



Национальный исследовательский
Томский политехнический университет

Механика 1.3

3.09.24;

Лектор - Козлов Виктор Николаевич,
доцент отделения машиностроения ИШНПТ

моб. тел. +7-913-812-58-34, kovn@tpu.ru

ВКС 380 440 5794, **Пароль:** 1DepTr

Лекции – 24 часа,

практические занятия – 32 часа,

88 часов самостоятельной работы,

расчётно-графические работы (РГР)

всего 144 ч., 4 кредита. **Экзамен**

3.6.1. Испытания на растяжение (продолжение 4)

Диаграмма растяжения хрупких материалов показана на рис. 3.14, где отклонение от закона Гука начинается при малых значениях деформирующей силы. Эта диаграмма не имеет площадки текучести. Образцы разрушаются при очень малой остаточной деформации $\epsilon_{\text{ост}}$ без образования шейки (рис. 3.12, б).

$$\sigma = F_n / A_0, \quad \epsilon = \Delta l / l_0$$

Модуль деформации относится к относительным изменениям размеров, тогда как модуль упругости описывает способность материала вернуться к своей исходной форме после деформации.

Сталь: $E \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2 = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 210 \text{ ГПа}$ (**титан** $E \approx 100 \text{ ГПа}$, $G = 40 \text{ ГПа}$; **свинец** $E \approx 0,18 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; **резина** $E = 2 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$);

модуль сдвига (модуль упругости второго рода, модуль жёсткости) $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 80 \text{ ГПа}$; коэффициент Пуассона μ (ν) = 0,24-0,28; $\sigma_{\text{в}} = 550 \text{ МПа}$; $\sigma_{\text{т}} = 360 \text{ МПа}$.

нормальное напряжение $\sigma = E \cdot \epsilon$;

касательное напряжение $\tau = G \cdot \gamma$, где γ – угол сдвига (относительный сдвиг): $\gamma = \Delta x / h$ (рис. 3.15).

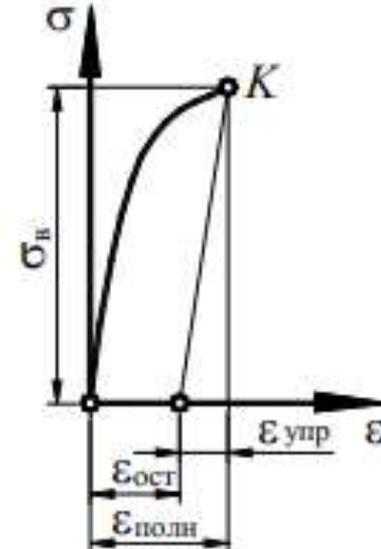


Рис. 3.14. Условная диаграмма растяжения хрупкого образца

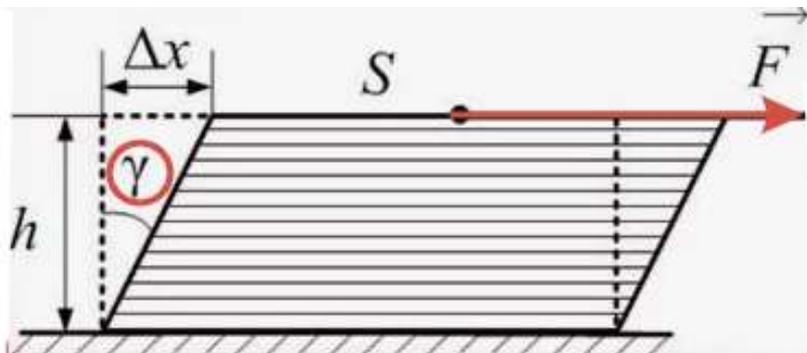


Рис. 3.15. Деформация сдвига

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

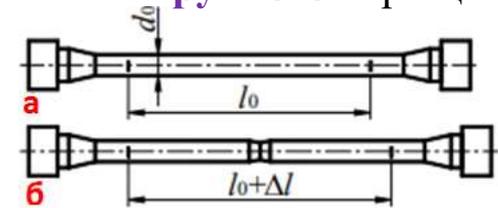


Рис. 3.12. Образец для испытания осевым растяжением

3. Сдвиг

3.6.10 Сдвиг

1. Введение. Если на **гранях** (поверхностях, плоскостях !) элементарного выделенного из бруса элемента действуют только **касательные напряжения** (рис. 3.23, а), то такой вид напряженного состояния называется **чистым сдвигом**. **Площадки**, по которым действуют **только** касательные напряжения, называются **площадками чистого сдвига**. Пусть, например, к брусу приложены **перпендикулярно** его оси **две** равные по модулю, но **противоположно направленные** силы F , действующие **весьма близко** друг от друга (рис. 3.23, а). При **достаточной** величине этих сил произойдет **срез** – отделение левой части бруса от правой по некоторому сечению AB . **Деформации среза** в зоне действия усилий **предшествует перекашивание** прямых углов параллелепипеда $abcd$ (рис. 3.23, б). **Эту деформацию** называют **сдвигом**. На поверхностях параллелепипеда возникают **касательные напряжения**, **направление** которых определяется **законом парности касательных напряжений**. Величина касательного напряжения: $\tau = F/A$, где A – площадь поперечного сечения бруса.

Под действием **касательных напряжений**

плоскость cd смещается относительно плоскости ab вниз и занимает **новое положение** $c'd'$. Величина **абсолютного сдвига** cc' относительно плоскости ab носит название **абсолютного** или **линейного сдвига**. Величина **абсолютного сдвига** зависит от **расстояния** между параллельными **плоскостями** и силы F .

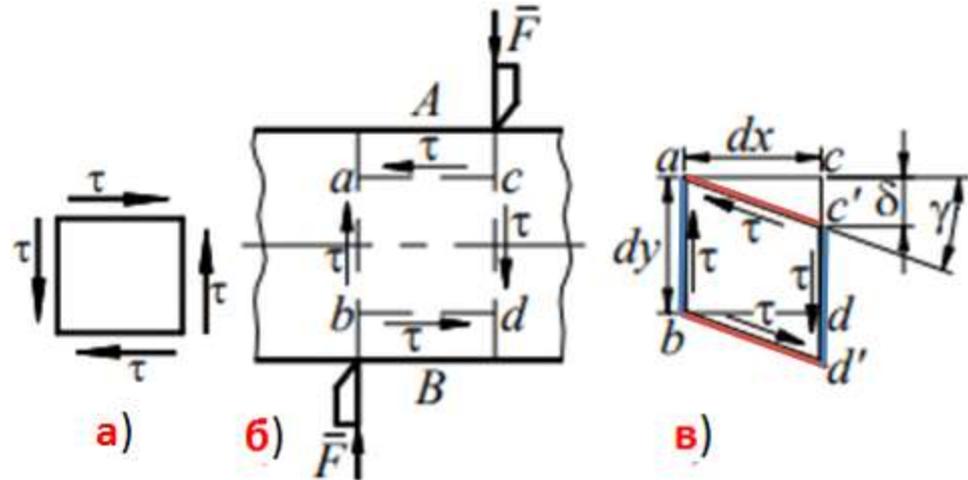


Рис. 3.23. Напряжения сдвига

3.6.10 Сдвиг (продолжение 1)

Величину δ/dx называют **относительным сдвигом**. Угол γ , на который поворачиваются сечения ac и bd в процессе деформации, носит название **угла сдвига** (рис. 3.24). Угол сдвига в пределах упругой деформации очень **мал**, поэтому тангенс угла γ может быть заменен самим углом (углом сдвига) γ : $\text{tg}\gamma = \delta/dx \approx \gamma$.

Следовательно, **угол сдвига γ** характеризует **относительную деформацию** при сдвиге. Для деформации **чистого сдвига** закон Гука выражается соотношением: $\tau = G \cdot \gamma$, где G – коэффициент пропорциональности, называемый **модулем упругости второго рода**; γ – **относительный сдвиг**. **Линейная зависимость** между τ и γ **справедлива**, пока **касательные напряжения не превзойдут предела пропорциональности** при сдвиге. **Модуль упругости второго рода** ($G = \tau/\gamma$) имеет **размерность напряжения**, так как **относительный сдвиг γ** является величиной **безразмерной**. Для **стали** модуль сдвига:

Подставив в формулу $\tau = G \cdot \gamma$ значение **касательного напряжения** из уравнения $\tau = F/A$ и **относительный сдвиг** из уравнения $\text{tg}\gamma = \delta/dx \approx \gamma$, получим **еще один вариант** формулы **закона Гука** для сдвига: $\delta = F \cdot dx / (G \cdot A)$.

