$$3\left(x^2-2\cdot\frac{2}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+$$

$$+2\left(y^2-2\cdot\frac{5}{2}y+\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)-2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2+13=0$$

$$3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-3\cdot\frac{4}{9}+2\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-2\cdot\frac{25}{4}+13=0$$

$$3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+2\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{4}{3}-\frac{25}{2}+13=0$$

$$\frac{-8-75+78}{6}$$

$$-\frac{5}{6}$$

$$3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+2\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{6}=0$$

$$3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+2\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{6}$$

$$\frac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{5}{6}}+\frac{2\left(y-\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{5}{6}}=1$$

$$\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{5}{18}}+\frac{\left(y-\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{5}{12}}=1$$

Получили каноническое уравнение эллипса.

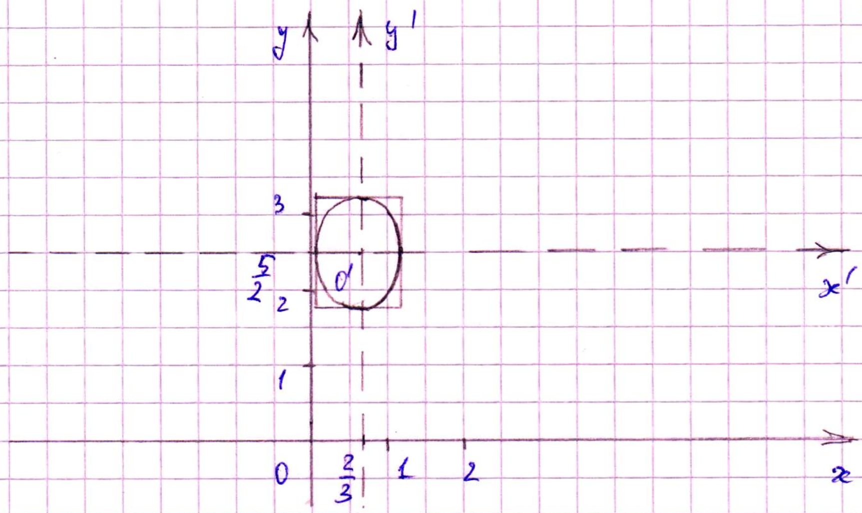
Координаты нового центра

$x_0=\frac{2}{3}$ $\quad y_0=\frac{5}{2}$

Полуоси: $a=\sqrt{\frac{5}{18}}=\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}}$

$b=\sqrt{\frac{5}{12}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$

Построение линии:



Пример 2.

$$-y^2+3y+x-11=0$$

Решение.

$A=0 \quad B=-1 \Rightarrow$ тип параболический

$$-(y^2-3y)+x-11=0$$

$$-\left(y^2-2\cdot\frac{3}{2}y+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)+x-11=0$$

$$-\left(y^2-2\cdot\frac{3}{2}y+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)-\left(-\frac{3}{2}\right)^2+x-11=0$$

$$-\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+x-11=0$$

$$-\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+x-\frac{9}{4}-\frac{44}{4}=0$$

$$-\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+x-\frac{53}{4}=0$$

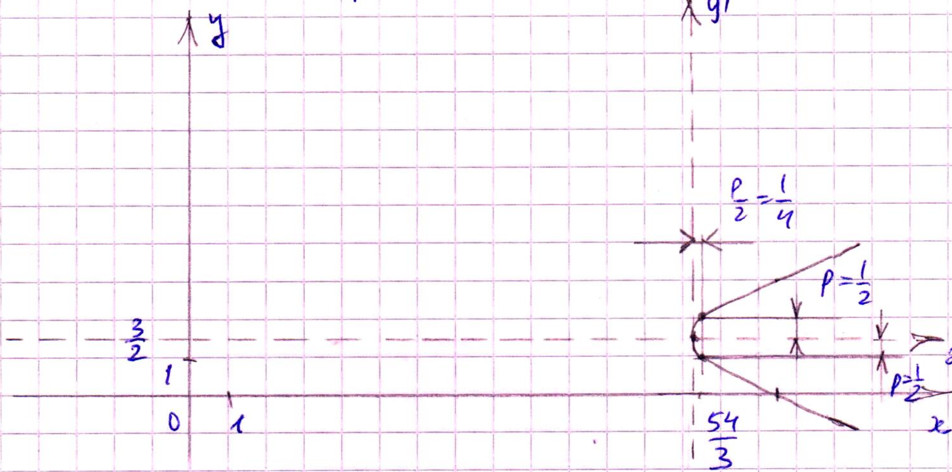
$$-\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=-x+\frac{53}{4}$$

$$\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=x-\frac{53}{4}$$

Каноническое уравнение параболы:

$$\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=2\cdot\frac{1}{2}\left(x-\frac{53}{4}\right)$$

$p=\frac{1}{2}\qquad \frac{p}{2}=\frac{1}{4}$



4. Полное уравнение второй степени с двумя неизвестными

Уравнение второй степени с двумя неизвестными вида

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

называется полным.

