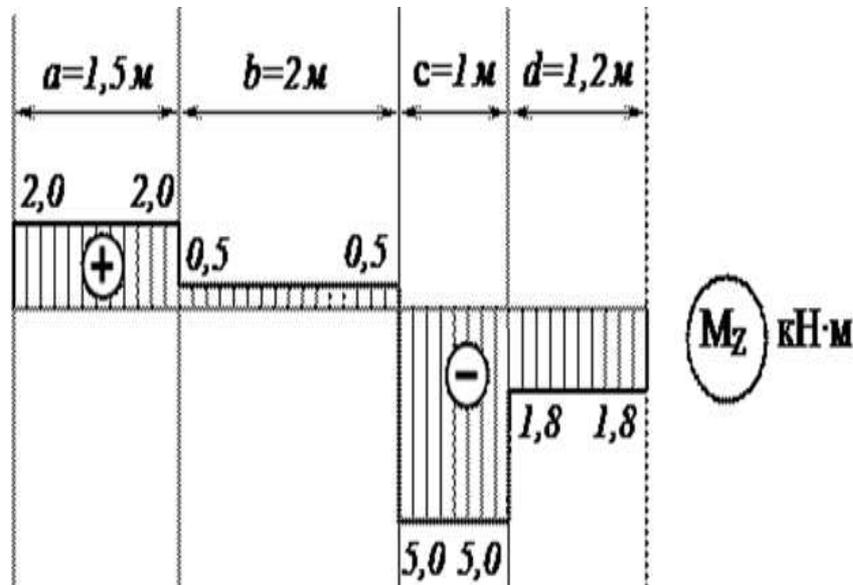


Рис. 11.2. Эпюры крутящих моментов

15.5) Угол закручивания в заделке равен нулю: $\varphi_A = 0$.

Поэтому:

$$\varphi_B = \varphi_A + \varphi_{AB} = 0 + 0,0156 = 0,0156 \text{ рад}$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \varphi_{BC} = 0,0156 + 0,0052 = 0,0208 \text{ рад}$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \varphi_{CD} = 0,0208 - 0,0260 = -0,0052 \text{ рад}$$

$$\varphi_E = \varphi_D + \varphi_{DE} = -0,0052 - 0,0113 = -0,0165 \text{ рад}$$

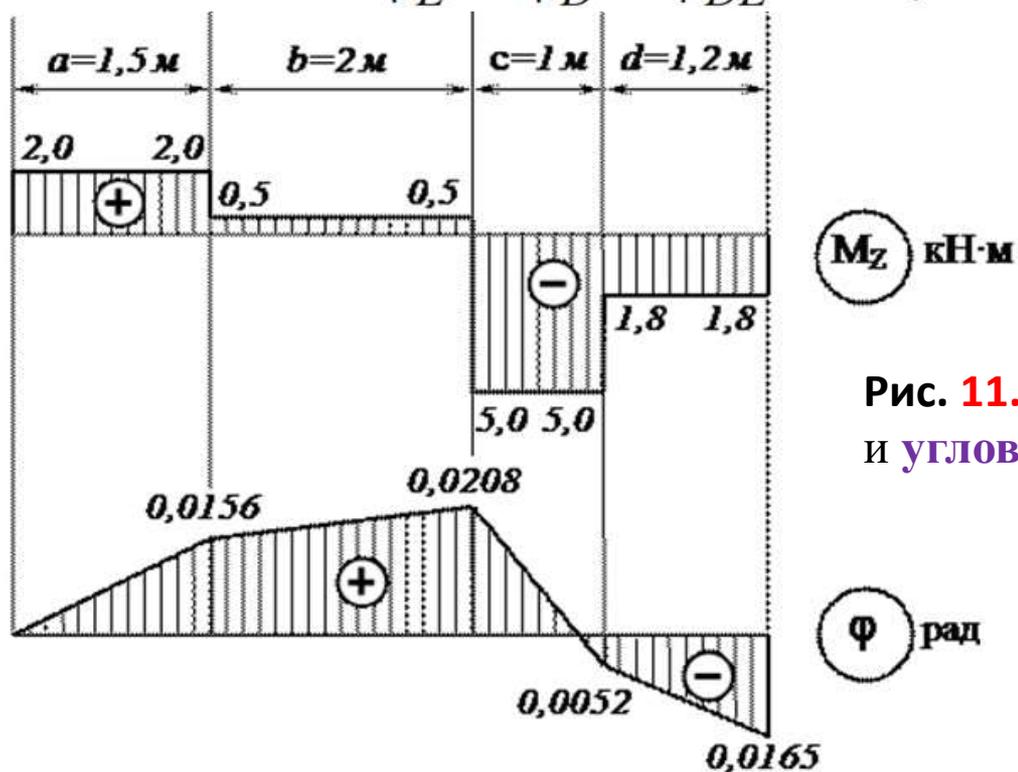


Рис. 11.3. Эпюры крутящих моментов и углов закручивания

15) Условие жесткости: $\varphi_{\max} = \frac{T_{\max} l}{GJ_p} \leq [\varphi]$ GJ_p - крутильная жесткость