Конструкцию на **прочность** при деформации сдвига рассчитывают так, чтобы действительные **касательные напряжения** были **меньше допускаемых**. **Условие прочности при срезе** имеет вид: $\tau = F/A \leq \tau_p$.

Допускаемое напряжение при срезе (τ_p) обычно принимается как некоторая часть **допускаемого напряжения того же материала при растяжении**. Для **стали, меди** и **алюминия**: $\tau_p = (0,5 - 0,6) \sigma_p$; для **чугуна**: $\tau_p = (0,75 - 0,80) \sigma_p$.

$$G = \frac{2 \times 10^5}{2(1+0,3)} \approx 8 \times 10^4 \text{ МПа.}$$

$$\tau = G \cdot (\gamma) \equiv F/A = G \cdot (\delta/dx)$$

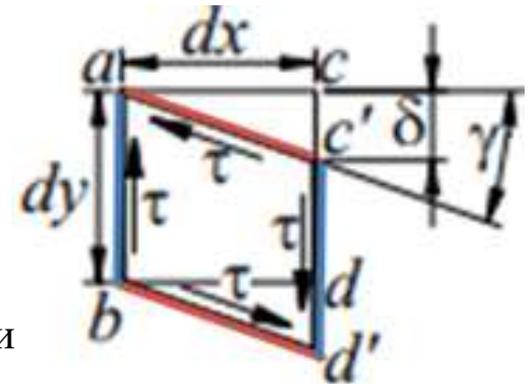


Рис. 3.24. Угол сдвига γ

3.6.10 Сдвиг (продолжение 2)

2. Потенциальная энергия при сдвиге. Зависимость между тремя упругими постоянными (G , μ , E).

Вычислим потенциальную энергию при сдвиге. Для простоты предположим, что **поверхность ab** элемента неподвижна (рис. 3.24, а). Тогда при смещении правой **поверхности** сила $F_{\text{сдв}} = \tau \cdot (b \cdot dy)$ (где b – **толщина** элемента (рис. 3.24, б) совершит работу на **перемещении $\delta = \gamma \cdot dx$** . Следовательно, **потенциальная энергия деформации, накопленная** в элементе, равна: $dU = [\tau \cdot (b \cdot dy)] \cdot (\gamma \cdot dx) / 2 = \tau \cdot b \cdot dy \cdot \gamma \cdot dx / 2 = \tau \cdot \gamma \cdot b \cdot dy \cdot dx / 2$. Делим на **2**, т.к. **энергия** определяется **деформацией** площади **треугольника**, а не прямоугольника.

Удельная потенциальная энергия: $u_p = dU/dV = \tau \cdot \gamma \cdot (1/2) = \tau \cdot \gamma / 2$. (1)

Выразив **угол сдвига γ** через τ по закону Гука ($\tau = G \cdot \gamma \rightarrow \gamma = \tau / G$), получим:

$$u_p = (1/2) \cdot \tau^2 / G = \tau^2 / (2 \cdot G) \quad (2).$$

С другой стороны, **потенциальная энергия** может быть выражена через **главные нормальные напряжения**. Из формулы (2.3.63) для **плоского напряженного состояния**, каким является **чистый сдвиг**, полагая $\sigma_2 = 0$, получаем:

$$u_p = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_3}{2E} \quad (3)$$

Но **главные напряжения** при сдвиге:

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_3 = -\tau, \quad \text{следовательно, } u_p = \tau^2 \cdot (1 + \mu) \cdot E \quad (4).$$

Так как величина **энергии** не зависит от ориентирования **поверхностей** элемента, то, **приравнявая** правые части уравнений (2) [$u_p = \tau^2 / (2 \cdot G)$] и (3), получаем:

$$\text{Из (5): } G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (\text{МПа}) \quad (6) \quad \frac{\tau^2}{2G} = \frac{\tau^2(1 + \mu)}{E} \quad (5)$$

Для стали модуль сдвига равен:

$$G = \frac{2 \times 10^5}{2(1 + 0,3)} \approx 8 \times 10^4 \text{ МПа.}$$

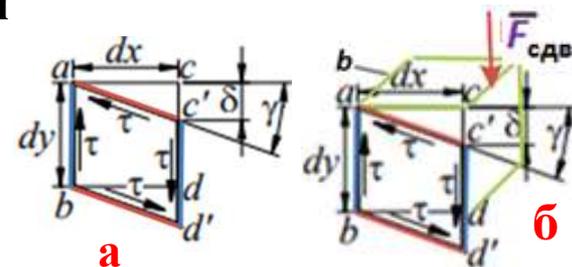


Рис. 3.24. Угол сдвига γ

$$dU = \tau \gamma b dy \frac{dx}{2} \quad u_p = \tau^2 (1 + \mu) E.$$

Вывод зависимости между тремя упругими постоянными (G , μ , E)

$$u_p = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_3}{2E} \quad (3)$$

главные напряжения при сдвиге:

$\sigma_1 = \tau$, $\sigma_3 = -\tau$, тогда:

$$\begin{aligned} u_p &= [\tau^2 + (-\tau)^2 - 2 \cdot \mu \cdot \tau \cdot (-\tau)] / (2 \cdot E) = \\ &= [2 \cdot \tau^2 - (-2 \cdot \mu \cdot \tau^2)] / (2 \cdot E) = \\ &= \underline{2 \cdot \tau^2 [1 + \mu]} / (2 \cdot E) = \underline{[\tau^2 (1 + \mu)]} / E; \quad (4) \end{aligned}$$

(2)

(4)

$$u_p = \tau^2 / (2 \cdot G); \quad u_p = [\tau^2 (1 + \mu)] / E;$$

$$\tau^2 / (2 \cdot G) = [\tau^2 (1 + \mu)] / E; \quad (5)$$

$$\underline{\tau^2 \cdot E} / [\tau^2 (1 + \mu)] = (2 \cdot G);$$

$$E / (1 + \mu) = 2 \cdot G;$$

$$G = E / [2 \cdot (1 + \mu)]; \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \cdot (\text{МПа}) \quad (6)$$

4. Кручение

Стержень испытывает **кручение**, если в его **поперечных сечениях** возникают **крутящие моменты**, то есть **моменты**, лежащие **в плоскости сечения**. Обычно эти крутящие моменты T_k (*Torsion* - Кручение) возникают под действием внешних моментов T (рис. 3.25).

Внешние моменты передаются на вал, как правило, в местах посадки на него **шкивов**, **зубчатых колес** и т.п. Однако и **поперечная нагрузка**, **смещенная относительно оси стержня**, вызывает **крутящие моменты** (рис. 3.25 б), но в этом случае в **поперечных сечениях** наряду с **крутящими моментами** возникают и **другие внутренние усилия** – **поперечные силы** и **изгибающие моменты**.

Стержни, работающие на **кручение**, называют **валами**. В расчетах **вместо аксонометрического** изображения чаще применяют **плоское изображение**, как более простое. **Внешние скручивающие** и **внутренние крутящие моменты** изображают иногда в виде **линии с двумя окружностями**. В одной из них ставят **точку**, обозначающую **начало стрелки** (направленной **на наблюдателя**) (рис. 3.26 б), в другом – **крестик**, обозначающий **конец стрелки**, направленный **от наблюдателя** (рис. 3.26 а). Иногда вышеуказанные моменты изображают **эллипсной стрелкой** (рис. 3.26 в, г).