Левая часть уравнения состоит из двух частей:

квадратичной:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2$$

и линейной:

$$Dx+Ey+F$$

Многочлен от двух переменных, где суммарная степень неизвестных в каждом одночлене равна двум:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2,$$

называется квадратичной формой

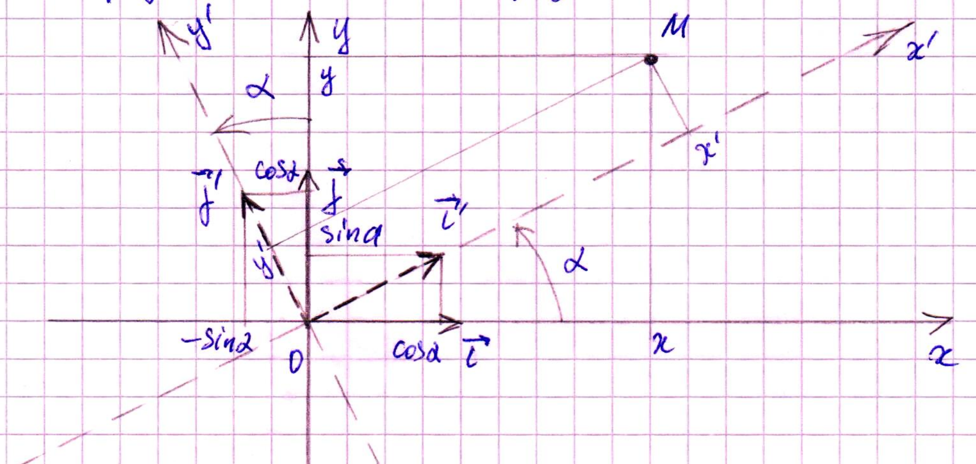
Матрица, составленная из коэффициентов многочлена

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

называется матрицей квадратичной формы

Если член с произведением xy отсутствует, то квадратичная форма называется канонической.

5. Поворот координатной плоскости вокруг начала координат



Из рисунка видно, что при повороте на угол α координатных осей Ox и Oy против часовой стрелки орты ~~xx~~ координатных осей $\vec{i}\,'$ и $\vec{j}\,'$ получили координаты в „старой" системе xOy

$$\vec{i}\,' = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$$

$$\vec{j}\,' = \{-\sin\alpha, \cos\alpha\}$$

или, что то же самое, в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}\}$

$$\begin{cases} \vec{i}\,' = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j} \\ \vec{j} = -\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j} \end{cases}$$

Таким образом, произвольная точка M, имеющая в системе xOy координаты $M(x,y)$, будет иметь в системе $x'Oy'$ координаты $M(x';y')$

Координаты в двух системах будут связаны между собой преобразованием:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OM} = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' =$$

$$= x'(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}) + y'(-\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}) =$$

$$= x'\cos\alpha\,\vec{i} + x'\sin\alpha\,\vec{j} + (-y'\sin\alpha)\vec{i} + y'\cos\alpha\,\vec{j} =$$

$$= (x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)\vec{i} + (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)\vec{j}$$

Таким образом, координаты в системе xOy связаны с координатами в системе

$x'Oy'$ [illegible] уравнениями

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

6. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Покажем на примере, что коэффициенты при $(x')^2$ и $(y')^2$ в каноническом виде являются собственными числами матрицы квадратичной формы, а геометрически приведение к каноническому виду означает поворот осей вокруг центра кривой линии второго порядка.

Пример.

Привести квадратичную форму к каноническому виду и построить соответствующую кривую

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 = 9$$

$$A = 2 \quad 2B = -4 \Rightarrow B = -2 \quad C = 5$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(5-\lambda) - (-2)\cdot(-2) = 0$$
$$10 - 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$
$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

$D = 49 - 4 \cdot 6 = 25$

$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2}$

$\lambda_1 = \frac{7-5}{2} = 1$

$\lambda_2 = \frac{7+5}{2} = 6$

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{cases} (2-1)x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + (5-1)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left| S_2 + 2S_1 \right| \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -2+2\cdot 1 & 4+2(-2) & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 - 2x_2 = 0$

базисное: x_1
свободное: x_2

$x_2 = t_1$

$x_1 - 2t_1 = 0$
$x_1 = 2t_1$

$X = \begin{pmatrix} 2t_1 \\ t_1 \end{pmatrix}$ ФСР $t_1 = 1$ $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 6$

$$\begin{cases} (2-6)x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + (5-6)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x_1-2x_2=0 \\ -2x_1-x_2=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left| S_2 - \frac{1}{2}S_1 \right| \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} -4 & -2 & 0 \\ -2-\frac{1}{2}(-4) & -1-\frac{1}{2}(-2) & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$-4x_1-2x_2=0$$

$$2x_1+x_2=0$$

базисное: x_1
свободное: x_2

$$x_2=t_2$$

$$2x_1+t_2=0$$

$$2x_1=-t_2$$

$$x_1=-\frac{t_2}{2}$$

$$X=\begin{pmatrix} -\frac{t_2}{2} \\ t_2 \end{pmatrix}$$

ФСР $t_2=2$ (можно брать любое число, не равное 0)

$$X_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Векторы, соответствующие ФСР образуют базис в новой системе координат, а их единичные векторы (орты) являются ортами осей Ox' и Oy'