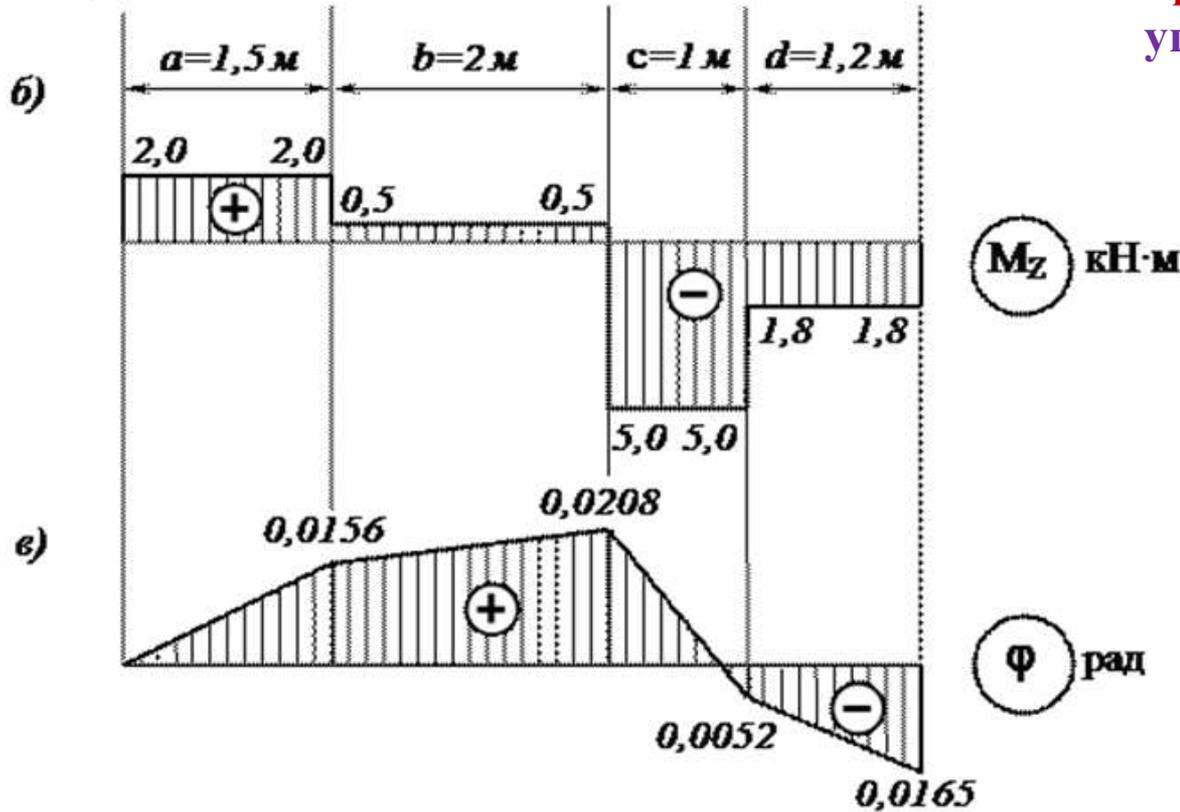
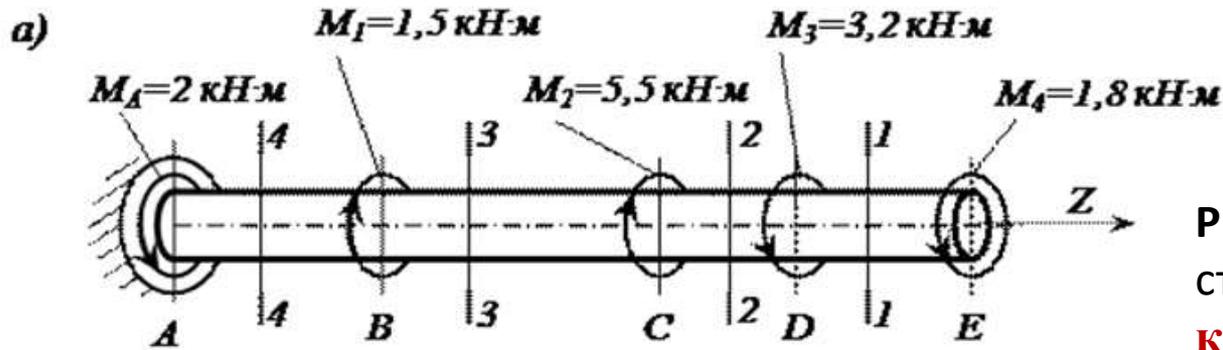