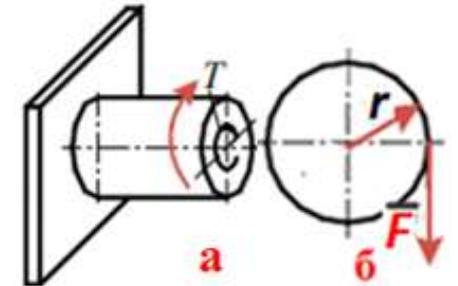


Рис. 3.25. Крутящие моменты

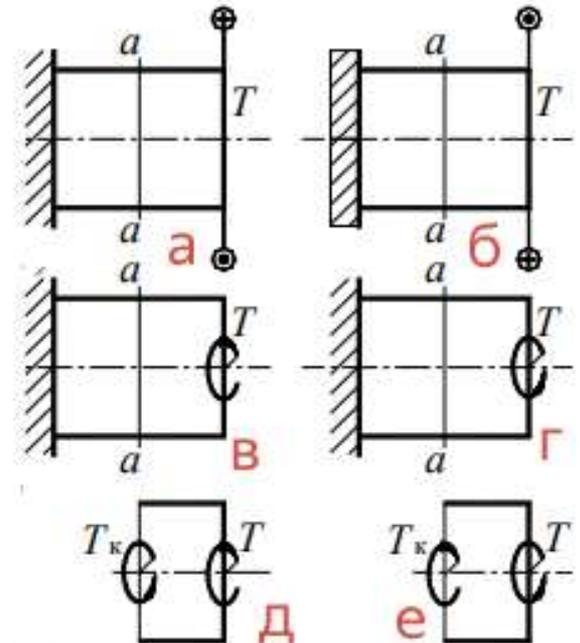


Рис. 3.26. Обозначение крутящих моментов

3.6.11 Кручение (продолжение 1)

1. Для определения **крутящих моментов** T_k в сечениях вала (возникающих под действием внешних **скручивающих моментов** или **поперечной нагрузки**) применяют **метод сечений**. Сделаем мысленный разрез стержня (рис. 3.26 а), например по ***a-a***, ***отбросим*** одну часть стержня (в данном случае – ***левую***) и рассмотрим **равновесие оставшейся правой части** (рис. 3.26 д). Взаимодействие частей стержня заменим **крутящим моментом** T_k , уравнивающим **внешний момент** T . Для **равновесия** отсеченной части необходимо, чтобы алгебраическая сумма всех моментов, действующих на нее, была равна **нулю**. Отсюда в рассматриваемом случае получим, что: $T_k = T$.

Если на отсеченную часть будет действовать несколько **внешних моментов**, то **крутящий момент** в сечении численно равен алгебраической сумме **внешних скручивающих моментов**, действующих **по одну сторону** от сечения. Для наглядного представления о **характере распределения** и величине **крутящих моментов** по длине стержня строят **эпюры (графики)** **этих моментов** (аналогично построению эпюр продольных сил при растяжении или сжатии). **Общепринятого правила знаков для крутящих моментов не существует**. Может быть принято любое правило знаков, но **это принятое правило выдержать на всем протяжении эпюры**. Примем следующее правило знаков. Крутящий момент в сечении ***a-a*** считается **положительным**, когда **внешний момент** вращает **отсеченную часть против часовой стрелки**, если смотреть на **отсеченную часть со стороны сечения** (рис. 3.27 а). Если же внешний момент вращает отсеченную часть **по часовой стрелке** (при взгляде **со стороны сечения**), то крутящий момент в сечении будем считать **отрицательным** (рис. 3.27 б).

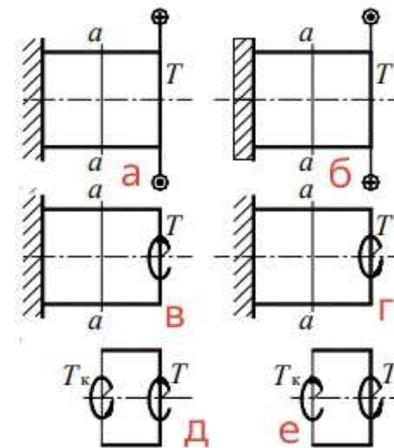


Рис. 3.26. Обозначение крутящих моментов

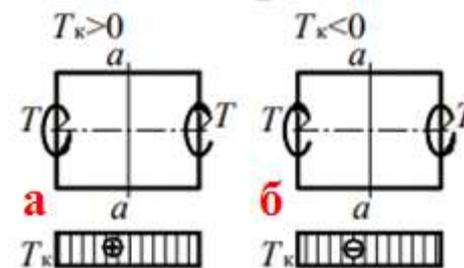


Рис. 3.27. Эпюры крутящих моментов

3.6.11 Кручение (продолжение 2)

Вал CD опирается на подшипники **B** и **A** и находится в равновесии под действием приложенных к нему в сечениях **E**, **K** и **L** **крутящих моментов** (рис. 3.28).

Сделав сечение **a-a** где-либо на участке **DL** и рассмотрев равновесие **правой** отсеченной части, убедимся, что $T_K=0$. Если мы сделаем затем сечение **b-b** в любом месте участка **LK**, то из условия равновесия **правой от сечения** части получим $T_K=2$ кН·м. Момент считаем **положительным** в соответствии с принятым правилом знаков. В сечение **c-c** на участке **KE** из условия равновесия **правой** части, получаем: $2 - 3 - T_K=0$, откуда: $T_K=1$ кН·м. Получившаяся эпюра имеет форму двух прямоугольников.

Важно заметить, что в местах приложения **внешних моментов** ординаты **эпюры скачкообразно** изменяются на величину **приложенного здесь внешнего момента**. Если заданы **поперечные нагрузки**, вызывающие **кручение** стержня (рис. 3.25 б), то **предварительно** вычисляют **внешние скручивающие моменты**, создаваемые этими силами.

При наличии **внешнего крутящего момента** от силы **F** предварительно рассчитывают его величину: $T_K = F \cdot r$ (рис. 3.25 б).

После их определения **определяют внутренние крутящие моменты** и строят **эпюры**.

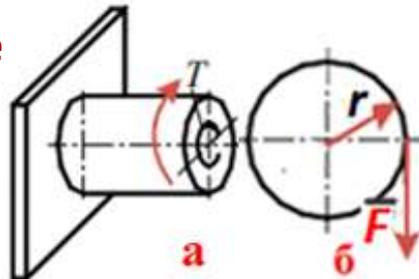


Рис. 3.25. Крутящие моменты

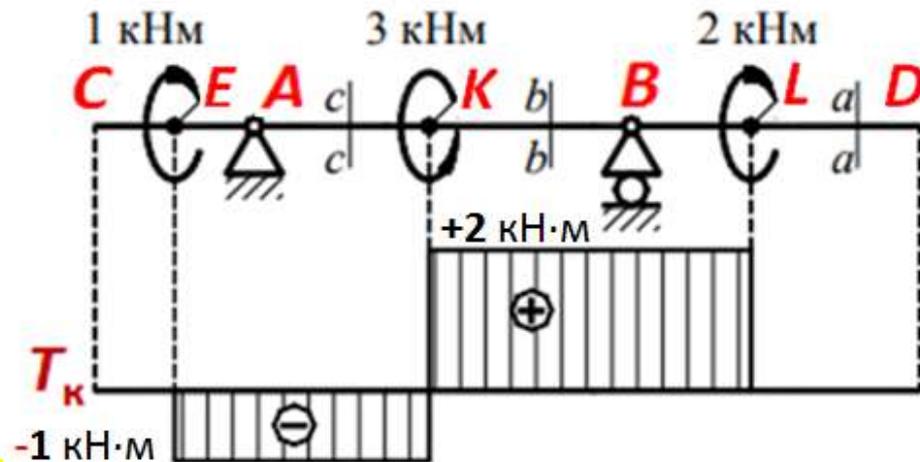


Рис. 3.28. Построение **эпюр** крутящих моментов

3.6.11 Кручение (продолжение 3)

2. Определение напряжений в стержнях круглого сечения

Крутящие моменты представляют лишь **равнодействующие** внутренние **усилия**. Фактически в **поперечном сечении** скручиваемого стержня действуют **непрерывно распределенные** внутренние **касательные напряжения**. Если на поверхности стержня **круглого сечения** нанести **прямоугольную сетку** (рис. 3.29, а), то после деформации (рис. 3.29, б) произойдет следующее:

1) прямоугольная сетка превратится в **сетку**, состоящую из **параллелограммов**, что свидетельствует о наличии **касательных напряжений** в **поперечных сечениях** бруса, а **по закону парности касательных напряжений** – и в **продольных** его **сечениях**;

2) расстояния между **окружностями**, например между **I** и **II**, **не изменятся**. **Не изменится** длина стержня и его диаметр.