$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ соответствует $\vec{x}_1 = \{2, 1\}$

$X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ соответствует $\vec{x}_2 = \{-1, 2\}$

Орты:

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{|\vec{x}_1|}\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\{2, 1\} = \left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{|\vec{x}_2|}\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\{-1, 2\} = \left\{-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$$

откуда, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (это координаты орта $\vec{e}_1$)

Теперь можно представить:

$$\vec{i}\,' = \vec{e}_1$$
$$\vec{j}\,' = \vec{e}_2$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$$

Подставим эти выражения в квадратичную форму

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 =$$

$$= 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)^2 - 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) +$$

$$+ 5\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right)^2 =$$

$$= 2\left(\frac{4}{5}x'^2 - \frac{4}{5}x'y' + \frac{1}{5}y'^2\right) -$$

$$-4\left(\frac{2}{5}x'^2-\frac{1}{5}x'y'+\frac{4}{5}x'y'-\frac{2}{5}y'^2\right)+$$

$$+5\left(\frac{1}{5}x'^2+\frac{4}{5}x'y'+\frac{4}{5}y'^2\right)=$$

$$=\frac{8}{5}x'^2-\frac{8}{5}x'y'+\frac{2}{5}y'^2-\frac{8}{5}x'^2+\frac{4}{5}x'y'-\frac{16}{5}x'y'+\frac{8}{5}y'^2+$$

$$+x'^2+4x'y'+4y'^2=$$

$$=x'^2+6y'^2$$

Так как $\lambda_1=1$, $\lambda_2=6$, то

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=$$

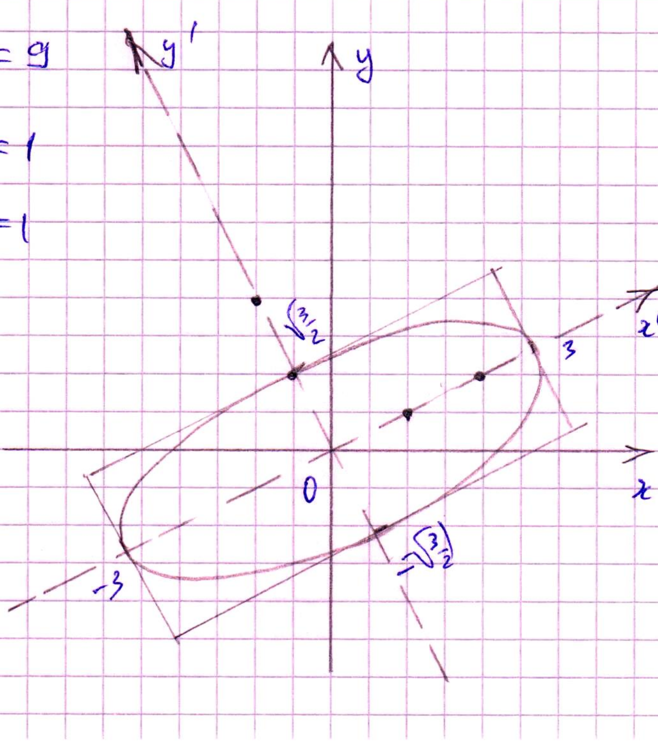
$$=\left|\begin{array}{l} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha \end{array}\right|=\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2$$

Уравнение в канонической системе координат

$$x'^2+6y'^2=9$$

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{6y'^2}{9}=1$$

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{\frac{3}{2}}=1$$



7. Полное уравнение второй степени (продолжение)

Составим определитель матрицы квадратичной формы

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

Это выражение является инвариантом, т.е. величиной, не изменяющейся при преобразовании координат.

Иными словами, уравнение сохраняет свой тип и в канонической, и в неканонической системах координат.

Тип уравнения, а соответственно и линии, определяется следующим образом:

а) $AC - B^2 > 0 \Rightarrow$ эллиптический тип

б) $AC - B^2 < 0 \Rightarrow$ гиперболический тип

в) $AC - B^2 = 0 \Rightarrow$ параболический тип

Частными случаями ($B=0$) определения могут являться соотношения для канонического уравнения

В полном уравнении квадратичная часть отвечает за поворот вокруг начала координат, а линейная часть — за параллельный перенос

Схема преобразования полного уравнения второй степени

1) Выделить квадратичную и линейную части
2) составить матрицу квадратичной формы и найти её собственные числа и собственные векторы.
3) По векторам ФСР найти новый базис $(\vec{i}', \vec{j}')$, $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, составить уравнения перехода от (x, y) к (x', y')
4) записать новую квадратичную часть в виде $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$
5) подставив выражения из пункта 3) в линейную часть, получить выражение линейной части через x' и y'
6) соединить новую квадратичную и новую линейную части в одном уравнении, и путём выделения полных квадратов по x' и y' привести уравнение к каноническому виду.