Рис. 11.4. Схема нагрузки стального вала (а), **эпюры крутящих моментов (б)** и **углов закручивания (в)**

3.6.11 Кручение Практика 12 (продолжение 19) ИДЗ-3.2

Условие задачи на кручение "круглого" стержня . Жестко заземленный одним концом стальной стержень (модуль сдвига $G=0,8\text{кН/см}^2$) круглого поперечного сечения скручивается четырьмя моментами M_i . **Требуется** построить эпюру крутящих моментов и определить диаметр вала при $[\tau]=8\text{кН/см}^2$ (80 МПа) и построить эпюру углов закручивания поперечных сечений стержня.

Таблица 1. № варианта по **предпоследней** цифре зачётной книжки

Номер варианта	$M_1,$ кН·м	$M_2,$ кН·м	$M_3,$ кН·м	$M_4,$ кН·м	a, м	b, м	c, м	d, м
1	1,0	2,0	1,0	1,0	1,0	1,2	1,4	1,6
2	1,0	2,0	1,0	0,8	1,2	1,4	1,6	1,9
3	2,0	4,0	1,0	1,0	1,4	1,6	1,0	1,2
4	3,0	5,0	1,6	1,4	1,6	1,0	1,2	1,4
5	4,0	6,0	1,8	1,4	1,1	1,1	1,8	1,5
6	2,0	4,0	1,2	1,2	1,3	1,3	1,5	1,1
7	2,0	3,0	1,2	1,0	1,5	1,5	1,3	1,3
8	3,0	4,0	1,0	1,0	1,7	1,7	1,5	1,4
9	4,0	5,0	1,8	1,6	1,9	1,9	1,7	1,3
0	5,0	6,0	2,0	1,6	1,2	1,4	1,4	1,2