Естественно допустить, что **каждое поперечное сечение поворачивается** в своей плоскости на **некоторый угол**, как жесткое целое (гипотеза **плоских** и жестких сечений). На основании этой гипотезы можно считать, что **радиусы окружностей** **KL** (сечение **I**), **MN** (сечение **II**) (рис. 3.29, а) всех **поперечных сечений** будут поворачиваться на **разные углы**, **оставаясь прямолинейными** (рис. 3.29, б и б: **MN** → **M'N'**).

Поэтому можно сделать **вывод** о том, что **при кручении** в **поперечных сечениях** стержня **действуют** только **касательные напряжения**, то есть **напряженное состояние** в точках скручиваемого стержня представляет собой **чистый сдвиг**.

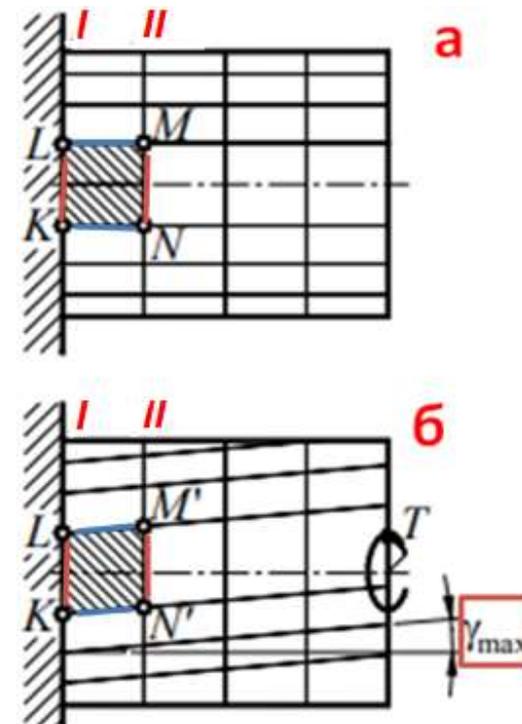


Рис. 3.29. Деформации при кручении

3.6.11 Кручение (продолжение 4)

Формулы, полученные на основе этого допущения, подтверждаются опытами. Точка D переместится по дуге DD' , точка C – по меньшей дуге CC' (рис. 3.30). Для установления закона **распределения касательных напряжений** по **поперечному сечению** скручиваемого стержня рассмотрим более детально **деформации стержня** (рис. 3.29 и рис. 3.31). На рис. 3.31 в более крупном масштабе изображена часть стержня между сечениями I и II и показана **одна сторона KN** элемента $KLMN$ (рис. 3.29). **Угол сдвига γ** для элемента $KLMN$, лежащего на поверхности стержня, равен **отношению** отрезка NN' к длине элемента dx (рис. 3.31):

$$\gamma_{\max} = \frac{rd\varphi}{dx} \quad (7)$$

Выделяя мысленно из рассматриваемой части бруса цилиндр произвольного **радиуса ρ** и повторяя те же рассуждения, получим угол сдвига для элемента, отстоящего на **расстоянии ρ** от оси стержня:

На основании **закона Гука** $\gamma = \frac{\rho d\varphi}{dx}$ (8) при **сдвиге** имеем:

$$\tau = G\gamma = G\mu \frac{d\varphi}{dx} \quad (9)$$

При **кручении деформации сдвига** и **касательные напряжения прямо пропорциональны** расстоянию ρ от **центра тяжести** сечения.

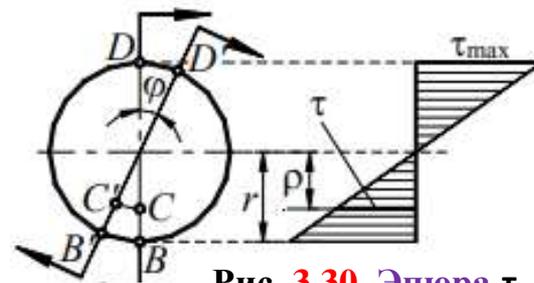


Рис. 3.30. Эпюра τ при кручении

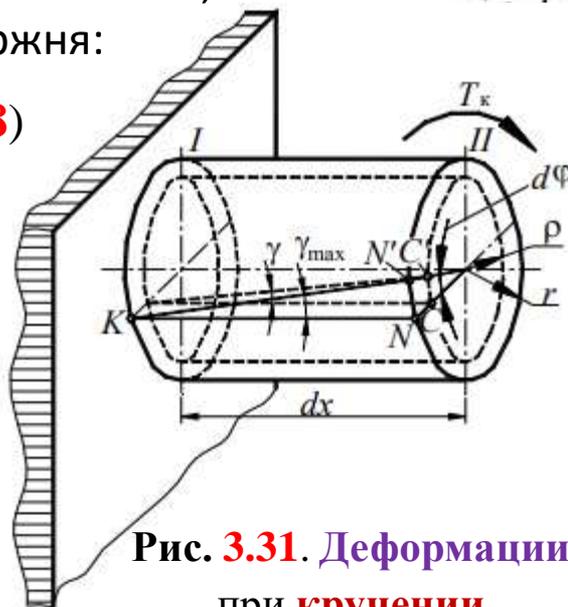


Рис. 3.31. Деформации при кручении

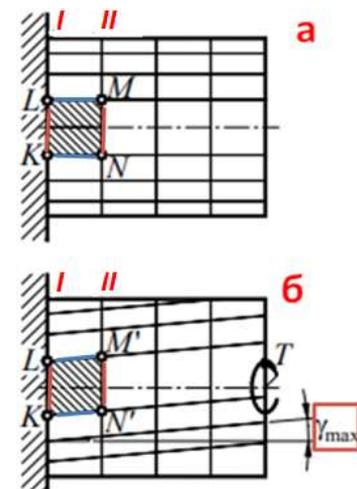


Рис. 3.29. Деформации при кручении

3.6.11 Кручение (продолжение 5)

Эпюра касательных напряжений по поперечному сечению стержня представлена на рис. 3.30. В центре тяжести круглого сечения касательные напряжения равны нулю. Наибольшие касательные напряжения будут в точках сечения, расположенных у поверхности стержня. Зная закон распределения касательных напряжений, можно определить их величину из условия, что крутящий момент в сечении представляет собой равнодействующий момент касательных напряжений в сечении:

$$T_k = \int_A \tau \rho dA, \quad (10)$$

где $\tau \cdot \rho$ – элементарный крутящий момент внутренних сил, действующих по площадке dA . Подставив в (10) значение напряжений из формулы (9), получим:

$$T_k = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA. \quad (11)$$

Величина $\int \rho^2 \cdot dA$ называется полярным моментом инерции сечения и обозначается J_p .

Для круглого сплошного сечения: $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$. (12)

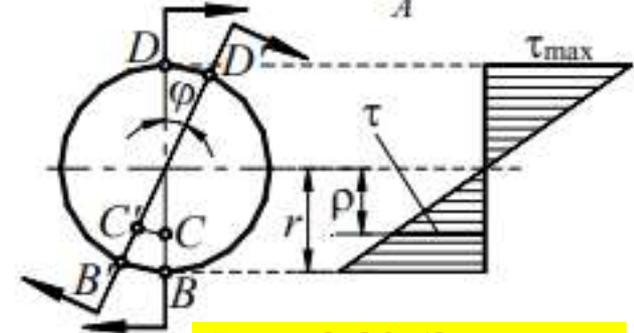


Рис. 3.30. Эпюра τ при кручении

В частном случае, когда на стержень действует один внешний скручивающий (крутящий) момент T (рис. 2.5.9), из условия равновесия отсеченной части стержня получим: $T_k = T$. Окончательная формула для определения касательных напряжений при кручении имеет вид:

$$\tau = \frac{T_k \rho}{J_p}$$

в точках, одинаково удаленных от центра сечения, напряжения τ одинаковы.

$$\tau = G\gamma = G\mu \frac{d\varphi}{dx}. \quad (9)$$

3.6.11 Кручение (продолжение 6)

Наибольшие напряжения в точках у контура сечения равны:

где $W_p = \frac{J_p}{r}$ называется **полярным моментом сопротивления** (W_p) или **моментом сопротивления при кручении**.

$$\tau_{\max} = \frac{T_k r}{J_p} = \frac{T_k}{W_p},$$

Для круглого сплошного сечения: $W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi d^4}{32d} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3.$

Для кольцевого сечения: $W_p = \frac{2J_p}{D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi D^3}{16}(1 - c^4) \approx 0,2D^3(1 - c^4)$
где $c = \frac{d}{D}.$

Условие **статической прочности вала при кручении** имеет вид: $\tau_{\max} = \frac{T_k}{W_p} \leq \tau_p,$
где τ_p – **допускаемое касательное напряжение**.

При действии **статической нагрузки** принимают (без учета концентрации напряжений и других факторов, **снижающих прочность**) $\tau_p = (0,5 - 0,6) \sigma_{pp}.$

Кроме проверки прочности, по этой формуле можно также **подбирать диаметр вала** или **определять допускаемый крутящий момент** при известных остальных величинах. Так как для круглого сплошного сечения: $W_p \approx 0,2 \cdot d^3$, отсюда $d = \sqrt[3]{\frac{T_k}{0,2\tau_p}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{T_k}{\tau_p}}$

Допускаемый из условия прочности **крутящий момент**: $T_{кр} = W_p \cdot \tau_p.$

Деформации и перемещения при кручении валов

Для вычисления деформаций вала при кручении воспользуемся формулой: $d\varphi = \frac{T_k dx}{GJ_p}$

Деформация вала на длине x (взаимный угол поворота сечений) равна: $\varphi = \int_0^x \frac{T_k dx}{GJ_p}$

Если крутящий момент T_k и величина GJ_p , называемая жесткостью вала при кручении, постоянны на всем участке интегрирования, то угол поворота сечений: $\varphi = \frac{T_k x}{GJ_p}$

Аналогично, для вала длиной l получим: $\varphi = \frac{T_k l}{GJ_p}$

Эта формула по своей структуре аналогична формуле для определения деформаций при растяжении-сжатии. Угол закручивания, приходящийся на единицу длины, называют относительным углом закручивания. Он равен:

$$\psi = \frac{\varphi}{l} = \frac{T_k}{GJ_p}$$

Для обеспечения требуемой жесткости вала необходимо, чтобы наибольший относительный угол закручивания θ не превосходил допускаемого значения ψ_p :

ψ_p – допускаемый относительный угол закручивания в радианах на единицу длины вала.

$$\psi = \frac{\varphi}{l} = \frac{T_k}{GJ_p} \leq \psi_p$$

Эта формула выражает условие жесткости вала при кручении. В большинстве случаев допускаемый относительный угол закручивания задают в градусах на 1 м длины, тогда получим

$$\psi = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{T_k}{GJ_p} \leq \psi_p$$

3.6.11 Кручение (продолжение 8)

Угол ψ_p выбирают в зависимости от назначения вала и его размеров. Для валов средних размеров рекомендуется принимать **допускаемый относительный угол закручивания** ψ_p равным $0,5^\circ$ на 1 м длины. Можно определить **диаметр вала** по **заданной жесткости**. Учитывая, что: $J_p \approx 0,1 \cdot d^4$, получим:

$$d = \sqrt[4]{\frac{180^\circ T_k}{\pi G 0,1 \psi_p}}$$

Построение **эпюр** угловых перемещений при кручении

Строим эпюру **крутящих моментов** T в масштабе μ_T (Н·м/мм) (рис. 3.32, б). Если имеется вал, у которого нет неподвижных сечений, то для построения **эпюры угловых перемещений** принимают какое-либо сечение за **условно неподвижное**. Примем **сечение** в точке A за **условно неподвижное**. Определим угол поворота **сечения** B по отношению к **сечению** A . Из формулы угла поворота сечений φ :

$$\varphi = \frac{T_k l}{G J_p}$$

где T_{BA} – крутящий момент на участке BA (Н·м);

l_{AB} – длина участка AB (м); G – модуль сдвига (МПа) (модуль упругости второго рода, модуль жёсткости). Для **стали** $G = 8 \cdot 10^4$ МПа = 80 ГПа;

J_p – **полярный момент инерции сечения** (м⁴).

Для сплошного вала $J_p = (\pi \cdot d^4) / 32$.

Строим эпюру **углов закручивания** φ (рис. 3.32, в).

Примем правило знаков для углов поворота **сечений** φ : углы φ **положительные**, когда **сечение поворачивается** (если смотреть вдоль оси **слева направо**) **против часовой стрелки**. В данном случае угол φ_{BA} будет **положительным** {смотреть от a }.

Получим:
$$\varphi_{BA} = \frac{T_{BA} l_{AB}}{G J_p}$$

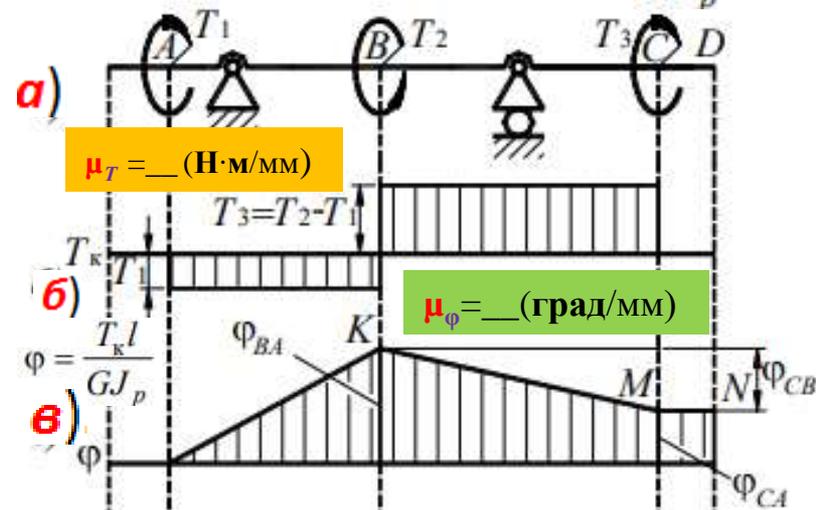


Рис. 3.32. Эпюры при кручении

3.6.11 Кручение (продолжение 9)

В принятом **масштабе μ_φ (град/мм)** отложим ординату φ_{BA} (рис. 3.32, в). Полученную точку K , соединяем прямой с точкой E , так как на участке AB **углы** изменяются по **закону прямой линии**, в которую абсцисса сечения i (z) входит в первой степени). Вычислим теперь **угол поворота сечения C по отношению к сечению B** . Учитывая принятое **правило знаков** для углов закручивания, получаем φ_{CB} со знаком **минус**: $\varphi_{CB} = -\frac{T_{BC}l_{BC}}{GJ_p}$.

Так как **сечение B не неподвижное**, то **угол поворота сечения C по отношению к сечению A** равен:
$$\varphi_{CA} = \varphi_{CB} + \varphi_{BA} = -\frac{T_{BC}l_{BC}}{GJ_p} + \varphi_{BA}.$$

Угол закручивания φ_{CA} может получиться **положительным, отрицательным** и, в **частном случае**, равным **нулю**. **Предположим**, что в данном случае угол φ_{CA} получился **положительным**.

Тогда, **отложив эту величину** в принятом масштабе μ_φ **вверх** от оси эпюры φ , получим **точку M** . **Соединяя точку M с точкой K** , получим график углов закручивания φ на участке BC .

На участке CD скручивания **не происходит**, так как **крутящие моменты** на этом участке равны **нулю**, поэтому там **все сечения поворачиваются на столько же**, на сколько **поворачивается сечение C** .

Поэтому участок MN эпюры φ здесь горизонтален.