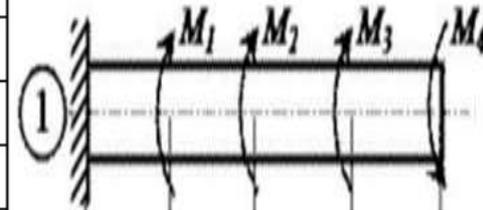
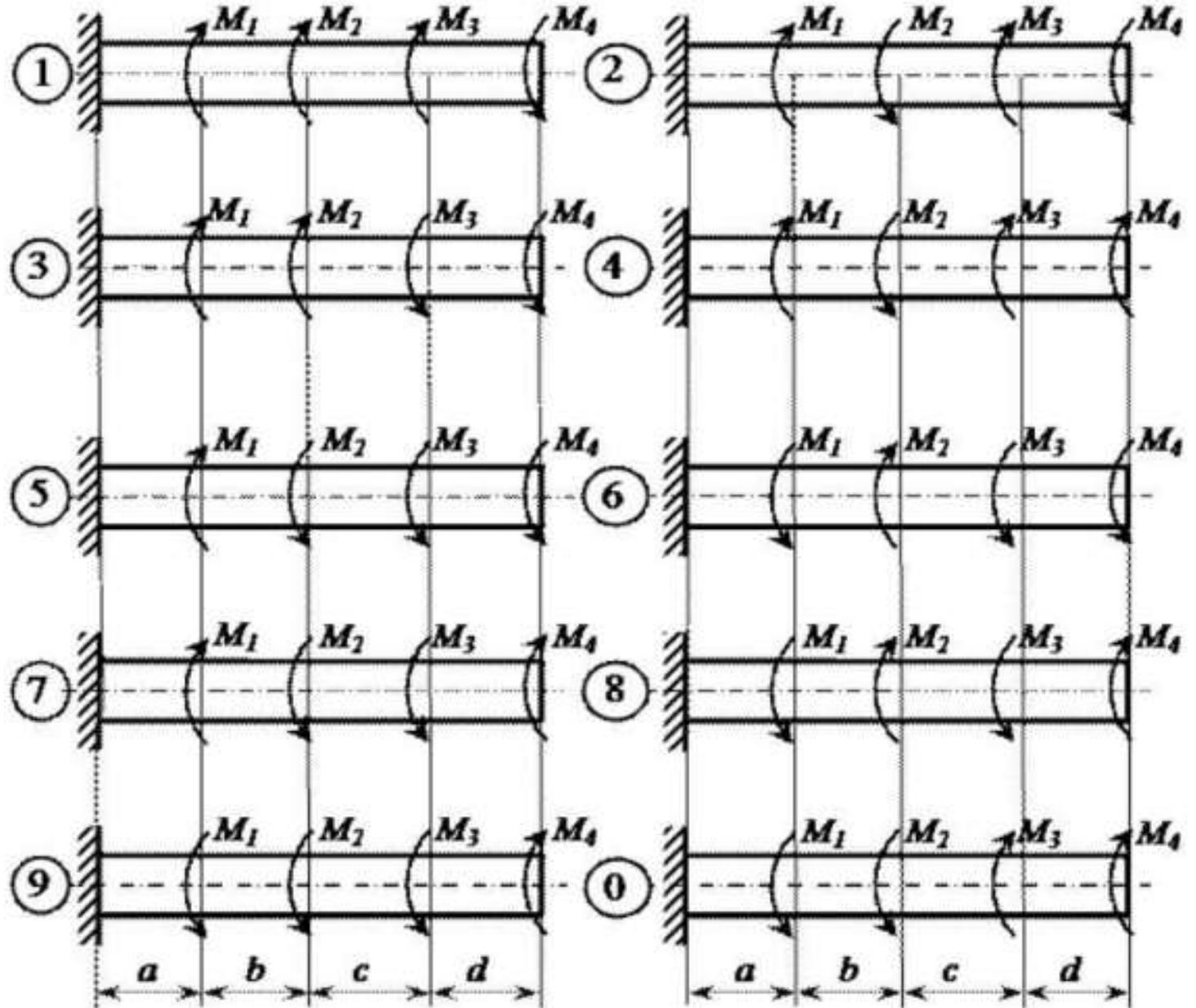


Таблица 2. № варианта по **последней** цифре зачётной книжки

Значительное количество деталей в процессе работы подвергаются воздействию **нагрузки, перпендикулярной к продольной оси**, или **внешних пар**, действующих в **плоскости, проходящей через указанную ось** (рис. 3.34). При этом в поперечных сечениях деталей или их элементов возникают **изгибающие моменты**, то есть внутренние моменты, действующие в **плоскости, перпендикулярной к плоскости поперечного сечения**. Такой вид нагружения называют изгибом. При действии такой нагрузки **ось стержня искривляется**. Стержни, работающие в основном **на изгиб**, принято называть **балками**.

Изгиб называют **чистым**, если **изгибающий момент** является **единственным внутренним усилием**, возникающим в поперечном сечении стержня (в поперечном сечении отсутствуют поперечные силы). **Если** в **поперечных сечениях** стержня наряду с изгибающими моментами **возникают и поперечные силы**, то такой изгиб называют **поперечным**.

Если **плоскость действия изгибающего момента (силовая плоскость)** проходит через одну из **главных центральных осей** поперечного сечения стержня, **изгиб** называют **простым** или **плоским**. При этом **ось балки после деформации остается в силовой плоскости**.

Если **плоскость действия изгибающего момента** в сечении **не совпадает** ни с одной из **главных осей сечения**, **изгиб** называют **косым**. При **косом изгибе** **плоскость деформации** не совпадает с **силовой плоскостью**.

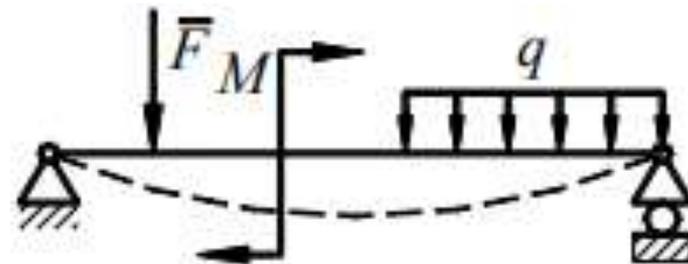


Рис. 3.34. Схема балки при изгибе