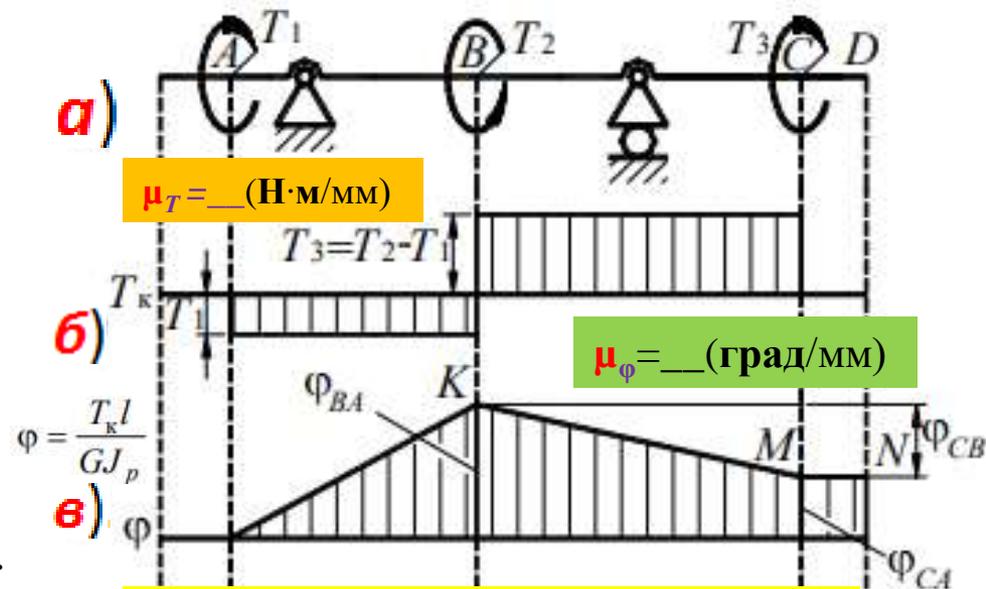


Рис. 3.32. Эпюры при кручении

3.6.11 Кручение (продолжение 10)

Если за неподвижное принять сечение **B**, то эпюра углов закручивания будет иметь **другой** вид, представленный на **рис. 3.33, з)**.

Пример определения **требуемого** диаметра **стального** вала **длиной** l (м), вращающегося с **угловой скоростью** ω (рад/с), и передающего **мощность** P (Вт) ($1\text{Вт}=1[\text{Н}\cdot\text{м}]/\text{с}$). Допускаемое напряжение τ_p (Н/мм²). Допускаемый **угол закручивания** равен ψ_p (град). ($\varphi_{\max} < \psi_p$). **Модуль сдвига** материала вала равен G (МПа).

Крутящий момент T_k , передаваемый валом, определим по формуле: $T_k = P/\omega$.

Диаметр **сплошного** вала по **прочности на кручение** определяем по формуле:

$$d = \sqrt[3]{\frac{T_k}{0,2\tau_p}} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{T_k}{\tau_p}}$$

Диаметр вала из условия **жесткости** определяем по формуле:

$$d = \sqrt[4]{\frac{180^\circ T_k}{\pi G 0,1 \psi_p}}$$

Для дальнейшего **проектирования** вала принимается **больший** из этих **двух** значений диаметра (**округленный** в **большую** сторону до стандартной величины).

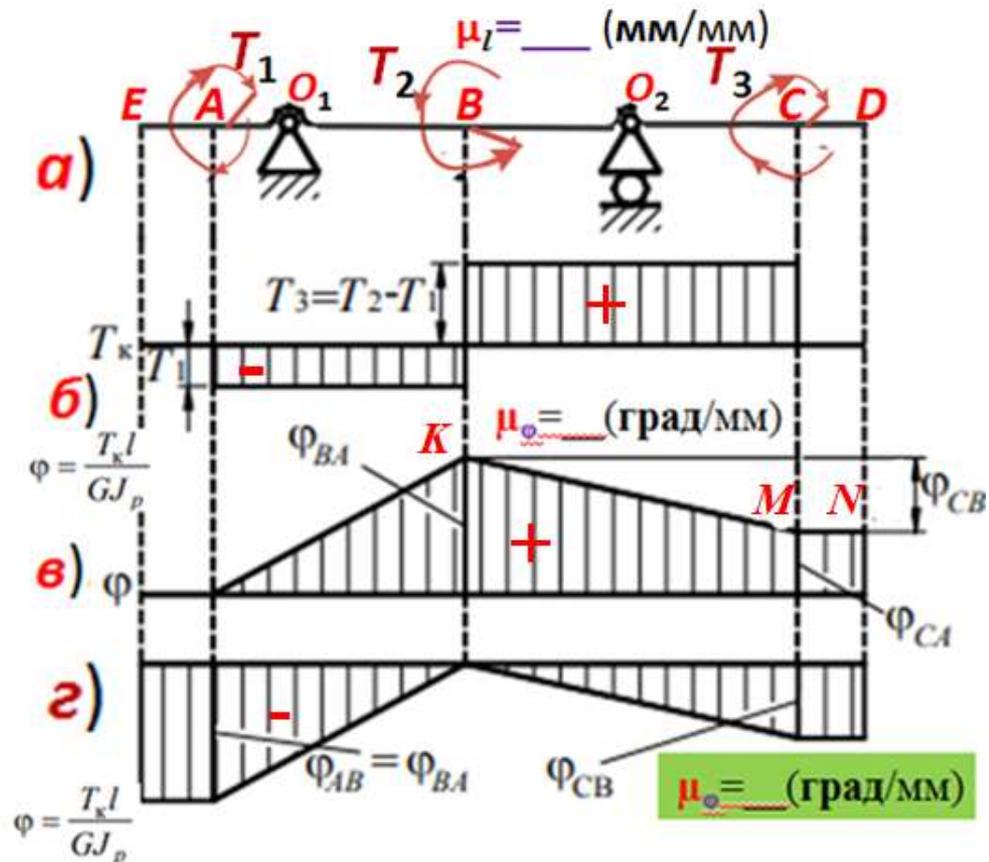


Рис. 3.33. Эпюры при кручении

3.6.11 Кручение (продолжение 11) (дубль продолжения 10)

Пример определения **требуемого** диаметра **стального** вала **длиной** l (м), вращающегося с **угловой скоростью** ω (рад/с), или n (об/мин), и передающего **мощность** P (Вт), или N ($1\text{Вт}=1[\text{Н}\cdot\text{м}]/\text{с}$). Допускаемое напряжение τ_p ($\text{Н}/\text{мм}^2$). Допускаемый **угол закручивания** равен ψ_p (град). ($\varphi_{\max} < \psi_p$). **Модуль сдвига** материала вала равен G (МПа). Для стали $G=8\cdot 10^4\text{МПа}=80$ Гпа.

Крутящий момент T_k , передаваемый валом: $T_k = P/\omega$ ($\text{Н}\cdot\text{м}$).

$$M_k(\text{Н}\cdot\text{м}) = \frac{30}{\pi} \frac{N(\text{Вт})}{n(\text{об}/\text{мин})} = 9,55 \frac{N}{n}$$

$$1 \text{ л.с.} = 75 \frac{\text{кГМ}}{\text{сек}} \approx 750 \frac{\text{НМ}}{\text{сек}} = 750 \text{ Вт}$$

Диаметр **сплошного** вала на **кручение** определяем:

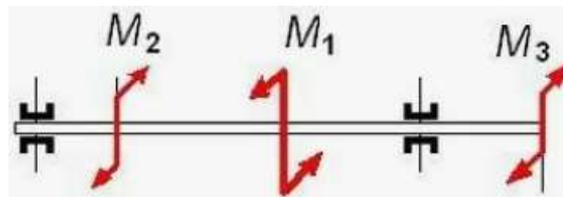
$$1 \text{ л.с.} = 75 \frac{\text{кГМ}}{\text{сек}} \approx 750 \frac{\text{НМ}}{\text{сек}} = 750 \text{ Вт} = 1,72 \sqrt[3]{\frac{T_k}{\tau_p}}$$

Диаметр вала из условия **жесткости** определяем по формуле:

$$d = 4 \sqrt[4]{\frac{180^\circ T_k}{\pi G 0,1 \psi_p}}$$

Для дальнейшего **проектирования** вала принимается **больший** из этих **двух** значений диаметра (**округленный** в **большую** сторону до **стандартной** величины).

$$\text{Мощность } N = \frac{A}{t} \left[\frac{\text{работа}}{\text{время}} \right]$$



Значительное количество деталей в процессе работы подвергаются воздействию **нагрузки, перпендикулярной к продольной оси**, или **внешних пар**, действующих в **плоскости, проходящей через указанную ось** (рис. 3.34). При этом в поперечных сечениях деталей или их элементов возникают **изгибающие моменты**, то есть внутренние моменты, действующие в **плоскости, перпендикулярной к плоскости поперечного сечения**. Такой вид нагружения называют изгибом. При действии такой нагрузки **ось стержня искривляется**. Стержни, работающие в основном **на изгиб**, принято называть **балками**.

Изгиб называют **чистым**, если **изгибающий момент** является **единственным внутренним усилием**, возникающим в поперечном сечении стержня (в поперечном сечении отсутствуют поперечные силы). **Если** в **поперечных сечениях** стержня наряду с изгибающими моментами **возникают и поперечные силы**, то такой изгиб называют **поперечным**.

Если **плоскость действия изгибающего момента (силовая плоскость)** проходит через одну из **главных центральных осей** поперечного сечения стержня, **изгиб** называют **простым** или **плоским**. При этом **ось балки после деформации остается в силовой плоскости**.

Если **плоскость действия изгибающего момента** в сечении **не совпадает** ни с одной из **главных осей сечения**, **изгиб** называют **косым**. При **косом изгибе** **плоскость деформации** не совпадает с **силовой плоскостью**.

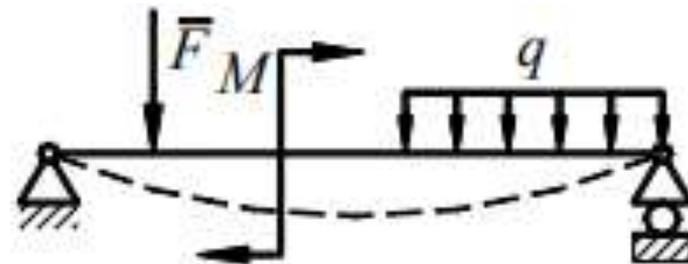


Рис. 3.34. Схема балки при изгибе

3.6.12 Изгиб (продолжение 1)

Деформацию **изгиба** легко проследить на модели, представляющей собой **прямолинейный призматический брус**, длина которого значительно превышает его **поперечные** размеры. На боковые грани **бруса** нанесены **равноотстоящие горизонтальные** и **вертикальные** линии (рис. 3.35, *а*). В **плоскости симметрии $abcd$** (рис. 3.35, *в*) к концам бруса приложены **два равных противоположно направленных момента M** , под действием которых брус **изгибается** (рис. 3.35, *б*).

Основные признаки чистого изгиба:

1. Плоские **поперечные** сечения бруса остаются **плоскими** и **поворачиваются** на некоторый **угол α_i** одно относительно другого (рис. 3.35, *з*).
2. Плоские **продольные** сечения **искривляются**, о чем можно судить по тому, что **продольные горизонтальные** прямые, нанесенные на **боковые** грани, становятся **кривыми** линиями (рис. 3.35, *б*).

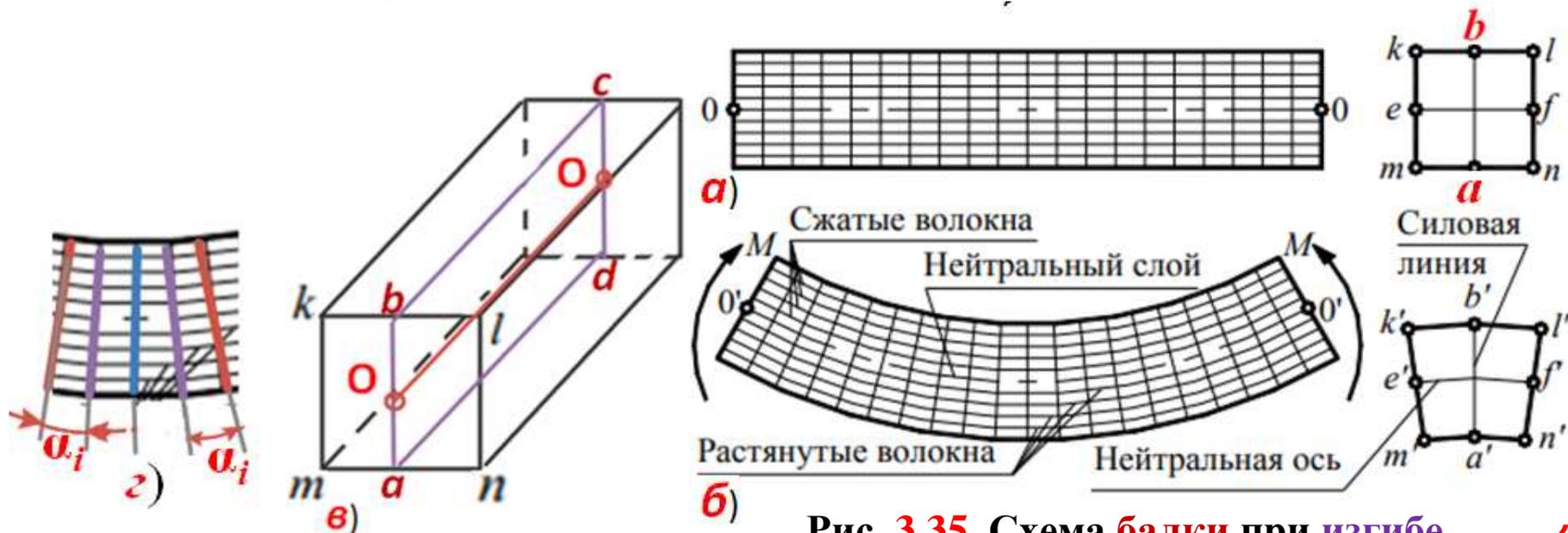


Рис. 3.35. Схема балки при изгибе

3.6.12 Изгиб (продолжение 2)

Основные признаки **чистого изгиба** (*продолжение*).

3. Волокна на **вогнутой** стороне бруса **укорачиваются**, что свидетельствует об их **сжатии**, а на **выпуклой** стороне – **удлиняются, растягиваются** (рис. 3.35, б).

4. Как показывает опыт, одна из **горизонталей** на **боковой грани** (поверхности) бруса своей **длины не изменяет** (линия **00** → **0'0'** на рис. 3.35, а, в, б). Это позволяет сделать вывод о существовании у бруса **слоя**, которые не испытывает **ни растяжения, ни сжатия**. Такой слой называют **нейтральным** слоем.

5. След **e'f'** **нейтрального** слоя на плоскости **поперечного сечения** называют **нейтральной осью** (рис. 3.35, б). Нейтральная ось **00** при изгибе своей длины не изменяет (линия **00** на рис. 3.35, а → **0'0'** на рис. 3.35, б).

6. След **a'b'** **силовой плоскости** на **поперечном сечении** балки называют **силовой линией**.



Рис. 3.35. Схема балки при изгибе

Вывод из основных признаков чистого изгиба.

При **изгибе** наблюдаются **те же явления**, что и при простом **растяжении** и **сжатии**, когда **знак поперечной деформации** **противоположен** **знаку продольной деформации**, то есть **продольное растяжение** сопровождается **поперечным сжатием** и **продольное сжатие** приводит к **поперечному растяжению** (рис. 3.36). Но принцип **сохранения объёма** действует только при **пластической деформации**.

Из рис. 3.35 следует, что величина **деформации** волокон, как **в продольном**, так и **в поперечном** направлении **тем больше**, чем **дальше** они расположены от **нейтрального слоя** или **нейтральной оси**.

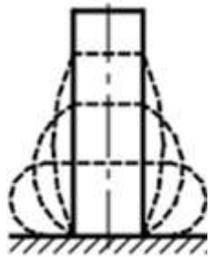


Рис. 3.36. При **сжатии** уменьшение **продольного** размера приводит к **увеличению поперечного** размера (действует **даже** при **упругой** деформации)



Рис. 3.35. Схема балки при изгибе

3.6.13 Типы опор балок

Опоры балок, рассматриваемых как плоские системы, бывают **трех основных типов**.

1. Подвижная шарнирная опора (рис. 3.37, а). Такая опора не препятствует вращению конца балки и его перемещению вдоль плоскости качения. В ней может возникать только **одна реакция**, которая **перпендикулярна** плоскости качения и проходит **через центр** катка. Подвижные опоры дают возможность балке беспрепятственно изменять свою длину **при изменении температуры** и тем самым устраняют возможность появления температурных напряжений.

2. Неподвижная шарнирная опора (рис. 3.37, б). Такая опора допускает **вращение** конца балки, но **устраняет поступательное** перемещение ее в любом направлении. Возникающую в ней **реакцию** можно разложить на две составляющие – **горизонтальную** и **вертикальную**.

3. Жесткая заделка, или защемление (рис. 3.37, в). Такое закрепление **не допускает** ни **линейных**, ни **угловых** перемещений опорного сечения. В этой опоре может в общем случае возникать **реакция**, которую обычно раскладывают на две составляющие (**вертикальную** и **горизонтальную**) и **реактивный момент**.

Для того чтобы **балка** могла воспринимать **нагрузку** в **одной плоскости** и оставалась бы при этом в целом **неподвижной по отношению к основанию**, **наименьшее** число **связей**, налагаемых **опорами**, должно быть равно **трем**.

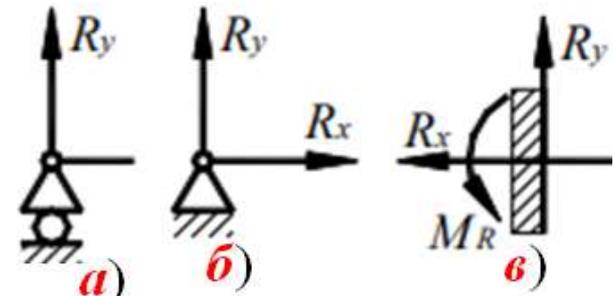


Рис. 3.37. Основные типы опор балок

3.6.13 Типы опор балок (продолжение 1)

Если **опорные реакции** могут быть найдены **только** из уравнений **статики**, то балки называют **статически определенными**. Для таких балок возможны следующие варианты крепления:

1) **защемление** балки **одним концом** (балка с **одним заделанным концом** называется **консольной балкой** или просто **консолью**);

2) крепление **одного конца балки** при помощи **неподвижной шарнирной опоры**, а **другого конца** – при помощи **подвижной шарнирной опоры** (балки, имеющие **две опоры**, называют **двухопорными**). Такие опоры **исключают** возможность возникновения **продольных усилий** при **деформации**, вызванной **изменением температуры**.

Если же **число неизвестных опорных реакций** больше, чем **число уравнений статики**, возможных для данной задачи, то балки называют **статически неопределимыми**. Для определения реакций в таких балках необходимо составлять дополнительные уравнения – **уравнения перемещений**. В данном курсе статически неопределимые балки не рассматриваются.

Определение опорных реакций

Определение опорных реакций производят при **помощи уравнений статики**. **Рис. 2**

Реакцию заделки разложим на две составляющие силы \overline{R}_{Ax} и \overline{R}_{Ay} , направленные вдоль осей x и y , и реактивный момент M_{Az} ,

Составим *уравнения равновесия балки*.

1. Приравняем нулю сумму проекций на ось x всех сил, действующих на балку:

$$\sum F_x = 0.$$

Получаем:

$$R_{Ax} = 0.$$

При отсутствии горизонтальной нагрузки горизонтальная составляющая реакции R_{Ax} равна нулю.

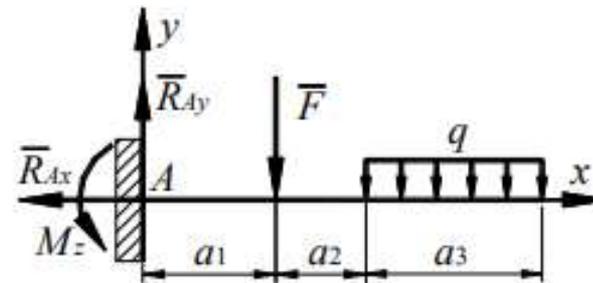


Рис. 1'

2. Приравняем нулю сумму проекций на ось y всех сил, действующих на балку:

$$\sum F_y = 0.$$

Равномерно распределенную нагрузку q заменяем *равнодействующей* qa_3 , приложенной в середине участка a_3 :

$$R_{Ay} - F_1 - qa_3 = 0,$$

откуда:

$$R_{Ay} = F_1 + qa_3.$$

Вертикальная составляющая реакции в консольной балке равна сумме сил, приложенных к балке.

3.6.14 Определение опорных реакций (продолжение 1)

3. Составляем третье уравнение равновесия.

Приравняем нулю сумму моментов всех сил относительно какой-нибудь точки, например, относительно точки A:

$$\sum M_{Az} = 0;$$

$$-M_{Az} - F_1 a_1 - q a_3 \left(a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2} \right) = 0,$$

откуда:

$$M_{Az} = -F_1 a_1 - q a_3 \left(a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2} \right) = 0.$$

Знак «минус» показывает, что принятое вначале направление реактивного момента следует изменить на обратное.

Реактивный момент в заделке равен сумме моментов внешних сил относительно заделки.

Во втором примере рассмотрим определение опорных реакций *двухопорной* балки (рис. 2.6.5).

$$1. \sum F_{Ax} = -R_{Ax} - F \cos \alpha = 0;$$

$$R_{Ax} = -F \cos \alpha.$$

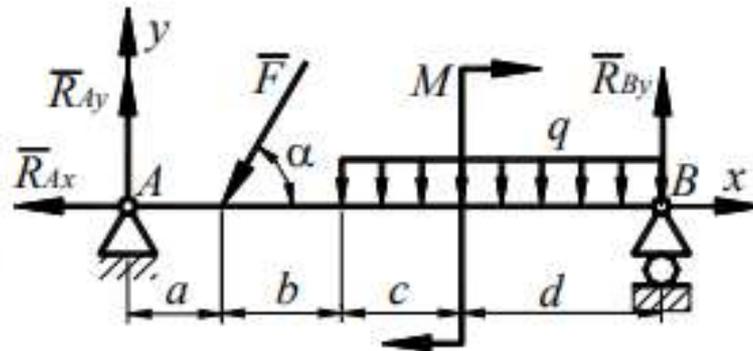


Рис. 2 Рис. 2.

3.6.14 Определение опорных реакций (продолжение 2)

$$2. \sum M_{Bz} = -R_{Ay}(a+b+c+d) + (b+c+d)F \sin \alpha + \\ + \frac{q(c+d)^2}{2} - M = 0.$$

$$R_{Ay} = \frac{(b+c+d)F \sin \alpha + \frac{q(c+d)^2}{2} - M}{a+b+c+d}.$$

$$3. \sum F_y = R_{Ay} - F - q(c+d) + R_{By} = 0;$$

$$R_{By} = -R_{Ay} + F + q(c+d).$$

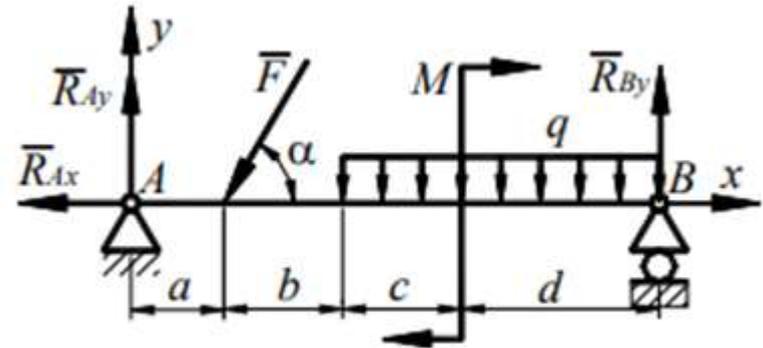


Рис. 2 (повтор)